

Выбор моделей прогнозирования квазипериодических временных рядов

Тихонов Денис Максимович

Выпускная квалификационная работа магистра

03.04.01 — Прикладные математика и физика

Научный руководитель: д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

2022 г.

Выбор моделей прогнозирования квазипериодических временных рядов

Цель работы. Выбрать модель прогнозирования квазипериодических временных рядов по модели аппроксимации наименьшей структурной сложности. По параметрам модели аппроксимации классифицировать временные ряды.

Проблема. Изменяющиеся характерные частоты и амплитуды сигналов приводят к неустойчивости оценок параметров моделей аппроксимации и методов выбора моделей, опирающихся на предположение о простоте выборки, и приводят к увеличению количества настраиваемых параметров.

Требуется:

- ① разработать метод построения модели аппроксимации устойчивый к шумам, изменению частоты и амплитуды сигнала
- ② предложить метод выбора модели прогнозирования
- ③ предложить способ классификации

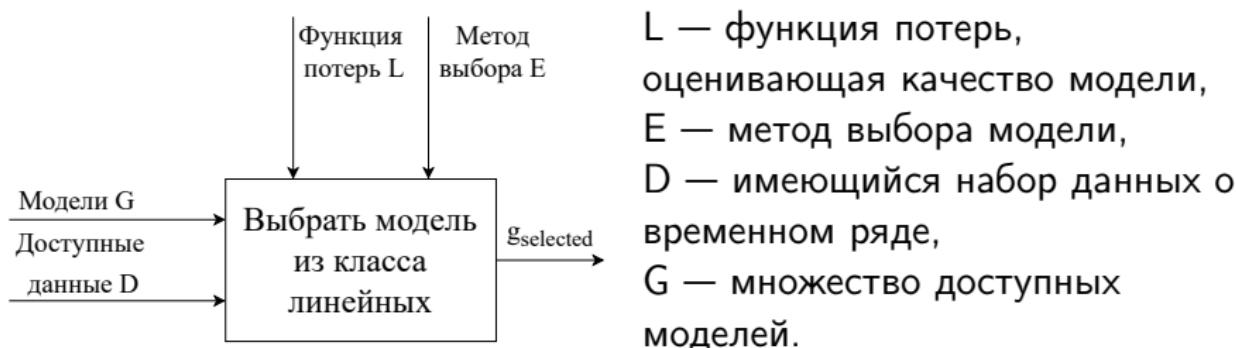
Литература

- ① Усманова К. Р. и др. (2020) Аппроксимация фазовой траектории квазипериодических сигналов методом сферической регрессии // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика
- ② Распознавание классов движения и разладки методом задержек Jordan F, et al. (2010). Activity and Gait Recognition with Time-Delay Embeddings. // AAAI press
- ③ Обнаружение периодов для сегментации биомедицинских сигналов Motrenko A., Strijov V. (2015) Extracting fundamental periods to segment biomedical signals // IEEE journal of biomedical and health informatics
- ④ Сферические гармоники для параметризации поверхности сферы Nortje C., Ward W., Neuman B., Li Bai, (2015) Spherical Harmonics for Surface Parametrisation and Remeshing // Mathematical Problems in Engineering

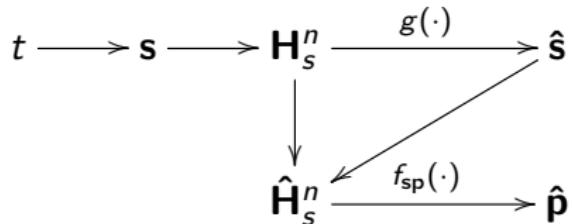
Постановка задачи выбора модели прогнозирования квазипериодических временных рядов

Требуется предложить метод выбора модели на основе модели аппроксимации

$$g_{\text{selected}} \in \arg \min_{g \in G} E(g, D, L).$$



Метод выбора модели прогнозирования



s — временной ряд,
 \hat{s} — прогнозы модели $g \in G$,
 H_s^n — фазовая траектория s ,
 \hat{H}_s^n — фазовая траектория \hat{s} ,
 \hat{p} — оценка вероятности
соответствия прогнозов \hat{s}
предыстории s .

Требуется:

- 1 построить модель аппроксимации фазовой траектории
 $f_{sp} : \mathbb{W} \times \mathbf{A} \rightarrow [0, 1]$, где $\mathbf{A} = [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi]$
фазовое пространство в сферических координатах,
 \mathbb{W} — пространство параметров модели,
- 2 предложить способ ранжирования по полученным значениям \hat{p} .

Построение фазового пространства

- 1 Метод задержек для построения фазовой траектории

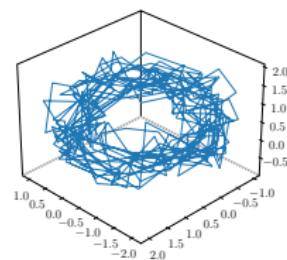
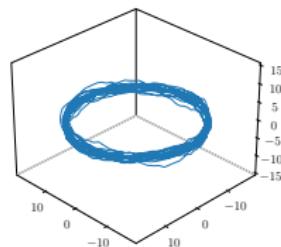
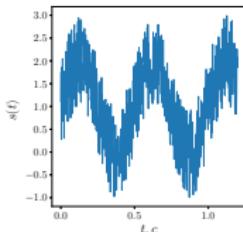
$$\mathbf{H}_s^n = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-n+1} & \dots & s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-n+1} \end{bmatrix},$$

где n — ширина окна, N — длина временного ряда

- 2 Для построения фазового подпространства меньшей размерности $p \ll n$ используется метод главный компонент

$$\mathbf{H}_x^p = \mathbf{S}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{N-n+1} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{W} — матрица вращения



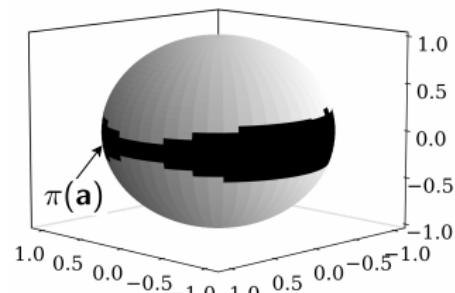
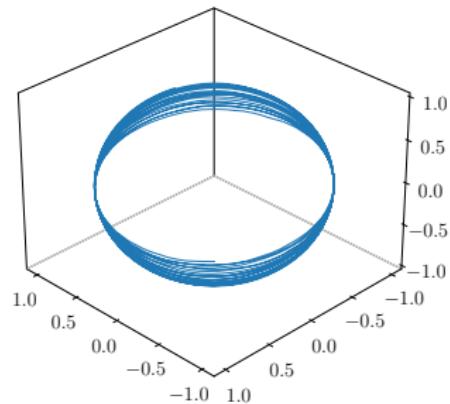
Сферическое представление фазовой траектории

- 1 Предполагается, что модель аппроксимации в сферических координатах имеет меньше настраиваемых параметров.
- 2 В фазовом подпространстве $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$ строится отображение из декартовых координат в сферические

$$\phi : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} = [r, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$\mathbf{a} = [\alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1]$$

- 3 По точкам \mathbf{a} строится функция проекции $\pi(\mathbf{a}(t))$, $t \in [0, +\infty)$ на поверхности сферы \mathbb{S}^{p-1} .



Модель фазовой траектории

- 1 Предлагается аппроксимировать проекцию $\pi(\mathbf{a})$ с помощью сферических гармоник:

$$\pi(\mathbf{a}) \approx f_{\text{sp}}(\mathbf{a}) = \sigma \left(\sum_{l_{p-1}=0}^{N_{\text{approx}}} \sum_{l_{p-2}=0}^{l_{p-1}-1} \dots \sum_{l_1=-l_2}^{l_2} w_{\text{sp},l} Y_l(\mathbf{a}) \right),$$

где $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $l = l_{p-1}, \dots, l_1$ — индексы сферических гармоник, N_{approx} — порядок приближения.

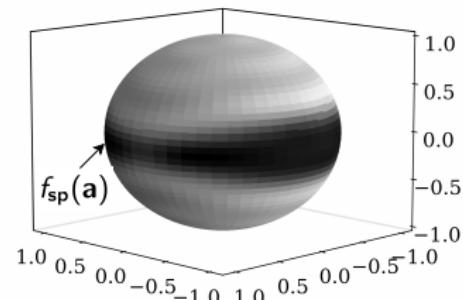
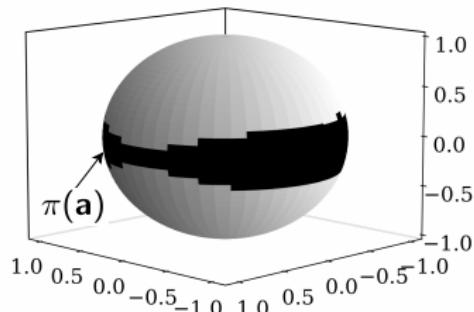
- 2 Базисные функции представимы в виде

$$Y_l(\mathbf{a}) = \left[\prod_{k=2}^{p-1} \overline{P}_{l_k}^{l_{k-1}}(\alpha_k) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\pm i l_1 \alpha_1),$$

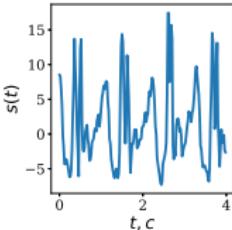
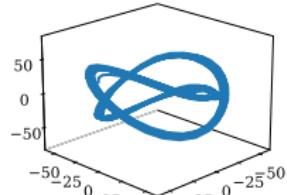
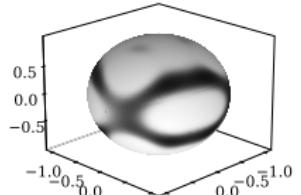
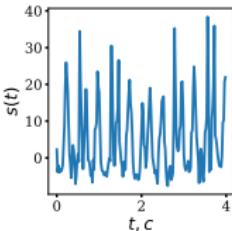
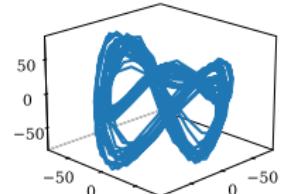
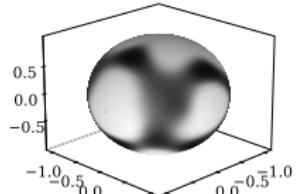
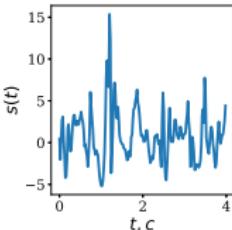
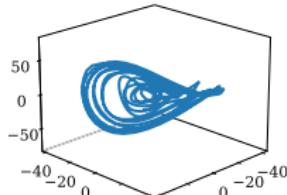
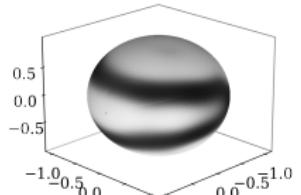
где $\overline{P}_{l_k}^{l_{k-1}}$ — многочлены Лежандра.

- 3 Для получения параметров модели решается оптимизационная задача

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{sp}} = \arg \max_{\mathbf{w}_{\text{sp}}} \sum_{i=0}^{N-n+1} \pi(\mathbf{a}_i) \cdot \ln(\sigma(\mathbf{w}_{\text{sp}}^T \mathbf{Y}_i)) + (1 - \pi(\mathbf{a}_i)) \cdot \ln(1 - \sigma(\mathbf{w}_{\text{sp}}^T \mathbf{Y}_i))$$



Модель фазовой траектории

	Сегмент	Траектория	Модель
Ходьба			
Бег			
Лестница			

Выбор модели прогнозирования

Согласованность с предысторией

Функция аппроксимации $f_{\text{sp}}(\mathbf{a})$ позволяет получить оценку согласованности с предысторией фазовой траектории $\hat{p} = \hat{p}(\hat{s}|t, s)$ для каждой точки из $\hat{\mathbf{s}} = [\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{m_s}]$ для каждой модели $g \in G$.

$$\begin{pmatrix} \{\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{p}}_1\} \\ \vdots \\ \{\hat{\mathbf{s}}_{m_g}, \hat{\mathbf{p}}_{m_g}\} \end{pmatrix} \rightarrow g_{\text{selected}}$$

Выбор модели

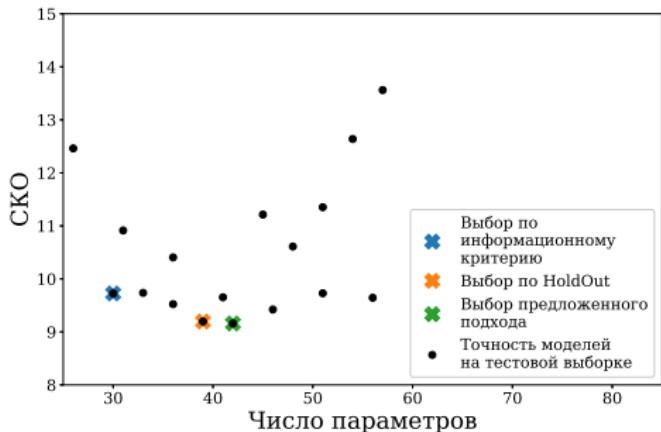
По полученным значениям $\hat{\mathbf{p}} = [\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{m_s}]$ для каждой модели считается логарифм правдоподобия

$$L(\hat{s}|t) = \sum_{i=1}^{m_s} \ln(\hat{p}_i(\hat{s}|t)).$$

Выбирается модель с максимальным значением логарифма правдоподобия.

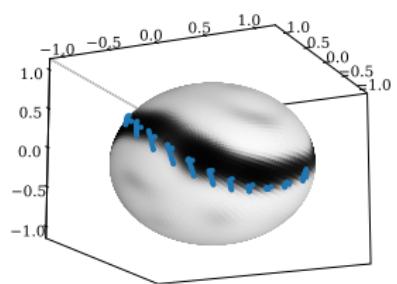
$$g_{\text{selected}} = \arg \min_{g \in G} -L(\hat{s}|t, g, s)$$

Выбор модели прогнозирования

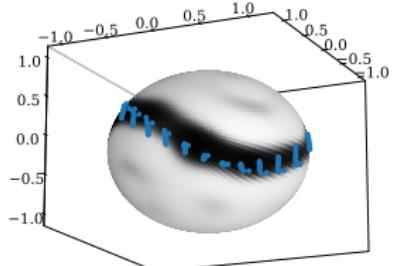


- ▶ Интерпретируемая модель.
- ▶ Предлагаемые методы выбирают Парето оптимальные модели.
- ▶ В среднем выбирает лучшую модель на тестовом наборе данных на 3-5% точнее, чем кросс-валидация, на 10-15% точнее, чем информационные критерии.

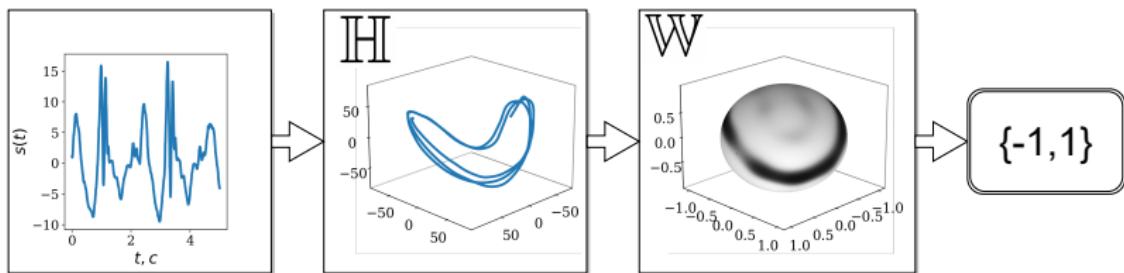
Выбор по информационным критериям



Выбор по предложенному методу



Постановка задачи классификации



$$s \mapsto \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow \{-1, 1\}$$

s — временной ряд,

\mathbb{H} — фазовое пространство,

\mathbb{W} — пространство весов модели
аппроксимации.

Требуется построить:

- 1 модель аппроксимации фазовой траектории $g : \mathbb{W} \times \mathbf{A} \rightarrow [0, 1]$, где $\mathbf{A} = [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi]$ фазовое пространство в сферических координатах,
- 2 модель классификации $f : \mathbb{R}^q \times \mathbb{W} \rightarrow \{-1, 1\}$, где q — число параметров модели.

Модель классификации фазовой траектории

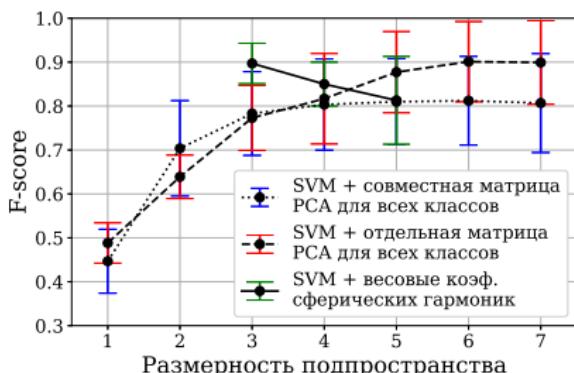
Признаковое описание в задаче классификации:

- 1 полученные координаты в фазовом подпространстве \mathbb{H}

$$g(\mathbf{x}) = \text{sign}(\mathbf{w}_{\text{svm}}^T \mathbf{x})$$

- 2 параметры модели аппроксимации \mathbb{W}

$$g(\mathbf{w}_{\text{sp}}) = \text{sign}(\mathbf{w}_{\text{svm}}^T \hat{\mathbf{w}}_{\text{sp}})$$



На защиту выносится

- ① Предложена модель фазовой траектории в сферических координатах произвольной размерности с использованием сферических гармоник.
- ② Исследована проблема выбора моделей. Предложен метод выбора модели, основанный на модели аппроксимации, учитывающий периодическую структуру сигнала.
- ③ Предложен способ порождения признакового описания квазипериодических временных рядов, основанный на модели аппроксимации. Предложена модель классификации фазовых траекторий.
- ④ Метод построения и понижения размерности фазового пространства. Метод построения векторов задержек и разложения на главные компоненты.