人物·访谈

康托尔的数学人生

王淑红

摘 要 康托尔创造了集合论，提出超无穷的思想。这在历史上是一次深刻的观念变革，不但奠定了实数理论乃至整个微积分理论的基础，而且拓展了数学的研究范围，进而成为整个数学的基础。通过分析康托尔如何走上数学道路，怎样开始的无穷集合研究等，揭示康托尔追求自我实现的数学人生。

关键词 康托尔 集合论 无穷 超无穷 自我实现

爱因斯坦曾说："人的知识是有限的，而想象力是无穷的。"科学创造需要插上想象力的翅膀，才能飞得更高，数学亦是如此。那些数学史星空中的璀璨明星都极具想象力和创造力，身为横跨19世纪和20世纪的数学家，康托尔（G. F. L. P. Cantor, 1845—1918）就是这样一位具有非凡想象力和创造力的数学家。

19世纪的数学家们，比如柯西（L. A. Cauchy, 1789—1857）、魏尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass, 1815—1897），一直为微积分的严格化殚心竭虑。在这一过程当中，康托尔抛却了以往的经验与直观，拿起理论论证的武器，冲出了数学中有限性的阻碍，打破了数学中对于无穷的一贯解释和运用方式，创立了全新的集合论和超穷数理论。自此，集合论成为了实数理论乃至整个微积分理论的基础，严密的微积分体系亦随之建立起来。同时，集合概念在更高和更广的层面上发挥威力，大大拓展了数学的研究疆域，为数学结构奠定了牢固的基础，深深影响了现代数

作者简介：王淑红，女，1976年生，河北黄骅人，中国科学院大学人文学院博士后，河北师范大学数学与信息科学学院副教授，研究方向为代数学及近现代数学史研究。

基金项目：国家自然科学基金资助项目（编号：11401161）；河北师范大学博士基金项目（编号：L2016B03）。

学的走向，最终成为整个数学的基础，亦对现代哲学与逻辑的产生和发展大有裨益（[1]；[2]，页 1092—1118）。

历史大浪淘沙，如此沉甸甸的成果当然会使康托尔脱颖而出。他的这些成果为他赢得了诸多美誉。比如，希尔伯特（D. Hilbert, 1862—1943）在 1900 年举办的第二届国际数学家大会上，高度赞扬了康托尔的集合论“是人类纯粹智力活动的最高成就之一”。正是在这次大会上，希尔伯特提出了指引未来数学发展的著名的 23 个问题，其中把康托尔的连续统假设列为第一个问题。1926 年，希尔伯特又再次称赞康托尔的超穷数理论：“数学思想最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一。”希尔伯特在对康托尔的赞誉中用到了“最高”和“最美”这两个字眼，可以说是一种至高的评价。

那么，康托尔是怎样走上数学道路的？又是因何开始了对无穷的研究工作？他的观念有什么革新？其成就对现代数学和哲学产生了怎样的影响？在数学创造的道路上，面对种种选择抑或困难，康托尔又做出了怎样的抉择？这种抉择的标准和勇气来自何方？他的一生到底是幸还是不幸？这些都是我们关心的问题。美国心理学家马斯洛（A. H. Maslow, 1908—1970）1943 年在其《人类激励理论》中提出，人类的需求从低到高分为 5 个层次，分别是生理需求、安全需求、社交需求、尊重需求以及自我实现需求。下面我们就通过调查、分析和研究有关康托尔的一些文献资料，从回归人性和心理学的角度来展示康托尔的伟大思想足迹以及他带给人们的无穷教益。

一　人生理想的树立：由工学到数学

高尔基曾经说过：“一个人的目标愈高，他的才力就发展得愈快，对社会就愈有益。”一个人的成才与否与他是否有高远的志向不无关系。康托尔是如何走上数学道路，树立起攻克数学难关的远大理想的呢？要知道康托尔并非像诺特（E. Noether, 1882—1935）那样出身数学家族，家族里也没有人鼓励他走这一条道路。实际上，他是犹太血统，祖父是一位音乐家，父亲是一名商人，母亲出身艺术世家。除了数学家的身份之外，他还是一位出色的小提琴家，只是相较来说，他的数学成就更大，从而掩盖了他的音乐光芒。

1918 年 1 月 6 日，康托尔在俄国的圣彼得堡出生。父母十分重视对他的教育，他的父亲主张要广泛阅读，多方求学。这与中国的“读万卷书，行万里路”的教

育思想有些类似。康托尔小的时候，父亲就开始给予他各处游学的机会。1856 年，康托尔时年 11 岁，跟随全家从俄国的圣彼得堡移居到德国的威斯巴登。康托尔的传记作者 Grattan-Guinness 曾写道：

> 康托尔非常怀念他在俄国的早年岁月，并且从未在德国感到过自在和安逸，尽管他在那里度过了余生，而且似乎他从未用俄文写过文章，俄文一定是他已经掌握的。[3]

他的这种怀旧个性应该也是他执著解决超穷集合论问题的一个精神因素。他先是在威斯巴登的一所寄宿制学校学习，1857 年又转学到荷兰阿姆斯特丹的一所寄宿制学校。这是影响康托尔人生道路的一个地方，因为正是在这里，康托尔对数学产生了浓厚的兴趣。当时，这所学校的图书馆馆长是路西多尔，他给康托尔推荐了一些数学史书籍，可以说是康托尔的良师益友。康托尔在阅读这些数学史书籍时，一次次与其中的数学先贤们进行思想碰撞与交融，逐步产生了献身数学的内在动力，而且这种动力愈来愈强，似乎有了一种欲罢不能的趋势。

康托尔的父亲一直希望他中学毕业后进入工科学校。于是，1862 年，康托尔遵照父亲的愿望进入了苏黎世大学学工。但他的内心早已被数学点燃，对数学的渴望亦与日俱增，所以当父亲同意他可以在大学期间学习数学时，内心充满了难掩的兴奋与激动之情。1863 年，父亲去世后，康托尔继承了一笔丰厚的遗产，转入柏林大学学习数学和神学。柏林大学当时是数学研究的一个圣地，汇聚了一批杰出的数学家。这是康托尔对自己人生的第一次重要抉择，这次抉择使他终生与数学结缘。

二 数学兴趣的转移：由数论到分析

在柏林大学期间，康托尔有幸受到库默尔（E. E. Kummer, 1810—1893）、魏尔斯特拉斯和克罗内克（L. Kronecker, 1823—1891）的教导。在此期间的 1866 年，康托尔还曾到哥廷根大学游学，历时一个学期。此时，他主攻的是数论。1866 年 12 月 14 日，康托尔以“按照实际算学方法决定极大类或相对解”（In re mathematica ars proponendlpluris facienda est quam solvendi）一文在柏林大学获得博士学位。那么，康托尔是如何由数论转向分析的呢？

应该说，促使康托尔从数论转向分析的人主要有两位，一位是魏尔斯特拉斯。魏尔斯特拉斯被誉为现代分析之父，主张“数学不应该凭直觉。我们要致力于使

数学建立在一个牢固的基础之上”。他用 ε - δ 语言给出了函数极限的精确定义，消除了过去极限直观定义中的随意性。他还指出极限理论对微积分的基础性作用。在柏林大学求学期间，康托尔认真聆听了魏尔斯特拉斯的课程，还在其指导下作过关于“微积分简史”的报告。这些都潜移默化地成了康托尔对分析产生研究兴趣的潜在因素。另一位则是他在柏林大学求学期间的朋友海涅（E. Heine, 1821—1881）。1869 年，海涅已是哈雷大学的讲师。这个时候，他们二人重逢，恰遇康托尔对数论问题的研究工作受阻。于是，海涅鼓动康托尔从数论问题中抽离出来，转而研究分析中的一个困难而有趣的问题：对任一给定的函数，判定其三角级数表达式是否唯一。海涅还建议康托尔去哈雷大学任教。于是康托尔接受了海涅的建议，于1869年入哈雷大学任职。由此康托尔正式开始研究分析，与分析结下了不解之缘，也从此扎根在哈雷大学，直至 1913 年退休。这可以说是他人生的第二次重要抉择，正是这次抉择使他开启了对于集合和无穷的新认识[4]。

康托尔在对上述问题的研究过程中，开始思考分析的基础问题，认识到无穷集合的重要意义，进而开始从事无穷集合的一般理论研究。从此无穷成为了他终生奋斗、为之痴狂的一个重要关键词。他不但关注实无穷，而且还构造出超无穷，为千百年来的无穷问题彻彻底底进行了一次革命。

三　突破无穷概念的壁垒：由潜无穷到实无穷

无穷在当时并不是一个新鲜名词，而是早在两千多年以前，古代先人就开始探索的一个概念。既然如此，为什么曾有人断言，关于数学无穷的革命几乎是由康托尔一个人独立完成的？或者说，无穷的概念在康托尔这里发生了怎样的变化？

这是因为，虽然科学家们很早就接触到无穷，但却没有足够的能力去把握和认识无穷。甚至有些古希腊数学家还极力排斥无穷，避免在一些数学表述中出现无穷这个词汇。比如，他们不直接说“素数有无穷多”，而是说“素数比任何给定的素数集合都要多”。可以说，他们排斥无穷，拒绝无穷进入数学。这种思潮千百年来一直存在着。

17 世纪，牛顿（I. Newton, 1643—1727）和莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646—1716）创立了微积分。微积分的有效性没有问题，但其严格性不足，这就使得无穷概念受到了人们的强烈质疑。尔后的柯西、魏尔斯特拉斯等开始对分析进行严格化。最终摆脱了极限概念的几何直观性，将极限概念建立在了纯粹严密的算术

基础之上。其中就涉及到了有关无穷的理论，于是又重新提出了无穷集合在数学上的存在问题，从而无穷集合的理论基础问题自然成为数学家们的一项自然追求。

而追求无穷的过程并不是一帆风顺的，因为时至那时，还有一些数学家并不承认无穷。比如，克罗内克（Leopold Kronecker,1823—1891）就是一个坚定的有穷论者。克罗内克认为数论和代数最为可靠，并且一贯主张“上帝创造了整数，其他一切都是人创造的”。也就是他主张从整数和整数的有限算术组合中创造出全部数学。克罗内克是康托尔的老师，又都曾受教于库默尔，但这种亲密的关系并没有使他们的数学思想路线保持一致，而是持有这样两个截然不同的观点。

中世纪，人们发现一个事实：若从两个同心圆出发来画射线，虽然这两个圆的周长不同，但射线会在这两个圆的点与点之间建立起一一对应。在康托尔之前，高斯（C. F. Gauss，1777—1855）、柯西都明确反对在无穷集合之间使用一一对应这种比较手段，因为这会导致部分等于全体的矛盾。高斯说：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的。无穷只是一种说话的方式……”也就是说，高斯仅仅承认潜无穷。

总之，有一部分数学家像克罗内克那样不承认无穷，也有一些数学家像高斯那样只承认潜在的无穷，而不承认实无穷。但数学概念不能只停留在描述的层次上，必须是严格和精确的。于是对无穷的这种探索不仅仅是自然的，而且也是必要的。

如前所述，康托尔在海涅的直接影响下由数论转而研究分析。康托尔很快便取得成果，分别于 1870 年和 1871 年在《数学杂志》（*Journ für Matb.*）上发表了论文，证明了函数三角级数表示的唯一性定理，并证明即使在有限个间断点处不收敛，这个定理依旧成立。1872 年，他在《数学年刊》（*Mathematische Annalen*）上发表了论文“三角级数中一个定理的推广”（über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorié der trigonomentrischen Reihen），把这个唯一性定理推广到允许例外值为某种无穷集合的情形。康托尔认识到，需要有一种分析 x 轴上的点的连续统的方法。这使得他的思想发生了变化，连续统内点的关系问题成为他关注的焦点。也就是说，继而如何来描述这种由例外点所组成的无穷集合成为一个最为重要的问题。由此，他对无穷集合的重要性有了新的认识，开始对无穷集合进行一般理论研究。自此，他开始从对唯一性问题的探讨转向点集论的研究，把无穷点集上升为明确而具体的研究对象。这不仅是他个人研究的一次标志性变化，而且开启了数学发展的一个新时代。康托尔具有超乎常人的想象力，但我们知道科学需要“大胆假设，小心求证”。因此，有了设想之后，如何使理论变得严谨便成

为一个必须解决的首要问题。

康托尔为了描述这种无穷集合，引入了一些新概念，比如点集的极限点、点集的导集以及导集的导集等。1872 年，他首先用有理数列来构造实数，由此说明，实数跟虚数一样，也是纯粹由人来构造的。

在这一时期，康托尔有一个志同道合的朋友，那就是戴德金（J. R. Dedekind, 1831—1916）。他们结识于 1872 年，这一年戴德金出版了《连续性与无理数》（*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*）一书，以有理数为基础，用后人所称的“戴德金分割”定义了无理数，建立了完整的实数理论。同样在 1872 年，康托尔也讨论了实数问题。因此二人建立起了通信联系。他们都关注实数理论以及集合论，之后经常彼此交流各自的研究进展情况。在 1874 年康托尔度蜜月期间，他们初次相遇，并进行了很多数学交流。他们的通信交流一直持续到 1882 年[5]。

四 无穷观念的再次进阶：由实无穷到超无穷

如果说从潜无穷到实无穷是一次观念的深刻变革，那么从实无穷到超无穷又是一次巨大的进步。这是康托尔对无穷的新认知。

1874 年，康托尔在《纯粹与应用数学杂志》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*，即《克雷尔杂志》）发表论文“论所有实代数数的集合的一个性质”(Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen）[6]。这篇论文标志着集合论的诞生。康托尔为了将元素个数的概念从有穷集合推广到无穷集合，以一一对应为原则，提出了集合等价的概念。如果两个集合的元素间可以建立一一对应，那么这两个集合称为等价。他认为一个无穷集合与它的部分构成一一对应恰恰反应了无穷集合的一个本质特征。他定义了基数、可数集合等概念，证明了实数集不可数，代数数是可数的，有理数没有实数多，所以非代数数的超越数存在且不可数。康托尔的证明是开创性的。在没有构造出一个超越数的前提下，大胆提出这样的命题，使得当时的一部分数学家持有怀疑态度并感到愤怒。

实际上，康托尔的这篇论文把无穷的概念进行了深化。他认为无穷也有区别，有可数的，有不可数的。相较于以前的数学家对无穷的模糊认识，无穷是一个潜在的概念，而康托尔对无穷的认识更加明确，给无穷具体分出了不同的层次。这样的认识打破了前人的认知，引起部分人的反对也是难免的。

1877 年，康托尔证明了单位正方形与单位线段上的点可以建立起一一对应的关系。而这个问题是康托尔三年前首先对戴德金提出的。康托尔 1874 年 1 月 5 日在给戴德金的一封信中写道：

> 是否有可能使一个面（可能是包含其边界在内的一个正方形）唯一对应于一条直线（可能使包含其端点在内的直线段），使得这个面上的每一点都有这条直线上的一个对应点，反之，对这条直线上的每一点都有这个面上的一个对应点？我认为回答这个问题不是简单的工作，尽管这个问题的答案看起来显而易见是否定的以至于证明似乎是不必要的。[7]

康托尔得到证明之后也第一时间写信告诉了戴德金。戴德金发现了其中一个漏洞，后来康托尔把这个漏洞予以弥补。康托尔还进一步推出：空间中的点与平面上的点一样多，等等。

这与以前人们一贯的直觉相冲突。提示人们直观有时并不可靠，理性在科学发现的过程中相当重要。

1879 至 1884 年，康托尔集中探讨线性连续统，这是由 n 维连续空间与一维连续统具有相同的基数而引发的研究。康托尔这个阶段的论文汇集为《关于无穷的线性点集》（*Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*）[8-12]。其中，发表于 1880 年的文章第一次引进了“超穷数”这个概念。

发表于 1883 年的第 5 篇论文[12]，篇幅最长，内容也最丰富。它实际上已经超出了线性点集的范畴，建立了一个超穷数的一般性理论。他通过运用良序集的序型而做的这一点的。他还特别讨论了由集合论产生的一些哲学问题。同年，康托尔将这篇论文以《集合论基础，无穷理论的数学和哲学探讨》（*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeits lehre, ein mathematischphilosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*，以下简称《集合论基础》）为题作为专著单独出版。康托尔在引进超穷基数及其超穷算术之前，给出了良序集和无穷良序集编号的概念，指出整个超穷数的集合是良序的，而且任何无穷良序集，都存在唯一的一个第二数类中的数作为表示它的顺序特性的编号。良序集对于有穷集与无穷集的区分起到了至关重要的作用。康托尔认为，有穷集与无穷集的重要区别为：对于有穷集来讲，无论其中元素的顺序怎样，所得的序数都是一样的。而对于无穷集来讲，因为元素顺序不同，所以从一个无穷集可以得到无穷多个不同的良序集，因而有不同的序数。良序集也为超穷算术的定义奠定了基础，康托尔借助它定义了超穷数的加法、乘法及其逆运算[13, 14]。

《集合论基础》是康托尔数学研究的里程碑，其主要成果是引进了超穷数。“我很了解这样做将使我自己处于某种与数学中关于无穷和自然数性质的传统观念相对立的地位，但我深信，超穷数终将被承认是对数概念最简单、最适当和最自然的扩充。”《集合论基础》是康托尔早期集合论思想的系统论述。

康托尔在其中应用了下面三个原则：

第一生成原则：从任一给定的数出发，通过相继加 1 得到它的后继数，定义有穷序数的过程。

康托尔将全体有穷序数的集合称为第一数类，记作（Ⅰ），其中没有最大的数。康托尔用一个新数 ω 来表示紧跟在整个自然数序列之后的第一个数，这就是第一个超穷数，也是最小的一个超穷数，它比所有的自然数 n 都大。这里的 ω 是一个数，是“实无穷”，而以前的 ∞ 则是一个变量，是“潜无穷”。康托尔试图使人们把 ω 看作像实数一样具有真实数学意义的数。运用第一生成原则，从 ω 出发，就得到一个超穷数序列：ω，$\omega+1$，$\omega+2$，…，$\omega+n$，…其中同样不存在最大的数。

第二生成原则：任给一个其中无最大数的序列，可产生一个作为该序列极限的新数，它定义为大于此序列中所有数的后继数。

根据第二生成原则，可以假设紧接着上面序列之后存在的第一个序数为 $\omega+\omega$，即 2ω。再对其运用第一生成原则，可以得到新的超穷数序列 2ω，$2\omega+1$，$2\omega+2$，…，$2\omega+n$，…

由此，无穷是有层次的，也就是无穷是有大小之分的，后一层上的无穷比其前一层上的无穷更大。

以此类推，反复运用第一生成原则与第二生成原则，就可以得到无穷多个序数，如 $n\omega$，$n\omega+1$，$n\omega+2$，…等等。它们的全体组成第二数类，记为（Ⅱ）。这些序数的基数均可数。康托尔证明了，第二数类的基数不可数的，也不存在最大序数。根据第二生成原则，在这些新序数之后又会产生一个新的序数，这个新的序数是第三数类的始数，按照这样逐步上升循环，就可以得到一系列的始序数以及与其相对应的基数。

由此产生一个问题：若对第一与第二生成原则进行无限制性的使用，第二数类就没有最大的数。因此，康托尔引入了第三生成原则，即限制原则。

第三生成原则：保证在上述超穷序列中产生一种自然中断，使第二数类有一个确定极限，从而形成更大数类。

第三生成原则的目的为：确保一个新的数类的基数大于前一数类的基数，并

且为满足这个条件的最小的数类。

康托尔反复运用以上三个原则，就得到了超穷数的序列。

在引进第三生成原则之后，康托尔研究了数集的顺序及其势(基数)。他指出：第一数类（Ⅰ）和第二数类（Ⅱ）的重要区别在于（Ⅱ）的基数大于（Ⅰ）的基数。（Ⅰ）和（Ⅱ）的基数分别称为第一种基数和第二种基数。在《集合论基础》的第十三章，康托尔首次指出，（Ⅱ）的势是紧跟在（Ⅰ）的势之后的势[1]。

1884 年，康托尔在长期精神亢奋和压力之下患上了抑郁症。不过他在身体得到恢复的时候仍然自觉研究数学。1895 和 1897 年，康托尔以“对超穷集合论的解释”（Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre）Ⅰ和Ⅱ为题先后发表在《数学年刊》上的两篇论文[15, 16]，这两篇论文对超穷数理论具有决定意义。他把集合作为基本概念，从而改变了早期用公理定义序数的方法。他定义了超穷基数和超穷序数，规定了它们的符号；按照势的大小将其排成一个“序列”；规定了其加法、乘法和乘方等等。至此，超穷基数和超穷序数理论基本宣告完成。这两篇文章构成了康托尔的《超穷数理论基础》。

《超穷数理论基础》是康托尔重要的数学收官之作，系统地总结了超穷数理论严格的数学基础，是他 20 多年超无穷工作的结晶。这本书共分两部分。第一部分是“全序集合的研究”，由“对超穷集合论的解释Ⅰ”构成。第二部分是“良序集的研究”，由“对超穷集合论的解释Ⅱ”构成。《超穷数理论基础》的出版标志着集合论从点集论过渡到了抽象集合论。不过，因为它还不是公理化的，并且它的某些逻辑前提或某些证明方法若不给予适当的限制就会导出悖论，所以康托尔的集合论通常称为古典集合论或朴素集合论。

《超穷数理论基础》已由陈杰和刘晓力教授译为中文。它是据纽约多佛出版社 1915 年版本和科西摩古典出版社 2007 年版本译出的。中译本的引言部分为英译者乔丹（P. E. B. Jourdain）对超穷数理论的历史追溯，附录为 1897 年之后超穷数理论的进展情况[17]。

五 关于康托尔的历史反思：由幸运到幸福

人们通常认为康托尔是不幸的，因为他在对无穷观念的求索中打破了陈规，饱受克罗内克等数学家的质疑，因此没能入职柏林大学，甚至精神抑郁。这就是英雄有英雄的寂寞，毕竟他站在高山之巅，需要耐心等待他人攀爬而上才能彼此

对话。正是这种孤独使他一度求助于神学的帮助。但我们在阅读他的素材的时候，却也能真切地感受到，康托尔是一位非常幸福的数学家。

首先，康托尔有一个幸福的家庭。无论是他的父母，还是妻子与兄弟，都给予了他很大的支持。父亲对他的引导，使得他从小树立了远大的志向。父亲给他规划和设计人生道路，同时也能和他保持朋友般的沟通。他身处困境时，母亲和弟弟慷慨解囊，资助他的生活。与终身未婚的朋友戴德金相比，他拥有幸福的婚姻，育有 5 个子女，无论何时，他的妻子都表现出了对他的支持。同时，他早期有图书馆馆长、库默尔、魏尔斯特拉斯、克罗内克等良师的引领和指教，后来又有同道海涅、戴德金等朋友的交流和切磋，取得成就后还得到了希尔伯特等大数学家的强烈支持。

其次，康托尔的数学研究道路应该说遵从了自己内心的愿望，而且坚持走了下来，是一种高度的自我实现。前面我们讲过，他的父亲希望他学工，但他最终还是遵从了自己的意愿。包括他在哈雷大学一度不顺，经济面临困难，在选择教授哲学和数学之间，他并未因为教授数学能够获得更高的薪水，居住更好的房屋，就放弃自己的坚持。

再次，康托尔在数学上做出了伟大的成就。一个人在历史的长河中短暂地来和去，或多或少都会留下一些什么。有的人可能奋斗终身却碌碌无为，而康托尔的数学遗产无疑会永远得到世人传承。康托尔揭示了无穷的本质特性，为无穷首先建立起抽象的形式符号系统与确定的运算。这种思想产生了巨大的威力，此后逐渐渗透到其他的数学分支，同时促进了许多数学新分支的建立与发展，并发展成为抽象代数、实变函数论、代数拓扑、泛函分析等理论的基础。不但使数学的结构发生了根本性的变化，也对逻辑与哲学产生了举足轻重的影响。

很多数学家都给予康托尔高度赞美并追随他的研究。康托尔在 1895 年的文章中遗留下的两个问题，即连续统假设以及所有超穷基数的可比较性，也成了“会下金蛋的鹅”。康托尔虽然认为无穷基数有最小数而没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。康托尔自己首先发现了集合论的内在矛盾，但一直到 1903 年罗素发表罗素悖论，这种内在矛盾才凸显出来。不过，正是这种矛盾成为了 20 世纪集合论和数学基础研究的一个出发点。此外，因为集合论是严格的实数理论与极限理论的基础，所以集合论悖论直接导致了第三次数学危机。这是数学内部逻辑的自洽问题。这些问题促使策梅洛（E. F. F. Zermelo, 1871—1953）和弗兰克尔（A. H. Fraenkel, 1891—1965）等数学公理化大师创造出了 ZFC 理论等。1930 年，弗兰克

尔撰写了康托尔的传记。1932 年策梅洛编辑了康托尔的文集[18, 19]。

可以说，他不但是一个数学星空的仰望者和追逐者，而且还幸运地采撷到一颗最美的星星，进入这个星空中最璀璨的行列，成为他人的仰望者和追逐者。试想，当他年老时再度仰望星空，星空中不再只有他人的诗意，而是多了自己的光亮，这应该是一种莫大的欣慰与幸福。

最后，康托尔在数学创造的过程中，饱受过质疑，也困顿和无奈过。因为毕竟从观念上来讲，他的无穷思想是一次颠覆性的变化，与传统观念大相径庭，引起数学界巨大的震动是难免的。但毕竟在有生之年，其成果就赢得了相当大程度的承认，比起像阿贝尔（N. H. Abel, 1802—1829）那样在有生之年没有得到承认而且穷困潦倒的人来说，应该是幸运和幸福的。康托尔一直积极参与一些数学和科学组织，晚年曾为一个国际数学家联盟工作。1891 年设立德国数学家联合会，成为第一任主席。他筹办并参加了 1897 年在苏黎世召开的第一届国际数学家大会。1901 年，当选为伦敦数学会等学会的通讯会员或名誉会员，1902 年获得克里斯丁亚那 (Christiania) 的荣誉博士学位。1904 年获得伦敦皇家学会颁发的西尔威斯特奖章，1911 年获得圣安德鲁斯 (St. Andrews) 的荣誉博士学位。

总之，康托尔具备一个优秀科学家的精神气质。他在对知识求索的过程中，成功地把外部因素转化为了探求真知的内在动力，选准方向，即便在失去优厚的生活条件时也有勇气坚持到底。正是这种无畏的坚持最终使得他在集合论和超穷数理论上获得了累累硕果并最终得到举世公认。相信康托尔本人如果地下有知，也会乐见我们如此来评价他，因为这正是他自己追求的，他在高度自我实现的不断求索中获得了铭刻历史的幸运和幸福。2018 年将迎来康托尔逝世 100 周年的日子，谨以此文来纪念这位杰出的数学家。

致谢 本文写作得到孙小淳教授的具体指导，特此致谢！

参考文献

[1] 卢介景 . 无穷统帅——康托尔 [M]. 济南 : 山东教育出版社 . 2001.
[2] 吴文俊主编 . 世界著名数学家传记 (下)[M]. 北京 : 科学出版社 . 1997.
[3] Guinness, G.. Towards a biography of Georg Cantor[J]. *Ann. of Sci.*1971. **27**: 345—391.
[4] Dauben J.. Denumerability and dimension: The origins of Georg Cantor's theory of sets[J]. *Rete.*1974.**2**:104—134.
[5] Ferreirós J.. On the Relations between Georg Cantor and Richard Dedekind[J]. *Historia Mathematica.* 1993. **20**: 343—363.
[6] Cantor, G.. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen[J].

Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1874. **77**: 258—262.
[7] Meschkowski. H. Biography in Dictionary of Scientific Biography[B]. New York. 1970—1990.
[8] Cantor, G.. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(1)[J]. *Mathematische Annalen*, 1879, **15**(1): 1—7.
[9] Cantor, G.. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(2)[J]. *Mathematische Annalen*, 1880, **17**(3): 355—358.
[10] Cantor, G.. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(3)[J]. *Mathematische Annalen*, 1882, **20**(1): 113—121.
[11] Cantor, G.. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(4)[J]. *Mathematische Annalen*, 1883, **21**(1): 51—58.
[12] Cantor, G.. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten(5)[J]. *Mathematische Annalen*, 1883, **21**(4): 545—591.
[13] Fraenkel A.. Georg Cantor[J]. *Jahresberichte der Deutschen athematiker-Vereinigung*. 1930. **30**: 189—266.
[14] Hill L.. Fraenkel's biography of Georg Cantor[J]. Scripta Mathematica, 1933, **2**: 41—47.
[15] Cantor, G.. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre(1)[J]. *Mathematische Annalen*. 1895. **46**: 481—512.
[16] Cantor, G.. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (2)[J]. *Mathematische Annalen*. 1897. **49**: 207—246.
[17] 陈杰 . 超穷数理论基础 (第二版)[M]. 刘晓力译 . 北京 : 商务印书馆 . 2016.
[18] Cantor, G.. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*[M]. New York: Dover. 1915.
[19] Cantor, G.. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts*[M]. Zermelo. E. (ed.) Berlin: Springer. 1932.

Georg Cantor's Mathematical Life

WANG Shuhong

Abstract: Georg Cantor created the set theory and put forward the idea of transinfinite numbers. These inventions not only laid the foundation of the real number theory and the whole system of calculus, but also expanded the field of mathematics, thus forming a new basis for mathematics as a whole. This article accounts how Cantor entered the field of mathematics and how he started his research on the infinite set. His career as a mathematician demonstrates a success story of a scientist overcoming difficulties and achieving self-actualization.

Keywords: Georg Cantor, set theory, infinite, transinfinite self-actualization