

# Аппроксимация фазовых траекторий квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник

Тихонов Д. М., Стрижсов В. В.

**Аннотация:** Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этого решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических и декартовых координатах в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковыраженных самопересечений на поверхности единичной сферы. Предлагается аппроксимировать полученную фазовую траекторию с помощью сферических гармоник. Эксперимент проведен на показателях акселерометра мобильного устройства во время ходьбы и бега.

**Ключевые слова:** временные ряды, траекторное подпространство, фазовая траектория, аппроксимация, сферические гармоники, матрица Ганкеля.

## 1 Введение

Работа посвящена аппроксимации квазипериодических временных рядов. Примерами таких рядов являются показания акселерометра во время ходьбы, бега и тп.

Для аппроксимации временного ряда строится пространство фазовых траекторий. Это делается с помощью построения траекторной матриц или матрицы Ганкеля. Этот метод используется при анализе нестационарных временных рядов. Например, в методе сингулярного спектрального анализа (singular spectrum analysis, SSA [1]) разложения на компоненты и прогноз основаны на траекторной матрице. Матрица Ганкеля позволяет перейти от одномерного (скалярного) временного ряда к многомерному (векторному) представлению. Матрицы Ганкеля так же получили широкое распространение в анализе нелинейных динамических систем [2]

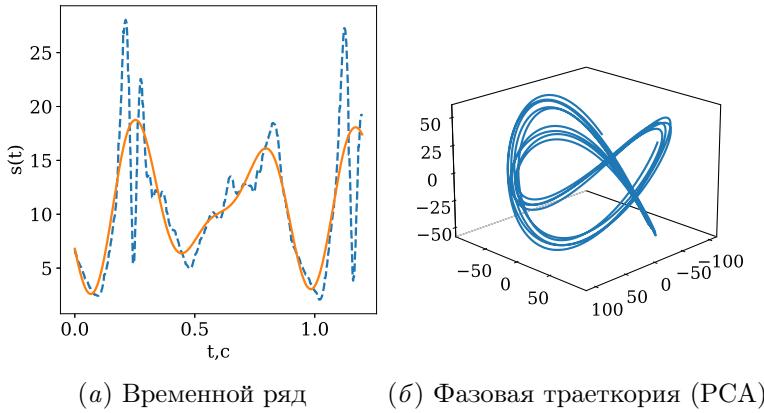
Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается использовать метод главных компонент (PCA).

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроектировать имеющуюся траекторию на  $p$ -мерную единичную сферу и перейти в  $p - 1$ -мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

На рис. 1 показан изначальный временной ряд и его разложение, пунктирной и сплошной линией соответственно, а также его фазовая траектория уменьшенная в пространство размерности 3 с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA).

## 2 Постановка задачи

По имеющемуся временному ряду  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_N]^T$  строится траекторная матрица или матрица Ганкеля



**Рис. 1** Исследуемый временной ряд и его фазовая траектория.

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{N-n+1} & s_{N-n+2} & \dots & s_{N-1} & s_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

где  $N$ -длина временного ряда,  $n$ -ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим  $t$ -ую строку матрицы Ганкеля  $\mathbf{H}_s$  за  $\mathbf{x}_t$ . Матрица  $\mathbf{H}_s$  преобразуется к:

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \mathbf{x}_t = [s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+n-1}], m = N - n + 1 \quad (2)$$

Все векторы  $\mathbf{x}_t$  принадлежат  $\mathbb{H}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ . Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{H}_x^p \rightarrow \mathbb{S}_z^{(p)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \quad (3)$$

**Определение 1.** Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда  $x$  - это такое отображение  $g$ , что:

$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \quad (4)$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности  $(p - 1)$ , в котором выбранное отображение  $h : \mathbf{H}_x^n \rightarrow \mathbf{S}_x^{(p-1)}$ , где  $(p - 1) \ll n$ , сохраняет геометрическую структуру множество точек  $\mathbf{H}_x^n$ .

**Определение 2.** Структурная сложность - это количество параметров  $q$  модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.

### 3 Модели аппроксимации

#### 3.1 GAN для фазовых траекторий в 2D

- Модель генератор реальных данных

$$t \rightarrow s \xrightarrow{\text{Hankel}} \mathbf{x}_i \xrightarrow{\text{PCA}} x_i, \quad (5)$$

где  $x_i$  - точка фазовой траектории в уменьшенном пространстве,  $x_i \in \mathbb{R}^2$ .

- Модель генератор синтетических данных

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \varphi) = \sum_{j=0}^l w_{0,j} \cos(j\varphi) + i w_{1,j} \sin(j\varphi), \quad (6)$$

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi, \quad \hat{x}_\varphi = [real(f_{ph}), imag(f_{ph})], \quad \hat{x}_\varphi \in \mathbb{R}^2, \quad (7)$$

где  $\mathbf{w}$  - вектор параметров (коэффициентов) тригонометрического ряда,  $l$ -количество пар коэффициентов.

Восстановление изначального временного ряда с помощью  $f_{ph}$  можно представить в виде

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi \xrightarrow{\text{inverse PCA}} \mathbf{x}_i \xrightarrow{\text{inverse Hankel}} s \quad (8)$$

- Дискриминатор или функция потери и оптимизация

Функцию потерь представляется в виде

$$\text{Loss}(\hat{\mathbf{x}}_\varphi, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{101} \sum_{j=1}^k (\hat{x}_{\varphi,i} - x_{i,j})^2 \quad (9)$$

где для любого фиксированного  $i$   $\{x_{i,j}\}_1^k$  -  $k$  ближайших соседей к  $\hat{x}_{\varphi,i}$ .

Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w} | \{x\}) \quad (10)$$

#### 3.2 GAN для фазовых траекторий в 3D

Предполагается, что структура модели проще в сферических координатах. Построим отображение  $x_p \in \mathbb{H}_x^p$  в  $\mathbb{S}_z^{p-1}$  при  $p = 2$ .

$$\varphi : \mathbf{x}_p(t) \rightarrow \mathbf{z}_{(p-1)}(t) = [\alpha_1(t), \dots, \alpha_{p-1}(t), rt] \quad (11)$$

В качестве базисных функций на поверхности 3 мерной сферы выберем сферические гармоники:

$$Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (12)$$

- Модель генератор синтетических данных

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n,m \in N,M} w_{n,m} Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) \quad (13)$$

- Дискриминатор или функция потери и оптимизация

Функцию потерь представляется в виде

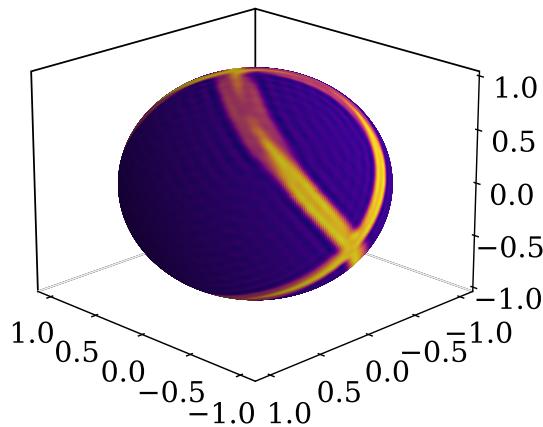
$$\text{Loss} = \sum_{n,m \in N,M} \hat{f}_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) - f_{real}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (14)$$

Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w} | \{z_2\}) \quad (15)$$

## 4 Эксперимент

### 4.1 Аппроксимация сферическими гармониками 3D



**Рис. 2** Аппроксимация сферическими гармониками 3D.

## 5 Заключение

**Литература**

1. Zhigljavsky A. A. Golyandina N., Nekrutkin V. Analysis of time series structure: Ssa and related techniques. *Chapman and Hall*, 2002.
2. F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 1981.