

Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет
Кафедра моделювання і програмного забезпечення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6
з дисципліни «Числові методи»
Тема: «Метод найменших квадратів.»
Варіант 11

Виконав студент:

групи ІПЗ–23–2

Первітін Д. Р.

Перевірів викладач

Шамрай О. В.

Смолянський П. С.

Кривий Ріг – 2025

Лабораторна робота № 6

Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами апроксимації (наближення) функцій, навчитися реалізовувати метод найменших квадратів (МНК) для побудови апроксимуючого полінома $P_m(x)$ степеня m за N експериментальними точками.

Навчитися формувати систему нормальних рівнянь, розв'язувати її для знаходження коефіцієнтів полінома, розуміти особливості методу при $N \gg m$. Навчитися візуально оцінювати точність отриманого наближення шляхом побудови графіку апроксимуючого полінома $P_m(x)$ разом із початковими експериментальними точками, використовуючи лише стандартні бібліотеки C++ для реалізації алгоритмів та обчислень.

Завдання до роботи

Задача 10. Задане число N та масиви експериментальних точок x , y розмірності N , а також степінь апроксимуючого полінома m ($m < 7$), причому $N \gg m$, тобто число точок N набагато більше m . Потрібно знайти коефіцієнти полінома, отриманого за МНК. Також потрібно побудувати графік полінома, вказавши на ньому експериментальні точки.


```

=====
                МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
            Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 7
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 2

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
  x[1] = -2
  y[1] = 4.8

Точка 2:
  x[2] = -1
  y[2] = 2.1

Точка 3:
  x[3] = 0
  y[3] = 1.0

Точка 4:
  x[4] = 1
  y[4] = 1.9

Точка 5:
  x[5] = 2
  y[5] = 5.2

Точка 6:
  x[6] = 3
  y[6] = 10.1

Точка 7:
  x[7] = 4
  y[7] = 16.8

Введені експериментальні дані:
=====
      N           x           y
=====
      1      -2.000000      4.800000
      2      -1.000000      2.100000
      3       0.000000      1.000000
      4       1.000000      1.900000
      5       2.000000      5.200000
      6       3.000000     10.100000
      7       4.000000     16.800000
=====

=====
                ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

```

```

=====
                ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

Нормальна система рівнянь:
=====
      7.0000      7.0000      35.0000 |      41.9000
      7.0000      35.0000      91.0000 |      98.1000
      35.0000      91.0000     371.0000 |     403.7000
=====

у Система успішно розв'язана!

=====
                АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ
=====

Степінь полінома: m = 2
P(x) = 0.973810*x^2 + 0.059524*x + 1.057143

Коефіцієнти:
=====
      Коефіцієнт      Значення
=====
      a0              1.0571428571e+00
      a1              5.9523809524e-02
      a2              9.7380952381e-01
=====

=====
                АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:
=====
      N      x      y (експ.)      P(x) (МНК)      Похибка      Відн. похибка
=====
      1     -2.0000      4.800000      4.833333      3.33e-02      0.69%
      2     -1.0000      2.100000      1.971429      1.29e-01      6.12%
      3       0.0000      1.000000      1.057143      5.71e-02      5.71%
      4       1.0000      1.900000      2.090476      1.90e-01     10.03%
      5       2.0000      5.200000      5.071429      1.29e-01      2.47%
      6       3.0000     10.100000     10.000000      1.00e-01      0.99%
      7       4.0000     16.800000     16.876190      7.62e-02      0.45%
=====

Статистичні показники:
=====
      Середньоквадратична похибка (MSE): 1.130890e-01
      Максимальна похибка: 1.904762e-01
      Середня похибка: 1.020408e-01
      Коефіцієнт детермінації (R2): 0.999535
=====

Оцінка якості апроксимації:
vvv Відмінна апроксимація (R2 > 0.95)

=====
                ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ
=====

```



Рисунок 2 – Квадратична апроксимація.

```

=====
                МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
                Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 10
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 3

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
  x[1] = -2
  y[1] = -17

Точка 2:
  x[2] = -1
  y[2] = -3

Точка 3:
  x[3] = 0
  y[3] = 1

Точка 4:
  x[4] = 0.5
  y[4] = 1.125

Точка 5:
  x[5] = 1
  y[5] = 1

Точка 6:
  x[6] = 1.5
  y[6] = 0.625

Точка 7:
  x[7] = 2
  y[7] = 3

Точка 8:
  x[8] = 2.5
  y[8] = 9.125

Точка 9:
  x[9] = 3
  y[9] = 19

Точка 10:
  x[10] = 4
  y[10] = 45

Введені експериментальні дані:
=====

```

N	x	y
1	-2.000000	-17.000000
2	-1.000000	-3.000000
3	0.000000	1.000000
4	0.500000	1.125000
5	1.000000	1.000000
6	1.500000	0.625000

```

=====
                ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

Нормальна система рівнянь:
=====
10.0000    11.5000    43.7500    110.1250    |    59.8750
11.5000    43.7500    110.1250    415.1875    |    305.3125
43.7500    110.1250    415.1875    1372.2812    |    891.7188
110.1250    415.1875    1372.2812    5210.5469    |    3701.8281
=====

y Система успішно розв'язана!

=====
                АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ
=====

Степінь полінома: m = 3

P(x) = 1.075211*x^3 - 1.717999*x^2 + 0.949011*x + 0.571619

Коефіцієнти:
=====
Коефіцієнт          Значення
a0                   5.7161920205e-01
a1                   9.4901073162e-01
a2                   -1.7179993919e+00
a3                   1.0752114230e+00
=====

=====
                АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:
=====

```

N	x	y (експ.)	P(x) (МНК)	Похибка	Відн. похибка
1	-2.0000	-17.000000	-16.800091	2.00e-01	1.18%
2	-1.0000	-3.000000	-3.170602	1.71e-01	5.69%
3	0.0000	1.000000	0.571619	4.28e-01	42.84%
4	0.5000	1.125000	0.751026	3.74e-01	33.24%
5	1.0000	1.000000	0.877842	1.22e-01	12.22%
6	1.5000	0.625000	1.758475	1.13e+00	181.36%
7	2.0000	3.000000	4.199334	1.20e+00	39.98%
8	2.5000	9.125000	9.006828	1.18e-01	1.30%
9	3.0000	19.000000	16.987365	2.01e+00	10.59%
10	4.0000	45.000000	45.693203	6.93e-01	1.54%

```

=====
Статистичні показники:
=====

Статистичні показники:
=====
Середньоквадратична похибка (MSE): 8.761119e-01
Максимальна похибка: 2.012635e+00
Середня похибка: 6.451843e-01
Коефіцієнт детермінації (R2): 0.996830
=====

Оцінка якості апроксимації:
vvv Відмінна апроксимація (R2 > 0.95)

=====
                ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Діапазон: x E [-2.60, 4.60], y E [-42.97, 83.81]

=====

```

```

=====
Позначення:
* - апроксимуючий поліном (МНК)
o - експериментальні точки
=====

=====
                ВИКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО
=====

Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . .

```

Рисунок 3 – Кубічна апроксимація.

```

=====
                МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
                Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 8
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 2

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
    x[1] = 0
    y[1] = 1.0

Точка 2:
    x[2] = 0.5
    y[2] = 1.65

Точка 3:
    x[3] = 1.0
    y[3] = 2.72

Точка 4:
    x[4] = 1.5
    y[4] = 4.48

Точка 5:
    x[5] = 2.0
    y[5] = 7.39

Точка 6:
    x[6] = 2.5
    y[6] = 12.18

Точка 7:
    x[7] = 3.0
    y[7] = 20.09

Точка 8:
    x[8] = 3.5
    y[8] = 33.12

Введені експериментальні дані:
=====

```

N	x	y
1	0.000000	1.000000
2	0.500000	1.650000
3	1.000000	2.720000
4	1.500000	4.480000
5	2.000000	7.390000
6	2.500000	12.180000
7	3.000000	20.090000
8	3.500000	33.120000

```

=====
                ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

```

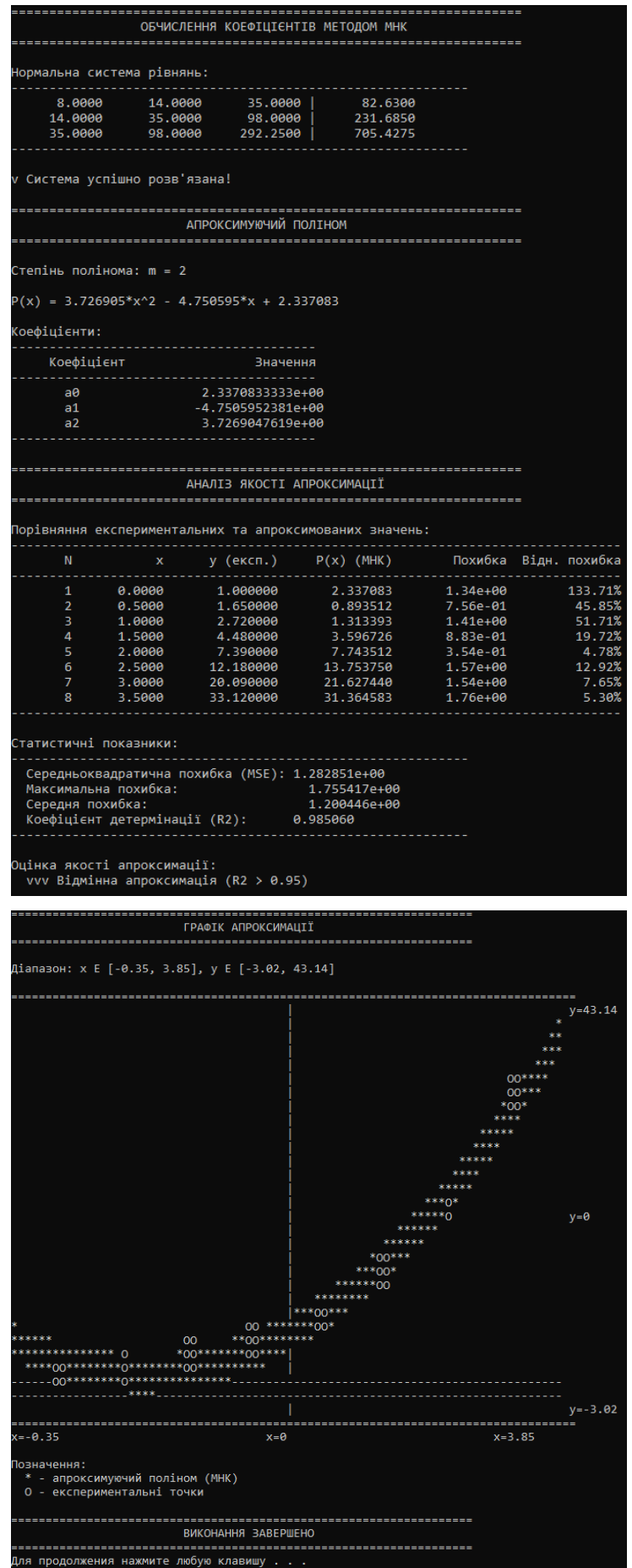


Рисунок 4 – Експоненціальні дані.

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК) Апроксимація експериментальних даних

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 12
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 2

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
x[1] = 0
y[1] = 20.1

Точка 2:
x[2] = 1
y[2] = 22.3

Точка 3:
x[3] = 2
y[3] = 25.9

Точка 4:
x[4] = 3
y[4] = 29.2

Точка 5:
x[5] = 4
y[5] = 34.1

Точка 6:
x[6] = 5
y[6] = 39.8

Точка 7:
x[7] = 6
y[7] = 45.2

Точка 8:
x[8] = 7
y[8] = 52.3

Точка 9:
x[9] = 8
y[9] = 59.1

Точка 10:
x[10] = 9
y[10] = 67.5

Точка 11:
x[11] = 10
y[11] = 75.8

Точка 12:
x[12] = 11
y[12] = 85.2

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК

Нормальна система рівнянь:

12.0000	66.0000	506.0000	556.5000
66.0000	506.0000	4356.0000	3909.9000
506.0000	4356.0000	39974.0000	33258.3000

v Система успішно розв'язана!

АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ

Степінь полінома: m = 2

$P(x) = 0.338586 \cdot x^2 + 2.213661 \cdot x + 19.922802$

Коефіцієнти:

Коефіцієнт	Значення
a0	1.9922802198e+01
a1	2.2136613387e+00
a2	3.3858641359e-01

АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:

N	x	y (експ.)	P(x) (МНК)	Похибка	Відн. похибка
1	0.0000	20.100000	19.922802	1.77e-01	0.88%
2	1.0000	22.300000	22.475050	1.75e-01	0.78%
3	2.0000	25.900000	25.704471	1.96e-01	0.75%
4	3.0000	29.200000	29.611064	4.11e-01	1.41%
5	4.0000	34.100000	34.194830	9.48e-02	0.28%
6	5.0000	39.800000	39.455769	3.44e-01	0.86%
7	6.0000	45.200000	45.393881	1.94e-01	0.43%
8	7.0000	52.300000	52.009166	2.91e-01	0.56%
9	8.0000	59.100000	59.301623	2.02e-01	0.34%
10	9.0000	67.500000	67.271254	2.29e-01	0.34%
11	10.0000	75.800000	75.918057	1.18e-01	0.16%
12	11.0000	85.200000	85.242033	4.20e-02	0.05%

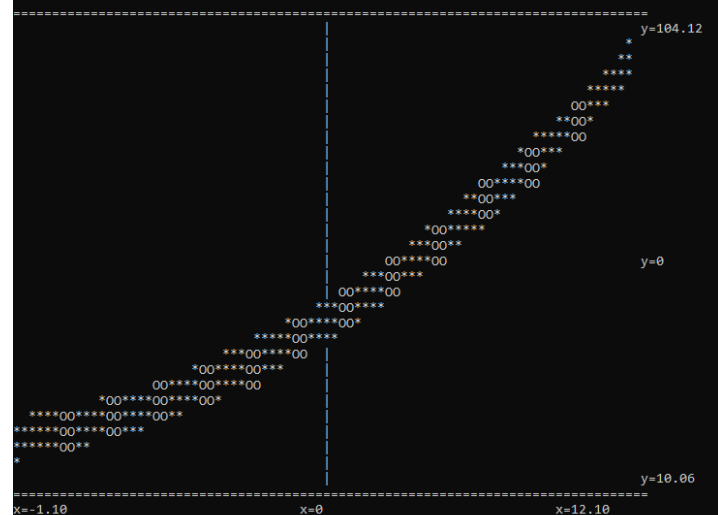
Статистичні показники:

Середньоквадратична похибка (MSE):	2.286901e-01
Максимальна похибка:	4.110639e-01
Середня похибка:	2.060897e-01
Коефіцієнт детермінації (R2):	0.999879

Оцінка якості апроксимації:
vvv Відмінна апроксимація (R2 > 0.95)

ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ

Діапазон: x Є [-1.10, 12.10], y Є [10.06, 104.12]



Позначення:
* - апроксимуючий поліном (МНК)
O - експериментальні точки

ВИКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО

Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . .

Рисунок 5 – Результат експерименту даних з шумом.

```

=====
                        МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (МНК)
                        Апроксимація експериментальних даних
=====

Введення експериментальних даних для МНК

Введіть кількість експериментальних точок N (5-100): 6
Введіть степінь апроксимуючого полінома m (1-6): 1

Введіть координати експериментальних точок (x, y):
Формат: для кожної точки спочатку x, потім y

Точка 1:
  x[1] = 1
  y[1] = 5

Точка 2:
  x[2] = 2
  y[2] = 15

Точка 3:
  x[3] = 3
  y[3] = 12

Точка 4:
  x[4] = 4
  y[4] = 25

Точка 5:
  x[5] = 5
  y[5] = 18

Точка 6:
  x[6] = 6
  y[6] = 30

Введені експериментальні дані:
=====
      N           x           y
=====
      1      1.000000      5.000000
      2      2.000000     15.000000
      3      3.000000     12.000000
      4      4.000000     25.000000
      5      5.000000     18.000000
      6      6.000000     30.000000
=====

                        ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МЕТОДОМ МНК
=====

Нормальна система рівнянь:
=====
      6.0000      21.0000 |      105.0000
      21.0000     91.0000 |      441.0000
=====

v Система успішно розв'язана!

```

```

=====
                        АПРОКСИМУЮЧИЙ ПОЛІНОМ
=====

Степінь полінома: m = 1
P(x) = 4.200000*x + 2.800000

Коефіцієнти:
=====
      Коефіцієнт      Значення
=====
      a0      2.8000000000e+00
      a1      4.2000000000e+00
=====

                        АНАЛІЗ ЯКОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Порівняння експериментальних та апроксимованих значень:
=====
      N      x      y (експ.)      P(x) (МНК)      Похибка      Відн. похибка
=====
      1      1      5.000000      7.000000      2.00e+00      40.00%
      2      2     15.000000     11.200000      3.80e+00      25.33%
      3      3     12.000000     15.400000      3.40e+00      28.33%
      4      4     25.000000     19.600000      5.40e+00      21.60%
      5      5     18.000000     23.800000      5.80e+00      32.22%
      6      6     30.000000     28.000000      2.00e+00      6.67%
=====

Статистичні показники:
=====
Середньоквадратична похибка (MSE): 4.016632e+00
Максимальна похибка: 5.800000e+00
Середня похибка: 3.733333e+00
Коефіцієнт детермінації (R2): 0.761282
=====

Оцінка якості апроксимації:
v Задовільна апроксимація (R2 > 0.70)

=====
                        ГРАФІК АПРОКСИМАЦІЇ
=====

Діапазон: x Є [0.50, 6.50], y Є [2.38, 32.62]

Діапазон: x Є [0.50, 6.50], y Є [2.38, 32.62]

=====
      * - апроксимуючий поліном (МНК)
      o - експериментальні точки
=====

                        ВИКОНАННЯ ЗАВЕРШЕНО
=====
Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . .

```

Рисунок 6 – Дані з великим розкидом.

Короткі висновки

У ході виконання лабораторної роботи я ознайомився з методом найменших квадратів (МНК) для апроксимації набору експериментальних даних поліномом заданого степеня m .

Під час практичної частини я реалізував алгоритм, який формує систему нормальних рівнянь розмірністю. Алгоритм обчислює елементи матриці системи та елементи вектора вільних членів. Для розв'язання цієї СЛАР та знаходження невідомих коефіцієнтів апроксимуючого полінома був реалізований метод Гаусса з вибором головного елемента.

Програма коректно обробляє випадки, коли матриця системи нормальних рівнянь є близькою до виродженої, та видає повідомлення про неможливість знаходження однозначного розв'язку.

Для кожного знайденого набору коефіцієнтів полінома $P_m(x)$ виконується візуальна перевірка шляхом побудови графіку. Це дозволяє візуально переконатися у якості апроксимації, оскільки на графіку одночасно відображаються початкові експериментальні точки (x_i, y_i) та отримана згладжувальна крива полінома.

Також я реалізував програму з використанням лише стандартних бібліотек, яка зчитує кількість точок N , степінь полінома m та масиви x , y , виконує обчислення коефіцієнтів полінома, виводить знайдені коефіцієнти та здійснює графічну побудову результату.

Програма враховує некоректний ввід даних, перевіряє розмірність, коректно обробляє граничні випадки та забезпечує детальний вивід.

Список використаних джерел

1. Ковальчук, О. М. Чисельні методи та алгоритми розв'язування рівнянь. – Львів: Книжковий клуб, 2021.
2. Іваненко, П. С. Основи програмування на C++ для математичних обчислень. – Київ: Видавничий дім "Київський університет", 2020.
3. Семененко, В. П. Комплексні числа та методи їх обчислення у програмуванні. – Харків: ХТЗ, 2019.
4. Петренко, А. М. Алгебраїчні рівняння 1–4 ступеня: теорія та практика. – Одеса: ОНУ, 2020.
5. Гриценко, І. В. Графічне відображення функцій та чисельні методи в C++. – Київ: Літера, 2018.