3-COLORABILITY од 3SAT

Вовед

Ако имаме:

$B \leq p\ A$, каде што и B и A се некои проблеми,

тогаш овој исказ ни кажува дека B може да се претвори во A во полиномно време.

Ние ќе земеме дека B е 3-SAT, а A е 3-Colorability.

3-SAT

3SAT, или Проблем на буловата задоволивост, е проблем кој прашува кој е најбрзиот алгоритам да се каже за дадена формула во Буловата алгебра (со непознат број на променливи) дали е задоволувачка, односно дали постои некоја комбинација од (бинарни) вредности на променливите кои ќе дадат 1.

На пример, формулата „A+1“ е задоволувачка затоа што, без разлика дали A е 0 или 1, резултатот е секогаш 1. Формулата „A * Б“ е исто така задоволувачка, бидејќи резултатот е еден ако и A и Б се 1. Формулата „A*0“ не е задоволувачка, бидејќи, без разлика што е A, резултатот е секогаш нула .

Постојат многу брзи алгоритми за решавање на проблемот но, секој од нив работи во експоненцијално време (во однос на должината на формулата) во најлош случај. „Експоненцијалната временска хипотеза“ вели дека тоа е точно дури и за најдобриот можен алгоритам. Ако тоа е точно, тоа значи дека P=NP е неточно сепак, дури и ако P=NP не е точно, тоа не значи дека хипотезата за експоненцијално време е вистинита.

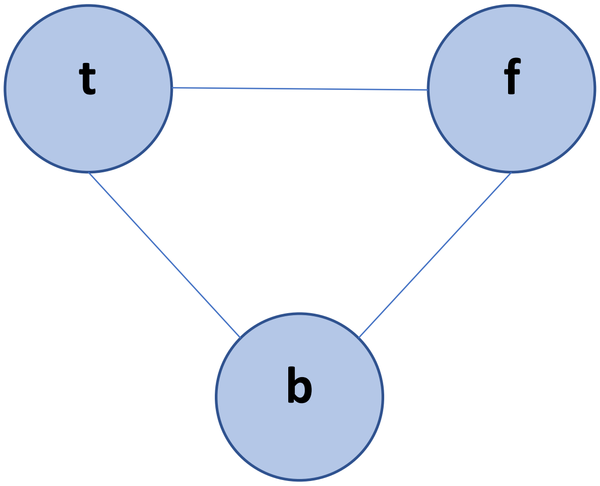
3SAT и Проблем на буловата задоволивост всушност не се целосни синоними. 3SAT прашува дали е можно да се реши проблемот со Буловата задоволност под услов да има најмногу 3 променливи помеѓу секој пар загради во Буловата формула. Значи, тоа е поедноставен проблем, но сè уште нема алгоритам да го реши и да е секогаш точно (не хеуристичко) и секогаш да работи за помалку од експоненцијално време.

3-COLORABILITY

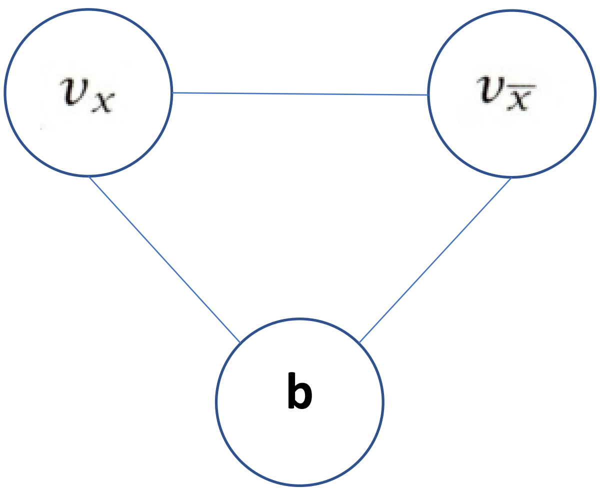
Проблемот на 3-COLORABILITY е проблем со одлучување во теоријата на графови кој прашува дали е можно да се додели боја на секое теме на даден граф користејќи најмногу три бои, задоволувајќи го условот секои две соседни темиња да имаат различни бои.

Редукција на 3-COLORABILITY од 3SAT

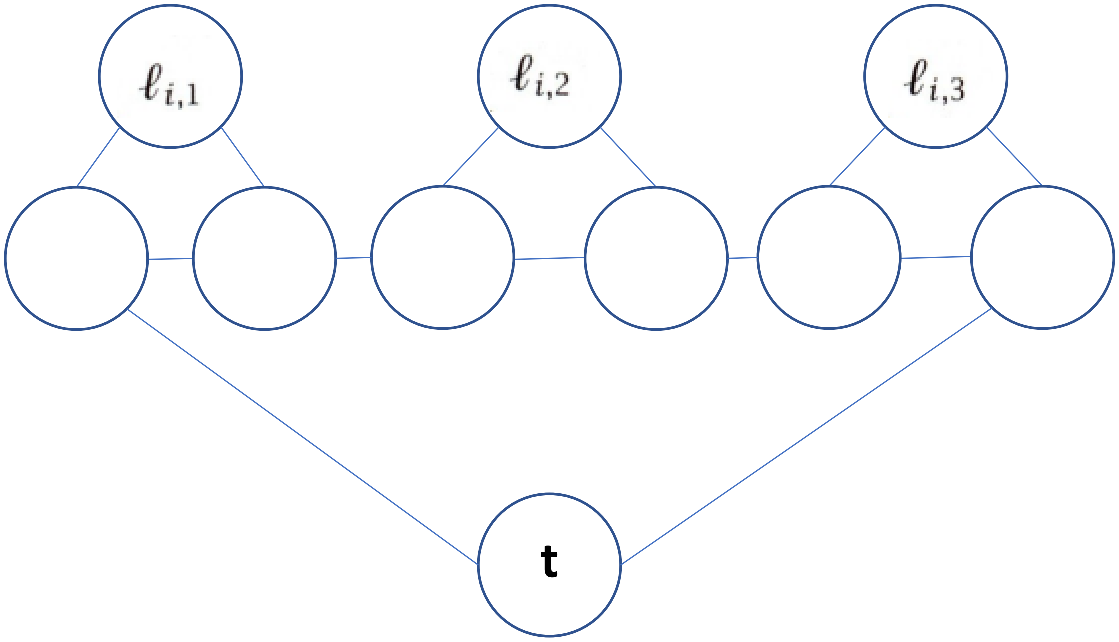
Дадена ни е формула φ во 3-SAT со клаузи C1, C2, ……,Cm. Нашата цел е да корнструираме граф G кој е 3- колорабилен ако и само ако, φ е задоволувачко. Доказот го почнуваме со триаголник со 3 јазли кои ќе ги именуваме b, t, f. Зошто има само 3 бои, јазлите мора да бидат обоени во тие три бои.



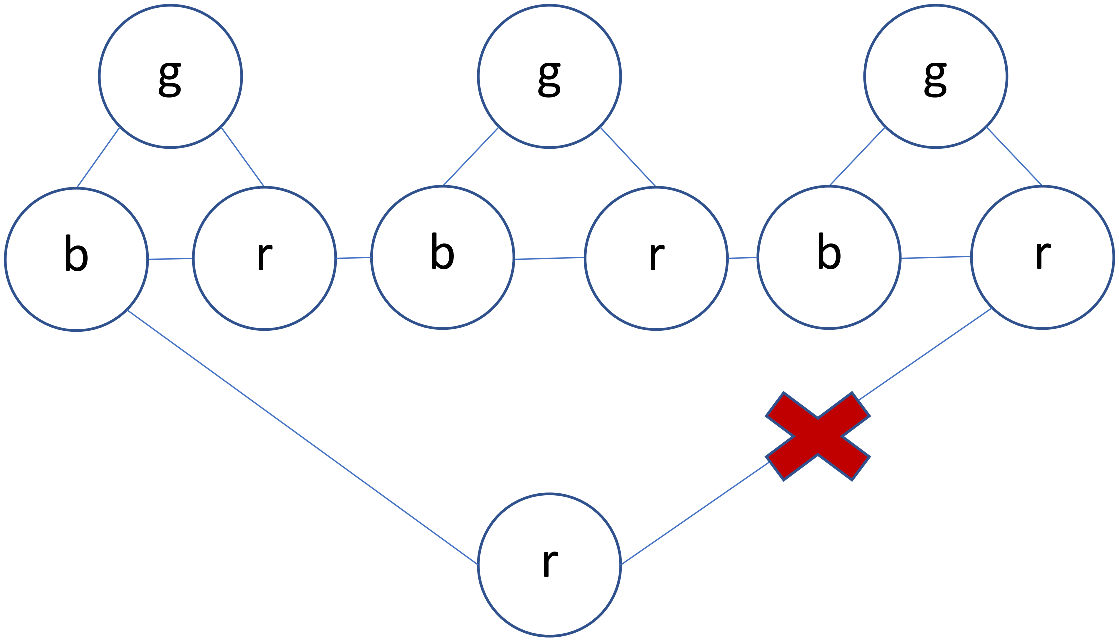
Боите на t и f соодветствуваат со true и false, додека бојата на b се користи за енкодирање. За секоја варијабла x во , земаме два нови јазли v_x и $v_{\overline{x}}$ за да се изгради друг триаголник со b како основа. Јазелот b е истиот јазел како во другиот цртеж.



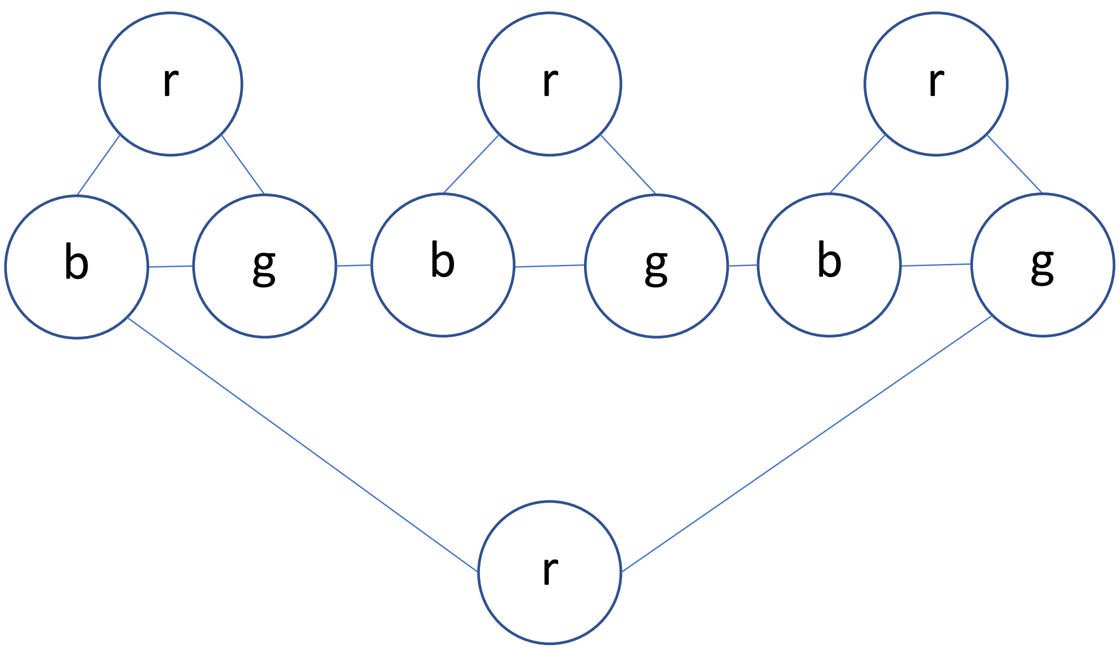
Овој триаголник ги принудува v_x и $v_{\overline{x}}$ да бидат обоени со боите на t и f, и поради тоа што боите на двата јазли треба да се различни (поради реброто помеѓу нив). Поради ова, боењето на јазелите можеме да го гледаме како давање на вредност на x, поточно ако v_x ја има истата боја како t, викаме дека x е true а false во спротивно. На овој начин, 3-боење на граф предпоставува вистинитосна вредност на вариаблите и поради ова можеме да збориме за боење да задоволува φ. За секоја клауза, $C_i = l_{i,1} \lor l_{i,2} \lor l_{i,3}$ градиме триаголник кој ќе гарантира дека барем еден член во секоја клауза е задоволен од боењето.

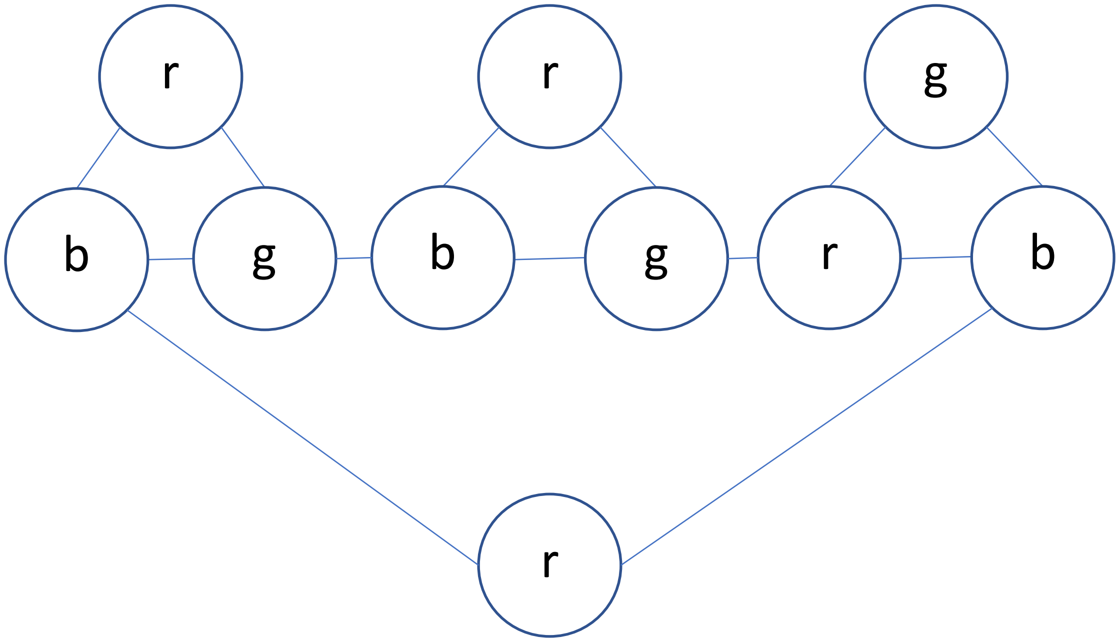


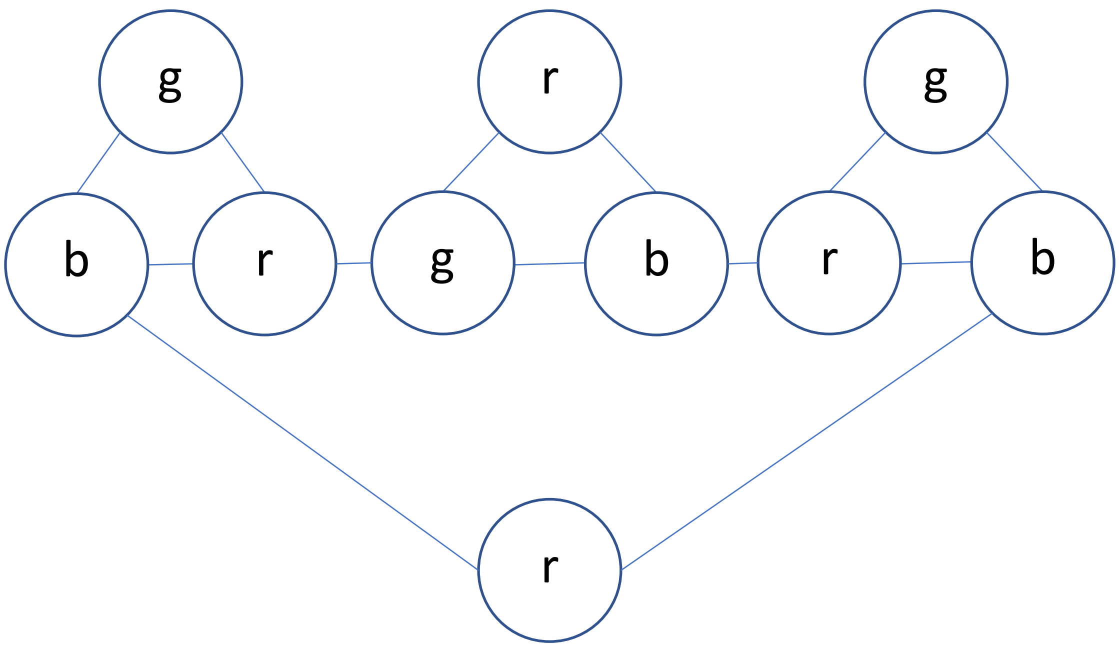
Шесте јазли што се во ред ги викаме базна линија на триаголниците а надворешните јазли на базната линија се крајни точки. Трите лаберирани јазли се врвовите на триаголниците. Ова е комплетната конструкција на G. Јазлите t, f, и b мора да се обоени со три различни бои, па затоа без да изгубиме било каква генерализација да предпоставиме дека t е црвено, f е зелено и b е плаво. Од оваа предпоставка v_x и $v_{\overline{x}}$, мора да бидат обоени црвено и зелено, или зелено и црвено, соодветно, зошто има ребро помеѓу нив, и двете се поврзани со плавото b. Од овие информации конструираме вистинитосна предпоставка. Ако v_x е црвено, земаме дека x е true, а false во спротивно. Ја земаме пак клаузата $C_i = l_{i,1} \vee \quad l_{i,2} \vee \quad l_{i.3}$ и графот што следува. Да земеме дека $l_{i,1},\ l_{i,2},\ l_{i,3}$ се false според предпоставката. Ова значи дека врвовите на трите триаголници во графот се зелени. Ова ги принудува јазлите кои се во базната линија да бидат плави и црвени, а поради тоа што има 6 јазли во базната линија, еден од крајните јазли мора да биде обоен црвено, што не е возможно зошто е поврзан со t, кој е обоен црвено. Па затоа еден од врвовите е обоен црвено, што значи дека еден од членовите на клаузата е true, па затоа клаузата C_i е задоволена. Поради тоа што овој аргумент важи за секоја клауза, сите клаузи се задоволени, што значи дека φ е задоволено од ова вистинитосна предпоставка.

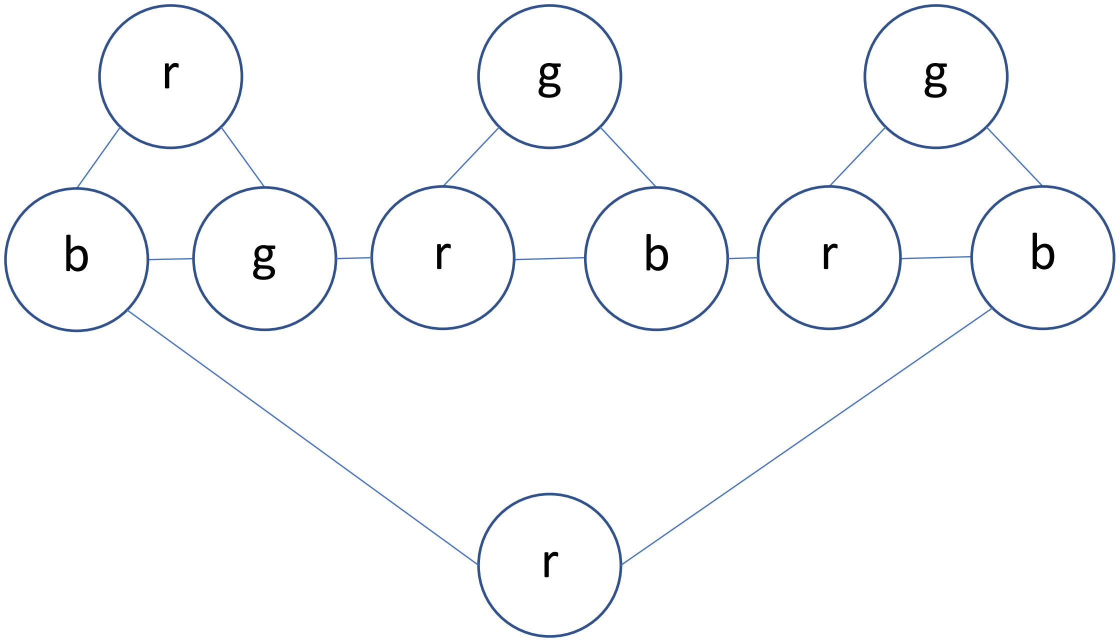


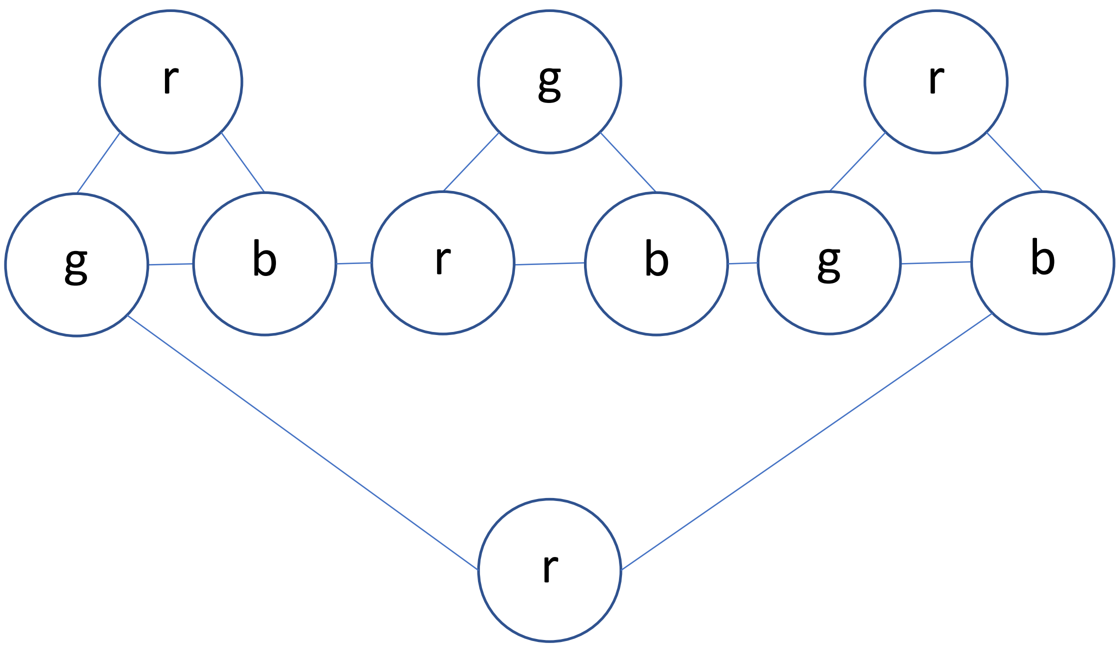
Во спротивната насока, треба да покажеме дека ако φ е задоволувачки, тогаш G може да биде обоен во 3 бои. Замаме задоволувачко назначување на G. Ги боиме t, f, b со боја црвена, зелена, плава, соодветно. Црвена значи true и зелена значи false. За секоја варијабла x во , обој го јазолот v_x црвен, а $v_{\overline{x}}$ зелен, ако x е true и v_x зелен, и $v_{\overline{x}}$ е црвен, ако x е false. Поради тоа што избравме задоволувачко назначување, барем еден од трите јазли на врвот на триаголниците мора да е црвен. Ќе го покажеме боењето на графот во секој од овие случаеви.



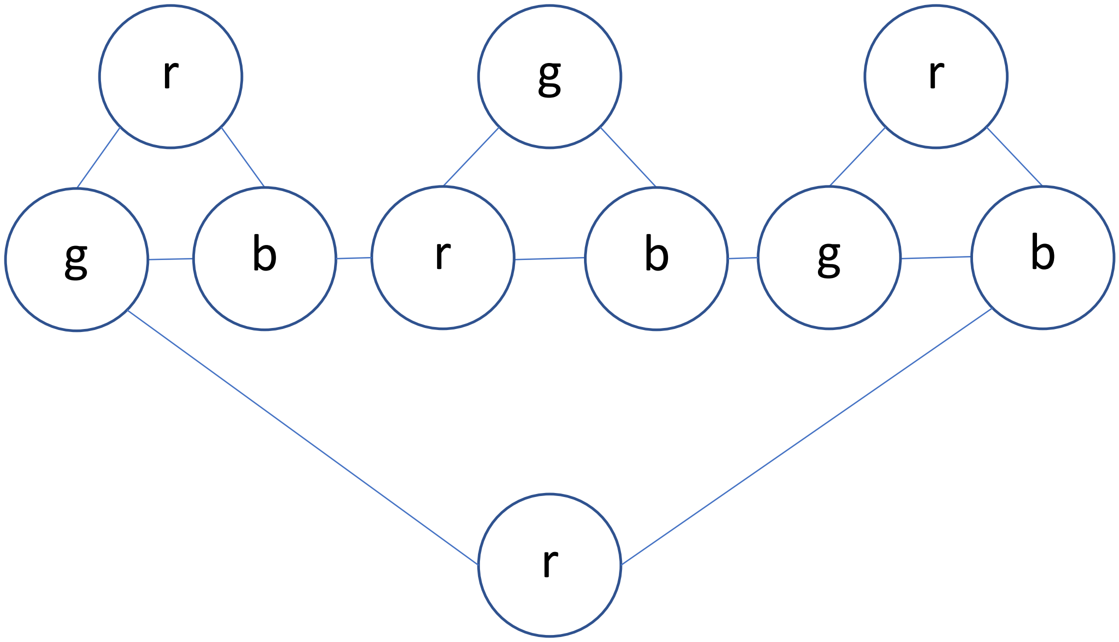

r
r
g
b
g
b
g
r
b
r


g
r
g
b
r
g
b
r
b
r

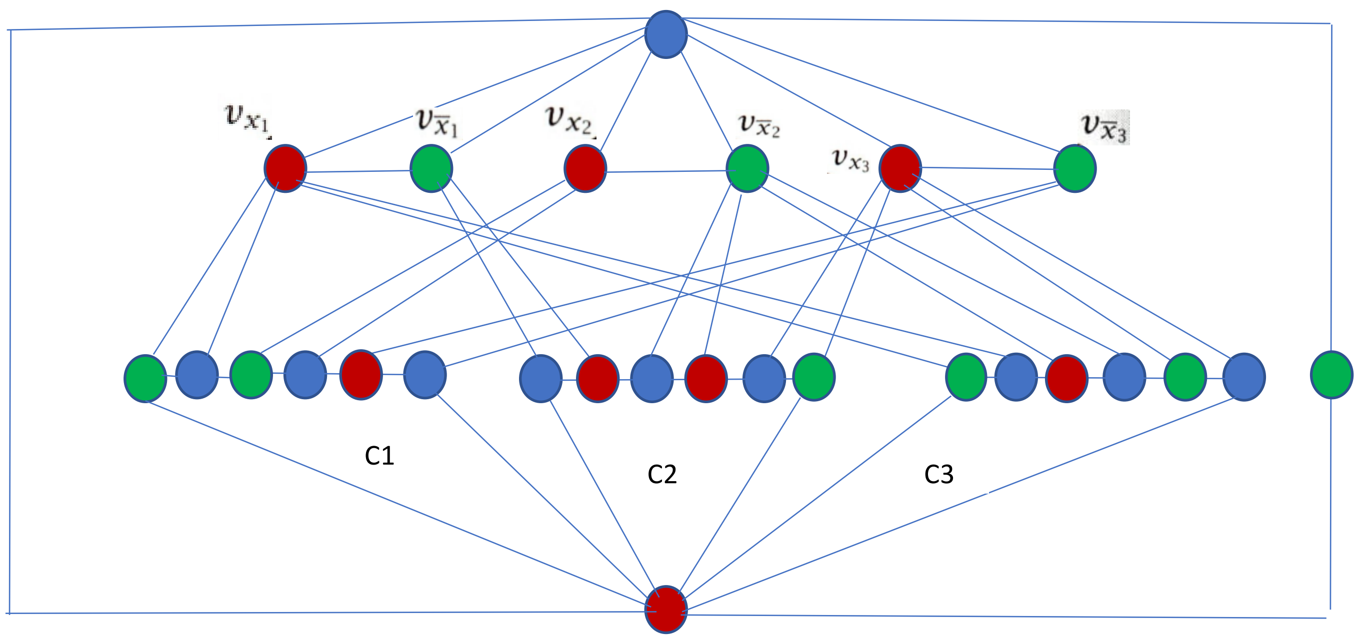




Со ова ги опфаќаме сите можни клаузи од 3 члена. Со ова се покажува дека графот G може да биде обоен со 3 бои ако и само ако е задоволувачки. Ова докажува дека 3-SAT се редуцира до 3-colorability, што значи дека е NP-комплетен.



Графот G за формулата $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ е следниот:



На врвот има три триаголници за x_1, x_2, x_3. Под тоа се трите гаџети за секоја клауза.

Изјавата на теоремата на Кук-Левин е дека проблемот на буловата задоволливост е NP-комплетен. За дадена задача на вистинитост, можеме да потврдиме дали CNF или буловиот израз се задоволуваат или не во полиномско време.

Ако проблемот со одлучување може да се потврди во полиномско време со детерминистичка Тјурингова машина, тогаш може да се реши во полиномско време со недетерминистички алгоритам.

SAT е во NP ако постои недетерминистичка Тјурингова машина која може да ја реши во полиномско време.

Ако некој проблем во NP може да се сведе на SAT проблем во полином-време, тогаш тоа е NP-Complete. Можеме да докажеме со земање на кој било јазик L во NP и да го намалиме на SAT во полиномско време. Бидејќи L е во NP, постои проверувач V кој може да го потврди проблемот со одлучување L во полиномско време. Зошто 3SAT може да се редуцира во SAT, а 3-colorability во 3SAT, се осигураме дека 3-colorability е NP-комплетен.