Week2

201300069 邓嘉宏

1.10

令事件 A_i 表示第 i 次取出的是正品.

i)

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{4 \times 3}{16 \times 15} = \frac{1}{20}$$

ii)

$$P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = \frac{12 \times 4 + 4 \times 12}{16 \times 15} = \frac{2}{5}$$

iii)

$$P(A_1A_2 \cup \overline{A_1}A_2) = \frac{12 \times 11 + 4 \times 12}{16 \times 15} = \frac{3}{4}$$

1.11

令事件 A 表示两女生间恰有 k 个男生.

$$P(A) = \frac{n! \times (n+1-k) \times 2}{(n+2)!} = \frac{2 \times (n+1-k)}{(n+2)(n+1)}$$

1.12

令事件 A 表示: 排成一列, 任意两女生不相邻;
令事件 B 表示: 排成圆环, 任意两女生不相邻.

$$P(A) = \frac{n! \times (n+1)_m}{(n+m)!}$$

$$P(B) = \frac{(n! \times (n+1)_m - (m)_2 \times (n-1)_{m-2}) \div (n+m)}{(n+m-1)!}$$

1.13

令事件 A_i 表示第 i 次取出红球.

case1: m只不同的白球, n只不同的红球.

$$P(A_k) = \frac{n \times (m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}$$

case2: m只不同的白球, n只相同的红球.

$$P(A_k) = \frac{\binom{n+m-1}{n-1} \times m!}{\binom{n+m}{n} \times m!} = \frac{n}{m+n}$$

case3: m只相同的白球, n只不同的红球.

$$P(A_k) = \frac{n \times \binom{m+n-1}{m} \times (n-1)!}{\binom{m+n}{m} \times n!} = \frac{n}{m+n}$$

case4: m只相同的白球, n只相同的红球.

$$P(A_k) = \frac{\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n}$$

1.14

令事件 A_i 表示杯子中球的最大个数为 i.

$$P(A_1) = \frac{(4)_3}{4^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{3}{1} \times (2)_2 \times \binom{4}{2}}{4^3} = \frac{3}{4}$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{4}{1}}{4^3} = \frac{1}{16}$$

1.15

令事件 A 表示: 无放回取球, 第i个人取出红球.

令事件 B 表示: 有放回取球, 第i个人取出红球.

$$P(A) = \frac{b \times (a+b-1)_{k-1}}{(a+b)_k} = \frac{b}{a+b}$$

$$P(B) = \frac{b \times (a+b)^{k-1}}{(a+b)^k} = \frac{b}{a+b}$$

1.16

令 A_i 表示第 i 对夫妻相邻.

令 B 表示任意一对夫妻不相邻.

$$\because P(\bigcup_{I=1}^{n} A_i) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} P(A_{i_1} \cdots A_{i_r})$$

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\frac{2n\times(2n-2)\times 2\times\binom{n-2}{r}\times 2^r\times(2n-r-2)!+r\times 2\times\binom{n-1}{r-1}\times 2^{r-1}\times(2n-r-1)!}{(2n)!}$$
$$=\frac{2^{r+3}\times(n-1)\times\binom{n-2}{r}\times(2n-r-2)!+2^r\times r\times\binom{n-1}{r-1}\times(2n-r-1)!}{(2n)!}$$

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})$$
$$=\binom{n}{r}\times\frac{2^{r+3}\times(n-1)\times\binom{n-2}{r}\times(2n-r-2)!+2^r\times r\times\binom{n-1}{r-1}\times(2n-r-1)!}{(2n)!}$$

$$P(B)$$
$$=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=1-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\times\frac{2^{r+3}\times(n-1)\times\binom{n-2}{r}\times(2n-r-2)!+2^r\times r\times\binom{n-1}{r-1}\times(2n-r-1)!}{(2n)!}$$

1.17

$$A=\{(x,y)|xy<\frac{1}{4},0\le x,y\le 1\}$$
$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}}{1}=\frac{1+\ln 4}{4}$$

1.18

```
count=0
num=100000000
for i=1 to num
    a=random(0,1)
    b=random(0,1)
    c=random(0,1)
    d=random(0,1)
    if (a*a+sin(b)+a*exp(c))<=d
        count+=1

return count/num
```

$$P=0.09436$$

1.19

$$\binom{9}{3,4,2}=\frac{9!}{3!\times 4!\times 2!}=1260(种)$$

1.20

(1)

对于 $\binom{n+1}{r}$, 针对最后一个元素 n+1 考虑两种情况 :

case1: n+1 不被选出, 则此时$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}$

case2: n+1 已被选出, 则此时$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}$

$\therefore\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$.

(2)

$\binom{m+n}{r}$意为从$m+n$个元素中取出r个元素.相当于从m个元素中取出$i(0\leq i\leq r)$个元素,再从n个元素取出$r-i$个元素.

$\therefore\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$

(3)

在 (2) 中, 令 m=n, n=n, 即可证(3).

1.21

(1)

无放回: $(m)_r$

有放回: m^r

(2)

无放回: $\binom{m}{r}$

有放回: $\binom{r+m-1}{m-1}$

1.22

非负整数解:

令$x_{k+1}=n-x_1-x_2-\cdots-x_k\geq 0, x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$的非负整数解个数相当于,$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$的非负整数解的个数,为$\binom{n+k}{k}$

正整数解:

令$y_i=x_i-1$,即求$y_1+y_2+\cdots+y_k\leq n-k$的非负整数解个数,为$\binom{n}{k}$

1.23

即求$x_1+x_2+\cdots+x_k\le n-1$的非负整数解个数和正整数解个数.

非负整数解:

$$\binom{n-1+k}{k}$$

正整数解: $\binom{n-1}{k}$

1.24

运用数学归纳法.

对n归纳:

Basis: 当$n=1$时, $k=1, S(n,k)=1=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$

I.H.: 假设当$n=j-1, k\le n$, 原式成立.

I.S.:

$$\begin{aligned}
\text{当} n=j, k\le n, S(j,k) &= kS(j-1,k)+S(j-1,k-1)\\
&= k\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{j-1}+\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(k-1-i)^{j-1}\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^{j}
\end{aligned}$$

对k归纳:

Basis: 当$n=1$时, $k=1, S(n,k)=1=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$

I.H.: 假设当$k=l-1$, 原式成立.

I.S.:

$$\begin{aligned}
\text{当} k=l, S(n,l) &= lS(n-1,l)+S(n-1,l-1)\\
&= l\cdot\frac{1}{l!}\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}(l-i)^{n-1}+\frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\binom{l-1}{i}(l-1-i)^{n-1}\\
&= \frac{1}{l!}\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\binom{l}{i}(l-i)^{n}
\end{aligned}$$

根据数学归纳法, 原命题得证.