## 基本思想和原理

思想：当所要求解的问题是某种事件出现的概率，或者是某个随机变量的期望值时，它们可以通过某种“试验”的方法，得到这种事件出现的频率，或者这个随机变数的平均值，并用它们作为问题的解。

原理：抓住事物运动的几何数量和几何特征，利用数学方法来加以模拟，即进行一种数字模拟实验。

## 步骤

> 1. 构造或描述概率过程
> 2. 实现从已知概率分布抽样
> 3. n建立各种估计量

## Monte Carlo方法处理的问题

**确定性的数学问题** 多重积分、求逆矩阵、解线性代数方程组、解积分方程、解某些偏微分方程边值问题和计算代数方程组、计算微分算子的特征值等等

**随机性问题**

## 方法

> 1. 用此方法模拟某一过程时，需要产生各种概率分布的随机变量。
> 2. 用统计方法把模型的数字特征估计出来，从而得到实际问题的数值解。

## Monte Carlo方法的精确性

由于Monte Carlo 方法的随机性，精确性建立在大量的重复模拟上，最后去平均值。

## Monte Carlo模拟二叉树期权定价

每一次随机一条路径，得到一个期权金，通过多次重复地随机选取，最终取平均值作为估计。

在随机模拟路径时，产生一个$[0,1]$的随机数$x$，若$x \in [0, q_d)$，那么标的资产价格变为$Sd$，若$x \in [q_d, 1]$，那么标的资产价格变为$Su$。

## Monte Carlo 模拟连续过程的欧式期权定价

欧式期权定价的期望公式为

$$V = e^{-rT}\hat{E}(V_T)$$

若标的资产服从几何布朗运动

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

则在风险中性测度下，标的资产的过程为

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon\right]$$

所以Call Option 到期日的现金流为

$$\max\left\{0, S(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon\right] - K\right\}$$

抽一个正态分布的随机数$\varepsilon$，算得上式再贴现，就可以得到一个结果。

重复上面的过程（如计算10000次）。

将所有的结果取平均。

1. 用蒙特卡罗方法计算二叉树模型和B-S模型的欧氏期权定价，并将它们的结果与公式解比较，这里 $S_0=10$，$K=10.5$,$r=0.04$, $\sigma=0.08$, $T=5$,$q=0$. 分别模拟100和10000次，如果需要，更多次。

解：随机取得$N=100,1000$个正态分布随机数，$t=0$，在$T$时分别得到现金流

$$\max\left\{0, S_0\exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon\right]-K\right\}$$

再求平均值(期望)的贴现值作为期权金的估计

$$V=e^{-rT}\hat{E}(V_T)$$

对于二叉树模型，将时间步长取为$\Delta t=0.1$，又由

$$q_u=\frac{1}{2}+\frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$
$$q_d=\frac{1}{2}-\frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}$$

以及

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

产生5条均匀分布随机数，$\varepsilon_i\sim U(0,1), i=1,\cdots,T/\Delta t$,

$$S_i=\begin{cases} S_{i-1}d & ,\varepsilon_i\le q_d \\ S_{i-1}u & ,\varepsilon_i>1-q_d \end{cases}$$

重复产生上述路径$N=100,10000$次，对每一条路劲，到到期日时现金流为

$$\max\{0, S_T-K\}$$

再求平均值(期望)的贴现值作为期权金的估计

$$V=e^{-rT}\hat{E}(V_T)$$

重复产生$N=100,10000$条路径，在$T$时，分别得到现金流

$$\max\{0, S_5-K\}$$

再求平均值(期望)的贴现值作为期权金的估计

$$V=e^{-rT}\hat{E}(V_T)$$

而Black-Scholes公式得出的解为

$$V(S,t)=Se^{-q(T-t)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中

$$\hat{d}_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$\hat{d}_2=\hat{d}_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

**采用Monte Carlo方法求解B-S模型**:

运行结果为：The price of the option is 1.5917610058080272

**采用Monte Carlo方法求解二叉树模型**:

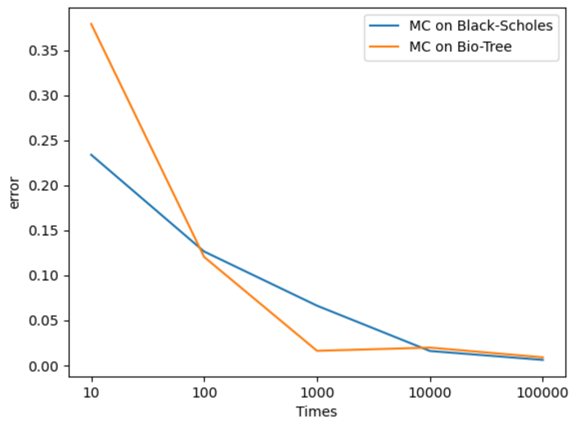
运行结果为：The price of the option is 1.5982190712629207

**直接使用B-S方程的解析解**:

运行结果为：The price of the option is 1.5868339158286728

**对$N$分别取10,100,1000,10000,100000求解Monte Carlo的估计解，并与B-S解析解进行比较**:

运行结果如下:




可以看到，随着随机点数的增多，误差逐渐下降，精度也越高。每次运行的结果都不会一致，这是因为随机取值的结果，但总体随着点数增多，误差变小这一特性是一致的。