Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Уравнения математической физики»

Студентка:	А. А. Довженко
Преподаватель:	С. А. Колесник
Группа:	М8О-307Б
Вариант:	26
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2019

Содержание

1 Задача №1

Постановка задачи: Сформулировать и решить задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0; l]$ с начальным распределением $T_0 = 300(a^2 = 10^{-6})$ и наличием конвективного члена $\left(+b\dfrac{\partial u}{\partial x}, b = 10^{-6}\right)$, когда левый конец теплоизолирован, а на правом задана постоянная температура, равная 500. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики $u(x,t)$, $l = 0,1$м.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x, & x \in (0; l); t > 0 \\ u(x, 0) = T_0 = 300, & x \in (0; l); t = 0; \\ u_x(0, t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ u(l, t) = T_1 = 500, & x = l; t > 0; \end{cases} \tag{I}$$

Для решения задачи (I) необходимо избавиться от конвентивного члена bu_x. Для этого искомое решение $u(x,t)$ будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\mu t + \lambda x}$$

В дальнейшем вместо $e^{\mu t + \lambda x}$ будем писать E.

$$u_t = v_t E + \mu E v = E(v_t + \mu v)$$
$$u_x = v_x E + \lambda E v = E(v_x + \lambda v)$$
$$u_{xx} = (v_{xx} + \lambda v_x)E + \lambda E(v_x + \lambda v) = E(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v)$$

Подставляем u_t, u_x и u_{xx} в уравнение (1).

$$E(v_t + \mu v) = a^2 E(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) + bE(v_x + \lambda v)$$

$$a^2 v_{xx} - v_t + (2\lambda a^2 + b)v_x + (a^2\lambda^2 + b\lambda - \mu)v = 0$$

Теперь выберем λ и μ так, чтобы коэффициенты перед v_x и v стали равны 0.

$$\begin{cases} 2\lambda a^2 + b = 0, \\ a^2\lambda^2 + b\lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-b}{2a^2}, \\ \mu = a^2\lambda^2 + b\lambda = \dfrac{a^2 b^2}{4a^4} - \dfrac{b^2}{2a^2} = -\dfrac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

Сформулируем краевые и начальные условия:

$$u(x, 0) = v(x, 0)e^{\mu \cdot 0 + \lambda x} = v(x, 0)e^{\lambda x} = T_0 = 300$$

$$v(x,0) = T_0 e^{-\lambda x}$$
$$u_x(0,t) = e^{\mu t + \lambda \cdot 0}(v_x(0,t) + \lambda v(0,t)) = 0$$
$$v_x(0,t) + \lambda v(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = e^{\mu t + \lambda l} v(l,t) = T_1 = 500$$
$$v(l,t) = T_1 e^{\mu t - \lambda l}$$

Получаем начально-краевую задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{cases} a^2 v_{xx} = v_t, & x \in (0;l); t > 0 \\ v(x,0) = T_0 e^{-\lambda x}, & x \in (0;l); t = 0; \\ v_x(0,t) + \lambda v(0,t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ v(l,t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}, & x = l; t > 0; \end{cases} \qquad (II)$$

Будем искать $v(x,t)$ в виде

$$v(x,t) = \omega(x,t) + \nu_1(x,t) + \nu_2(x,t)$$

$$\begin{cases} \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(0,t) + \lambda \omega(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \end{cases} \qquad (III)$$

$$\begin{cases} a^2 \nu_{1xx} = \nu_{1t}, \\ \nu_1(x,0) = T_0 e^{\lambda x} - \omega(x,0), \\ \nu_{1x}(0,t) + \lambda \nu_1(0,t) = 0, \\ \nu_1(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (IV)$$

$$\begin{cases} \nu_{2t} = a^2 \nu_{2xx} - \omega_t, \\ \nu_{2t}(x,0) = 0, \\ \nu_{2x}(0,t) + \lambda \nu_2(0,t) = 0, \\ \nu_2(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (V)$$

Решаем систему III

$$\begin{cases} \omega_{xx} = 0, \\ \omega_x(0,t) + \lambda \omega(0,t) = 0, \\ \omega(l,t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \end{cases}$$

Будем искать $\omega(x,t)$ в виде

$$\omega(x,t) = c_1(t)x + c_2(t)$$

Подставляем в кравые условия

$$\omega_x(0,t) + \lambda\omega(0,t) = c_1(t) + \lambda c_2(t)$$

$$\omega(l,t) = c_1(t)l + c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$
$$-\lambda l c_2(t) + c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$
$$(1-\lambda l)c_2(t) = T_1 e^{-\mu t - \lambda l}$$
$$c_2(t) = \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l}$$

$$\Rightarrow c_1(t) = -\lambda c_2(t)$$
$$c_1(t) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l}$$

$$\omega(x,t) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l} x + \frac{T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l}$$

$$\omega(x,0) = -\lambda \frac{T_1 e^{-\lambda l}}{1-\lambda l} x + \frac{T_1 e^{-\lambda l}}{1-\lambda l}$$

$$\omega_t = \frac{\lambda \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l} x - \frac{\mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l}$$

Решим задачу IV. Запишем её в виде:

$$\begin{cases} \nu_{1t} = a^2 \nu_{1xx}, \\ \nu_1(x,0) = \varphi(x), \\ \nu_{1x}(0,t) + \lambda \nu_1(0,t) = 0, \\ \nu_1(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (VI)$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} \omega(x,0) = T_0 e^{-\lambda x} - \frac{T_1 e^{-\lambda l}(1-\lambda x)}{1-\lambda l}$$

Решение будем искать в виде

$$\nu_1(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим в уравнение (2)

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \alpha^2$$

Будем решать задачу Штурма — Лиувилля о нахождении собственных значений α_n и собственных функций $X_n(x)$.

$$\begin{cases} X''(x) - \alpha^2X(x) = 0, \\ X'(0) + \lambda X(0) = 0, \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

1) $\alpha^2 > 0$

$$X''(x) - \alpha^2X(x) = 0$$

$$X(x) = c_1e^{-\alpha x} + c_2e^{\alpha x}$$

$$X'(x) + \alpha X(x) = -c_1e^{-\alpha x}(\lambda + \alpha) + c_2e^{\alpha x}(\alpha - \lambda)$$

$$X'(x) = -\alpha c_1e^{-\alpha x} + \alpha c_2e^{\alpha x}$$

$$\begin{cases} -(\alpha + \lambda)c_1 + (\alpha - \lambda)c_2 = 0, \\ -\alpha e^{-\alpha x}c_1 + \alpha e^{\alpha x}c_2 = 0 \end{cases}$$

Определитель данной системы отличен от нуля

$$\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0 \Rightarrow X(0) \equiv 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0 \quad \text{не подходит}$$

2) $\alpha^2 = 0$

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_1 \Rightarrow X(x) = c_1x + c_2$$

$$X'(0) + \lambda X(0) = c_1 + \lambda c_2 = 0$$

$$X'(l) = l_1 = 0$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 0$$

Не подходит.

3) $\alpha^2 < 0$

$$X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$$
$$X(x) = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x$$
$$X'(0) + \lambda X(0) = \alpha c_1 + \lambda c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{\lambda}{\alpha} c_2$$
$$X(l) = c_1 \sin \alpha l + c_2 \cos \alpha l = 0$$
$$-\frac{\lambda}{\alpha} \sin \alpha l + \cos \alpha l = 0$$
$$-\frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha l + 1 = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha_n l = \frac{\alpha_n}{\lambda}$$

Трансцендетное уравнение решается численными методами.

$$X_n(x) = -\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x$$

Теперь решим уравнение.

$$T'(t) + \alpha^2 a^2 T(t) = 0$$

Его решением является

$$T_n(t) = c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

Получаем

$$\nu_{1n}(x,t) = X_n(x) T_n(t) = c_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

$$\nu_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{1n}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2 \alpha_n^2 t}$$

Определим константы c_n. Для этого разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

и подставим это в начальное условие:

$$\nu_1(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \Rightarrow c_n = \varphi_n$$

$$\nu_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x} \right) e^{-a^2 \alpha_n^2 t}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

Решим задачу V. Запишем задачу V в виде:

$$\begin{cases} \nu_{2t} = a^2 \nu_{2xx} + f(x,t), \\ \nu_{2t}(x,0) = 0, \\ \nu_{2x}(0,t) + \lambda \nu_2(0,t) = 0, \\ \nu_2(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (VII)$$

$$f(x,t) = -\omega_t = -\frac{\mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}(\lambda \alpha - 1)}{1 - \lambda l}$$

Переобозначим ν как μ. Решение будем искать в виде

$$\mu_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}(t) X_n(x)$$

Разложим $f(x,t)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x)$.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi$$

Подставим $\mu_2(x,t)$ и $f(x,t)$ в (3) и учтём, что

$$X_n''(x) = (-\lambda \cos \alpha_n x - \alpha_n \sin \alpha_n x)' = \lambda \alpha_n \sin \alpha_n x - \alpha_n^2 \cos \alpha_n x = -\alpha_n^2 X_n(x)$$

Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu'_{2n}(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}(t) X''_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\mu'_{2n}(t) + a^2 \alpha_n^2 \mu_{2n}(t) - f_n(t)\} X_n(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu'_{2n}(t) + a^2 \alpha_n^2 \mu_{2n}(t) - f_n(t) = 0$$

Решением этого ОДУ является функция

$$\mu_{2n}(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)} d\tau$$

Решением задачи V является:

$$\mu_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)} X_n(x)$$

Решение задачи II:

$$v(x,t) = \omega(x,t) + \nu_1(x,t) + \nu_2(x,t) =$$

$$= T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\frac{\lambda}{\alpha_n} \sin \alpha_n x + \cos \alpha_n x \right) e^{-a^2\alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)} X_n(x) d\tau$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l f(\xi,t) X_n(\xi) d\xi$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} - \omega(x,0) = T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l} \frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l}$$

$$f(x,t) = -\omega_t = \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l} \frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l}$$

Ответ:

$$v(x,t) = \omega(x,t) + \nu_1(x,t) + \nu_2(x,t) =$$

$$= T_1 e^{-\mu t - \lambda l}\frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(-\frac{\lambda}{\alpha_n}\sin\alpha_n x + \cos\alpha_n x\right)e^{-a^2\alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)}X_n(x)d\tau$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||X_n||^2}\int\limits_0^l \varphi(\xi)X_n(\xi)d\xi$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||X_n||^2}\int\limits_0^l f(\xi,t)X_n(\xi)d\xi$$

$$\varphi(x) = T_0 e^{-\lambda x} - \omega(x,0) = T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l}\frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l}$$

$$f(x,t) = -\omega_t = \mu T_1 e^{-\mu t - \lambda l}\frac{(1-\lambda x)}{1-\lambda l}$$

Решение задачи I. Решением задачи I является функция

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\mu t + \lambda x}$$

$$\mu = -\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\lambda = -\frac{b}{2a^2}$$

$$u(x,t) = v(x,t)e^{\mu t + \lambda x}$$

Проверка:

$$V(x,0) = T_0 e^{-\lambda x} = T_1 e^{-\lambda l}\frac{1-\lambda x}{1-\lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^0 d\tau X_n(x) =$$

$$= T_1 e^{-\lambda l}\frac{1-\lambda x}{1-\lambda l} + T_0 e^{-\lambda x} - T_1 e^{-\lambda l}\frac{1-\lambda x}{1-\lambda l} = T_0 e^{-\lambda x}$$

$$V_x(0,t) + \lambda V(0,t) = \frac{-\lambda T_1 e^{-\mu t - \lambda l}}{1-\lambda l} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X'(0)e^{-a^2\alpha_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(x)e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)}d\tau X_n'(0) +$$

$$+\frac{\lambda T_1 e^{-\mu t-\lambda l}}{1-\lambda l}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X'(0)e^{-a^2\alpha_n^2 t}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)}d\tau X(0)=0$$

$$X'(0)=(-\lambda\cos\alpha_n x-\alpha_n\sin\alpha_n x)_{x=0}=-\lambda$$

$$\Rightarrow v_x(0,t)+\lambda v(0,t)=0$$

$$v(l,t)=T_1 e^{-\mu t-\lambda l}=T_1 e^{-\mu t-\lambda l}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(l)e^{-a^2\alpha_n^2 t}+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-a^2\alpha_n^2(t-\tau)}X_n(l)$$

Из задачи Штурма — Лиувилля следует, что $X_n(l)=0$

$$\Rightarrow v(l,t)=T_1 e^{-\mu t-\lambda l}$$

2 Задача №2

Постановка задачи: Сформулировать и решить задачу о свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0; l]$, $l = 0,1$м, $a^2 = 10^6$ с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью $\varphi_2(x) = \sin \dfrac{\pi x}{l}$, когда левый конец зажат, а правый движется по закону $\mu_2 = 10^{-3}t$. Результаты $u(x,t)$ вывести графически.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}, & x \in [0;l]; t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in [0;l]; t = 0; \\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{l}, & x \in [0;l]; t = 0; \\ u(0,t) = 0, & x = 0; t > 0; \\ u(l,t) = \mu_2(t) = 10^{-3}t, & x = l; t > 0. \end{cases}$$

Решим задачу методом редукции:

$$u = u_1 + u_2$$

$$\begin{cases} u_{1tt} + u_{2tt} = a^2(u_{1xx} + u_{2xx}) \\ u_1(x,0) + u_2(x,0) = 0 \\ u_{1t}(x,0) + u_{2t}(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{l} \\ u_1(0,t) + u_2(0,t) = 0 \\ u_1(l,t) + u_2(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Решим относительно u_1:

$$\begin{cases} u_{1tt} = 0 \\ u_1(0,t) = 0 \\ u_1(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$u_1 = c_1 x + c_2$$

$$u_1(0,t) = c_2 = 0 \Rightarrow u_1(l,t) = c_1 l = \mu_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\mu_2}{l}$$

$$u_1(x,t) = \frac{\mu_2}{l} x = \frac{10^{-3}}{l} x \Rightarrow u_1(x,0) = 0$$

$$u_{1t} = \frac{10^{-3}}{l} x$$

$$u_{1tt} = 0$$

Решим относительно u_2:

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} \\ u_2(x,0) = -u_1(x,0) = 0 \\ u_{2t}(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l} - \dfrac{10^{-3}x}{l} = \varphi(x) \\ u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Решим данную задачу методом разделения переменных:

$$u_2(x,t) = XT \qquad (1)$$

Заметим, что это задача о свободных колебаниях конечного стержня с ненулевой начальной скоростью, когда концы жёстко зажаты.
Подставим (1) в систему (I):

$$\begin{cases} XT'' = a^2 X'' T \\ X(x)T(0) = 0 \\ X(x)T'(t) = \varphi(x) \\ X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \quad (2) \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Из теории известно, что $\lambda^2 < 0$ и $T(t) \neq 0$, иначе задача бы имела одно тривиальное решение.
Сформулируем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$$

Подставим краевые условия и решим полученную задачу Штурма — Лиувилля:

$$X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0$$

$$X(l) = c_2 \sin \lambda l = 0 \Rightarrow c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi k}{l}$$

λ_k — собственные значения,
$\sin \dfrac{\pi k}{l} x$ — собственные функции,
$X_k(x) = c_k \sin \dfrac{\pi k}{l} x$
Решим (2):

$$T'' + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T = 0 \Rightarrow T_n = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t$$

$$u_2(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^* \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n^* \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Найдём A_n^* и B_n^* из начальных условий:

$$u_{2t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{a\pi n}{l} A_n^* \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{a\pi n}{l} B_n^* \cos \frac{a\pi n}{l} t \right] \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_2(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{\pi n}{l} x = 0 \Rightarrow A_n^* = 0$$

$$u_{2t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n^* \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\Rightarrow B_n^* = \frac{l}{a\pi n} \varphi_n(x) = \frac{l}{a\pi n} \frac{2}{l} = \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{a\pi n} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$$

Подставим полученные значения:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1(x,t) = \frac{t}{10^3 l} x$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{l} \int\limits_0^l \frac{2}{a\pi n} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Ответ:

$$u = \frac{t}{10^3 l} x + \sum_{n=1}^{l} \int\limits_0^l \frac{2}{a\pi n} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{a\pi n}{l} t \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{l}x - \frac{x}{l10^3}$$

Проверка:

$$u_t(x,t) = u_{1t} + u_{2t} = \frac{x}{l10^3} + \sum_{n=1}^{l}\int\limits_0^l \frac{2}{a\pi n}\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \cos\frac{a\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \varphi_n(x) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi = \frac{x}{10^3 l} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\cos\frac{a\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x$$

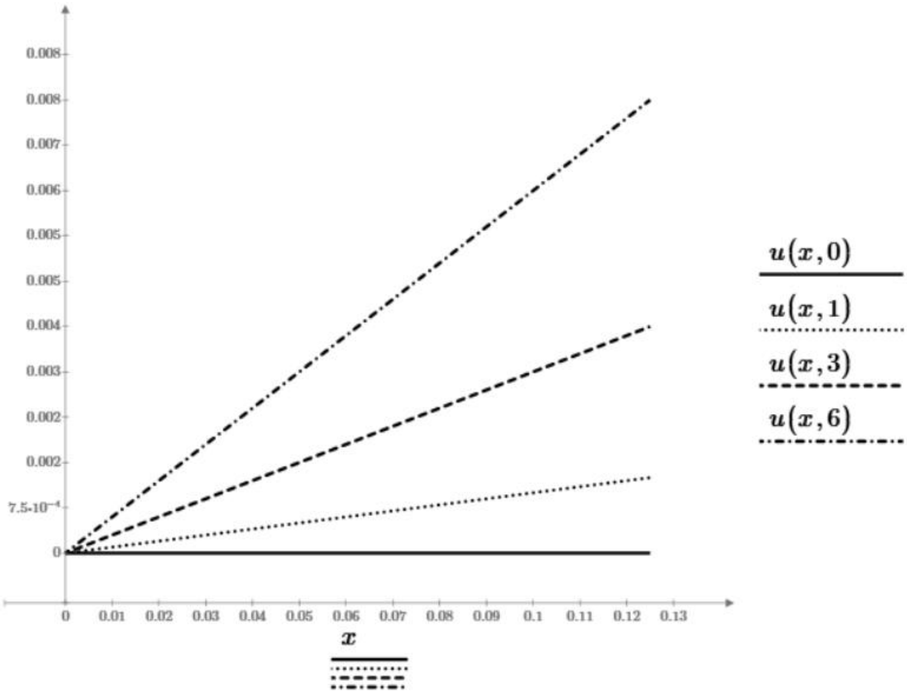
$$u(x,0) = 0 + \int\limits_0^l \sum_{n=1}^{l} \cdot \ldots = 0$$

$$u_t(x,0) = \frac{x}{10^3 l} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\sin\frac{\pi n}{l}x = \frac{x}{10^3 l} + \varphi x = \frac{x}{10^3 l} + \sin\frac{\pi}{l}x - \frac{x}{10^3 l = \sin\frac{\pi}{l}x}$$

$$u(0,t) = 0 + \int\limits_0^l \sum_{n=1}^{l} \cdot \ldots = 0$$

$$u(l,t) = \frac{t}{10^3 l}l + \int\limits_0^l \sum_{n=1}^{l}\sin\pi n \cdot \ldots = 10^{-3}t$$

График:



0.008
0.008
0.007
0.006
0.005
0.005
0.004
0.003
0.002
0.002
7.5·10^-4
0
0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1 0.11 0.12 0.13
x
$u(x,0)$
$u(x,1)$
$u(x,3)$
$u(x,6)$

3 Задача №3

Постановка задачи: Сформулировать и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда заданы граничные условия $u(0,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, $u(l_1,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, а на остальных границах — нулевые значения.

Решение: Сформулируем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in (0;l_1), y \in (0,l_2) \\ u(0,y) = \sin\frac{\pi y}{l_2}, & y \in [0;l_2]; \\ u(l_1,y) = \sin\frac{\pi y}{l_2}, & y \in [0;l_2]; \\ u(x,0) = 0, & x \in [0;l_1]; \\ u(x,l_2) = 0, & x \in [0;l_1]. \end{cases}$$

$$u = u(x,y)$$

Решение будем искать в виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n^{(r)}, \text{где } u_n^{(r)} = X_n(x)Y_n(y)$$

Тогда:

$$X''y + Y''X = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda_n$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda_n Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(l_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow Y_n(y) = A\sin\frac{\pi n y}{l_2}, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2, n = 1, 2, \ldots$$

$$X'' - \lambda_n X = 0$$

$$X(x) = \tilde{A}e^{-\sqrt{\lambda_n}x} + \tilde{B}e^{\sqrt{\lambda_n}x}$$

Выберем другую ФСР в виде:

$$X(x) = \{\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}x}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}l_1}, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(l_1 - x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}l_1}\}$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n y}{l_2}\left(\tilde{\tilde{A}}_n\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n x}{l_2}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n l_1}{l_2}}+\tilde{\tilde{B}}_n\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n(l_1-x)}{l_2}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n l_1}{l_2}}\right)$$

При $x=0$:

$$\sin\frac{\pi y}{l_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\tilde{B}}_n\sin\frac{\pi n y}{l_2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{B}}_n=0,\forall n\neq 1,\tilde{\tilde{B}}_1=1$$

При $x=l_1$:

$$\sin\frac{\pi y}{l_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\tilde{A}}_n\sin\frac{\pi n y}{l_2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{A}}_n=0,\forall n\neq 1,\tilde{\tilde{B}}_1=1$$

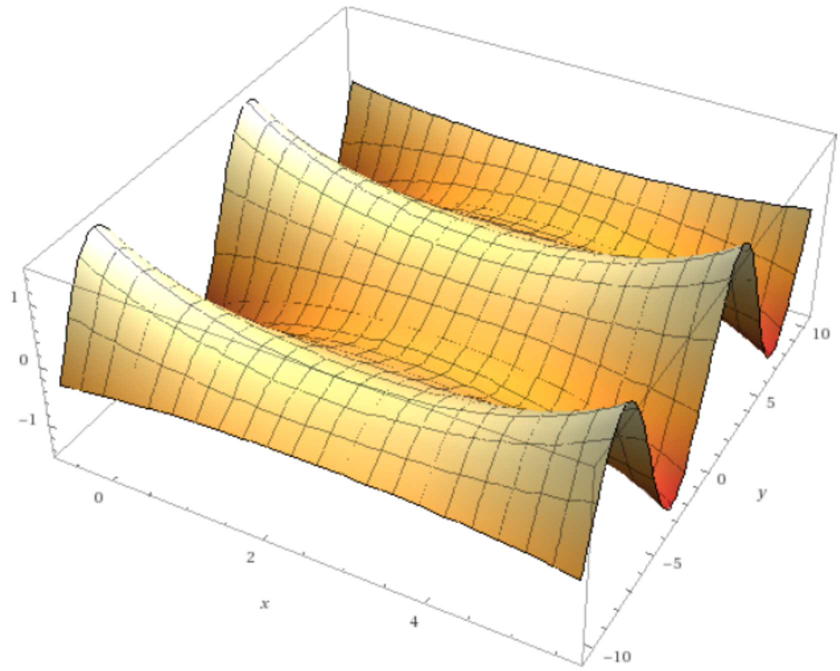
Тогда:

$$u(x,y)=\sin\frac{\pi y}{l_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi l_1}{l_2}}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\pi x}{l_2}+\operatorname{sh}\frac{\pi(l_1-x)}{l_2}\right)$$

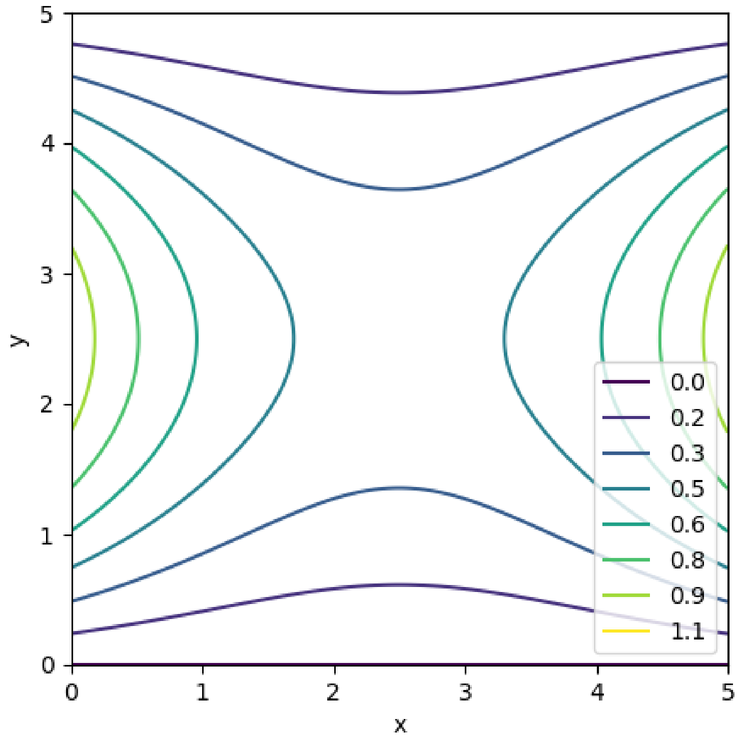
Ответ:

$$u(x,y)=\sin\frac{\pi y}{l_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi l_1}{l_2}}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\pi x}{l_2}+\operatorname{sh}\frac{\pi(l_1-x)}{l_2}\right)$$

График:



1
0
−1
0
2
x
4
10
5
0
y
−5
−10



5
4
3
2
1
0
y
0
1
2
3
4
5
x
0.0
0.2
0.3
0.5
0.6
0.8
0.9
1.1

Список литературы

[1] Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Изд. 5, стереотипное.* — М.: «Наука», 1977.

[2] Будак Б. М, Тихонов А. Н, Самарский А. А. *Сборник задач по математической физике.* — М.: «Наука», 1980.

[3] Боголюбов А. Н, Кравцов В. В. *Задачи по математической физике* — М.: «Издательство Московского университета», 1998.