

Аппроксимация фазовых траекторий квазипериодических сигналов с помощью сферических гармоник*

Аннотация: Цель данной работы - построить модель аппроксимации наименьшей структурной сложности. Для этого решается задача аппроксимации фазовой траектории, построенной по квазипериодическому временному ряду. Фазовая траектория представлена в сферических и декартовых координатах в виде проекции на единичную сферу в пространстве оптимальной размерности. Оптимальное пространство - это пространство минимальной размерности, в котором фазовая траектория не имеет ярковыраженных самопересечений на поверхности единичной сферы. Предлагается аппроксимировать полученную фазовую траекторию с помощью сферических гармоник. Эксперимент проведен на показателях акселерометра мобильного устройства во время ходьбы и бега.

Ключевые слова: временные ряды; траекторное подпространство; фазовая траектория; сферические функции.

1 Введение

Ставится задача построения модели аппроксимации квазипериодического временного ряда. Примерами таких сигналов являются показания акселерометра во время ходьбы и бега.

Для этого строится пространство фазовой траектории по выбранному временному ряду. Это делается с помощью построения траекторной матрицы или матрицы Ганкеля. Для нашего исследования Размерность траекторного пространства может оказаться избыточна. Это может приводить к неустойчивости исследуемых моделей и сложному описанию временного ряда. Для понижения размерности фазового пространства предлагается для сравнения использовать различные линейные и нелинейные методы рассмотренные в [2].

В выбранном пространстве уменьшенной размерности предлагается спроектировать имеющуюся траекторию на p -мерную единичную сферу и перейти в $p - 1$ -мерное сферическое пространство. Полученную определенную на поверхности сферы функцию предлагается представить в виде ряда разложенного по сферическим функциям.

На рис. 1 показан изначальный временный ряд и его разложение, пунктирной и сплошной линией соответственно, а также его фазовая траектория уменьшенная в пространство размерности 3 с помощью метода главных компонент (principal component analysis, PCA).

2 Постановка задачи

По имеющемуся временному ряду $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_N]^T$ строится траекторная матрица или матрица Ганкеля

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{N-n+1} & s_{N-n+2} & \dots & s_{N-1} & s_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

*

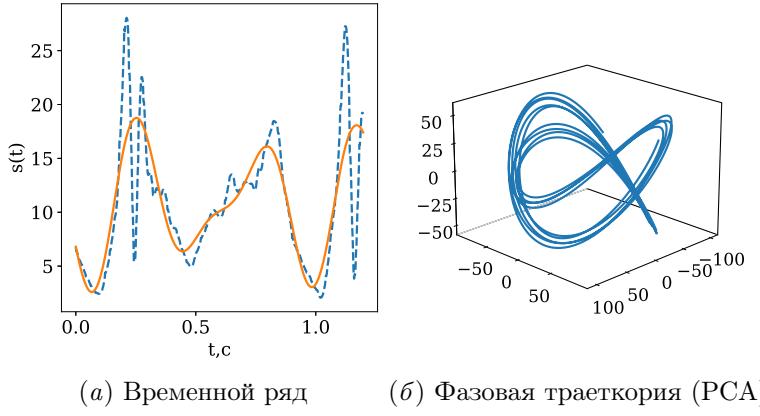


Рис. 1 Исследуемый временнной ряд и его фазовая траектория.

где N -длинна временного ряда, n -ширина окна, не меньшая, чем предполагаемый период. Обозначим t -ую строку матрицы Ганкеля \mathbf{H}_s за \mathbf{x}_t . Матрица \mathbf{H}_s преобразуется к:

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \mathbf{x}_t = [s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+n-1}], m = N - n + 1 \quad (2)$$

Все векторы \mathbf{x}_t принадлежат $\mathbb{H}_x \subseteq \mathbb{R}^n$. Предполагается, что размерность траекторного пространства избыточна, поэтому предлагается исследовать некоторые проекции на траекторное подпространство. Однако заранее неизвестно, в каком пространстве необходимо уменьшать размерность, поэтому задача приобретает следующий состоящий из двух вариантов вид:

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{H}_x^p \rightarrow \mathbb{S}_z^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \quad (3)$$

$$t \mapsto \mathbf{x} \mapsto \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{S}_z^n \rightarrow \mathbb{S}_z^{(p-1)} \hookrightarrow [0, 2\pi] \xrightarrow{f} r \quad (4)$$

При понижении пространства, во-первых, требуется отыскать подходящий способ снижения размерности (линейные, нелинейные, нейросетевые методы), во-вторых, необходимо определить в каком пространстве сокращение размерности приведет к наименьшей потери информации и далее найти оптимальной сложности приближение при отысканию вложений.

Определение 1. Параметрическая аппроксимирующая модель временного ряда \mathbf{x} - это такое отображение g , что:

$$g : \mathbb{R}^q \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \quad (5)$$

Предполагается, что аппроксимирующая модель строится в пространстве меньшей размерности $(p - 1)$, в котором выбранное отображение $h : \mathbb{H}_x^n \rightarrow \mathbb{S}_x^{(p-1)}$, где $(p - 1) \ll n$, сохраняет геометрическую структуру множество точек \mathbb{H}_x^n .

Определение 2. Структурная сложность - это количество параметров q модели, позволяющих строить адекватную аппроксимацию.

3 Понижение размерности

3.1 Алгоритмы понижения размерности

Рассматриваемый поход предполагает использование и анализ различных алгоритмов понижения размерности согласно [2]. Предполагается, что исследуемые способы относятся к различным семействам алгоритмов понижения размерности и позволяют качественно отыскивать одномерные многообразия в многомерных пространствах.

Используется алгоритм Kernel Principal Component Analysis (KPCA), описанный в [3, 4], позволяющий обобщить классический PCA с помощью нелинейных преобразований Φ матрицы несмещенных данных \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$:

$$C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi(\mathbf{x}_i) \Phi(\mathbf{x}_i)^T, \quad \sum_{i=1}^m \Phi(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}, \quad n \ll n' \quad (6)$$

Далее применяется ядерный метод позволяющий избегать явного отображения в новое пространство высокой размерности, включающий в себя матрицу Грама $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и функцию ядро k . Для нахождения итогового отображения в пространство малой размерности находятся собственные значения и собственные вектора матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$, если данные не центрированы.

$$\mathbf{K}_{i,j} = k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \Phi(\mathbf{x}_i)^T \Phi(\mathbf{x}_j), \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{1}_m \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{1}_m + \mathbf{1}_m \mathbf{K} \mathbf{1}_m, \quad (7)$$

где $\mathbf{1}_m$ - это матрица $m \times m$, в которой каждый элемент равен $1/m$.

Применяются следующие базовые варианты ядерной функции k .

- **Линейное ядро (англ. linear)**

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T, \quad (8)$$

это ядро приводящее KPCA к классическому линейному PCA.

- **Полиномиальное ядро (англ. polynomial или poly)**

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T + c)^d, \quad d \geq 0, \quad c \geq 0 \quad (9)$$

- **Гауссово ядро (англ. Radial basis function, rbf)**

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0 \quad (10)$$

- **Сигмоидальное ядро (англ. sigmoid)**

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \tanh(\gamma(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T) + c), \quad \gamma > 0, \quad c \geq 0 \quad (11)$$

- **Косинусное ядро (англ. cosine)**

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T}{\|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\|} \quad (12)$$

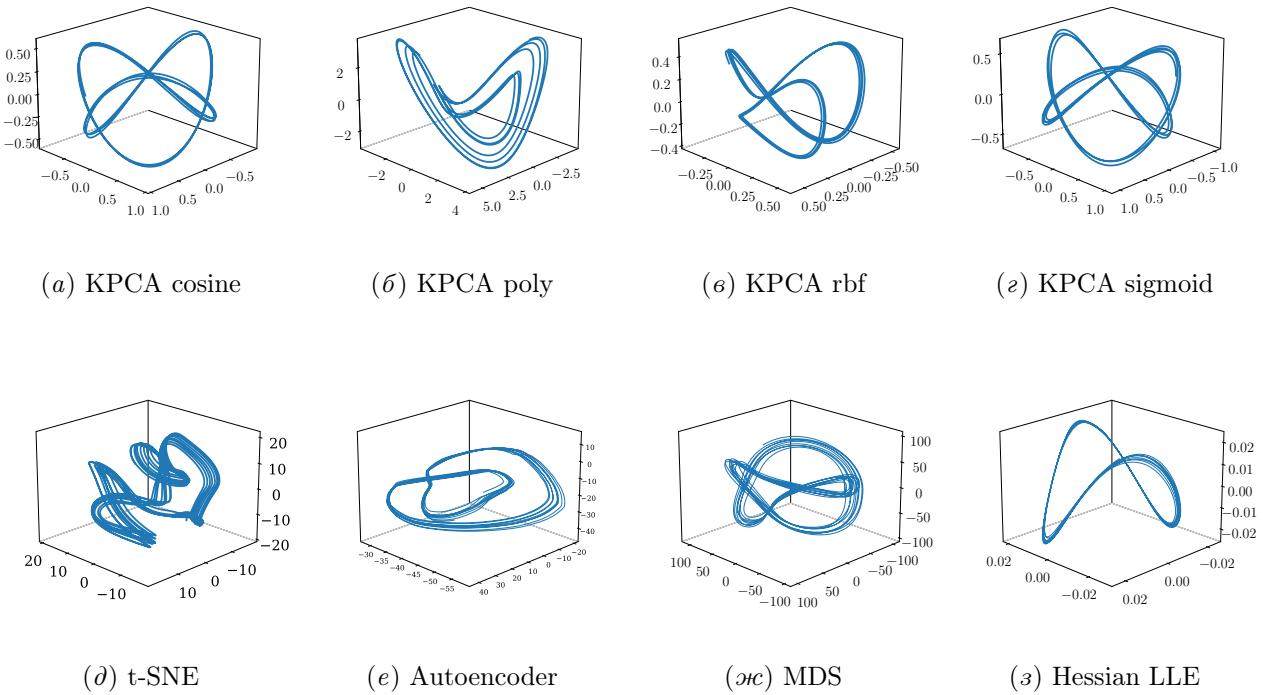


Рис. 2 Уменьшени́т размерности фазовой траектории в декартовых координатах.

Таблица 1 МАРЕ восстановленной траектории.

| Алгоритм | p=2 | p=3 | p=4 | p=5 | p=6 | p=7 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| PCA | — | — | — | — | — | — |
| KPCA Cosine | 46.35 | 38.50 | 29.61 | 28.84 | 28.49 | 28.54 |
| KPCA poly | 46.36 | 36.86 | 22.22 | 20.02 | 19.25 | 17.94 |
| KPCA rbf | 45.55 | 45.36 | 44.93 | 44.82 | 44.50 | 44.56 |
| KPCA sigmoid | 47.04 | 47.04 | 47.04 | 47.04 | 47.04 | 47.04 |
| t-SNE | — | — | — | — | — | — |
| Autoencoder | — | — | — | — | — | — |
| MDS | — | — | — | — | — | — |
| Hessian LLE | — | — | — | — | — | — |

3.2 Фазовые траектории в пространстве малой размерности

Некоторые из исследуемых моделей уже можно использовать в качестве аппроксимационных, так как с помощью координат в уменьшенном пространстве можно задавать вид фазовой траектории для различных типов движения.

В таблице 1 сравним точности различных алгоритмов в смысле точности восстановления изначальной траектории согласно MAPE:

$$\text{MAPE}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right| \quad (13)$$

4 Модели аппроксимации

4.1 GAN для фазовых траекторий в 2D

- Модель генератор реальных данных

$$t \rightarrow s \xrightarrow{\text{Hankel}} \mathbf{x}_i \xrightarrow{\text{PCA}} x_i, \quad (14)$$

где x_i - точка фазовой траектории в уменьшенном пространстве, $x_i \in \mathbb{R}^2$.

- Модель генератор синтетических данных

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \varphi) = \sum_{j=0}^l w_{0,j} \cos(j\varphi) + i w_{1,j} \sin(j\varphi), \quad (15)$$

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi, \quad \hat{x}_\varphi = [real(f_{ph}), imag(f_{ph})], \quad \hat{x}_\varphi \in \mathbb{R}^2, \quad (16)$$

где \mathbf{w} - вектор параметров (коэффициентов) тригонометрического ряда, l -количество пар коэффициентов.

Восстановление изначального временного ряда с помощью f_{ph} можно представить в виде

$$\varphi \xrightarrow{f_{ph}} \hat{x}_\varphi \xrightarrow{\text{inverse PCA}} \mathbf{x}_i \xrightarrow{\text{inverse Hankel}} s \quad (17)$$

- Дискриминатор или функция потери и оптимизация

Функцию потерь представляется в виде

$$\text{Loss}(\hat{\mathbf{x}}_\varphi, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{101} \sum_{j=1}^k (\hat{x}_{\varphi,i} - x_{i,j})^2 \quad (18)$$

где для любого фиксированного i $\{x_{i,j}\}_1^k$ - k ближайших соседей к $\hat{x}_{\varphi,i}$.

Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w} | \{x\}) \quad (19)$$

4.2 GAN для фазовых траекторий в 3D

Предполагается, что структура модели проще в сферических координатах. Построим отображение $x_p \in \mathbb{H}_x^p$ в \mathbb{S}_z^{p-1} при $p = 2$.

$$\varphi : \mathbf{x}_p(t) \rightarrow \mathbf{z}_{(p-1)}(t) = [\alpha_1(t), \dots, \alpha_{p-1}(t), rt] \quad (20)$$

В качестве базисных функций на поверхности 3 мерной сферы выберем сферические гармоники:

$$Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (21)$$

- Модель генератор синтетических данных

$$f_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n,m \in N,M} w_{n,m} Y_l^m(\alpha_1, \alpha_2) \quad (22)$$

- Дискриминатор или функция потери и оптимизация

Функцию потерь представляется в виде

$$\text{Loss} = \sum_{n,m \in N,M} \hat{f}_{ph}(\mathbf{w}, \alpha_1, \alpha_2) - f_{real}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (23)$$

Решается задача оптимизации:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2l}} \text{Loss}(\mathbf{w} | \{z_2\}) \quad (24)$$

5 Эксперимент

5.1 Аппроксимация сферическими гармониками 3D

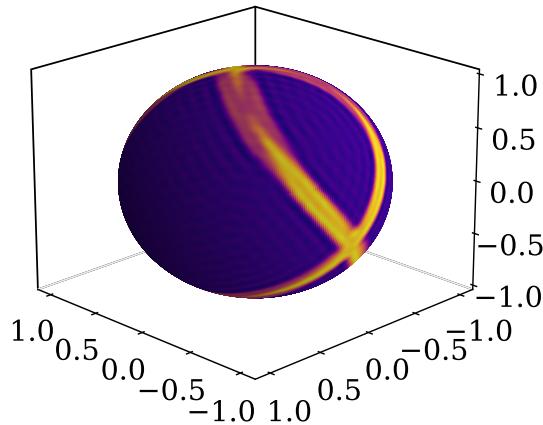


Рис. 3 Аппроксимация сферическими гармониками 3D.

6 Заключение

Литература

1. author. title. *journal*, 1999.
2. Laurens van der Maaten, Eric Postma, and H. Herik. Dimensionality reduction: A comparative review. *Journal of Machine Learning Research*, 10, 01 2007.
3. Bernhard Scholkopf, Alex Smola, and Klaus-Robert Muller. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. *Neural Computation*, 10:1299–1319, 07 1998.
4. Kenneth Ezukwoke and Samaneh Zareian. Kernel methods for principal component analysis (pca) a comparative study of classical and kernel pca. 12 2019.