极限

定义

数列极限def：
$\forall \varepsilon < 0, \exists N > 0, while \quad n > N, there\ is$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = A$$

1. 数列$\{x_n\}$的极限与前有限项无关
2. $\lim\limits_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} X_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} X_{2k-1} = a$

需要分左右极限 求极限问题

1. 分段函数在分界点处的函数极限
2. e^{∞}型极限，如$\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^x$
   > $\because \lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$
3. $\arctan\infty$型极限
   $example \lim\limits_{x\to0^-} \arctan\frac{1}{x}$
   > $\because \lim\limits_{x\to0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$
   > $\lim\limits_{x\to0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

极限存在准则

- 单调有界
- 迫敛性定理
  - $\exists X_n <= Z_n <= Y_n$满足$\lim\limits_{x\to x_0} X_n = \lim\limits_{x\to x_0} Y_n = a$
    则有

$$\lim_{x\to x_0} Z_n = a$$

求极限的方法

1. 基本极限

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to0} (1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, (\text{a>0})$
7. 多项式极限 取最高次项

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |\mathrm{x}|<1 \\ \infty, & |\mathrm{x}|>1 \\ 1, & \mathrm{x}=1 \end{cases}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & \mathrm{x}<0 \\ +\infty, & \mathrm{x}>0 \\ 1, & \mathrm{x}=0 \end{cases}$

2. 1^{∞}型的常用结论

若$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty,$且$\lim\alpha(x)\beta(x)=A,$则有

$$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^A$$

推导：借用重要极限的概念

$$\begin{aligned}&原式=lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha\beta}\\ &\because\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\xRightarrow{原式\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha\beta}}\lim e^{\alpha\beta}\xRightarrow{又\lim\alpha(x)\beta(x)=A}e^A\\ &\therefore\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^A\end{aligned}$$

使用方法：
1.写成标准形式　原式：$\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$
2.求极限　$\lim\alpha(x)\beta(x)=A$
3.结果　原式$=e^A$

3.等价无穷小代换求极限

1. 代换原则：

a.乘除关系可以换　　指数，底数不能换!

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1,$则有

$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1},$

b.加减关系在一定条件下可以换

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1$且$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq1.$则$\alpha-\beta\backsim\alpha_1-\beta_1$

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1$且$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq-1.$则$\alpha+\beta\backsim\alpha_1+\beta_1$

推导减法可替换：借用基本运算法则

原则上只需要令$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=1$　即可证明可替换

$$原式=\lim\frac{\beta[\frac{\alpha}{\beta}-1]}{\beta_1[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1]}\xRightarrow{\lim\frac{\beta}{\beta_1}=1}\lim\frac{\frac{\alpha}{\beta}-1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1}$$

又$\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq1$

$\therefore$原式$=\lim\frac{A-1}{A-1}=1$

$\therefore\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=1$

2. 常用的等价无穷小　$x\to0$

1.$x\backsim\sin x\backsim\arctan x\backsim\tan x\backsim\arcsin x\backsim\ln(1+x)\backsim e^x-1$
2.$a^x-1\backsim xlna$
3.$(1+x)^{\alpha}-1\backsim\alpha x$
4.$1-\cos x\backsim\frac{1}{2}x^2$
5.$\tan x-x\backsim\frac{1}{3}x^3$
6.$x-\arctan x\backsim\frac{1}{3}x^3$

7. $\arcsin x - x \backsim \frac{1}{6}x^3$

4.有理运算法则求极限

$$\begin{aligned}&若\lim f(x)=A,\lim g(x)=B,那么\\&\quad\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)\\&\quad\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)\\&\quad\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\end{aligned}$$

有理运算的意义在于整体与局部的替换关系，从整体运算可以过渡到局部运算.

结论：

1.存在 ± 不存在 = 不存在

2.不存在 ± 不存在 = 不一定

3.存在 $*\div$不存在 = 不一定

4.不存在 $*\div$不存在 = 不一定

结论在整个一元函数微积分都是通用，可以拓展到连续,导数.

5. 洛必达法则求极限

若1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0(\infty)$

2.$f(x)$与$g(x)$在x_0的某个去心领域可导，且$g'(x)\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或$(\infty)$

有结论 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

适用于$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$

tips： 1. $f(x)n$阶可导 $\Rightarrow \exists f^{n-1}(x)$

2.$f(x)n$阶连续可导 $\Rightarrow \exists f^{n}(x)$

6.泰勒展开 ($x\to 0$, 麦克劳林展开)

推荐阅读 怎样更好地理解并记忆泰勒展开式？陈二喜的回答

泰勒展开的本质思想是逼近或者说仿造，通过展开高阶多项式来逼近原函数，基本方法是：

“仿造一条曲线，要首先保证起点相同，再保证在此处的导数相同，继续保证此处导数的导数相同……”

推导过程：

$$let\quad g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots+a_nx^n,\quad f(x)\to Unkown\ func$$

$$\begin{cases}g(0)=f(0) & \text{the same startpoint}\\ g^n(0)=f^n(0) & \text{任意n阶导数相同, n=1,2,3,...}\end{cases}$$

解得 $a_n=\frac{f^n(0)}{n!}$ 求n次导后 只剩下最后一项

逐步回推得：$f(x)\approx g(x)=g(0)+\frac{f^1(0)}{1!}x+\frac{f^2(0)}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n$

起点不一定是0，假定起点为x_0,有

$$f(x)\approx g(x)=g(x_0)+\frac{f^1(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^2(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

> tips:带佩亚诺余项的泰勒公式也称之为局部泰勒公式，可利用于研究局部性态，如极值，趋近于某一点的极限

泰勒的故事结束了，但是泰勒展开的故事还没结束，因为这里上面的n不是趋向∞的，也就是说上述的泰勒展开只能无穷接近于f(x),却永远达不到f(x),要想真正等价于f(x)必须满足下述式子

$$f(x)=g(x)=g(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\cdots\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}$$

> 红色部分由泰勒提出，而佩亚诺提出了式子的蓝色部分，并给出了著名的佩亚诺(误差)余项.

基本思想请查看上面的知乎回答：

$$\text{误差项：}\quad R(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}+\cdots\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}$$

$$\text{佩亚诺余项}=\frac{\text{误差项}}{\text{泰勒展开中最小的项}}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)f^{(n)}(x_0)}(x-x_0)+\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+1)(n+2)f^{(n)}(x_0)}(x-x_0)^2+\cdots$$

佩亚诺写到这里，偷了个懒，直接令 x 趋近于 x_0 ，这样，误差项除以泰勒展开中的最小项不就趋近于0了吗？误差项不就趋近于0了吗？

佩亚诺的故事讲完了，他本想完善泰勒展开，然而，他的成果只能算 x趋近于 x_0 时的情况,所以，接下来拉格朗日出场了。

$$\text{误差：}\quad R(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}+\cdots\frac{f^{(\infty)}(x_0)}{\infty!}(x-x_0)^{\infty}$$

$$\text{显然：}\quad R(x_0)=0$$

$$\text{令}\quad T(x)=(x-x_0)^{n+1},\qquad \text{显然}T(x_0)=0$$

由柯西中值定理有

$$\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{R(x)-0}{T(x)-0}=\frac{R(x)-R(x_0)}{T(x)-T(x_0)}=\frac{R'(\xi_1)}{T'(\xi_1)}=\frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

又

$$\frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{P(\xi_1)}{Q(\xi_1)}=\frac{P(\xi_1)-0}{Q(\xi_1)-0}=\frac{P(\xi_1)-P(x_0)}{Q(\xi_1)-Q(x_0)}=\frac{P'(\xi_2)}{Q'(\xi_2)}$$

用n次柯西中值定理后有

$$\text{拉格朗日余项 R(x)}=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

具体过程参考 妈咪说-拉格朗日余项如何推导

至此，泰勒展开的故事就结束了。

> tips:带拉格朗日余项的泰勒公式也称之为整体泰勒公式，可利用于研究整体性态，如最值，求解不等式等.

7.迫敛性定理求极限

巧用放缩法

8.单调有界求极限

记住基本不等式 $2ab\le a^2+b^2$

步骤：

1.证明有界

2.求单调性

3.求得极限存在，代入式子

9. 利用定积分定义求极限