Аппроксимация фазовых траектории квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник*

Аннотация: Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этогов решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических и декартовых координатах в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковыроженных самопересечений на поверхности единичной сферы. Предлагается аппроксимировать полученную фазовую траекторию с помощью сферических гармоник. Эксперимент проведен на показателях акселерометра мобильного устройства во время ходьбы и бега.

Ключевые слова: *временные ряды; траекторное подпространство; фазовая траектория; сферические функции.*

1 Введение

Ставится задача построения модели аппроксимации квазипериодического временного ряда. Примерами таких сигналов являются показания акселерометра во время ходьбы и бега. [1]

Для этого строится пространство фазовой тракеториии по выбранному временному ряду. Это делается с помощью построения траекторной матрицы или матрицы Ганкеля. Для нашего исследования Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается для сравнения использовать различные линейные и нелинейные методы рассмотренные в [2].

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроецировать имеющуюся траекторию на p-мерную единичную сферу и перейти в $p-1$-мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

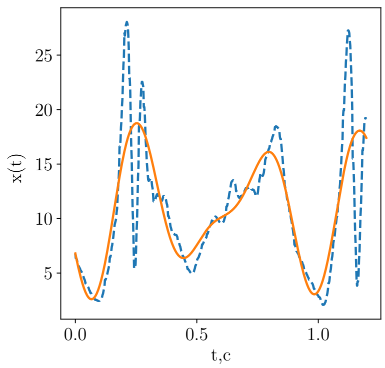
На рис. 1 показан изначальный временной ряд и его разложение, пунктирной и сплошной линией соответственно, а также его фазовая траектория уменьшенная в пространство размерности 3 с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA).

2 Постановка задачи

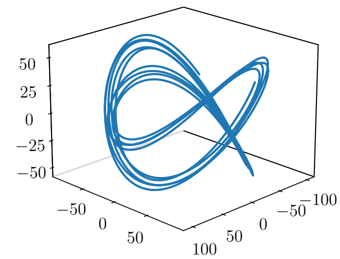
По имеющемуся временному ряду $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_N]^\mathsf{T}$ строится траекторная матрица или матрица Ганкеля

$$\mathbf{H_x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{N-n+1} & x_{N-n+2} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix} \tag{1}$$

*



(*а*) Временной ряд



(*б*) Фазовая траектория (PCA)

Рис. 1 Исследуемый временной ряд и его фазовая траетория.

где N-длинна временного ряда, n-ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим t-ую строку матрицы Ганкеля $\mathbf{H_x}$ за $\mathbf{x_t}$. Матрица $\mathbf{H_x}$ пребразуется к:

$$\mathbf{H_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_m} \end{bmatrix}, \mathbf{x_t} = [x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+n-1}], m = N - n + 1 \tag{2}$$

Все векторы $\mathbf{x_t}$ принадлежат $\mathbb{H}_\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^n$. Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \to \mathbb{H}_x^p \to \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \tag{3}$$

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \to \mathbb{S}_x^n \to \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \tag{4}$$

При понижении пространства, во-первых, требуется отыскать подходящий способ снижения размерности (линейные, нелинейные, нейросетевые методы), во-вторых, необходимо определить в каком пространсве сокращение размерности приведет к наименьшей потери информации и далее найти оптимальной сложности приближение при отысканию вложений.

Определение 1. *Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда* $\mathbf{x}$ *- это такое отображение* g*, что:*

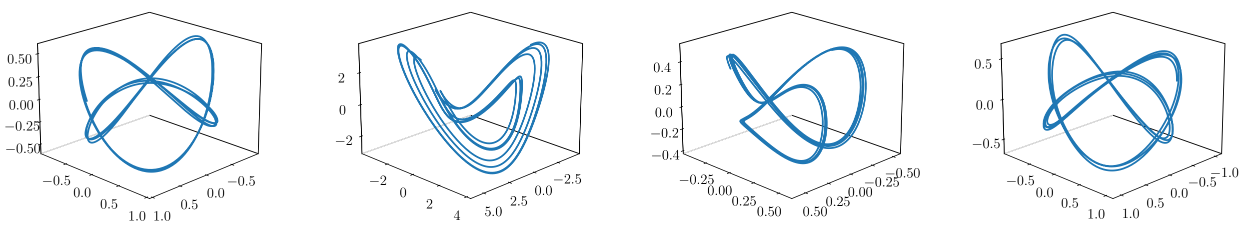
$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \to \mathbf{S} \tag{5}$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности $(p-1)$, в котором выбранное отображение $h : \mathbf{H}_x^n \to \mathbf{S}_x^{(p-1)}$, где $(p-1) \ll n$, сохраняет геометрическую структуру множество точек $\mathbf{H}_x^n$.

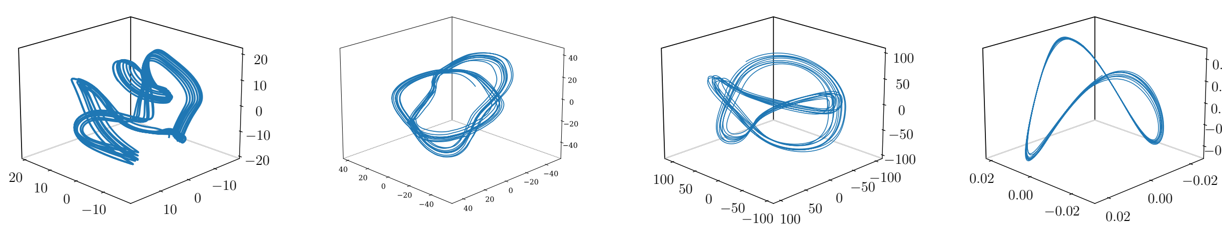
Определение 2. *Структурная сложность - это количество параметров q модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.*

3 Понижение размерности

Рассматриваемый поход предполагает использование и анализ различных алгоритмов понижения размерности согласно [2]. Предполагается, что исследуемые способы относятся к различным семействам алгоритмов понижения размерности и позволяют качественно отыскивать одномерные многообразия в многомерных пространствах. Для упрощения первоначального анализа будем использовать 3-мерное итоговое пространство.



(*а*) KPCA cosine (*б*) KPCA poly (*в*) KPCA rbf (*г*) KPCA sigmoid



(*д*) t-SNE (*е*) Autoencoder (*ж*) MDS (*з*) Hessian LLE

Рис. 2 Уменьшенит размерности фазовой траектории в декартовых координатах.

Некоторые из исследуемых моделей уже можно использовать в качестве аппроксимационных, так как с помощью координат в уменьшеном пространстве можно задавать вид фазовой траектории для различных типов движения.

В таблице 1 сравним точности различных алогритмов в смысле точности восстановления изначальной траектории согласно MAPE:

$$\text{MAPE}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right| \tag{6}$$

Таблица 1 MAPE восстановленной траектории.

Алгоритм	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7
`PCA`	10	10	10	10	10	5
`KPCA Cosine`	46.35	38.50	29.61	28.84	28.49	28.54
`KPCA poly`	46.36	36.86	22.22	20.02	19.25	17.94
`KPCA rbf`	45.55	45.36	44.93	44.82	44.50	44.56
`KPCA sigmoid`	47.04	47.04	47.04	47.04	47.04	47.04
`t-SNE`	—	—	—	—	—	—
`Autoencoder`	—	—	—	—	—	—
`MDS`	—	—	—	—	—	—
`Hessian LLE`	—	—	—	—	—	—

4 Представление сигнала в сферических координатах

5 Анализ избыточности размерности пространства

6 Аппроксимация сферическими гармониками

7 Эксперимент

8 Заключение

Литература

1. author. title. *journal*, 1999.
2. Laurens van der Maaten, Eric Postma, and H. Herik. Dimensionality reduction: A comparative review. *Journal of Machine Learning Research*, 10, 01 2007.