

Модели дискретных сигналов. Задача 3 (отборочный этап)

Постановка задачи

На рисунке дан график функции $|f(\omega)|$, где

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-i\omega k}.$$

Известно, что график пересекает ось ординат ($\omega = 0$) в точке перегиба. По графику требуется найти:

$$|a|, \quad \min |f|, \quad \Re(a), \quad \Im(a)$$

с точностью до 0.0001.

1 Переход к явной формуле

По определению функция имеет вид

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\omega k}.$$

В данной задаче предполагается, что коэффициенты последовательности имеют вид

$$a_k = a^k,$$

где $a \in \mathbb{C}$ — фиксированное комплексное число. В этом случае функция $f(\omega)$ представляется в виде геометрического ряда:

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^k.$$

При условии $|a| < 1$ данный ряд сходится, и его сумма выражается в замкнутом виде:

$$f(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-i\omega}}.$$

Рассмотрим модуль полученной функции:

$$|f(\omega)| = \frac{1}{|1 - ae^{-i\omega}|}.$$

Запишем комплексное число a в полярной форме:

$$a = re^{i\theta}, \quad r = |a|, \quad \theta = \arg a.$$

Тогда

$$|1 - ae^{-i\omega}|^2 = |1 - re^{i(\theta-\omega)}|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \omega),$$

и, следовательно,

$$|f(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \omega)}}. \quad (1)$$

2 Использование данных с графика

2.1 Максимум $|f|$

Из (1) видно, что максимум $|f|$ достигается при минимуме знаменателя, то есть при $\cos(\theta - \omega) = 1$:

$$\max |f| = \frac{1}{|1 - r|} = \frac{1}{1 - r}.$$

По графику горизонтальная штриховая линия показывает значение максимума:

$$\max |f| = 2.2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1 - r} = 2.2 \quad \Rightarrow \quad 1 - r = \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{6}{11}.$$

Итак,

$$|a| = r = \frac{6}{11} = 0.5454545 \dots$$

2.2 Минимум $|f|$

Минимум $|f|$ соответствует максимуму знаменателя (при $\cos(\theta - \omega) = -1$):

$$\min |f| = \frac{1}{1 + r}.$$

Подставляя $r = \frac{6}{11}$:

$$\min |f| = \frac{1}{1 + \frac{6}{11}} = \frac{1}{\frac{17}{11}} = \frac{11}{17} = 0.6470588 \dots$$

2.3 Условие перегиба в точке $\omega = 0$ и определение фазы

Обозначим

$$g(\omega) = |f(\omega)|.$$

По условию задачи график $|f(\omega)|$ пересекает ось ординат в точке перегиба, то есть

$$g''(0) = 0.$$

Из формулы

$$|f(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \omega)}}$$

получаем

$$g(\omega) = (1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \omega))^{-1/2}.$$

Дифференцируя по ω и подставляя $\omega = 0$, получаем условие перегиба в виде алгебраического уравнения относительно $c = \cos \theta$:

$$rc^2 + (1 + r^2)c - 3r = 0. \quad (2)$$

Подставляя найденное ранее значение $r = \frac{6}{11}$ и приводя к целым коэффициентам, получаем:

$$66c^2 + 157c - 198 = 0.$$

Ответ (точность 0.0001)

$$|a| = 0.5455,$$

$$\min |f| = 0.6471,$$

$$\Re(a) = 0.4973,$$

$$\Im(a) = 0.2241.$$

3 График

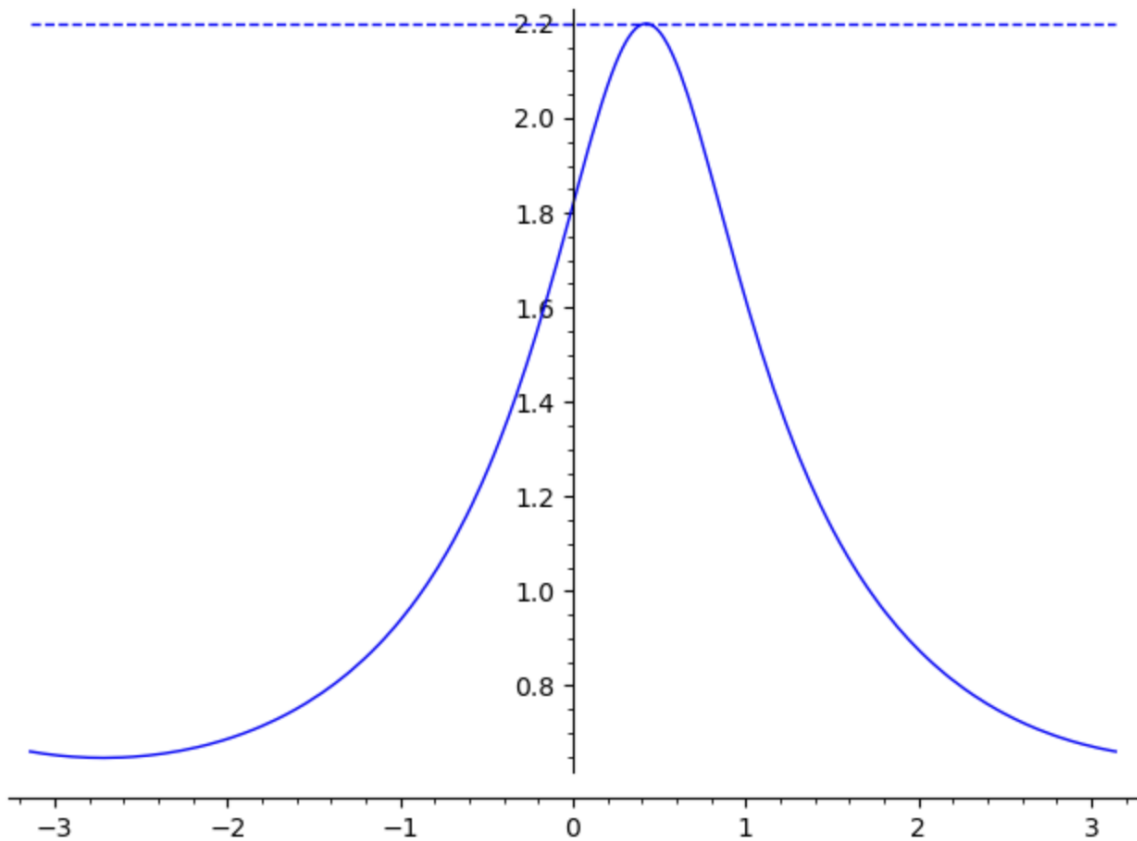


Рис. 1: Данный в условии график зависимости $|f(\omega)|$.

4 Листинг программы (Python)

```
1 import math
2
3 f_max = 2.2
4
5 r = 1.0 - 1.0 / f_max
```

```

6
7 A = r
8 B = 1.0 + r*r
9 C = -3.0 * r
10
11 disc = B*B - 4.0*A*C
12 c1 = (-B + math.sqrt(disc)) / (2.0*A)
13 c2 = (-B - math.sqrt(disc)) / (2.0*A)
14
15 candidates = []
16 for c in (c1, c2):
17     if -1.0 <= c <= 1.0:
18         theta = math.acos(c)
19         candidates.append((theta, c))
20
21 theta, c = min(candidates, key=lambda t: t[0])
22
23 f_min = 1.0 / (1.0 + r)
24
25 re_a = r * math.cos(theta)
26 im_a = r * math.sin(theta)
27
28 print("abs_a =", "{:.10f}".format(r))
29 print("min_abs_f =", "{:.10f}".format(f_min))
30 print("re_a =", "{:.10f}".format(re_a))
31 print("im_a =", "{:.10f}".format(im_a))
32
33 print("abs_a_4dp =", "{:.4f}".format(r))
34 print("min_abs_f_4dp =", "{:.4f}".format(f_min))
35 print("re_a_4dp =", "{:.4f}".format(re_a))
36 print("im_a_4dp =", "{:.4f}".format(im_a))

```