Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет
Кафедра моделювання і програмного забезпечення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8
з дисципліни «Числові методи»
Тема: «Чисельні методи розв’язання задачі Коші»
Варіант 11

Виконав студент:
групи ІПЗ–23–2
Первітін Д. Р.
Перевірив викладач
Шамрай О. В.
Смолянський П. С.

Кривий Ріг – 2025

Лабораторна робота № 8

Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, навчитися реалізовувати метод Ейлера та метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності.

Також метою є навчитися автоматично визначати необхідну кількість кроків (N) для досягнення заданої точності eps на відрізку $[x_0, x_k]$, використовуючи правило Рунге-Ромберга для оцінки похибки. Крім того, метою є порівняти точність, швидкодію (кількість ітерацій) та ефективність (загальну кількість обчислень) обох методів, використовуючи лише стандартні бібліотеки C++ для реалізації алгоритмів та обчислень.

Завдання до роботи

Задача 11. Знайти інтеграл від заданої функції f(x) на відрізку [a, b] за складеною формулою трапецій із заданою точністю eps. Відрізок при цьому ділиться на N рівних частин. При цьому необхідне число N потрібно визначити виходячи з правила Рунге-Ромберга.

Скріншот екрану програми з результатом роботи програми

```
======================================================================
               ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
======================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y       (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x       (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y       (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 1

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 1
Кінцева точка xk: 1
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.001
--------------------------------------------------
======================================================================
                             МЕТОД ЕЙЛЕРА
======================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0) = 1
Інтервал: [0, 1]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.5937424601                 ---               ---
         1         20        2.5937424601        2.6532977051        5.9555e-02
         2         40          2.6533e+00          2.6851e+00        3.1766e-02
         3         80          2.6851e+00          2.7015e+00        1.6421e-02
         4        160          2.7015e+00          2.7098e+00        8.3506e-03
         5        320          2.7098e+00          2.7140e+00        4.2111e-03
         6        640          2.7140e+00          2.7162e+00        2.1146e-03
         7       1280          2.7162e+00          2.7172e+00        1.0596e-03
         8       2560          2.7172e+00          2.7178e+00        5.3034e-04
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 2560
Крок: h = 0.0003906250

======================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
======================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0.0000000000) = 1.0000000000
Інтервал: [0.0000000000, 1.0000000000]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.7182797441                 ---               ---
         1         20        2.7182797441        2.7182816927        1.2990e-07
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.7182797441                 ---               ---
         1         20        2.7182797441        2.7182816927        1.2990e-07
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.0500000000

======================================================================
                        РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
======================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 2560):
----------------------------------------------------------------------
              x            y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000              1.00000000
     0.00039063              1.00039063
     0.00078125              1.00078140
     0.00117188              1.00117233
     0.00156250              1.00156342
            ...                     ...
     0.99843750              2.71350876
     0.99882812              2.71456873
     0.99921875              2.71562910
     0.99960937              2.71668990
     1.00000000              2.71775110
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
----------------------------------------------------------------------
              x            y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000              1.00000000
     0.05000000              1.05127109
     0.10000000              1.10517091
     0.15000000              1.16183423
     0.20000000              1.22140275
            ...                     ...
     0.80000000              2.22554084
     0.85000000              2.33964675
     0.90000000              2.45960300
     0.95000000              2.58570954
     1.00000000              2.71828169
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                         ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
======================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 2.717751104075 (N = 2560)
Метод Рунге-Кутта:  y = 2.718281692656 (N = 20)

Різниця між методами: 5.305886e-04
```

```
Різниця між методами: 5.305886e-04

Аналітичний розв'язок: y = 2.718281828459

Фактичні похибки:
----------------------------------------------------------------------
Ейлер:       5.307244e-04
Рунге-Кутта: 1.358026e-07
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта точніший у 3908.06 разів!
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      2560 кроків, 2560 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=2.89
|                                                                  E*
|                                                               EEEE*
|                                                             EE**EE*
|                                                           E**E**EE
|                                                        **EE**EEE
|                                                      EE**EE**E
|                                                   EE**E**EE
|                                                E**EE**EEE
|                                             E**E**EE**
|                                          **EE**E**E
|                                       **E**EE**EE
|                                    EEE**E**EEE
|                                EEE**EE**EEE
|                            E**E**E**EEE
|                        E**EE**E**EEE
|                    EE**E**EE**EEE
|                EE**EE**E**EEE
|           **EE**E**EE**EE
|      EE**E**EE**E**EE
|  **E**EE**E**EE**
*EE**E**EE**EEE
*EE**E**EE
*EEE
|                                                                      y=0.83
========================================================================
x=0.00                              x=1.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 1 – y’ = y (експоненціальне зростання).

```
=====================================================================
               ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
=====================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y        (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x        (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y        (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2      (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 2

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 0
Кінцева точка xk: 2
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.0001
--------------------------------------------------
=====================================================================
                             МЕТОД ЕЙЛЕРА
=====================================================================

Рівняння: y' = x
Початкова умова: y(0) = 0
Інтервал: [0, 2]
Точність: eps = 1.00e-04

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
        0          10       1.8000000000                 ---              ---
        1          20       1.8000000000        1.9000000000       1.0000e-01
        2          40         1.9000e+00          1.9500e+00       5.0000e-02
        3          80         1.9500e+00          1.9750e+00       2.5000e-02
        4         160         1.9750e+00          1.9875e+00       1.2500e-02
        5         320         1.9875e+00          1.9938e+00       6.2500e-03
        6         640         1.9938e+00          1.9969e+00       3.1250e-03
        7        1280         1.9969e+00          1.9984e+00       1.5625e-03
        8        2560         1.9984e+00          1.9992e+00       7.8125e-04
        9        5120         1.9992e+00          1.9996e+00       3.9063e-04
--------------------------------------------------------------------------------

! Досягнуто ліміт MAX_POINTS (10000)!
Обчислення зупинено.

=====================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
=====================================================================

Рівняння: y' = x
Початкова умова: y(0.0000e+00) = 0.0000e+00
Інтервал: [0.0000e+00, 2.0000e+00]
Точність: eps = 1.00e-04

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
        0          10       2.0000000000                 ---              ---
        1          20       2.0000000000        2.0000000000       2.9606e-17
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N           y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
        0          10       2.0000000000                 ---              ---
        1          20       2.0000000000        2.0000000000       2.9606e-17
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.1000000000

=====================================================================
                        РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
=====================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 5120):
---------------------------------------------------------------------
              x             y (чисельне)
---------------------------------------------------------------------
     0.00000000           0.00000000
     0.00039063           0.00000000
     0.00078125           0.00000015
     0.00117188           0.00000046
     0.00156250           0.00000092
            ...                  ...
     1.99843750           1.99648590
     1.99882813           1.99726654
     1.99921875           1.99804733
     1.99960938           1.99882828
     2.00000000           1.99960938
---------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
---------------------------------------------------------------------
              x             y (чисельне)
---------------------------------------------------------------------
     0.00000000           0.00000000
     0.10000000           0.00500000
     0.20000000           0.02000000
     0.30000000           0.04500000
     0.40000000           0.08000000
            ...                  ...
     1.60000000           1.28000000
     1.70000000           1.44500000
     1.80000000           1.62000000
     1.90000000           1.80500000
     2.00000000           2.00000000
---------------------------------------------------------------------

=====================================================================
                          ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
=====================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
=====================================================================
Метод Ейлера:       y = 1.999609375000 (N = 5120)
Метод Рунге-Кутта:  y = 2.000000000000 (N = 20)

Різниця між методами: 3.906250e-04
```

```
Різниця між методами: 3.906250e-04

Аналітичний розв'язок: y = 2.000000000000

Фактичні похибки:
----------------------------------------------------------------------
Ейлер:       3.906250e-04
Рунге-Кутта: 3.739231e-13
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта точніший у 1044666630.56 разів!
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      5120 кроків, 5120 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=2.20
|                                                                   E*
|                                                                 EEE*
|                                                               E**EE*
|                                                             EEE**EEE
|                                                           EE**E**E
|                                                         EEEE**EE
|                                                       EE**EE**
|                                                     E**E**EE
|                                                   EEE**EEE
|                                                 E**EE**E
|                                              E**E**EEE
|                                            EEE**E**E
|                                         EE**EE**E
|                                      EE**E**EEE
|                                   E**EE**EEE
|                               EE**E**EE**E
|                            EE**E**E**EE
|                       EEE**EE**E**E
|                  E**EE**E**EE**E
|          EE**EE**E**EE**E**E
*EE**E**EE**E**EE**E**EEEE
*EE**E**EE**E**EE**E--------------------------------------------------
*EE**E**EEEE
|                                                                      y=-0.20
========================================================================
x=0.00                              x=2.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 2 – y' = x (квадратична функція).

```
======================================================================
               ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
======================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y       (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x       (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y       (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 3

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 0
Кінцева точка xk: 2
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.01
--------------------------------------------------
======================================================================
                             МЕТОД ЕЙЛЕРА
======================================================================

Рівняння: y' = x + y
Початкова умова: y(0) = 0
Інтервал: [0, 2]
Точність: eps = 1.00e-02

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10       3.1917364224                 ---                ---
         1         20       3.1917364224        3.7274999493        5.3576e-01
         2         40         3.7275e+00          4.0400e+00        3.1249e-01
         3         80         4.0400e+00          4.2096e+00        1.6958e-01
         4        160         4.2096e+00          4.2980e+00        8.8453e-02
         5        320         4.2980e+00          4.3432e+00        4.5188e-02
         6        640         4.3432e+00          4.3660e+00        2.2840e-02
         7       1280         4.3660e+00          4.3775e+00        1.1483e-02
         8       2560         4.3775e+00          4.3833e+00        5.7569e-03
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 2560
Крок: h = 0.0007812500

======================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
======================================================================

Рівняння: y' = x + y
Початкова умова: y(0.0000000000) = 0.0000000000
Інтервал: [0.0000000000, 2.0000000000]
Точність: eps = 1.00e-02

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10       4.3888892417                 ---                ---
         1         20       4.3888892417        4.3890447674        1.0368e-05
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N          y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10       4.3888892417                 ---                ---
         1         20       4.3888892417        4.3890447674        1.0368e-05
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.1000000000

======================================================================
                        РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
======================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 2560):
----------------------------------------------------------------------
          x             y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000          0.00000000
     0.00078125          0.00000000
     0.00156250          0.00000061
     0.00234375          0.00000183
     0.00312500          0.00000366
            ...                 ...
     1.99687500          4.36338587
     1.99765625          4.36835483
     1.99843750          4.37332827
     1.99921875          4.37830621
     2.00000000          4.38328866
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
----------------------------------------------------------------------
          x             y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000          0.00000000
     0.10000000          0.00517083
     0.20000000          0.02140257
     0.30000000          0.04985850
     0.40000000          0.09182424
            ...                 ...
     1.60000000          2.35302635
     1.70000000          2.77394026
     1.80000000          3.24963911
     1.90000000          3.78588470
     2.00000000          4.38904477
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
======================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 4.383288655735 (N = 2560)
Метод Рунге-Кутта:  y = 4.389044767376 (N = 20)

Різниця між методами: 5.756112e-03
======================================================================
```

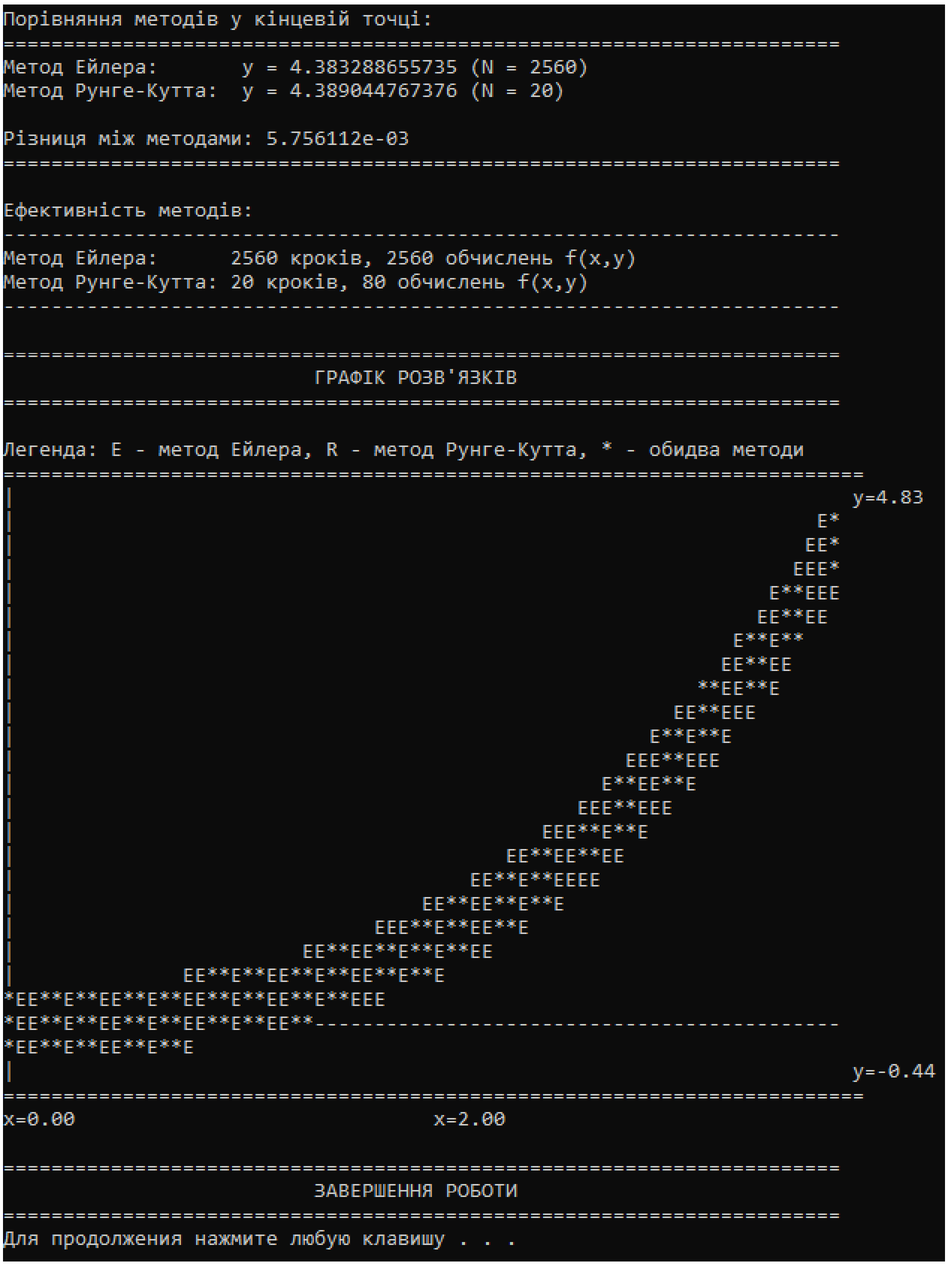
```
Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 4.383288655735 (N = 2560)
Метод Рунге-Кутта:  y = 4.389044767376 (N = 20)

Різниця між методами: 5.756112e-03
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      2560 кроків, 2560 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=4.83
|                                                                    E*
|                                                                   EE*
|                                                                  EEE*
|                                                                E**EEE
|                                                               EE**EE
|                                                             E**E**
|                                                            EE**EE
|                                                          **EE**E
|                                                        EE**EEE
|                                                      E**E**E
|                                                    EEE**EEE
|                                                  E**EE**E
|                                                EEE**EEE
|                                             EEE**E**E
|                                          EE**EE**EE
|                                       EE**E**EEEE
|                                   EE**EE**E**E
|                               EEE**E**EE**E
|                         EE**EE**E**E**EE
|               EE**E**EE**E**EE**E**E
*EE**E**EE**E**EE**E**EE**E**EEE
*EE**E**EE**E**EE**E**EE**--------------------------------------------
*EE**E**EE**E**E
|                                                                      y=-0.44
========================================================================
x=0.00                               x=2.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 3 – y' = x + y (лінійне рівняння).

```
=====================================================================
              ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
=====================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y        (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x        (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y        (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 4

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 0
Кінцева точка xk: 0.5
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.001
--------------------------------------------------
=====================================================================
                            МЕТОД ЕЙЛЕРА
=====================================================================

Рівняння: y' = x^2 + y^2
Початкова умова: y(0) = 0
Інтервал: [0, 0.5]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N          y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10       0.0356826196                 ---               ---
         1         20       0.0356826196        0.0386799759        2.9974e-03
         2         40         3.8680e-02          4.0221e-02        1.5412e-03
         3         80         4.0221e-02          4.1003e-02        7.8136e-04
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 80
Крок: h = 0.0062500000

=====================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
=====================================================================

Рівняння: y' = x^2 + y^2
Початкова умова: y(0.0000000000) = 0.0000000000
Інтервал: [0.0000000000, 0.5000000000]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N          y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10       0.0417911562                 ---               ---
         1         20       0.0417911562        0.0417911468        6.2494e-10
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.0250000000
```

```
======================================================================
                        РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
======================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 80):
----------------------------------------------------------------------
              x             y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000               0.00000000
     0.00625000               0.00000000
     0.01250000               0.00000024
     0.01875000               0.00000122
     0.02500000               0.00000342
            ...                      ...
     0.47500000               0.03510109
     0.48125000               0.03651895
     0.48750000               0.03797479
     0.49375000               0.03946916
     0.50000000               0.04100257
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
----------------------------------------------------------------------
              x             y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
     0.00000000               0.00000000
     0.02500000               0.00000521
     0.05000000               0.00004167
     0.07500000               0.00014063
     0.10000000               0.00033333
            ...                      ...
     0.40000000               0.02135938
     0.42500000               0.02562837
     0.45000000               0.03043446
     0.47500000               0.03581083
     0.50000000               0.04179115
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
======================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 0.041002573425 (N = 80)
Метод Рунге-Кутта:  y = 0.041791146818 (N = 20)

Різниця між методами: 7.885734e-04
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      80 кроків, 80 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================
```

```
======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
=========================================================================
|                                                                          y=0.05
|                                                                      *
|                                                                     E*
|                                                                    EE*
|                                                                  **EEE
|                                                                 E**EE
|                                                               **E**
|                                                              E**EE
|                                                             EE**
|                                                           **EEEE
|                                                         EE**EE
|                                                        **E**
|                                                     EEE**E
|                                                   E**EE**
|                                                 **E**EE
|                                              EEE**E**
|                                            E**EE**EE
|                                        EE**E**EEE
|                                    EE**EE**EEE
|                               E**E**E**EE**
|                      EEE**E**EE**E**E**E
*EE**E**EE**E**EE**E**EE**E**EE**EEE
*EE**E**EE**E**EE**E**EE**E**E------------------------------------------
*EE**E**EE**E**EE**E
|                                                                          y=-0.00
=========================================================================
x=0.00                               x=0.50

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 4 – y' = x² + y² (нелінійне рівняння).

```
=====================================================================
              ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
=====================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y       (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x       (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y       (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 1

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 1
Кінцева точка xk: 1
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.00001
--------------------------------------------------
=====================================================================
                            МЕТОД ЕЙЛЕРА
=====================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0) = 1
Інтервал: [0, 1]
Точність: eps = 1.00e-05

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.5937424601                 ---              ---
         1         20        2.5937424601        2.6532977051       5.9555e-02
         2         40          2.6533e+00          2.6851e+00       3.1766e-02
         3         80          2.6851e+00          2.7015e+00       1.6421e-02
         4        160          2.7015e+00          2.7098e+00       8.3506e-03
         5        320          2.7098e+00          2.7140e+00       4.2111e-03
         6        640          2.7140e+00          2.7162e+00       2.1146e-03
         7       1280          2.7162e+00          2.7172e+00       1.0596e-03
         8       2560          2.7172e+00          2.7178e+00       5.3034e-04
         9       5120          2.7178e+00          2.7180e+00       2.6531e-04
--------------------------------------------------------------------------------

! Досягнуто ліміт MAX_POINTS (10000)!
Обчислення зупинено.

=====================================================================
                   МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
=====================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0.0000e+00) = 1.0000e+00
Інтервал: [0.0000e+00, 1.0000e+00]
Точність: eps = 1.00e-05

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.7182797441                 ---              ---
         1         20        2.7182797441        2.7182816927       1.2990e-07
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N          Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10        2.7182797441                 ---              ---
         1         20        2.7182797441        2.7182816927       1.2990e-07
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.0500000000

=====================================================================
                       РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
=====================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 5120):
---------------------------------------------------------------------
              x              y (чисельне)
---------------------------------------------------------------------
     0.00000000            1.00000000
     0.00019531            1.00019531
     0.00039063            1.00039066
     0.00058594            1.00058605
     0.00078125            1.00078148
            ...                   ...
     0.99921875            2.71589400
     0.99941406            2.71642445
     0.99960938            2.71695500
     0.99980469            2.71748566
     1.00000000            2.71801642
---------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
---------------------------------------------------------------------
              x              y (чисельне)
---------------------------------------------------------------------
     0.00000000            1.00000000
     0.05000000            1.05127109
     0.10000000            1.10517091
     0.15000000            1.16183423
     0.20000000            1.22140275
            ...                   ...
     0.80000000            2.22554084
     0.85000000            2.33964675
     0.90000000            2.45960300
     0.95000000            2.58570954
     1.00000000            2.71828169
---------------------------------------------------------------------

=====================================================================
                         ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
=====================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
=====================================================================
Метод Ейлера:       y = 2.718016418767 (N = 5120)
Метод Рунге-Кутта:  y = 2.718281692656 (N = 20)

Різниця між методами: 2.652739e-04
```

```
Різниця між методами: 2.652739e-04

Аналітичний розв'язок: y = 2.718281828459

Фактичні похибки:
----------------------------------------------------------------------
Ейлер:       2.654097e-04
Рунге-Кутта: 1.358030e-07
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта точніший у 1954.37 разів!
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      5120 кроків, 5120 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=2.89
|                                                                  E*
|                                                               EEEE*
|                                                             EE**EE*
|                                                           E**E**EE
|                                                        **EE**EEE
|                                                      EE**EE**E
|                                                   EE**E**EE
|                                                E**EE**EEE
|                                             E**E**EE**
|                                          **EE**E**E
|                                       **E**EE**EE
|                                    EEE**E**EEE
|                                EEE**EE**EEE
|                            E**E**E**EEE
|                        E**EE**E**EEE
|                    EE**E**EE**EEE
|                EE**EE**E**EEE
|           **EE**E**EE**EE
|      EE**E**EE**E**EE
|  **E**EE**E**EE**
*EE**E**EE**EEE
*EE**E**EE
*EEE
|                                                                      y=0.83
========================================================================
x=0.00                              x=1.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 5 – Результат тесту з високою точністю.

```
======================================================================
               ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
======================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y       (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x       (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y       (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 1

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: 0
Початкове значення y(x0) = y0: 1
Кінцева точка xk: 5
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.01
--------------------------------------------------
======================================================================
                             МЕТОД ЕЙЛЕРА
======================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0) = 1
Інтервал: [0, 5]
Точність: eps = 1.00e-02

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація           N            y(xk) з N           y(xk) з 2N            Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0          10       57.6650390625                  ---                ---
         1          20       57.6650390625        86.7361737988         2.9071e+01
         2          40          8.6736e+01           1.1120e+02         2.4463e+01
         3          80          1.1120e+02           1.2774e+02         1.6538e+01
         4         160          1.2774e+02           1.3748e+02         9.7417e+00
         5         320          1.3748e+02           1.4278e+02         5.3068e+00
         6         640          1.4278e+02           1.4556e+02         2.7724e+00
         7        1280          1.4556e+02           1.4697e+02         1.4173e+00
         8        2560          1.4697e+02           1.4769e+02         7.1660e-01
         9        5120          1.4769e+02           1.4805e+02         3.6031e-01
--------------------------------------------------------------------------------

! Досягнуто ліміт MAX_POINTS (10000)!
Обчислення зупинено.

======================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
======================================================================

Рівняння: y' = y
Початкова умова: y(0.0000e+00) = 1.0000e+00
Інтервал: [0.0000e+00, 5.0000e+00]
Точність: eps = 1.00e-02

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація           N            y(xk) з N           y(xk) з 2N            Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0          10      148.1579146133                  ---                ---
         1          20      148.1579146133       148.3935350382         1.5708e-02
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація           N            y(xk) з N           y(xk) з 2N            Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0          10      148.1579146133                  ---                ---
         1          20      148.1579146133       148.3935350382         1.5708e-02
         2          40          1.4839e+02           1.4841e+02         1.2176e-03
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 40
Крок: h = 0.1250000000

======================================================================
                         РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
======================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 5120):
----------------------------------------------------------------------
               x              y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
      0.00000000              1.00000000
      0.00097656              1.00097656
      0.00195312              1.00195408
      0.00292969              1.00293255
      0.00390625              1.00391198
             ...                     ...
      4.99609375            147.47458239
      4.99707031            147.61860054
      4.99804688            147.76275933
      4.99902344            147.90705890
      5.00000000            148.05149938
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 40):
----------------------------------------------------------------------
               x              y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
      0.00000000              1.00000000
      0.12500000              1.13314819
      0.25000000              1.28402483
      0.37500000              1.45499041
      0.50000000              1.64871976
             ...                     ...
      4.50000000             90.01638858
      4.62500000            102.00190810
      4.75000000            115.58327788
      4.87500000            130.97298251
      5.00000000            148.41179851
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
======================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 148.051499383427 (N = 5120)
Метод Рунге-Кутта:  y = 148.411798510117 (N = 40)

Різниця між методами: 3.602991e-01
```

```
Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 148.051499383427 (N = 5120)
Метод Рунге-Кутта:  y = 148.411798510117 (N = 40)

Різниця між методами: 3.602991e-01

Аналітичний розв'язок: y = 148.413159102577

Фактичні похибки:
----------------------------------------------------------------------
Ейлер:       3.616597e-01
Рунге-Кутта: 1.360592e-03
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта точніший у 265.81 разів!
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      5120 кроків, 5120 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 40 кроків, 160 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=163.15
|                                                                  E*
|                                                                  E*
|                                                                 ***
|                                                                E**E
|                                                               EE**
|                                                              E**EE
|                                                             ****E
|                                                            E**EE
|                                                           E***E
|                                                          ****E
|                                                        EE****
|                                                       E****E
|                                                     E****EE
|                                                   EE*****
|                                                 *******E
|                                              EE*******
|                                           E*********
|                                       ***********E
|                                EE**************
|                    EE**********************E
*****************************************E
**********************************E-----------------------------------
********************E-------------------------------------------------
|                                                                      y=-13.74
========================================================================
x=0.00                              x=5.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 6 – Результат тесту з великим інтервалом.

```
======================================================================
               ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ
======================================================================

Доступні диференціальні рівняння:
1) y' = y       (аналітичний: y = Ce^x)
2) y' = x       (аналітичний: y = x^2/2 + C)
3) y' = x + y       (лінійне)
4) y' = x^2 + y^2     (нелінійне)
5) y' = sin(x) + cos(y)

Оберіть рівняння (1-5): 2

Введення початкових умов задачі Коші:
--------------------------------------------------
Початкова точка x0: -2
Початкове значення y(x0) = y0: 2
Кінцева точка xk: 2
Точність обчислення eps (наприклад, 0.001): 0.001
--------------------------------------------------
======================================================================
                             МЕТОД ЕЙЛЕРА
======================================================================

Рівняння: y' = x
Початкова умова: y(-2) = 2
Інтервал: [-2, 2]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10         1.2000000000                  ---               ---
         1         20         1.2000000000         1.6000000000        4.0000e-01
         2         40           1.6000e+00           1.8000e+00        2.0000e-01
         3         80           1.8000e+00           1.9000e+00        1.0000e-01
         4        160           1.9000e+00           1.9500e+00        5.0000e-02
         5        320           1.9500e+00           1.9750e+00        2.5000e-02
         6        640           1.9750e+00           1.9875e+00        1.2500e-02
         7       1280           1.9875e+00           1.9938e+00        6.2500e-03
         8       2560           1.9938e+00           1.9969e+00        3.1250e-03
         9       5120           1.9969e+00           1.9984e+00        1.5625e-03
--------------------------------------------------------------------------------

! Досягнуто ліміт MAX_POINTS (10000)!
Обчислення зупинено.

======================================================================
                    МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 4-ГО ПОРЯДКУ
======================================================================

Рівняння: y' = x
Початкова умова: y(-2.0000e+00) = 2.0000e+00
Інтервал: [-2.0000e+00, 2.0000e+00]
Точність: eps = 1.00e-03

Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10         2.0000000000                  ---               ---
         1         20         2.0000000000         2.0000000000        4.4409e-17
```

```
Ітераційний процес (правило Рунге-Ромберга):
--------------------------------------------------------------------------------
  Ітерація          N            y(xk) з N           y(xk) з 2N           Похибка
--------------------------------------------------------------------------------
         0         10         2.0000000000                  ---               ---
         1         20         2.0000000000         2.0000000000        4.4409e-17
--------------------------------------------------------------------------------

v Досягнута задана точність!
Кількість кроків: N = 20
Крок: h = 0.2000000000

======================================================================
                         РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ
======================================================================

Таблиця розв'язків (перші та останні 5 точок):

Метод Ейлера (N = 5120):
----------------------------------------------------------------------
              x              y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
    -2.00000000          2.00000000
    -1.99921875          1.99843750
    -1.99843750          1.99687561
    -1.99765625          1.99531433
    -1.99687500          1.99375366
            ...                 ...
     1.99687500          1.99219360
     1.99765625          1.99375366
     1.99843750          1.99531433
     1.99921875          1.99687561
     2.00000000          1.99843750
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта (N = 20):
----------------------------------------------------------------------
              x              y (чисельне)
----------------------------------------------------------------------
    -2.00000000          2.00000000
    -1.80000000          1.62000000
    -1.60000000          1.28000000
    -1.40000000          0.98000000
    -1.20000000          0.72000000
            ...                 ...
     1.20000000          0.72000000
     1.40000000          0.98000000
     1.60000000          1.28000000
     1.80000000          1.62000000
     2.00000000          2.00000000
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                           ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ
======================================================================

Порівняння методів у кінцевій точці:
======================================================================
Метод Ейлера:       y = 1.998437500000 (N = 5120)
Метод Рунге-Кутта:  y = 2.000000000000 (N = 20)

Різниця між методами: 1.562500e-03
```

```
Різниця між методами: 1.562500e-03

Аналітичний розв'язок: y = 2.000000000000

Фактичні похибки:
----------------------------------------------------------------------
Ейлер:       1.562500e-03
Рунге-Кутта: 3.199663e-13
----------------------------------------------------------------------

Метод Рунге-Кутта точніший у 4883327146.26 разів!
======================================================================

Ефективність методів:
----------------------------------------------------------------------
Метод Ейлера:      5120 кроків, 5120 обчислень f(x,y)
Метод Рунге-Кутта: 20 кроків, 80 обчислень f(x,y)
----------------------------------------------------------------------

======================================================================
                          ГРАФІК РОЗВ'ЯЗКІВ
======================================================================

Легенда: E - метод Ейлера, R - метод Рунге-Кутта, * - обидва методи
========================================================================
|                                                                      y=2.20
*E                                                                  E*
*EE                                                                EE*
*EEE                                                              EEE*
EEEEE                                                            EEEEE
|EE**E                                                          E**EE
| E**EE                                                        EE**E
|  **EEE                                                      EEE**
|   EE**E                                                      E**EE
|    E**EE                                                   EE**E
|     **EEE                                                 EEE**
|      EEE**                                                 **EEE
|       EE**E                                               E**EE
|        E**EEE                                           EEE**E
|         EEE**E                                         E**EEE
|           E**EEE                                     EEE**E
|            **EE**E                                  **EE**
|             EEE**EE                               EE**EEE
|               E**E**EE                         EE**E**E
|                 EE**EE**                     **EE**EE
|                   **EE**E**E             E**E**EE**
|                     EE**E**EE**E**E**EE**E**EE
-------------------------EE**EE**E**E**EE**EE-------------------------
|                            EE**E**E**EE
|                                                                      y=-0.20
========================================================================
x=-2.00                              x=2.00

======================================================================
                          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
======================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 7 – Результат тесту з від’ємними початковими умовами.

Короткі висновки

У ході виконання лабораторної роботи я ознайомився з методом Ейлера та методом Рунге-Кутта 4-го порядку для чисельного розв'язання задачі Коші. Під час практичної частини я реалізував ітераційні алгоритми для обох методів. Ці алгоритми виконують автоматичний вибір кроку шляхом послідовного подвоєння N на кожному кроці. Алгоритм включає автоматичну зупинку: обчислення тривають доти, доки оцінка похибки за правилом Рунге-Ромберга не стане меншою за задану користувачем точність eps.

Програма коректно обробляє випадки, коли задана точність не досягається за максимальну кількість ітерацій, а також запобігає виходу за межі масивів, якщо необхідна кількість поділів N перевищує виділену пам'ять.

Окремо реалізовано функцію порівняння результатів. Для обох методів виконується перевірка шляхом порівняння отриманого значення $y(x_k)$ з точним аналітичним розв'язком. Це дозволяє візуально переконатися у значно вищій точності методу Рунге-Кутта та його ефективності.

Також я реалізував програму з використанням лише стандартних бібліотек, яка зчитує початкові умови (x_0, y_0), кінцеву точку x_k та точність eps, виконує обчислення обома методами, виводить знайдені значення, таблиці розв'язків та здійснює графічну побудову результатів.

Програма враховує некоректний ввід даних, коректно обробляє граничні випадки та забезпечує детальний вивід.

Список використаних джерел

1. Ковальчук, О. М. Чисельні методи та алгоритми розв’язування рівнянь. – Львів: Книжковий клуб, 2021.
2. Іваненко, П. С. Основи програмування на C++ для математичних обчислень. – Київ: Видавничий дім "Київський університет", 2020.
3. Семененко, В. П. Комплексні числа та методи їх обчислення у програмуванні. – Харків: ХТЗ, 2019.
4. Петренко, А. М. Алгебраїчні рівняння 1–4 ступеня: теорія та практика. – Одеса: ОНУ, 2020.
5. Гриценко, І. В. Графічне відображення функцій та чисельні методи в C++. – Київ: Літера, 2018.