Аппроксимация фазовых траектории квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник*

Аннотация: Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этогов решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических координатах (и декартовых) в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковыроженных самопересечений на поверхности единичной сферы. Аппроксимация полученной фазовой траектории с помощью сферических гармоник. ? Эксперимент проведен на показателях акселерометра во время ходьбы.

Ключевые слова: *временные ряды; траекторное подпространство; фазовая траектория; сферические функции.*

1 Введение

Ставится задача построения модели аппроксимации квазипериодического временного ряда. Примерами таких сигналов являются показания акселерометра во время ходьбы и бега.

Для этого строится пространство фазовой тракеториии по выбранному временному ряду. Это делается с помощью построения траекторной матрицы или матрицы Ганкеля.

Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается для сравнения использовать следующие методы: метода главной компоненты (PCA)[?], метод сферической регрессии (Directional regression)[?] и метод вложений различной дисперсии (Distinguishing variance embedding)[?].

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроецировать имеющуюся траекторию на p-мерную единичную сферу и перейти в $p-1$-мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

2 Постановка задачи

По имеющемуся временному ряду $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_N]^\mathsf{T}$ строится траекторная матрица или матрица Ганкеля

$$\mathbf{H_x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{N-n+1} & x_{N-n+2} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где N-длинна временного ряда, n-ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим t-ую строку матрицы Ганкеля $\mathbf{H_x}$ за $\mathbf{x_t}$. Матрица $\mathbf{H_x}$ пребразуется к:

*

$$\mathbf{H_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_m} \end{bmatrix}, \mathbf{x_t} = [x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n-1}], m = N - n + 1 \tag{2}$$

Все векторы $\mathbf{x_t}$ принадлежат $\mathbb{H}_\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^n$. Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \to \mathbb{H}_x^p \to \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \tag{3}$$

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \to \mathbb{S}_x^n \to \mathbb{S}_x^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \tag{4}$$

При понижении пространства, во-первых, требуется отыскать подходящий способ снижения размерности (линейные, нелинейные, нейросетевые методы), во-вторых, необходимо определить в каком пространсве сокращение размерности приведет к наименьшей потери информации и далее найти оптимальной сложности приближение при отысканию вложений.

Определение 1. *Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда* $\mathbf{x}$ *- это такое отображение* g*, что:*

$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \to \mathbf{S} \tag{5}$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности $(p-1)$, в котором выбранное отображение $h : \mathbf{H}_x^n \to \mathbf{S}_x^{(p-1)}$, где $(p-1) \ll n$, сохраняет геометрическую структуру множество точек $\mathbf{H}_x^n$.

Определение 2. *Структурная сложность - это ??? количество параметров* q *модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.*