Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на области G_i, $i = 1, 2, \dots, k$, указанного в условиях теоремы вида. В силу доказанного для каждого $i = 1, 2, \dots, k$

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy.$$

Сложим эти равенства:

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy. \tag{47.17}$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.5)

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ γ_i областей G_i, т. е. таким частям кривых γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i = 1, 2, \dots, k$ и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих частей кривых γ_i противоположны (рис. 150). В силу изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.17) останутся только интегралы по положению ориентированным частям границы γ области G, дающие в сумме $\int\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy. \tag{47.18}$$

Из формул (47.17) и (47.18) и следует формула (47.12) в общем случае.

Теорема доказана.

Пусть G — ограниченная область плоскости E^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $E^2 \diagdown \overline{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно границей ограниченной области, лежащей в $E^2 \diagdown \overline{G}$, то — *внутренним*. Так, на рис. 151 контур γ_e внешний, а контуры γ_{i1} и γ_{i2} внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура γ_e и внутренних контуров $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обоих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами, то справедлива формула

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\gamma_e^+} Pdx + Qdy + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_{ij}^-} Pdx + Qdy. \tag{47.19}$$

Рис. 150

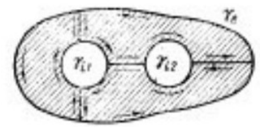

Рис. 151

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и формула (47.12), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), остаются криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (рис. 151).

Отметим еще, что в формуле (47.19) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 7. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, оринтированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается также ∂G (соответственно $-\partial G$).*

Формулу Грина можно распространить и на еще более широкий класс областей. Для этого заметим, что в силу доказанного формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница ко-