

Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет
Кафедра моделювання і програмного забезпечення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6
з дисципліни «Числові методи»
Тема: «Метод найменших квадратів.»
Варіант 11

Виконав студент:
групи ІПЗ–23–2
Первітін Д. Р.
Перевірив викладач
Шамрай О. В.
Смолянський П. С.

Кривий Ріг – 2025

Лабораторна робота № 6

Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами апроксимації (наближення) функцій, навчитися реалізовувати метод найменших квадратів (МНК) для побудови апроксимуючого полінома $P_m(x)$ степеня m за N експериментальними точками.

Навчитися формувати систему нормальних рівнянь, розв'язувати її для знаходження коефіцієнтів полінома, розуміти особливості методу при $N \gg m$. Навчитися візуально оцінювати точність отриманого наближення шляхом побудови графіку апроксимуючого полінома $P_m(x)$ разом із початковими експериментальними точками, використовуючи лише стандартні бібліотеки C++ для реалізації алгоритмів та обчислень.

Завдання до роботи

Задача 10. Задане число N та масиви експериментальних точок x , у розмірності N , а також степінь аппроксимуючого полінома m ($m < 7$), причому $N \gg m$, тобто число точок N набагато більше m . Потрібно знайти коефіцієнти полінома, отриманного за МНК. Також потрібно побудувати графік полінома, вказавши на ньому експериментальні точки.

Скріншот екрану програми з результатом роботи програми

```

=====
APROKSIMUJUCHYI POLINOM
=====

Степінь полінома: m = 1
P(x) = 1.990000*x + 1.020000
Коефіцієнти:
-----

| Коефіцієнт | Значення       |
|------------|----------------|
| a0         | 1.02000000e+00 |
| a1         | 1.99000000e+00 |

-----
=====

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК
Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 5
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 1
Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
x[1] = 0
y[1] = 0.9

Точка 2:
x[2] = 1
y[2] = 3.1

Точка 3:
x[3] = 2
y[3] = 5.2

Точка 4:
x[4] = 3
y[4] = 6.8

Точка 5:
x[5] = 4
y[5] = 9.0

Введені експериментальні дані:
-----

| N | x        | y        |
|---|----------|----------|
| 1 | 0.000000 | 0.900000 |
| 2 | 1.000000 | 3.100000 |
| 3 | 2.000000 | 5.200000 |
| 4 | 3.000000 | 6.800000 |
| 5 | 4.000000 | 9.000000 |

-----
=====

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЕНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

Нормальна система рівнянь:
-----

| 5.0000  | 10.0000 |  | 25.0000 |
|---------|---------|--|---------|
| 10.0000 | 30.0000 |  | 69.9000 |

-----
=====

v Система успішно розв'язана!
=====

APROKSIMUJUCHYI POLINOM
=====

=====

АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:
-----

| N | x      | y (експ.) | P(x) (МНК) | Похибка  | Відн. похибка |
|---|--------|-----------|------------|----------|---------------|
| 1 | 0.0000 | 0.900000  | 1.020000   | 1.20e-01 | 13.33%        |
| 2 | 1.0000 | 3.100000  | 3.010000   | 9.00e-02 | 2.90%         |
| 3 | 2.0000 | 5.200000  | 5.000000   | 2.00e-01 | 3.85%         |
| 4 | 3.0000 | 6.800000  | 6.990000   | 1.90e-01 | 2.79%         |
| 5 | 4.0000 | 9.000000  | 8.980000   | 2.00e-02 | 0.22%         |

-----
=====

Статистичні показники:
-----

| Середньоквадратична похибка (MSE): | 1.407125e-01 |
|------------------------------------|--------------|
| Максимальна похибка:               | 2.000000e-01 |
| Середня похибка:                   | 1.240000e-01 |
| Коефіцієнт детермінації (R2):      | 0.997506     |

-----
=====

Оцінка якості апроксимації:
vvv Відмінна апроксимація (R2 > 0.95)

=====

ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Діапазон: x E [-0.40, 4.40], y E [-0.73, 10.73]
-----
=====

ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Діапазон: x E [-0.40, 4.40], y E [-0.73, 10.73]
-----
=====

Позначення:
* - апроксимуючий поліном (МНК)
0 - експериментальні точки
=====

ВИКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО
=====

Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . .
=====
```

Рисунок 1 – Лінійна апроксимація.

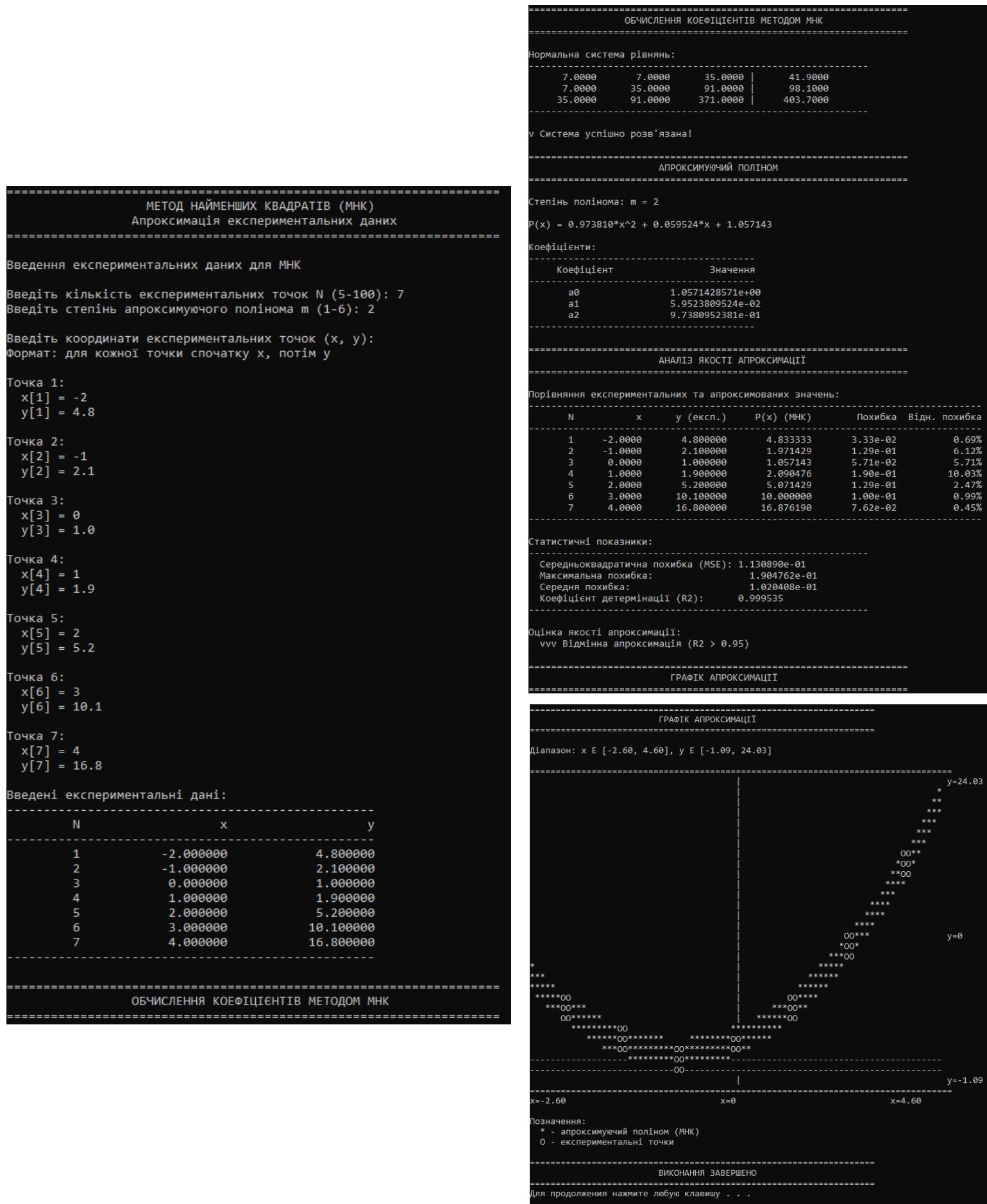


Рисунок 2 – Квадратична апроксимація.

```

=====
METOD НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 10
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 3

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
x[1] = -2
y[1] = -17

Точка 2:
x[2] = -1
y[2] = -3

Точка 3:
x[3] = 0
y[3] = 1

Точка 4:
x[4] = 0.5
y[4] = 1.125

Точка 5:
x[5] = 1
y[5] = 1

Точка 6:
x[6] = 1.5
y[6] = 0.625

Точка 7:
x[7] = 2
y[7] = 3

Точка 8:
x[8] = 2.5
y[8] = 9.125

Точка 9:
x[9] = 3
y[9] = 19

Точка 10:
x[10] = 4
y[10] = 45

Введені експериментальні дані:
=====

    N          x          y
-----+-----+-----+
    1      -2.000000  -17.000000
    2      -1.000000   -3.000000
    3       0.000000    1.000000
    4      0.500000   1.125000
    5      1.000000   1.000000
    6      1.500000   0.625000
-----+-----+-----+

```

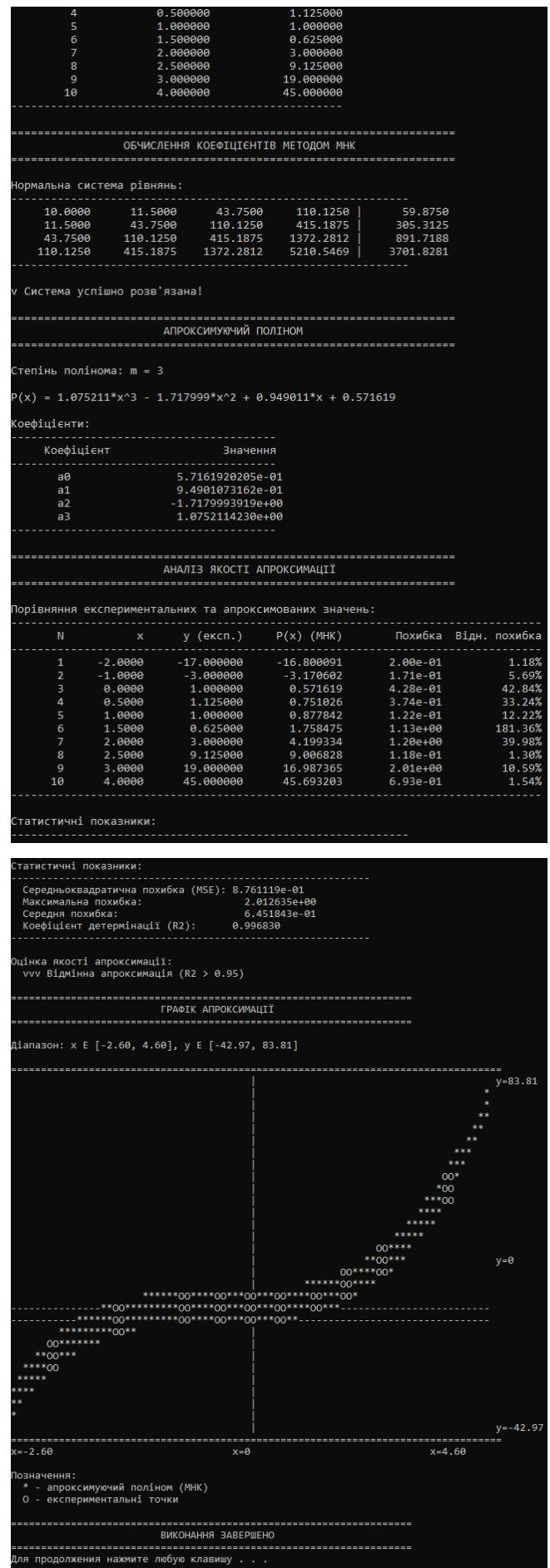


Рисунок 3 – Кубічна апроксимація.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТИВ (МНК)
Апроксимація експериментальних даних

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 8

Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 2

Введіть координати експериментальних точок (x, y):

Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:

x[1] = 0
y[1] = 1.0

Точка 2:

x[2] = 0.5
y[2] = 1.65

Точка 3:

x[3] = 1.0
y[3] = 2.72

Точка 4:

x[4] = 1.5
y[4] = 4.48

Точка 5:

x[5] = 2.0
y[5] = 7.39

Точка 6:

x[6] = 2.5
y[6] = 12.18

Точка 7:

x[7] = 3.0
y[7] = 20.09

Точка 8:

x[8] = 3.5
y[8] = 33.12

Введені експериментальні дані:

N	x	y
1	0.000000	1.000000
2	0.500000	1.650000
3	1.000000	2.720000
4	1.500000	4.480000
5	2.000000	7.390000
6	2.500000	12.180000
7	3.000000	20.090000
8	3.500000	33.120000

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК

Нормальна система рівнянь:

8.0000	14.0000	35.0000		82.6300
14.0000	35.0000	98.0000		231.6850
35.0000	98.0000	292.2500		705.4275

v Система успішно розв'язана!

АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ

Степінь полінома: $m = 2$

$P(x) = 3.7269005*x^2 - 4.750595*x + 2.337083$

Коефіцієнти:

Коефіцієнт	Значення
a0	2.3370833333e+00
a1	-4.7505952381e+00
a2	3.7269047619e+00

АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:

N	x	y (експ.)	P(x) (МНК)	Похибка	Відн. похибка
1	0.0000	1.000000	2.337083	1.34e+00	133.71%
2	0.5000	1.650000	0.893512	7.56e-01	45.85%
3	1.0000	2.720000	1.313393	1.41e+00	51.71%
4	1.5000	4.480000	3.596726	8.83e-01	19.72%
5	2.0000	7.390000	7.743512	3.54e-01	4.78%
6	2.5000	12.180000	13.753750	1.57e+00	12.92%
7	3.0000	20.090000	21.627440	1.54e+00	7.65%
8	3.5000	33.120000	31.364583	1.76e+00	5.30%

Статистичні показники:

Середньоквадратична похибка (MSE): 1.282851e+00
 Максимальна похибка: 1.755417e+00
 Середня похибка: 1.200446e+00
 Коефіцієнт детермінації (R²): 0.985060

Оцінка якості апроксимації:
 vvv Відмінна апроксимація ($R^2 > 0.95$)

ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ

Діапазон: x E [-0.35, 3.85], y E [-3.02, 43.14]

Позначення:
 * - апроксимуючий поліном (МНК)
 0 - експериментальні точки

ВІКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО

Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . .

Рисунок 4 – Експоненціальні дані.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
Апроксимація експериментальних даних

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК

Нормальна система рівнянь:

12.0000	66.0000	506.0000		556.5000
66.0000	506.0000	4356.0000		3909.9000
506.0000	4356.0000	39974.0000		33258.3000

v Система успішно розв'язана!

АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ

Степінь полінома: $m = 2$

$$P(x) = 0.338586 * x^2 + 2.213661 * x + 19.922802$$

Коефіцієнти:

Коефіцієнт	Значення
a0	1.9922802198e+01
a1	2.2136613387e+00
a2	3.3858641359e-01

АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:

N	x	y (експ.)	P(x) (МНК)	Похибка	Відн. похибка
1	0.0000	20.100000	19.922802	1.77e-01	0.88%
2	1.0000	22.300000	22.475050	1.75e-01	0.78%
3	2.0000	25.900000	25.704471	1.96e-01	0.75%
4	3.0000	29.200000	29.611664	4.11e-01	1.41%
5	4.0000	34.100000	34.194830	9.48e-02	0.28%
6	5.0000	39.800000	39.455769	3.44e-01	0.86%
7	6.0000	45.200000	45.393881	1.94e-01	0.43%
8	7.0000	52.300000	52.009166	2.91e-01	0.56%
9	8.0000	59.100000	59.301623	2.02e-01	0.34%
10	9.0000	67.500000	67.271254	2.29e-01	0.34%
11	10.0000	75.800000	75.918857	1.18e-01	0.16%
12	11.0000	85.200000	85.242033	4.20e-02	0.05%

Статистичні показники:

Середньоеквадратична похибка (MSE): 2.286901e-01
 Максимальна похибка: 4.110639e-01
 Середня похибка: 2.060897e-01
 Коефіцієнт детермінації (R2): 0.999879

Оцінка якості апроксимації:
 vvv Відмінна апроксимація ($R^2 > 0.95$)

ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ

Діапазон: $x \in [-1.10, 12.10]$, $y \in [10.06, 104.12]$

The figure shows a scatter plot of experimental data points (circles) and the fitted polynomial curve (solid line). The x-axis is labeled with values -1.10, 0, and 12.10. The y-axis is labeled with values 10.06, 0, and 104.12. The data points are scattered around the fitted curve, which follows a parabolic shape. The axes are labeled with their respective ranges: x-axis [-1.10, 12.10] and y-axis [10.06, 104.12].

Позначення:

* - апроксимуючий поліном (МНК)

0 - експериментальні точки

ВИКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО

для продовження нажміть будь-яку клавішу . . .

Рисунок 5 – Результат експерименту даних з шумом.

```

=====
МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТИВ (МНК)
Апроксимація експериментальних даних

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 6
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 1

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
x[1] = 1
y[1] = 5

Точка 2:
x[2] = 2
y[2] = 15

Точка 3:
x[3] = 3
y[3] = 12

Точка 4:
x[4] = 4
y[4] = 25

Точка 5:
x[5] = 5
y[5] = 18

Точка 6:
x[6] = 6
y[6] = 30

Введені експериментальні дані:

      N          x          y
-----+
 1 | 1.000000  5.000000
 2 | 2.000000 15.000000
 3 | 3.000000 12.000000
 4 | 4.000000 25.000000
 5 | 5.000000 18.000000
 6 | 6.000000 30.000000
-----+
=====

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК

Нормальна система рівнянь:

  6.0000   21.0000 | 105.0000
 21.0000   91.0000 | 441.0000
=====

v Система успішно розв'язана!

```

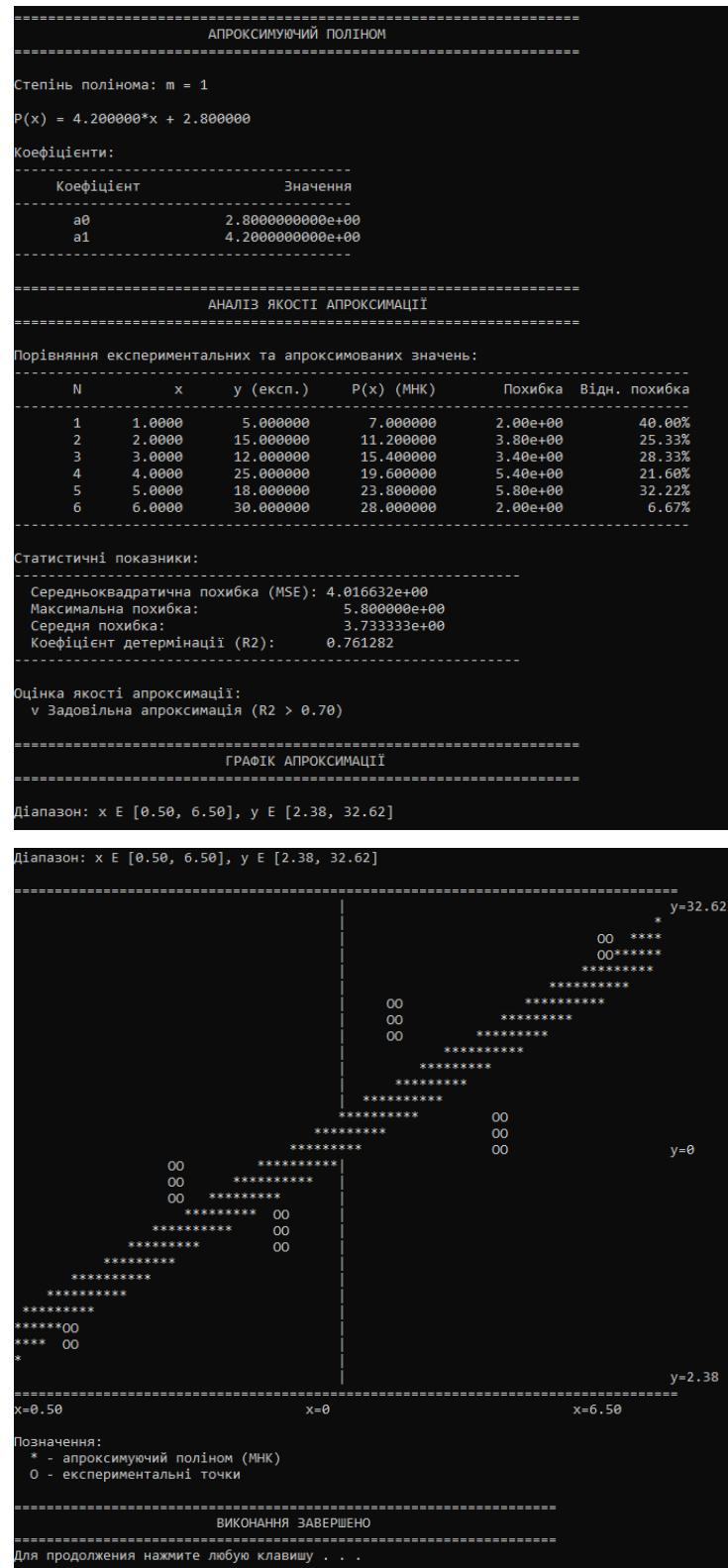


Рисунок 6 – Дані з великим розкидом.

Короткі висновки

У ході виконання лабораторної роботи я ознайомився з методом найменших квадратів (МНК) для апроксимації набору експериментальних даних поліномом заданого степеня m .

Під час практичної частини я реалізував алгоритм, який формує систему нормальніх рівнянь розмірністю. Алгоритм обчислює елементи матриці системи та елементи вектора вільних членів. Для розв'язання цієї СЛАР та знаходження невідомих коефіцієнтів апроксимуючого полінома був реалізований метод Гаусса з вибором головного елемента.

Програма коректно обробляє випадки, коли матриця системи нормальніх рівнянь є близькою до виродженої, та видає повідомлення про неможливість знаходження однозначного розв'язку.

Для кожного знайденого набору коефіцієнтів полінома $P_m(x)$ виконується візуальна перевірка шляхом побудови графіку. Це дозволяє візуально переконатися у якості апроксимації, оскільки на графіку одночасно відображаються початкові експериментальні точки (x_i, y_i) та отримана згладжувальна крива полінома.

Також я реалізував програму з використанням лише стандартних бібліотек, яка зчитує кількість точок N , степінь полінома m та масиви x , y , виконує обчислення коефіцієнтів полінома, виводить знайдені коефіцієнти та здійснює графічну побудову результату.

Програма враховує некоректний ввід даних, перевіряє розмірність, коректно обробляє граничні випадки та забезпечує детальний вивід.

Список використаних джерел

1. Ковальчук, О. М. Чисельні методи та алгоритми розв'язування рівнянь. – Львів: Книжковий клуб, 2021.
2. Іваненко, П. С. Основи програмування на C++ для математичних обчислень. – Київ: Видавничий дім "Київський університет", 2020.
3. Семененко, В. П. Комплексні числа та методи їх обчислення у програмуванні. – Харків: ХТЗ, 2019.
4. Петренко, А. М. Алгебраїчні рівняння 1–4 ступеня: теорія та практика. – Одеса: ОНУ, 2020.
5. Грищенко, І. В. Графічне відображення функцій та чисельні методи в C++. – Київ: Літера, 2018.