# Снижение размерности пространств в задачах мультимоделирования динамических систем

Тихонов Д.М.

1.2.1 – Искусственный интеллект и машинное обучение

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В. В.

Москва, 2023 г.

# Снижение размерности пространств в задачах мультимоделирования динамических систем

Исследуется задача выбора модели для восстановления динамической системы по множественным наблюдениям.

## Цель исследования

Предложить подход (метод и модель) восстановления неизвестной динамической системы, описываемой ОДУ, по нескольким измерениям.

## Метод решения

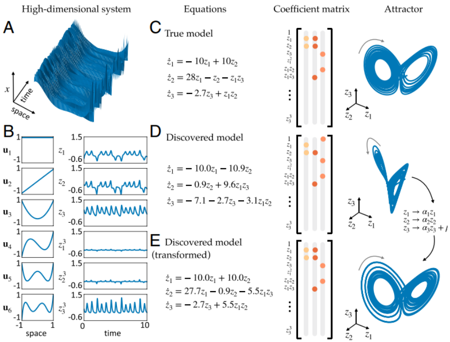
Предлагается объединить всю исходную информацию с помощью MDT (multi-way delay embedding transform) или тензорного произведения (например, векторов задержек нескольких временных рядов).

## Предполагаемая практическая ценность

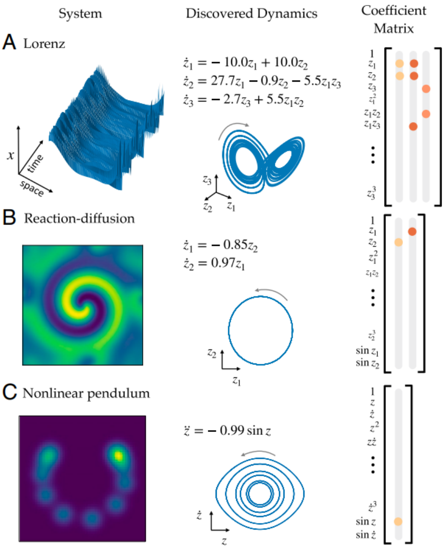
Анализ исследуемой проблемы и смежных областей показывает, что переход к моделированию с помощью тензорный нейронных сетей и тензорных разложения позволяет достигать уменьшения числа настраиваемых параметров модели при «допустимых» потерях в точности прогнозирования.

# Sparse identification of nonlinear dynamics

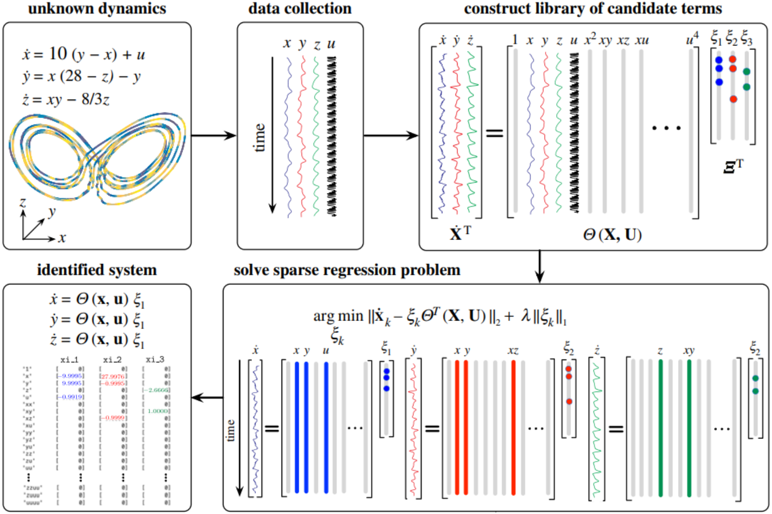
- Восстановление динамической системы $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = f(\mathbf{x}(t))$ по вектору множественных измерений
- Заранее определяемая «библиотека» зависимостей понижает число необходимых измерений и предлагает подходящую функциональную зависимость
- Использую теорему Такенса подход позволяет восстанавливать исходную динамическую систему по одному наблюдению



# Sparse identification of nonlinear dynamics

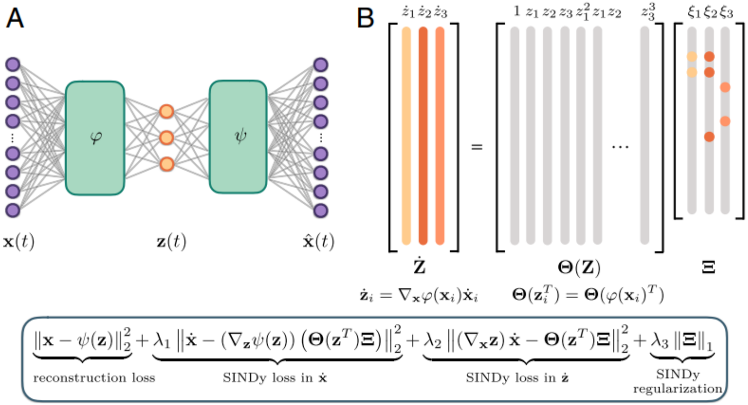


# Sparse identification of nonlinear dynamics



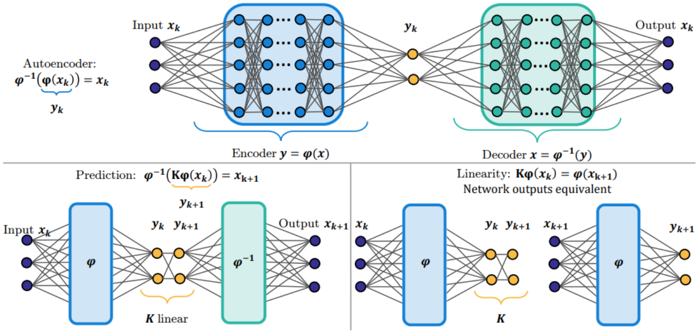
# Sparse identification of nonlinear dynamics

- Подход обобщается с помощью нейронный сетей (автоэнкодера)
- Позволяет уменьшить размер «библиотеки» до простых полиномов
- Переводит изначально сложную систему к линейной или близкой к линейной



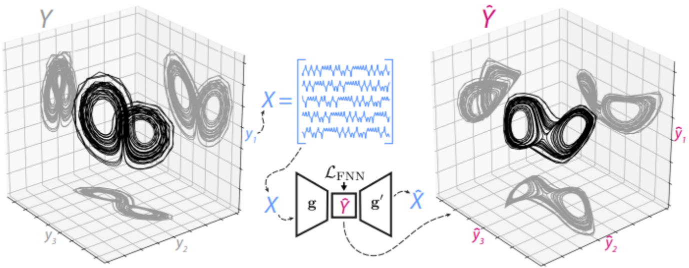
# Sparse identification of nonlinear dynamics

- Подход обобщается с помощью нейронный сетей (автоэнкодера)
- Позволяет уменьшить размер «библиотеки» до простых полиномов
- Переводит изначально сложную систему к линейной или близкой к линейной



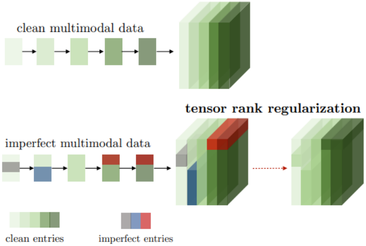
# Восстановление теневого многообразия

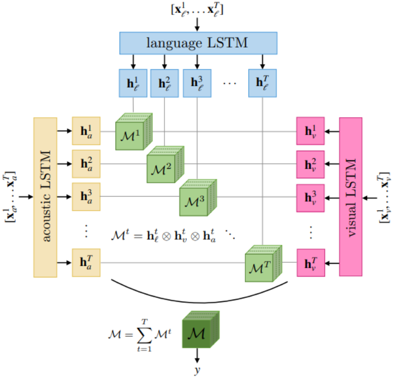
- По теореме Такенса можем для каждого временного ряда в отдельности восстановить теневое многообразие, диффеоморфное истинному.
- Подходы, например, CCM анализируют связь через близость в соответствующих **отдельно** полученных пространствах
- Подход с использованием нескольких измерений позволит анализировать теневое многообразие **совместно**.



# Объединение разнородный данных

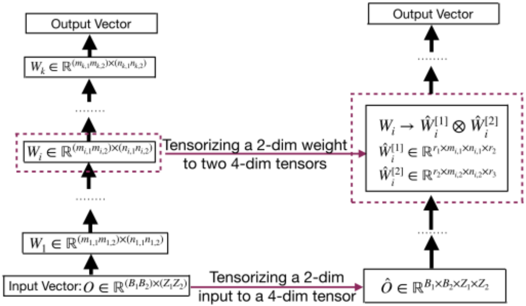
- Тензорное произведение как способ объединения векторов задержек нескольких временных рядов
- По результатам близких работ, подход более устойчив к шумам, пропускам и неравномерном распределении во времени



# Объединение разнородный данных

- Тензорное произведение как способ объединения векторов задержек нескольких временных рядов
- По результатам близких работ, подход более устойчив к шумам, пропускам и неравномерном распределении во времени




**(a) DNN for Vector-to-Vector Regression (b) TTN for Tensor-to-Vector Regression**

# Исследуемые подходы

**Заданы**

1. вектора задержек $\mathbf{h}_t^i \in \mathbb{R}^m$
2. Тензорное представление временного ряда $\mathcal{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_t^1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{h}_t^2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{h}_t^3 \\ 1 \end{bmatrix}$ в момен времени $t$
3. Модель кодировщика $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$
4. Модель декодировщика $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$
5. Модель динамической системы $z_{t+1} = Kz_t$

**Оптимизационная задача**

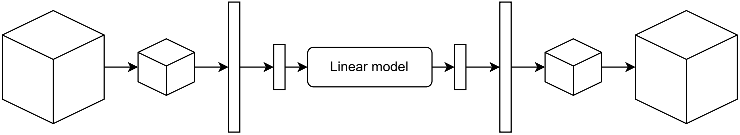
$$LOSS = \|\mathcal{X}_t - \psi(\varphi(\mathcal{X}_t))\| + \lambda_1\|\varphi(\mathcal{X}_{t+1}) - K\varphi(\mathcal{X}_t)\| + \lambda_2\|\mathcal{X}_{t+1} - \psi(K\varphi(\mathcal{X}_t))\|$$

# Исследуемые подходы

Идея объединить подходы для восстановлением сложной динамической системы с помощью

- функции оптимизации учитывающей динамику, как в SINDY моделях,
- тензорного представления, как тензорное произведение векторов задержек

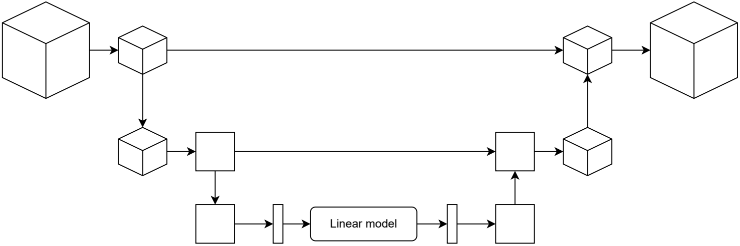
Первый вариант Снижение размерности без снижения «индексности»




- Из-за векторизации тензора теряется структура данных
- При большей индексности, тензора необходимо раскладывать (например, tensor train), но непонятно как автоматизировать (тогда не будет вычислительной эффективности при оптимизации на каждой итерации)

# Исследуемые подходы

Снижение размерности, включая снижения «индексности»




- Не найдено теории по снижению индексности
- Предлагаемый подход через сверточные слои
- Общая проблема восстановления изначального вида временных рядов (альтернатива на слайде позже)

# Резюме

- Проведено исследование литературы по восстановлению динамической системы из разных источников данных
- Тензорные представления в теории более устойчивы к шумам
- Прорабатываются базовые варианты со снижением индексности и векторизацией
- Идея уйти в топологический анализ данных и тензорный анализ

# Для дискуссии

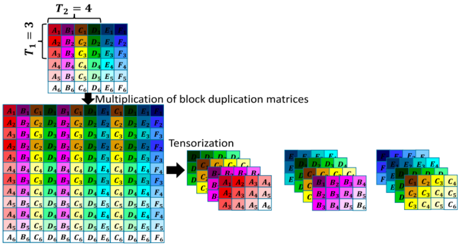



**FIGURE 4 |** Illustration of the block Hankelization. In the first step, the initial matrix is multiplied by two block duplication matrices, and in the second step, the resulting matrix is folded into a 6-th order $P \times P \times T_1 \times D_1 \times T_2 \times D_2$ tensor, where each colored block is a $P \times P$ matrix.

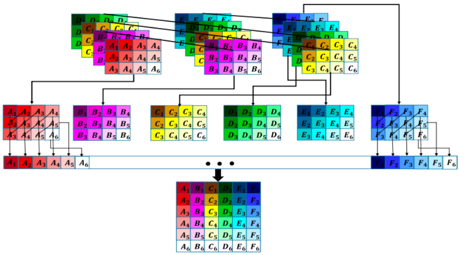


**FIGURE 5 |** Illustration of the de-Hankelization of a block Hankelized dataset. Each colored block is a $P \times P$ matrix.