数值与符号计算 实验(丑)

北京邮电大学软件学院

线性代数方程组求解

用 C/C++ 语言实现如下函数:

1. `bool lu(double* a, int* pivot, int n);` 矩阵的 LU 分解.

   假设数组 $a_{n\times n}$ 在内存中按行优先次序存放. 此函数使用高斯列选主元消去法将其就地进行 LU 分解. pivot 为输出参数. pivot[0, n) 中存放主元的位置排列.

   函数成功时返回 false, 否则返回 true.

2. `bool guass(double const* lu, int const* p, double* b, int n);` 求线代数方程组的解.

   假设矩阵 $lu_{n\times n}$ 为某个矩阵 $a_{n\times n}$ 的 LU 分解, 在内存中按行优先次序存放. p[0,n) 为 LU 分解的主元排列. b 为方程组 $Ax = b$ 的右端向量.

   此函数计算方程组 $Ax = b$ 的解, 并且将结果存放在数组 b[0,n) 中.

   函数成功时返回 false. 否则返回 true.

3. `void qr(double* a, double* d, int n);` 矩阵的 QR 分解.

   假设数组 $a_{n\times n}$ 在内存中按行优先次序存放. 此函数使用 Householder 变换将其就地进行 QR 分解.

   d 为输出参数. d[0, n) 存放 QR 分解的上三角矩阵对角线元素.

4. `bool hshld(double const*qr, double const*d, double*b, int n);` 求线代数方程组的解.

   假设矩阵 $qr_{n\times n}$ 为某个矩阵 $a_{n\times n}$ 的 QR 分解, 在内存中按行优先次序存放. d[0,n) 为其 QR 分解上三角矩阵的对角线元素. b 为方程组 $Ax = b$ 的右端向量.

   函数计算方程组 $Ax = b$ 的解, 并且将结果存放在数组 b[0,n) 中.

   函数成功时返回 false, 否则返回 true.

使用上面的函数求解下面几个问题. 请撰写详细的实验报告. 不必修改上面四个函数的界面.

1. Hilbert 矩阵在第 j 行, 第 k 列处的值为

$$H_{jk} = \frac{1}{j+k-1}$$

求解 n 阶 Hilbert 方阵的线代数方程组

$$H_n x = b$$

适当设置 b 的值使得其理论解为 $x = (1, 1, \cdots, 1)$. 例如 6 阶 Hilbert 方阵的线代数方程组为:

$$H_6 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

用列选主元 Gauss 消去法和 Householder 变换方法分别对 $n = 10, 20, 30$ 求解. 给出数值解与理论解之差的二范数.

2. 令 $n \times n$ 矩阵

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & \cdots & & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

令 n 维向量

$$b_n = (2, 1, 0, -1, -2, \cdots, 5-n, 4-n, 2-n)^T$$

用两种方法对 $n = 50, 100, 150$ 求解下面线代数方程

$$G_n x = b_n$$

注意上面方程的理论解为 $x = (1, 1, \cdots, 1, 1)^T$. 给出数值解与理论解之差的二范数.

再令
$$b'_n = (2,3,4,\cdots,n,n)^T$$
用列选主元 Gauss 消去法和 Householder 变换方法两种方法对 $n = 50, 100, 150$ 求解下面线代数方程
$$G_n x = b'_n$$
给出数值解的残量的二范数.