第二周作业

1.10

i)

$P(\text{两件均是次品}) = \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$

ii)

$P(\text{一件正品和一件次品}) = \frac{12}{16} \times \frac{4}{15} + \frac{4}{16} \times \frac{12}{15} = \frac{2}{5}$

iii)

$P(\text{第二次取出正品}) = \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} + \frac{4}{16} \times \frac{12}{15} = \frac{3}{4}$

1.11

$P(\text{两女生间恰有}k\text{个男生}) = \frac{2(n)_k(n-k+1)!}{(n+2)!} = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)}$

1.12

$P(\text{一列中任意两女生不相邻}) = \frac{n!(n+1)_m}{(n+m)!} = \frac{n!(n+1)!}{m!(n+m)!}$

$P(\text{圆环中任意两女生不相邻}) = \frac{n!((n+1)_m-(m)_2(n-1)_{m-2})/(n+m)}{(n+m)!/(n+m)} = \frac{n!((n+1)_m-(m)_2(n-1)_{m-2})}{(n+m)!}$

1.13

白球	红球	概率
不同	不同	$P = \frac{n(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}$
相同	不同	$P = \frac{n(m+n-1)!/m!}{(m+n)!/m!} = \frac{n}{m+n}$
不同	相同	$P = \frac{n(m+n-1)!/n!}{(m+n)!/n!} = \frac{n}{m+n}$
相同	相同	$P = \frac{n(m+n-1)!/(n!m!)}{(m+n)!/(n!m!)} = \frac{n}{m+n}$

1.14

$P(\text{最大个数为}1) = \frac{4!}{4^3} = \frac{3}{8}$

$P(\text{最大个数为}2) = 3 \times \frac{4\times3}{4^3} = \frac{9}{16}$

$P(\text{最大个数为}3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$

1.15

$P(\text{无放回}) = \frac{b(a+b-1)_{i-1}}{(a+b)_i} = \frac{b(a+b-1)!(a+b-i)!}{(a+b)!(a+b-i)!} = \frac{b}{a+b}$

$P(\text{有放回}) = \frac{b}{a+b}$

1.16

$P(\text{任意一对夫妻不相邻}) = \frac{}{(2n-1)!}$

1.17

作图并用面积表示概率可知，$P = \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} ln\ x|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{4}(1 + 2ln\ 2)$

1.18

Pseudocode:
$k \leftarrow 0$
$ans \leftarrow 0$
while $k \leq 10^9$ **do**
$a \leftarrow random(0,1),\ b \leftarrow random(0,1),\ c \leftarrow random(0,1),\ d \leftarrow random(0,1)$
if $(a^2 + sin(b) + a \cdot e^c \leq d)$ **then**
$ans \leftarrow ans + 1$
$k \leftarrow k + 1$
output (ans/k)

$P = 0.09438$

1.19

$C = \binom{9}{3} \times \binom{6}{4} = 1260$

1.20

1)

$\binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} + \frac{n!r}{r!(n-r+1)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$

2)

从$m+n$个物品中取出r个物品的不同组合，等价于从前m个物品中取出i个物品、并从后n个物品中取出$r-i$个物品的组合的总和，其中$i=1,2,\cdots,r$，因此$\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$

3)

同上，令$r=m=n$，则$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$

1.21

	排列	组合
无放回	$(m)_r=\frac{m!}{(m-r)!}$	$\binom{m}{r}=\frac{m!}{r!(m-r)!}$
有放回	m^r	$\binom{r+m-1}{m-1}=\frac{(r+m-1)!}{r!(m-1)!}$

1.22

令$x_{k+1}=n-x_k-\cdots-x_2-x_1\geq 0$，则$x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$的非负整数解的个数等价于$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n$的非负整数解的个数，即为$\binom{n+k}{k}$

令$y_i=x_i-1\geq 0$，则$x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$的正整数解的个数即为$y_1+y_2+\cdots+y_k\leq n-k$的非负整数解的个数，同理可得答案为$\binom{n}{k}$

1.23

由于$x_1,x_2,\cdots,x_k,n$为整数，则$x_1+x_2+\cdots+x_k<n$的正整数解、非负整数解等价于$x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n-1$的正整数解、非负整数解，则同上题可得方程的非负整数解个数为$\binom{n+k-1}{k}$，正整数解的个数为$\binom{n-1}{k}$

1.24

$k!S(n,k)$表示将n个不同的球放到k个不同的箱子里，且每个箱子里至少有一个球的方案数。采取另一种计算方法，首先考虑将n个球任意放到k个箱子中，共有k^n种方案，而这样会多算上有一个箱子为空的情况，因此要减去$\binom{k}{1}(k-1)^n$种方案，但这又会多减去有两个箱子为空的情况，因此要再加上$\binom{k}{2}(k-2)^n$种方案$\cdots\cdots$以此类推，最后可以得到总方案数为

$k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}+0=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$，因此

$k!S(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$，即$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$，证毕。