Аппроксимация фазовых траектории квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник*

Тихонов Д. М., Стрижов В. В.

Аннотация: Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этогов решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических и декартовых координатах в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковыроженных самопересечений на поверхности единичной сферы. Предлагается аппроксимировать полученную фазовую траекторию с помощью сферических гармоник. Эксперимент проведен на показателях акселерометра мобильного устройства во время ходьбы и бега.

Ключевые слова: *временные ряды; траекторное подпространство; фазовая траектория; сферические функции.*

1 Введение

Ставится задача построения модели аппроксимации квазипериодического временного ряда. Примерами таких сигналов являются показания акселерометра во время ходьбы, бега, велопрогулок и тп.

Для этого строится пространство фазовой тракетории по выбранному временному ряду. Это делается с помощью построения траекторной матрицы или матрицы Ганкеля.

Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается использовать метод главных компонент (PCA).

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроецировать имеющуюся траекторию на p-мерную единичную сферу и перейти в $p-1$-мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

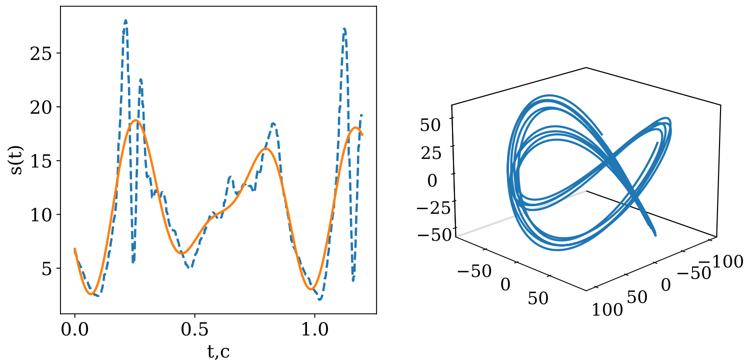
На рис. 1 показан изначальный временной ряд и его разложение, пунктирной и сплошной линией соответственно, а также его фазовая траектория уменьшенная в пространство размерности 3 с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA).

2 Постановка задачи

По имеющемуся временному ряду $\mathbf{s} = [s_1, ..., s_N]^\mathsf{T}$ строится траекторная матрица или матрица Ганкеля

$$\mathbf{H_s} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{N-n+1} & s_{N-n+2} & \dots & s_{N-1} & s_N \end{bmatrix} \tag{1}$$

*



(a) Временной ряд ($б$) Фазовая траектория (PCA)

Рис. 1 Исследуемый временной ряд и его фазовая трастория.

где N-длинна временного ряда, n-ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим t-ую строку матрицы Ганкеля $\mathbf{H_s}$ за $\mathbf{x_t}$. Матрица $\mathbf{H_s}$ пребразуется к:

$$\mathbf{H_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_m} \end{bmatrix}, \mathbf{x_t} = [s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+n-1}], m = N - n + 1 \tag{2}$$

Все векторы $\mathbf{x_t}$ принадлежат $\mathbb{H}_\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^n$. Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \to \mathbb{H}_x^p \to \mathbb{S}_z^{(p)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \tag{3}$$

Определение 1. *Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда* $\mathbf{x}$ *- это такое отображение* g*, что:*

$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \to \mathbf{S} \tag{4}$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности $(p-1)$, в котором выбранное отображение $h : \mathbf{H}_x^n \to \mathbf{S}_x^{(p-1)}$, где $(p-1) \ll n$, сохраняет геометрическую структуру множество точек $\mathbf{H}_x^n$.

Определение 2. *Структурная сложность - это количество параметров* q *модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.*

3 Модели аппроксимации

3.1 GAN для фазовых траекторий в 2D

– **Модель генератор реальных данных**

$$t \to s \xrightarrow{Hankel} \mathbf{x}_i \xrightarrow{PCA} x_i, \tag{5}$$

где x_i - точка фазовой траектории в уменьшенном пространстве, $x_i \in \mathbb{R}^2$.

– **Модель генератор синтетических данных**

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \varphi) = \sum_{j=0}^{l} w_{0,j} cos(j\varphi) + i w_{1,j} sin(j\varphi), \tag{6}$$

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi, \quad \hat{x}_\varphi = [real(f_{ph}),\ imag(f_{ph})], \quad \hat{x}_\varphi \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

где $\mathbf{w}$ - вектор параметров (коэффициентов) тригонометрического ряда, l-количество пар коэффициентов.
Восстановление изначального временного ряда с помощью f_{ph} можно представить в виде

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi \xrightarrow{inverse\ PCA} \mathbf{x}_i \xrightarrow{inverse\ Hankel} s \tag{8}$$

– **Дискриминатор или функция потери и оптимизация**
Функцию потерь представляется в виде

$$\text{Loss}(\hat{\mathbf{x}}_\varphi, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{101} \sum_{j=1}^{k} (\hat{x}_{\varphi,i} - x_{i,j})^2 \tag{9}$$

где для любого фиксированного i $\{x_{i,j}\}_1^k - k$ ближайших соседей к $\hat{x}_{\varphi,i}$.
Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w} | \{x\}) \tag{10}$$

3.2 GAN для фазовых траекторий в 3D

Предполагается, что структура модели проще в сферических координатах. Построим отображение $x_p \in \mathbb{H}_x^p$ в $\mathbb{S}_z^{p-1}$ при $p = 2$.

$$\varphi : \mathbf{x}_p(t) \to \mathbf{z}_{(p-1)}(t) = [\alpha_1(t), ..., \alpha_{p-1}(t), rt] \tag{11}$$

В качестве базисных функций на поверхности 3 мерной сферы выберем сферические гармоники:

$$Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(cos\theta) e^{im\varphi} \tag{12}$$

– **Модель генератор синтетических данных**

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n,m \in N,M} w_{n,m} Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) \tag{13}$$

– **Дискриминатор или функция потери и оптимизация**
Функцию потерь представляется в виде

$$\text{Loss} = \sum_{n,m \in N,M} \hat{f}_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) - f_{real}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{14}$$

Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w}|\{z_2\}) \tag{15}$$

4 Эксперимент

4.1 Аппроксимация сферическими гармониками 3D

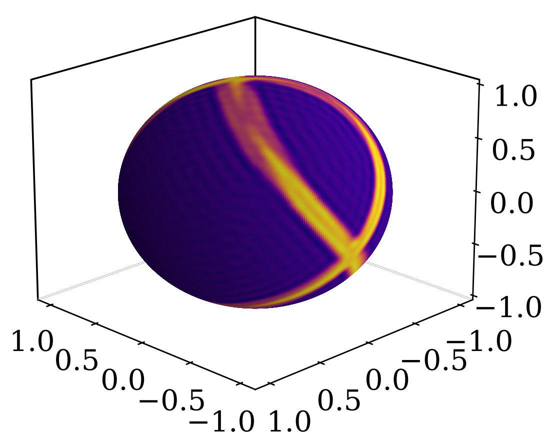


Рис. 2 Аппроксимация сферическими гармониками 3D.

5 Заключение