

抛体运动

邓佳维 2013301020122 物基二班

一，摘要

关于抛体运动，我们知道在相同初速度的情况，并且不考虑空气阻力时，不同的发射角度会有不同的水平射程，本文研究了无阻力、有阻力情况和空气阻力随物理高度变化即空气密度变化时水平射程和发射角度的关系；本文虽然炮弹飞行高度很高，但是仍忽略柯氏力的影响。最后研究了辅助精确打击系统，即给定空中一高度点，在一定发射速度下精确打击的最小发射角。

二，无空气阻力

$$g = 9.8m/s^2 \qquad v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = v_0 \sin\theta$$

$$v_y = g * t \qquad x = v_x * 2t$$

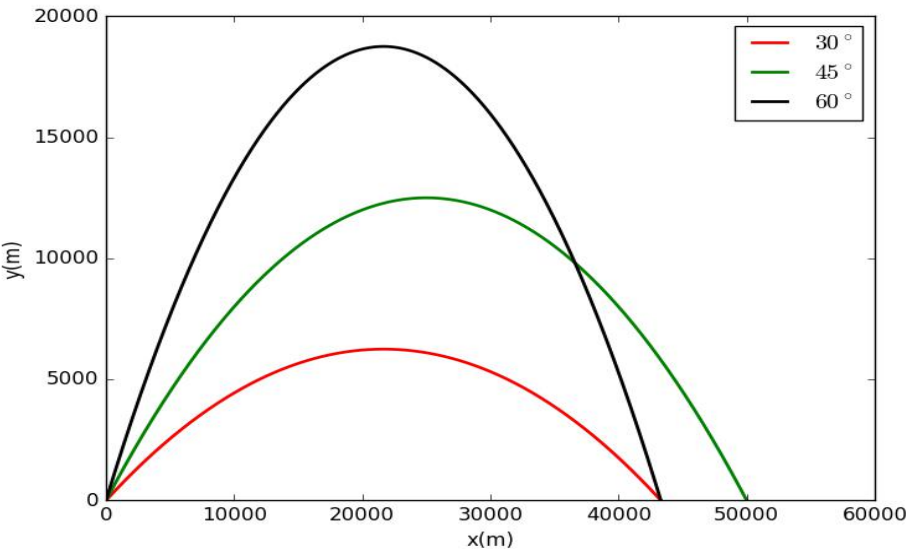
$$x = \frac{(v_0)^2 * \sin 2\theta}{g}$$

带入计算得：

通过上式可得在时，在时，水平射程最大值

无阻力时,画出发射角度为 30°，45°，60°情况：

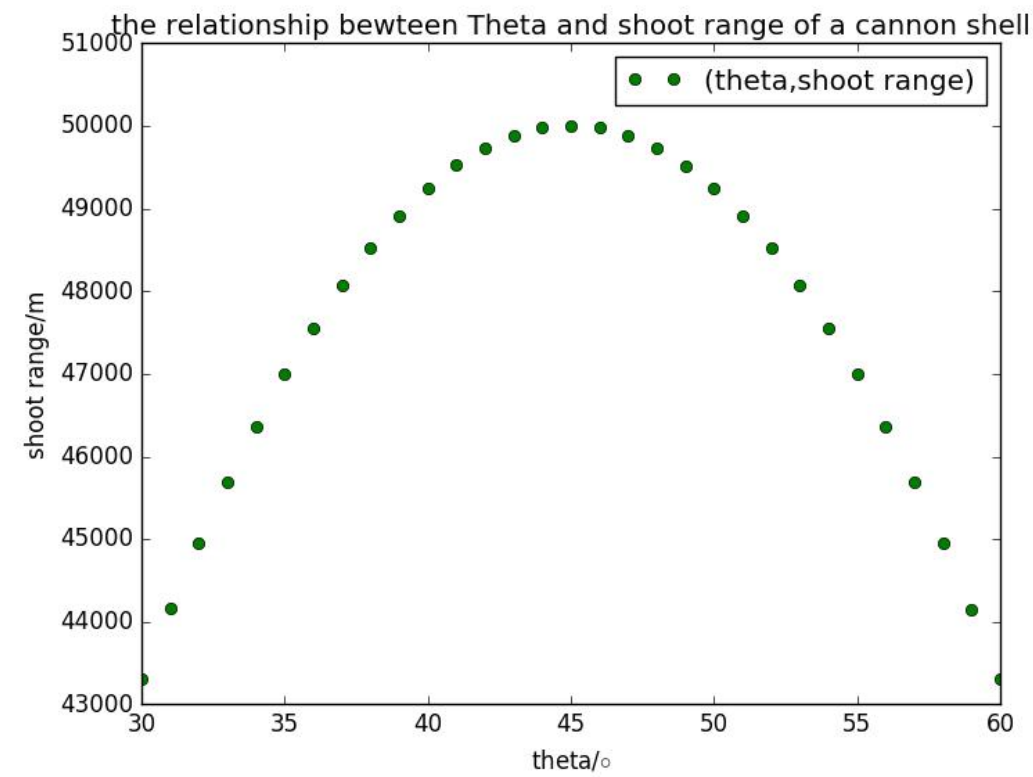
通过数值计算给出的结果如下面的图所示：



依次得出射程为:

角度 (°)	30	45	60
数值解射程	43308.2	50007	43305.5
解析解	$25000\sqrt{3}$	$50000\sqrt{3}$	$25000\sqrt{3}$
相对误差	0.014%	0.014%	0.013%

由表可见，误差特别小，解析解和数值解很好的吻合。并且在 $30-60^\circ$ 之间以 1° 为间隔扫描，得到发射角度和水平射程的距离之间关系如图



在误差为 $\pm 1^\circ$ 的范围内可以确定最大发射角为 45°

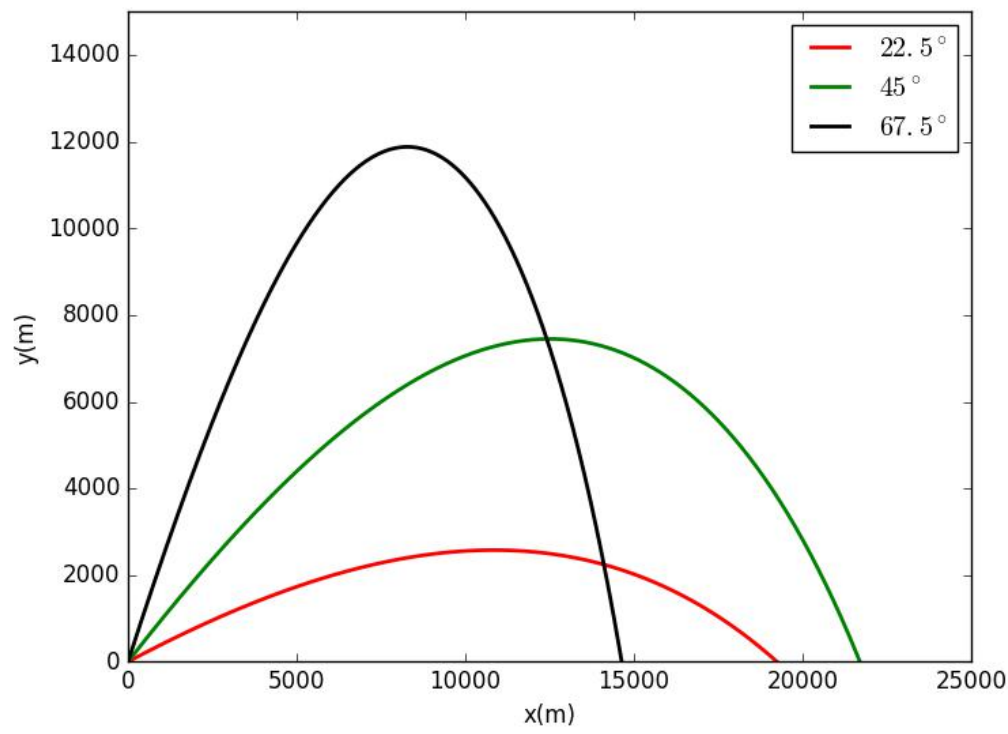
三，有空气阻力但是空气密度无变化

假设空气阻力 $F_{drag} = -B_2 v^2$

取 $\frac{B_2}{m} = 4 * 10^{-5} m^{-1}, v_0 = 700 m/s, g = 9.8 m/s^2$

经验分析有最大射程应该不会偏离 45° 太远，所以在 45° 左右用二分法试探，代码戳[链接](#)，轨迹如

图所示



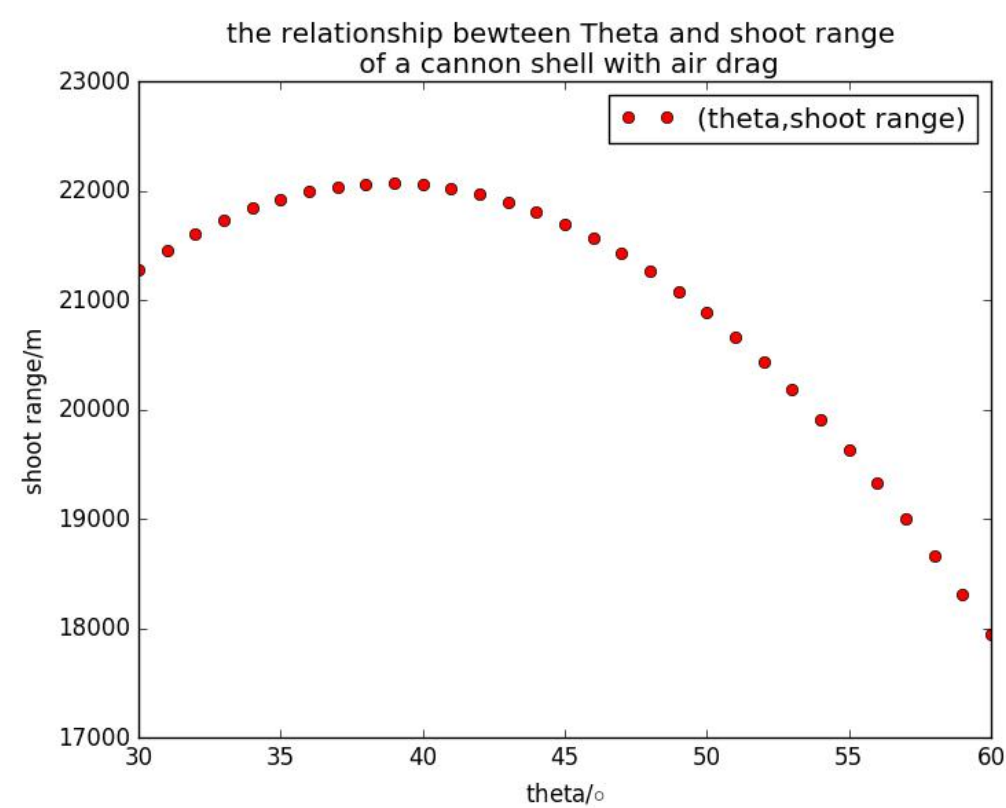
取特殊值时结果见下表

角度（°）	30	45	60
有阻力且空气密度不变	21286.5	21701.4	17943.8
无阻力	43308.2	50007	43305.5
比值	0.49	0.43	0.41

对比数值推断可知，空气阻力对水平射程的影响很大；最大发射角在 45° 附近。

然后可以用扫描角度的方法在 30° - 60° 之间找一定速度情况下，使水平射程最远的抛射角度；

扫描后图像为：



由图可以看出最大发射角大致在 39° 左右。

四，有空气阻力并且空气密度变化等温近似

在等温近似下，压强和高度关系表达式为： $p(y) = p(0)e^{\frac{-mgy}{k_B T}}$ $\rho = \rho_0 e^{\frac{-y}{y_0}}$ 其

中分别为海平面的气压和空气密度， $y_0 = \frac{k_B T}{mg} \approx 1.0 \times 10^4 m$

所以空气阻力可以表示为 $F_{drag} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{drag}$

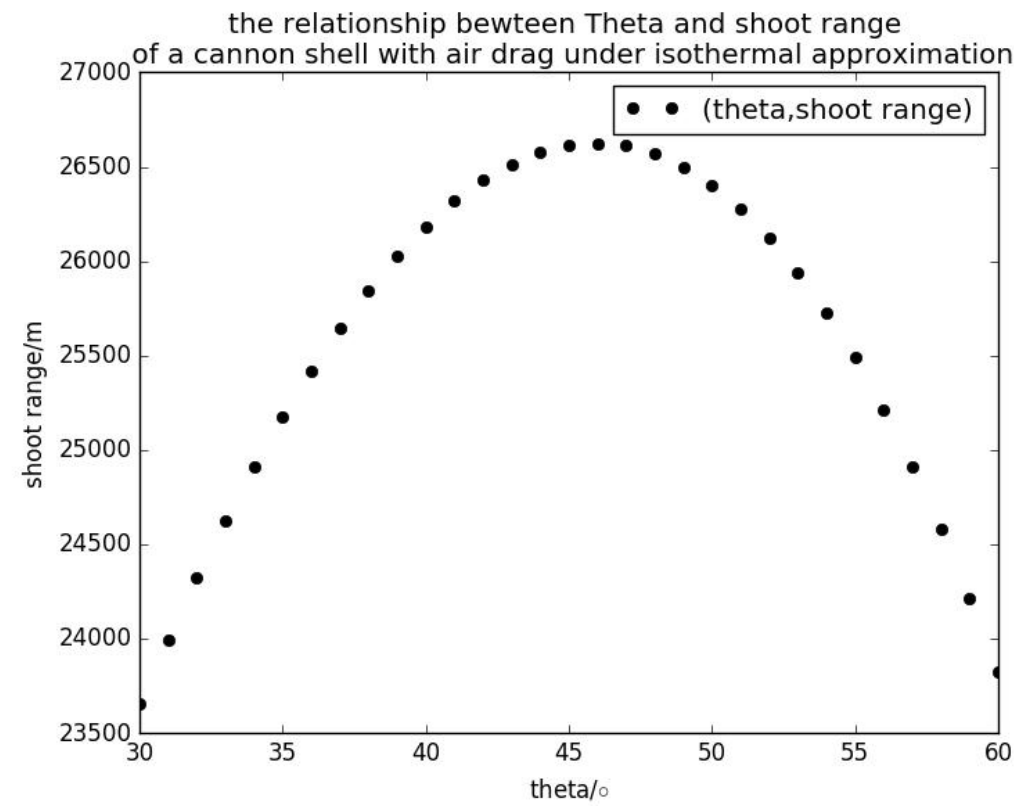
此时带入公式并修改上面代码计算特殊角度的结果如下：

角度（°）	30	45	60
等温近似	23653. 5	26612. 2	23822. 3

由数据可以看出：；最大发射角在 45° 附近。

然后用扫描角度的方法在 $30-59^\circ$ 之间找一定速度情况下，使水平射程最远的抛射角度；代码，

扫描后图像为：



由图可以看出最大发射角大致在 46° 左右，并且从运行代码所得数据最大发射距离约为

26624.4m。

四，有空气阻力并且空气密度变化绝热近似

我们知道，温度随着高度上升逐渐下降，所以等温近似并不符合现实情况，因为 空气热导率并不高，气流对流也较慢，所以绝热近似是一个很好的选择。通过查阅资料可以得到，在绝热近似下，空气

密度随高度变化为：

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{ay}{T_0}\right)^\alpha$$

(其中, $a \approx 6.5 \times 10^{-3} K/m$ T_0 是海平面温度, 单位为 K, 对于空气来说, 常数 $\alpha \approx 2.5$ 。

$$F_{drag} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{drag}$$

所以空气阻力可以表示为

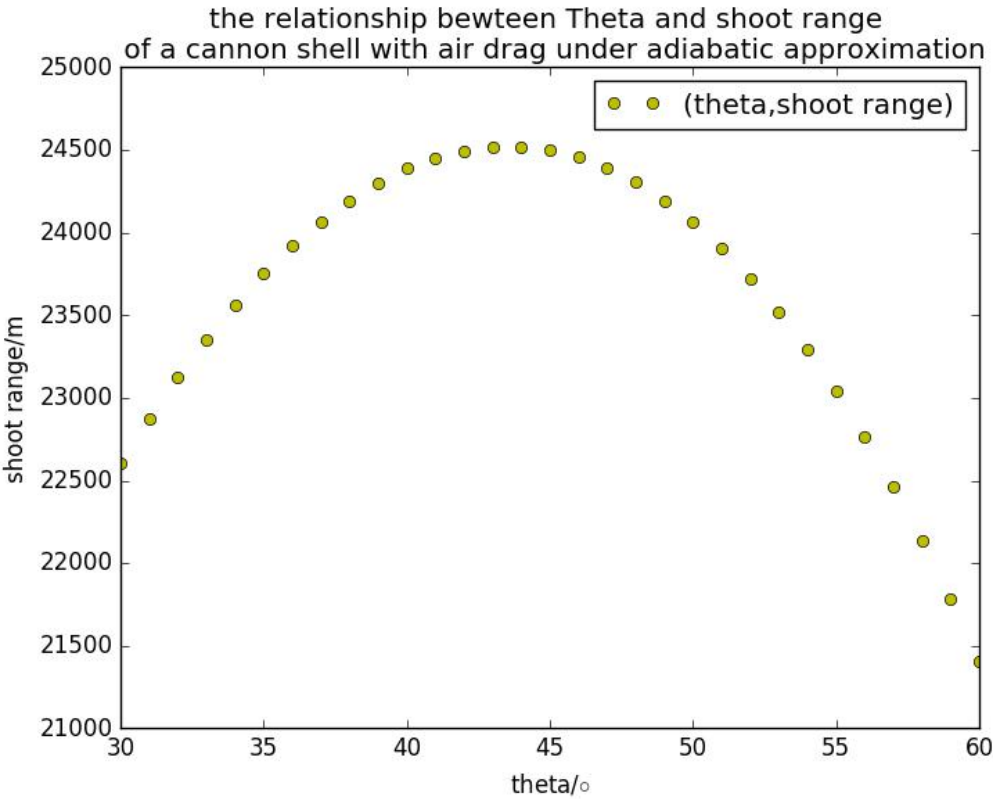
此时带入公式并修改上面代码计算特殊角度的结果如下：

角度（°）	30	45	60
等温近似	22605.1	24500.1	21402.6

由数据可以推断出：最大发射角在 45° 附近。

然后可以用扫描角度的方法在 $30-60^\circ$ 之间找一定速度情况下，使水平射程最远的抛射角度;代码,

扫描后图像为：



由图可以看出最大发射角大致在 43.5° 左右,因为从运行代码所得数据在 43° 水平射程为

24519.0m, 44° 时水平射程为 24520.6m。

五 辅助精确打击系统

在给定恒定发射速度情况下，找到给定目标坐标的最小发射速度。[代码](#)输入目标（300m, 400m）

情况下，得到结果如图：

```
>>> runfile('D:/Personal/Desktop/Anaconda2 (64-bit)/untitled3.py', wdir='D:/Personal/Desktop/Anaconda2 (64-bit)')
(53.30000000000013, (300.00054254863386, 399.9282261368308, 0.724299999999366))
```

运行时间为 0.7243s，发射角度为：53.3°

目标坐标	(300, 400)
实际击打位置	(300.00, 399.93)
误差	(0, 0.02%)

六 总结

由于射程收到空气阻力影响，在等温近似下最大射程下的角度比不考虑阻力时稍大，绝热近似下最大射程下的角度比不考虑阻力时稍小，但是只要考虑阻力，最大射程都比不考虑阻力时小得多。在发射时必须根据阻力情况调整发射角度。

定点打击坐标中，给定初速度，我们对于给定的目标，都可以在误差很小的范围内精确地打击目标，并且计算出炮弹飞行时间发射角度。但是这次方法存在不足：没有计算出对于给定的目标位置，能使炮弹打击到目标的最小速度和最小发射角度，只有这两个值同时求出，在实际运用中才更有意义。