

# Аппроксимация фазовых траектории квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник\*

**Аннотация:** Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этого решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических координатах (и декартовых) в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковырожденных самопересечений на поверхности единичной сферы. Аппроксимация полученной фазовой траектории с помощью сферических гармоник. Эксперимент проведен на показателях акселерометра во время ходьбы.

**Ключевые слова:** временные ряды; траекторное подпространство; фазовая траектория; сферические функции.

## 1 Введение

Ставится задача построения модели аппроксимации квазипериодического временного ряда. Примерами таких сигналов являются показания акселерометра во время ходьбы и бега. [1]

Для этого строится пространство фазовой траектории по выбранному временному ряду. Это делается с помощью построения траекторной матрицы или матрицы Ганкеля.

Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается для сравнения использовать следующие методы: метода главной компоненты (PCA)[?], метод сферической регрессии (Directional regression)[?] и метод вложений различной дисперсии (Distinguishing variance embedding)[?].

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроецировать имеющуюся траекторию на  $p$ -мерную единичную сферу и перейти в  $p - 1$ -мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

## 2 Постановка задачи

По имеющемуся временному ряду  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$  строится траекторная матрица или матрица Ганкеля

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{N-n+1} & x_{N-n+2} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

где  $N$ -длинна временного ряда,  $n$ -ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим  $t$ -ую строку матрицы Ганкеля  $\mathbf{H}_x$  за  $\mathbf{x}_t$ . Матрица  $\mathbf{H}_x$  преобразуется к:

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \mathbf{x}_t = [x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+n-1}], m = N - n + 1 \quad (2)$$

Все векторы  $\mathbf{x}_t$  принадлежат  $\mathbb{H}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ . Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{H}_x^p \rightarrow \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \quad (3)$$

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{S}_x^n \rightarrow \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \quad (4)$$

При понижении пространства, во-первых, требуется отыскать подходящий способ снижения размерности (линейные, нелинейные, нейросетевые методы), во-вторых, необходимо определить в каком пространстве сокращение размерности приведет к наименьшей потере информации и далее найти оптимальной сложности приближение при отысканию вложений.

**Определение 1.** *Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда  $\mathbf{x}$  - это такое отображение  $g$ , что:*

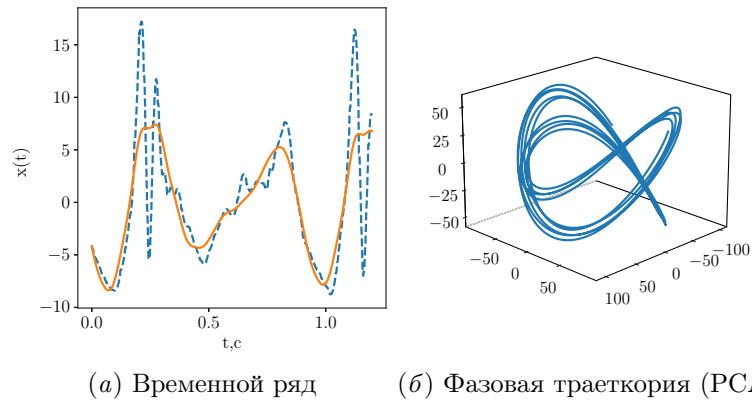
$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \quad (5)$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности  $(p - 1)$ , в котором выбранное отображение  $h : \mathbf{H}_x^n \rightarrow \mathbf{S}_x^{(p-1)}$ , где  $(p - 1) \ll n$ , сохраняет геометрическую структуру множество точек  $\mathbf{H}_x^n$ .

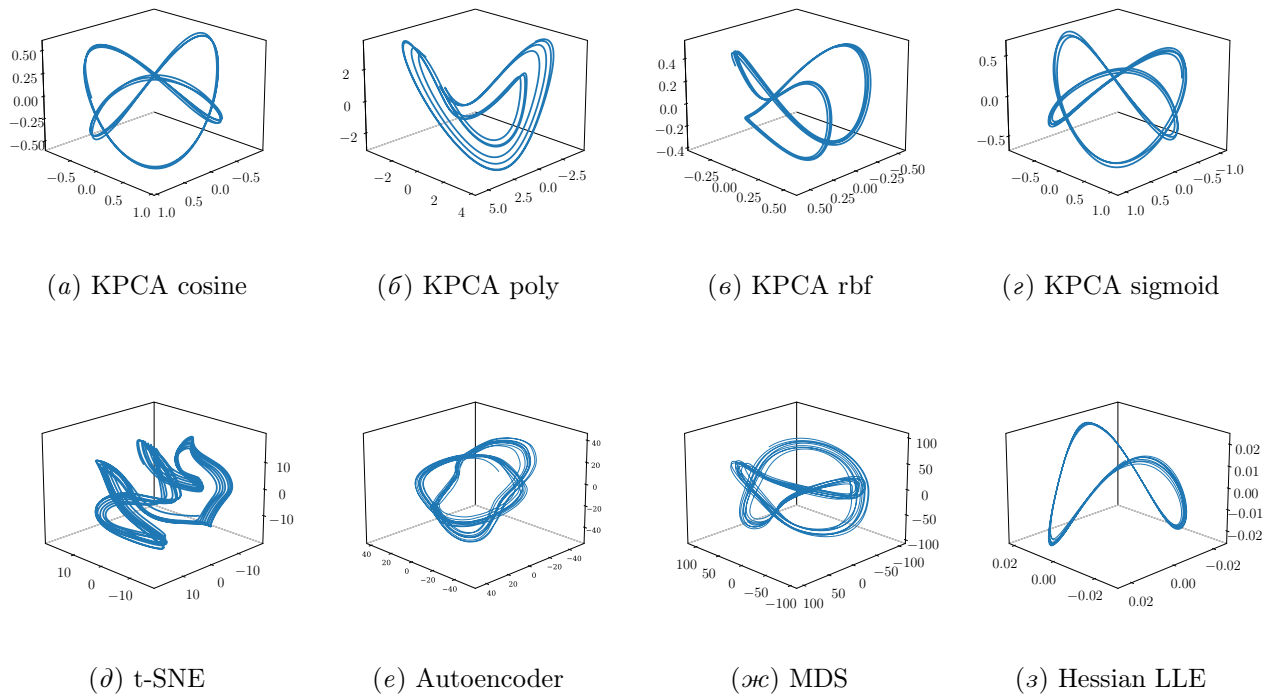
**Определение 2.** *Структурная сложность - это количество параметров  $q$  модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.*

### 3 Понижение размерности

Рассматриваемый подход предполагает использование и анализ различных алгоритмов понижения размерности [2]. Для упрощения первоначального анализа будем использовать 3-мерное итоговое пространство. В данной работе для изучения выбранного временного ряда используется алгоритм анализа спектральных компонент (singular spectrum analysis, SSA). На рис. 1 показан изначальный временной ряд и его разложение, пунктирной и сплошной линией соответственно, а также его фазовая траектория уменьшенная в пространство размерности 3 с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA).



**Рис. 1** Исследуемый временной ряд и его фазовая траектория.



**Рис. 2** Уменьшенит размерности фазовой траектории в декартовых координатах.

## Литература

1. author. title. *journal*, 1999.
2. Laurens van der Maaten, Eric Postma, and H. Herik. Dimensionality reduction: A comparative review. *Journal of Machine Learning Research*, 10, 01 2007.