Сферические гармоники для моделирования квазипериодических временных рядов

Тихонов Денис Максимович

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

2021 г.

Сферические гармоники для моделирования квазипериодических временных рядов

Цель работы. Построение модели аппроксимации квазипериодического временного ряда в фазовом пространстве с использованием сферических гармоник.

Проблема. При анализе квазипериодических временных рядов возникает необходимость построения устойчивой модели фазовой траектории в декартовых или сферическом координатах.
Изменяющиеся характерные частоты и амплитуды сигналов приводят к неустойчивости оценок параметров моделей.

Требуется:

1. предложить способ понижения размерности фазового пространства;
2. разработать метод аппроксимации устойчивый к шумам, изменению частоты и амплитуды сигнала;
3. предложить метод отыскания фазы сигнала.

Литература

1. Усманова К. Р. и др. (2020) **Аппроксимация фазовой траектории квазипериодических сигналов методом сферической регрессии** //*Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*
2. **Автоэнкодер для определения фазы сигнала**
   Jatesiktat P., Ang W. T. (2017). Unsupervised Phase Extraction Using Dual Autoencoder. // *2017 International Conference on Advanced Computing and Applications*
3. **Обнаружение периодов для сегментации биомедицинских сигналов**
   Motrenko A., Strijov V. (2015) Extracting fundamental periods to segment biomedical signals //*IEEE journal of biomedical and health informatics*
4. **Сферические гармоники для параметризации поверхности сферы**
   Nortje C., Ward W., Neuman B., Li Bai, (2015) Spherical Harmonics for Surface Parametrisation and Remeshing // *Mathematical Problems in Engineering*

Задача аппроксимации фазовой траектории

Задачи: $t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_s^n \to \mathbb{H}_x^p \to \mathbb{S}_z^p \hookrightarrow [0, 2\pi)$
$\mathbb{H}_s^n$ — исходное фазовое пространство;
$\mathbb{H}_x^p$ — фазовое подпространство в декартовых координатах;
$\mathbb{S}_z^p$ — фазовое подпространство в сферических координатах.

Требуется построить:

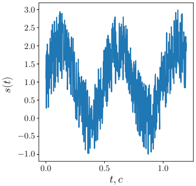
1. модель $g(\cdot)$, аппроксимирующую фазовую траекторию

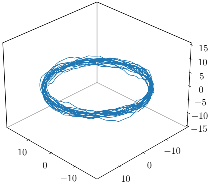
$$g : \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbf{A} \to \mathbb{S}_z^p,$$

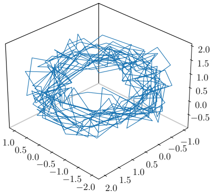
2. модель $f(\cdot)$, восстанавливаюую фазу сигнала

$$f : \mathbb{R}^{q_2} \times \mathbb{S}_z^p \to [0, 2\pi),$$

где q_1, q_2 - число параметров модели, $\mathbf{A} = [0, \pi] \times [0, 2\pi) \times \cdots \times [0, 2\pi)$.







Методы построения фазового пространства

1. Метод задержек для построения фазовой траектории

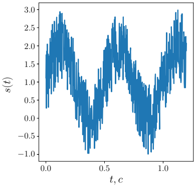
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-n+1} & \dots & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i \in \mathbb{H}_s^n$$

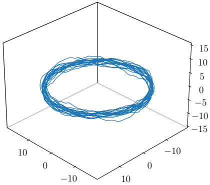
где n — ширина окна;

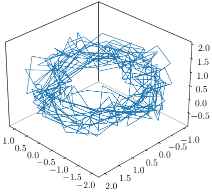
2. Метод PCA для построения фазового подпространства меньшей размерности $p \ll n$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{SW} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{N-n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{H}_p^x,$$

где $\mathbf{W}$ — матрица вращения.





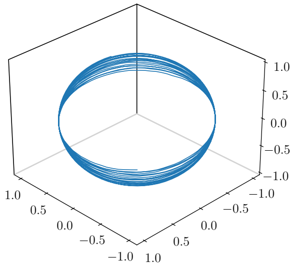


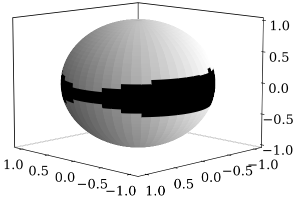
Сферическое представление фазовой траектории

1. Предполагается, что структура модели проще в сферических координатах.
2. В полученном подпространстве $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^p$ строится отображение из декартовых координат в сферические:

   $$\phi : \mathbf{x} \to \mathbf{z} = [r, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1], \quad \mathbf{a} = [\alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1]$$

   .
3. Точки $\mathbf{a}$ задают функцию $f_{\text{real}}(\mathbf{a}(t))$ $t \in [0, +\infty)$ на поверхности сферы $\mathbb{S}^{p-1}$.





Аппроксимация сферическими гармониками

1. Предлагается аппроксимировать фазовую траекторию на поверхности сферы с помощью сферических гармоник:

$$f_{\mathsf{sp}}(\mathbf{w}_{sp}, \mathbf{a}) = \sum_{l_{p-1}=0}^{N_{\mathbf{approx}}} \sum_{l_{p-2}=0}^{l_{p-1}} \dots \sum_{l_1=-l_2}^{l_2} w_{l_{p-1},\dots,l_1} Y_{l_{p-1},\dots,l_1}(\mathbf{a})$$

,

2. Базисные функции представимы в виде

$$Y_{l_{p-1},\dots,l_1}(\mathbf{a}) = \left[\prod_{k=2}^{p-1} {}_k\overline{P}_{l_k}^{l_{p-1}}(\alpha_k)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i l_1 \alpha_1\right)$$

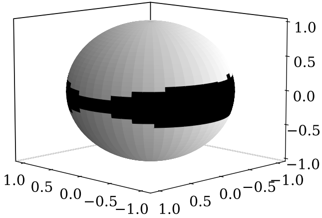
, где $l_{p-1}, \dots, l_1$ - индексы удовлетворяющие

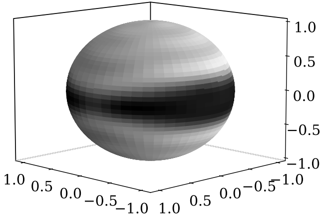
$$l_{p-1} \geq l_{p-2} \geq \dots \geq l_2 \geq |l_1|.$$

3. Решается задача

$$\hat{\mathbf{w}}_{sp} = \arg\min_{\mathbf{w}_{sp}} \left\| f_{\mathsf{real}}(\mathbf{a}(t)) - f_{\mathsf{sp}}(\mathbf{w}_{sp}, \mathbf{a}(t)) \right\|^2$$

.



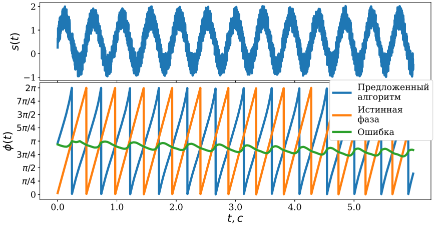


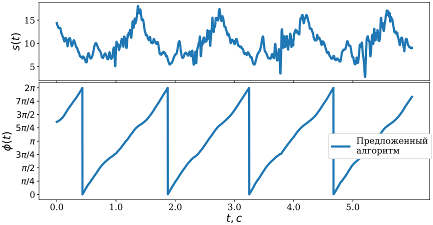
Восстановление фазы сигнала

Предлагается восстанавливать фазу сигнала с помощью автоэнкодера в фазовом сферическом подпространстве:

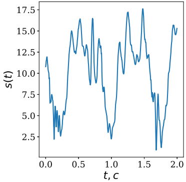
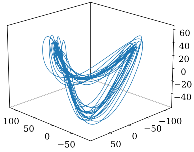
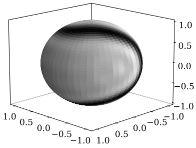
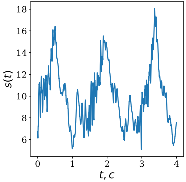
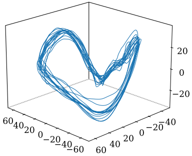
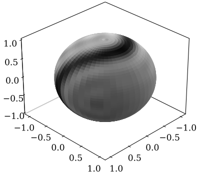
$$\phi(t) = \sigma(\mathbf{W}_{\text{enc}}\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}_{\text{enc}}), \quad \hat{\mathbf{a}}(t) = \sigma(\mathbf{W}_{\text{dec}}\phi(t) + \mathbf{b}_{\text{dec}}).$$

С решением в виде $\mathbf{W}_{\text{enc}} = \arg\min \|\mathbf{a}(t) - \hat{\mathbf{a}}(t)\|_2^2$.





Качество аппроксимации на реальных данных с акселерометра

	Временной ряд	Фазовая траектория в 3D	Аппроксимация гармониками
Велопрогулка			
Приседания			

Заключение

Предложенная композиция методов позволяет уменьшить количество параметров с нескольких тысяч, в случае с полноценным автоэнкодером, до нескольких сотен. В частности:

1. Предложен метод построения и уменьшения фазового пространства. Метод построении векторов задержек и разложения на главные компоненты;
2. Предложен метод аппроксимации фазовой траектории в сферических координатах произвольной размерности с использованием сферических гармоник;
3. Разработан метод восстановления фазы основанный на автоенкодере в пространства углов.