Явная схема:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = a\ \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} +\ f_j^n;\ \ j = 1, \dots, M-1; n = 0, \dots, N-1.$$

Рассматриваемая начально-краевая задача:

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} + x\cos(xt) +\ \mathrm{t}^2\sin(xt);\ \ x \in (0, \pi);\ \ t \in (0, 1]$$

$$u(x, 0) = 0$$

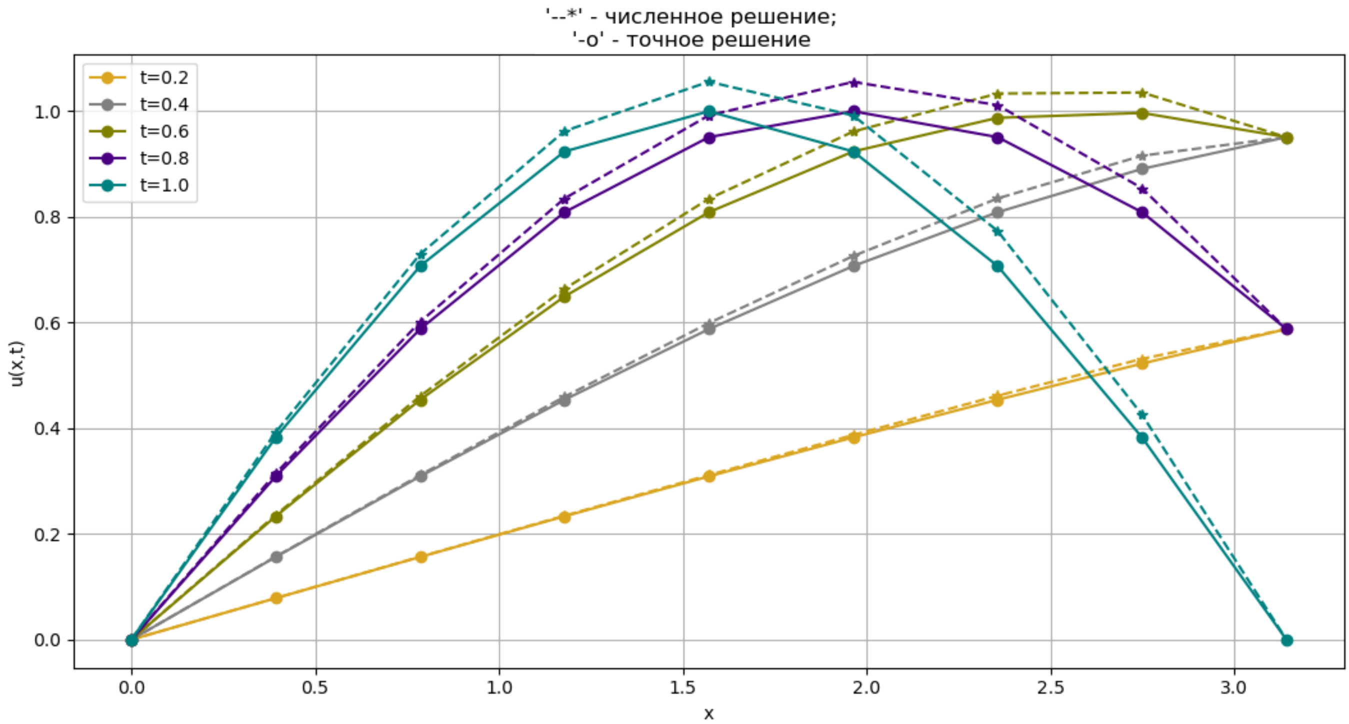
$$u(0, t) = 0; u(\pi, t) = \sin(\pi t)$$

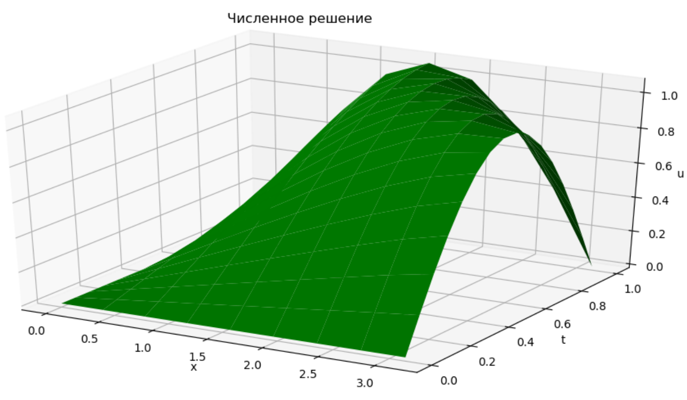
Аналитическое решение задачи: $u_{correct}(x,t) = \sin(xt)$

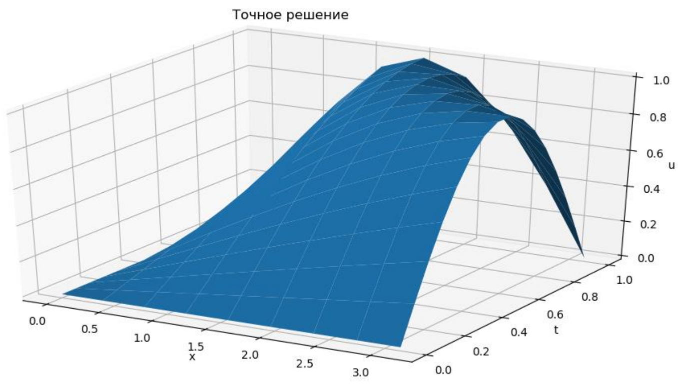
1. Рассмотрим решение на «крупной» сетке: *M = 8; N = 15*

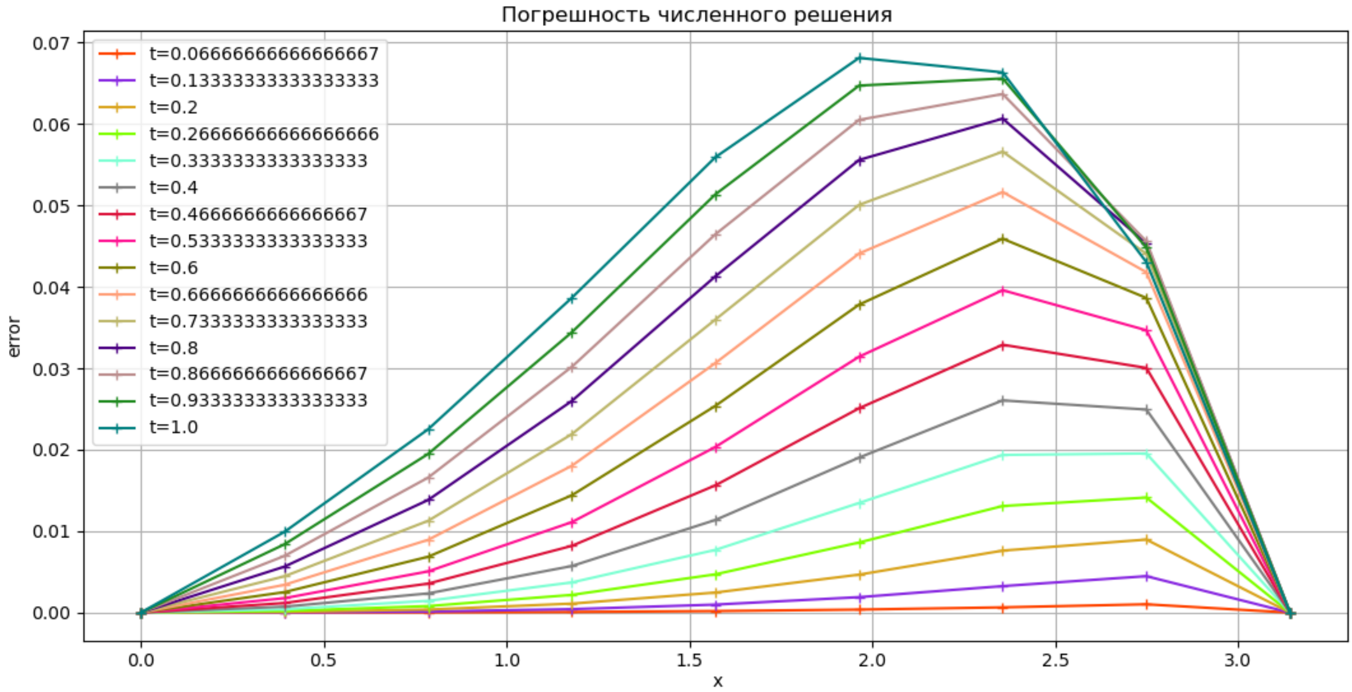
Шаг по *x: 0.39269908169872414*;   шаг по *t: 0.06666666666666667*

Условие устойчивости выполняется.









Абсолютная погрешность (норма разности точного и численного решений):

0.06810993833294088

Норма точного решения: *1.0*

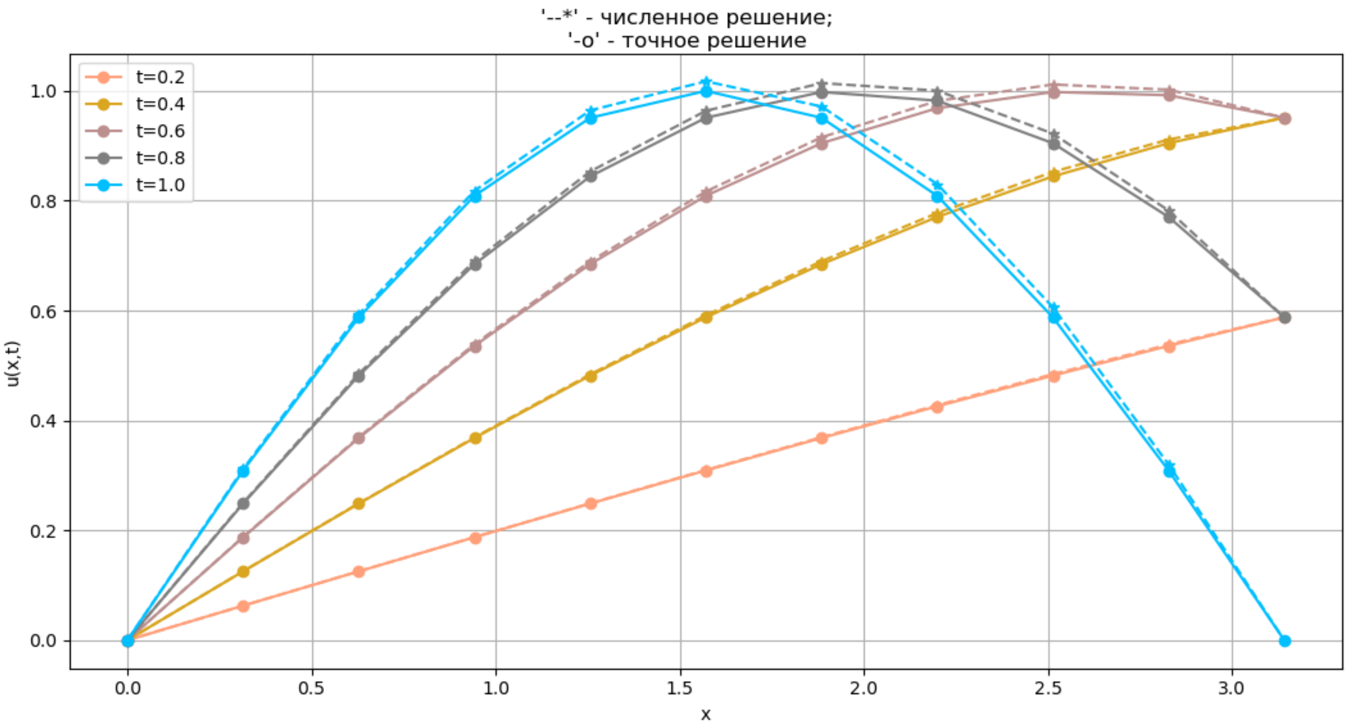
Относительная погрешность (отношение абсолютной погрешности к норме точного решения):

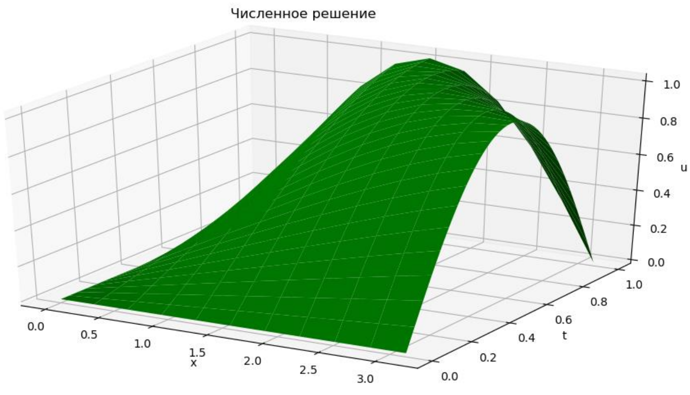
0.06810993833294088

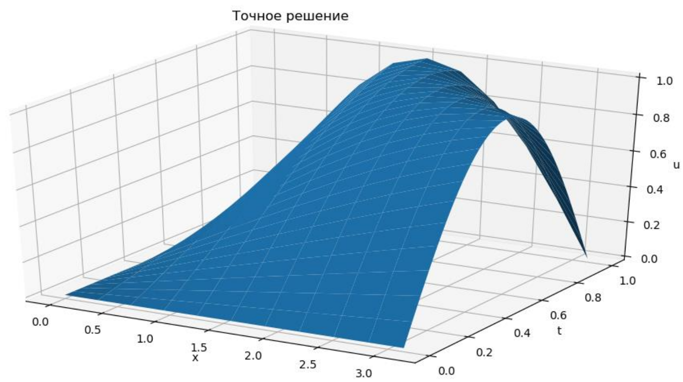
2. Рассмотрим решение на более «мелкой» сетке: *M = 10; N = 50*

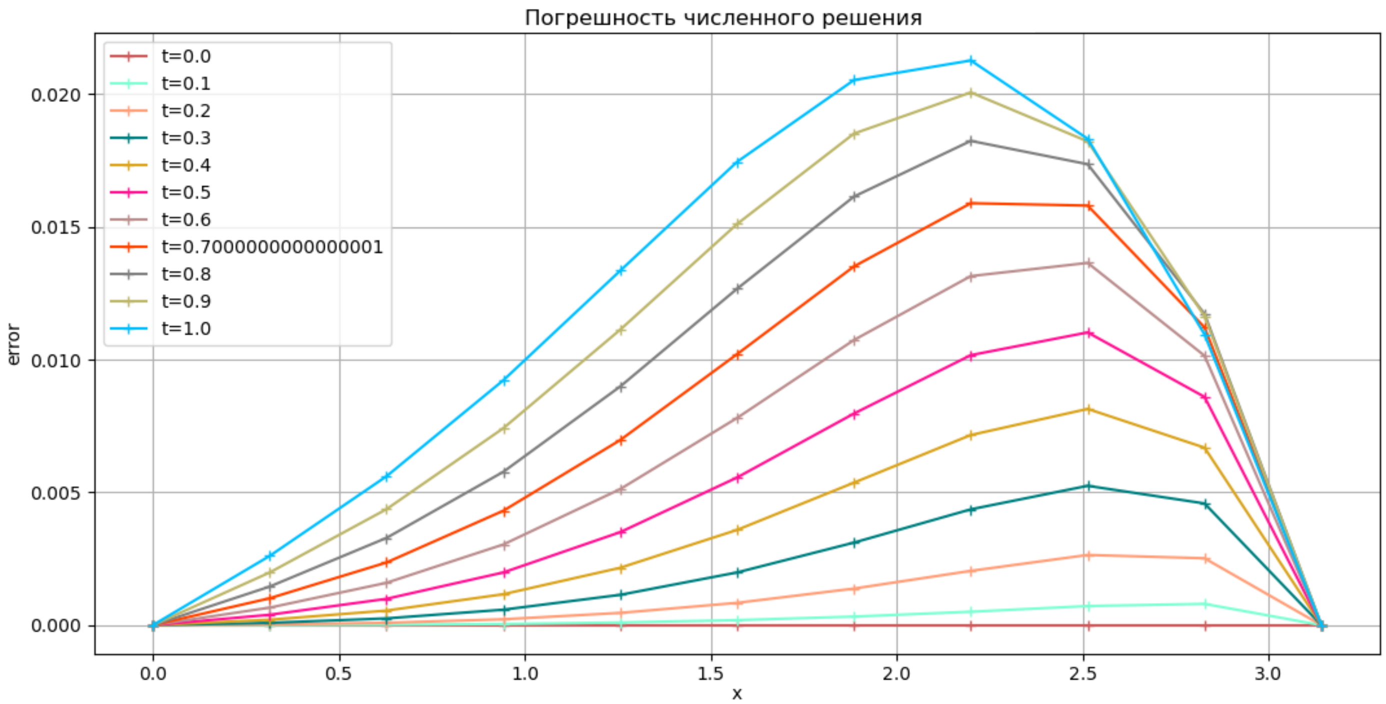
Шаг по x: *0.3141592653589793*   Шаг по t: *0.02*

Условие устойчивости выполняется.









Абсолютная погрешность (норма разности точного и численного решений):

0.021269933377285

Норма точного решения: *1.0*

Относительная погрешность (отношение абсолютной погрешности к норме точного решения):

0.021269933377285

3. Нарушим условие устойчивости, взяв *M = 20 N = 50*

Шаг по x: *0.15707963267948966*   Шаг по t: *0.02*

Условие устойчивости **не** выполняется.

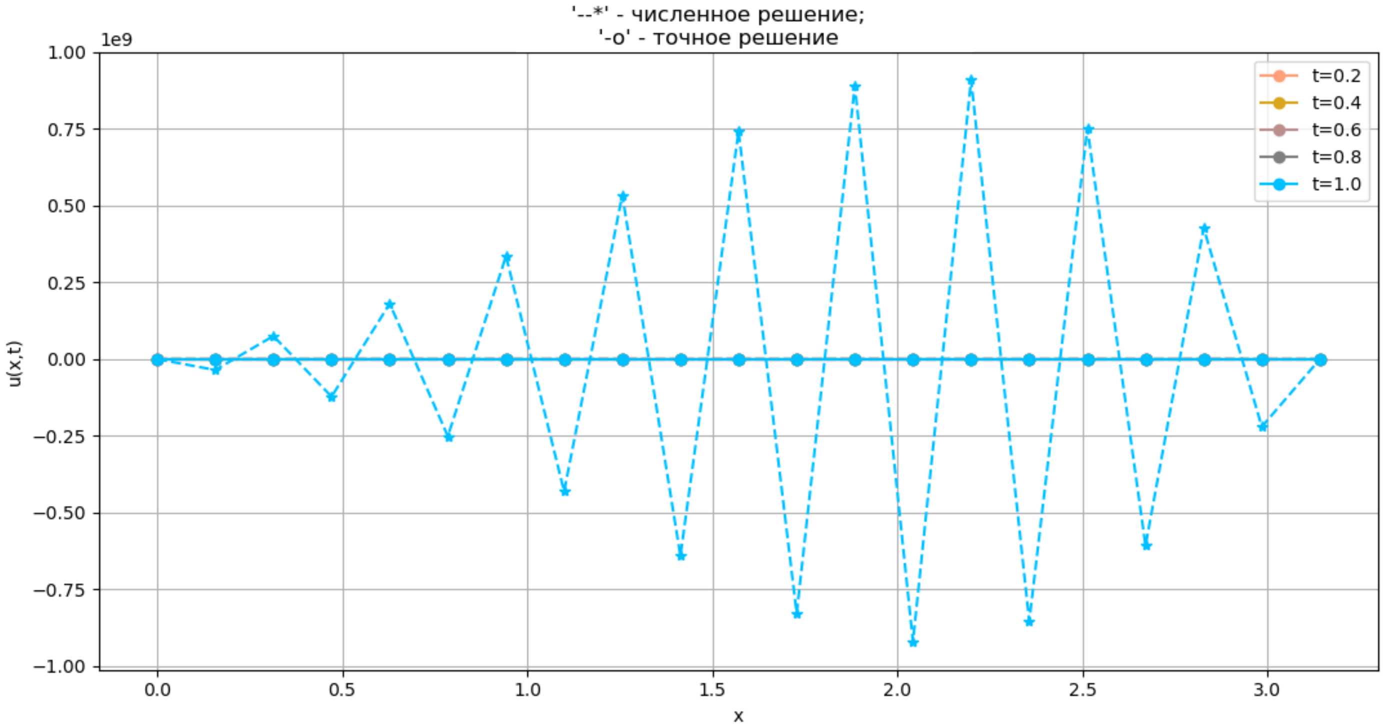
Абсолютная погрешность (норма разности точного и численного решений):

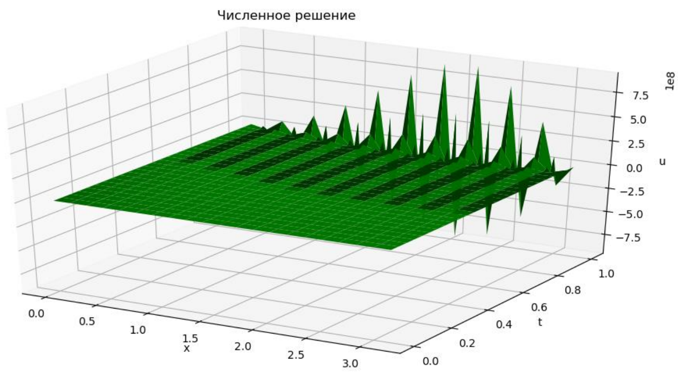
920127813.9215162

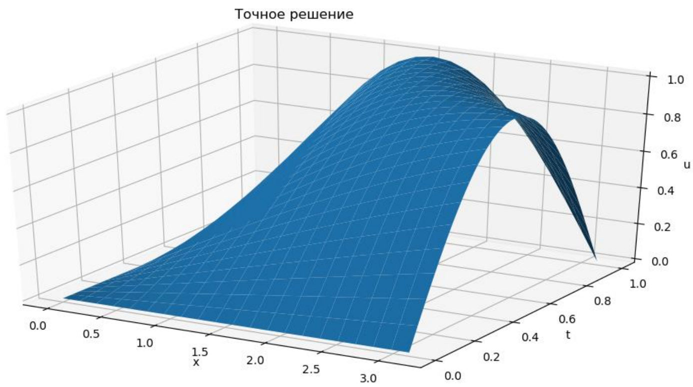
Норма точного решения: *1.0*

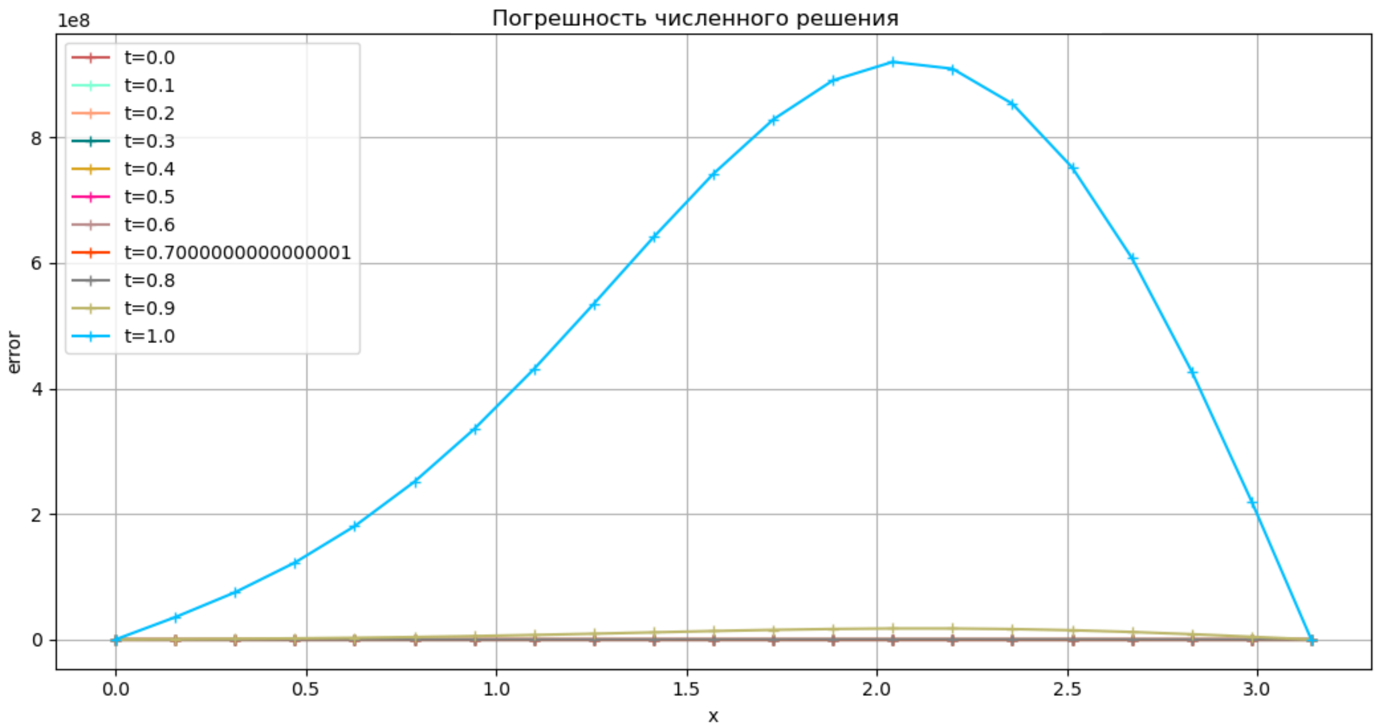
Относительная погрешность (отношение абсолютной погрешности к норме точного решения):

920127813.9215162


'--*' - численное решение;
'-o' - точное решение
1e9
u(x,t)
x
t=0.2
t=0.4
t=0.6
t=0.8
t=1.0


Численное решение
1e8
u
x
t


Точное решение
u
x
t


Погрешность численного решения
1e8
error
x
t=0.0
t=0.1
t=0.2
t=0.3
t=0.4
t=0.5
t=0.6
t=0.7000000000000001
t=0.8
t=0.9
t=1.0