极限

定义

数列极限def：
$\forall\varepsilon<0,\exists N>0,while\quad n>N,there\ is$

$$\lim_{n\to\infty}X_n=A$$

1. 数列$\{x_n\}$的极限与前有限项无关
2. $\lim\limits_{n\to\infty}=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}X_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}X_{2k-1}=a$

需要分左右极限 求极限问题

1. 分段函数在分界点处的函数极限
2. e^∞型极限，如$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$
   > $\because\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$
3. $\arctan\infty$型极限
   $example\ \lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}$
   > $\because\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$
   > $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

极限存在准则

- 单调有界
- 迫敛性定理
  - $\exists X_n<=Z_n<=Y_n$满足$\lim\limits_{x\to x_0}X_n=\lim\limits_{x\to x_0}Y_n=a$
    则有

$$\lim_{x\to x_0}Z_n=a$$

求极限的方法

1. 基本极限
   1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$
   2. $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}=e$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(\mathrm{a}>0)$
7. 多项式极限 取最高次项
8. $\lim\limits_{x\to\infty}X_n=\begin{cases}0, & \mathrm{|x|<1}\\ \infty, & \mathrm{|x|>1}\\ 1, & \mathrm{x=1}\end{cases}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & \mathrm{x<0}\\ +\infty, & \mathrm{x>0}\\ 1, & \mathrm{x=0}\end{cases}$

2. 1^∞型的常用结论

若$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty,$且$\lim\alpha(x)\beta(x)=A,$则有

$$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^A$$

推导：借用重要极限的概念

原式$=lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha\beta}$

$\because\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\xRightarrow{\text{原式}\lim[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha\beta}}\lim e^{\alpha\beta}\xRightarrow{\text{又}\lim\alpha(x)\beta(x)=A}e^A$

$\therefore\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^A$

使用方法：

1.写成标准形式　原式：$\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$

2.求极限　$\lim\alpha(x)\beta(x)=A$

3.结果　原式$=e^A$

3.等价无穷小代换求极限

1. 代换原则：

$a.$乘除关系可以换　　指数，底数不能换!

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1,$则有

$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1},$

$b.$加减关系在一定条件下可以换

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1$且$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq 1.$则$\alpha-\beta\backsim\alpha_1-\beta_1$

若$\alpha\backsim\alpha_1,\beta\backsim\beta_1$且$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq -1.$则$\alpha+\beta\backsim\alpha_1+\beta_1$

推导减法可替换：借用基本运算法则

原则上只需要令 $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=1$ 即可证明可替换

原式 $=\lim \frac{\beta[\frac{\alpha}{\beta}-1]}{\beta_1[\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1]} \xRightarrow{\lim \frac{\beta}{\beta_1}=1} \lim \frac{\frac{\alpha}{\beta}-1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1}$

又 $\lim \frac{\alpha}{\beta}=A \neq 1$

$\therefore$ 原式 $=\lim \frac{A-1}{A-1}=1$

$\therefore \lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=1$

2. 常用的等价无穷小

1.$x \backsim \sin x \backsim \arctan x \backsim \tan x \backsim \arcsin \backsim \ln(1+x) \backsim e^x-1$

2.$a^x-1 \backsim xlna$

3.$(1+x)^\alpha-1 \backsim \alpha x$

4.$1-\cos x \backsim \frac{1}{2}x^2$

4.有理运算法则求极限

若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 那么

$\lim(f(x) \pm g(x))=\lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim(f(x) \cdot g(x))=\lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

有理运算的意义在于整体与局部的替换关系，从整体运算可以过渡到局部运算.

结论：

1.存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不存在

2.不存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不一定

3.存在 $* \div$不存在 $=$ 不一定

4.不存在 $* \div$不存在 $=$ 不一定

结论在整个一元函数微积分都是通用，可以拓展到连续,导数.

5. 洛必达法则求极限

若1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=0(\infty)$

2.$f(x)$与$g(x)$在x_0的某个去心领域可导，且$g'(x) \neq 0$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或$(\infty)$

有结论 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

适用于$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$