

Міністерство освіти і науки України  
Криворізький національний університет  
Кафедра моделювання і програмного забезпечення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7  
з дисципліни «Числові методи»  
Тема: «Чисельне інтегрування»  
Варіант 11

Виконав студент:

групи ІПЗ–23–2

Первітін Д. Р.

Перевірив викладач

Шамрай О. В.

Смолянський П. С.

Кривий Ріг – 2025

## Лабораторна робота № 7

### Мета роботи

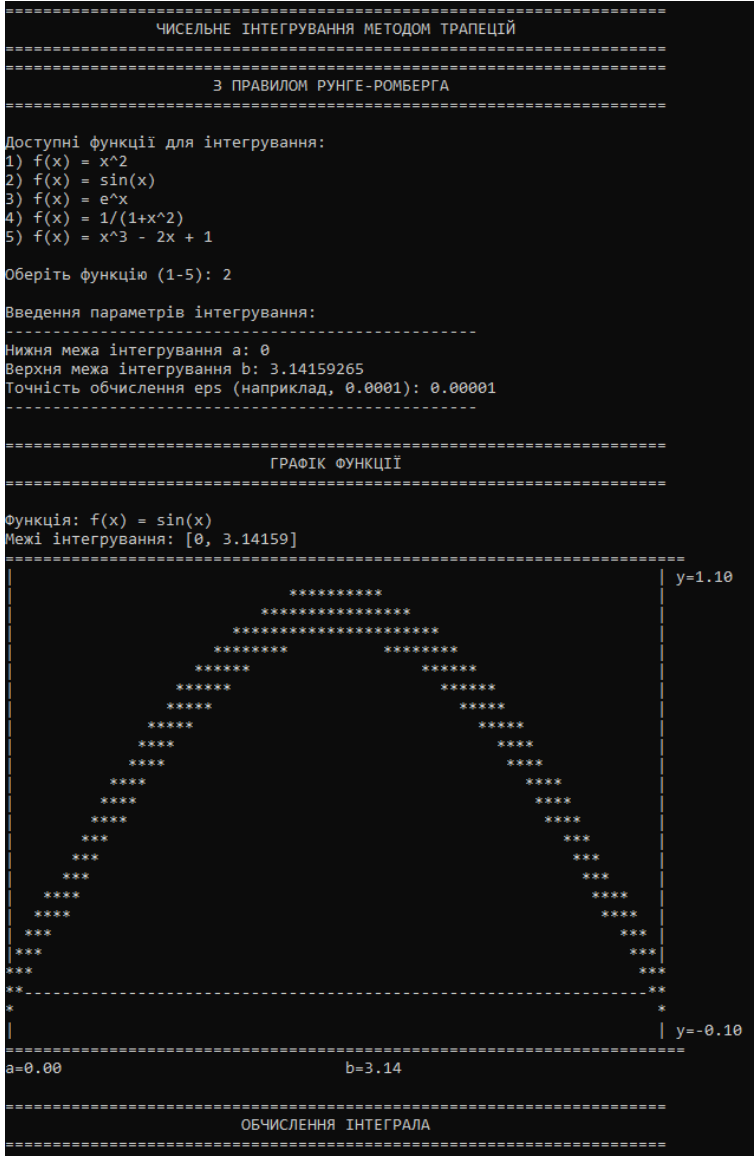
Ознайомитися з чисельними методами визначеного інтегрування, навчитися реалізовувати складену формулу трапецій для обчислення інтеграла.

Розуміти особливості обчислювальних алгоритмів, що вимагають досягнення заданої точності  $\epsilon_{ps}$ . Також навчитися автоматично визначати необхідну кількість поділів ( $N$ ), використовуючи правило Рунге-Ромберга для оцінки похибки та контролю за досягненням заданої точності, використовуючи лише стандартні бібліотеки C++ для реалізації алгоритмів та обчислень.

### Завдання до роботи

**Задача 11.** Знайти інтеграл від заданої функції  $f(x)$  на відріжку  $[a, b]$  за складеною формулою трапецій із заданою точністю  $\epsilon_{ps}$ . Відрізок при цьому ділиться на  $N$  рівних частин. При цьому необхідне число  $N$  потрібно визначити виходячи з правила Рунге-Ромберга.





```

=====
                        ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція:  $f(x) = \sin(x)$ 
Межі інтегрування: [0.00, 3.14]
Задана точність:  $\text{eps} = 1.00\text{e-}05$ 

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:

```

| Ітерація | N   | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|-----|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4   | 1.8961188982 | ---          | ---        |
| 1        | 8   | 1.9742316020 | 7.8113e-02   | 2.6038e-02 |
| 2        | 16  | 1.9936e+00   | 1.9339e-02   | 6.4462e-03 |
| 3        | 32  | 1.9984e+00   | 4.8230e-03   | 1.6077e-03 |
| 4        | 64  | 1.9996e+00   | 1.2050e-03   | 4.0168e-04 |
| 5        | 128 | 1.9999e+00   | 3.0121e-04   | 1.0040e-04 |
| 6        | 256 | 2.0000e+00   | 7.5300e-05   | 2.5100e-05 |
| 7        | 512 | 2.0000e+00   | 1.8825e-05   | 6.2749e-06 |

```

-----
Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 512
Оцінка похибки за Рунге: 6.2749e-06

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 2.000000000016

=====
                        РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 2.000000000016
Аналітичний результат (точне значення): 2.000000000000
-----
Фактична похибка: 1.574940e-11
Задана точність: 1.000000e-05
-----
Кількість розбиттів: N = 512
Крок інтегрування: h = 0.00000000
=====

ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 1.57494018e-11 < 1.00000000e-05
-----
Відносна похибка: 0.0000%
=====

                        ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
=====
Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . .

```



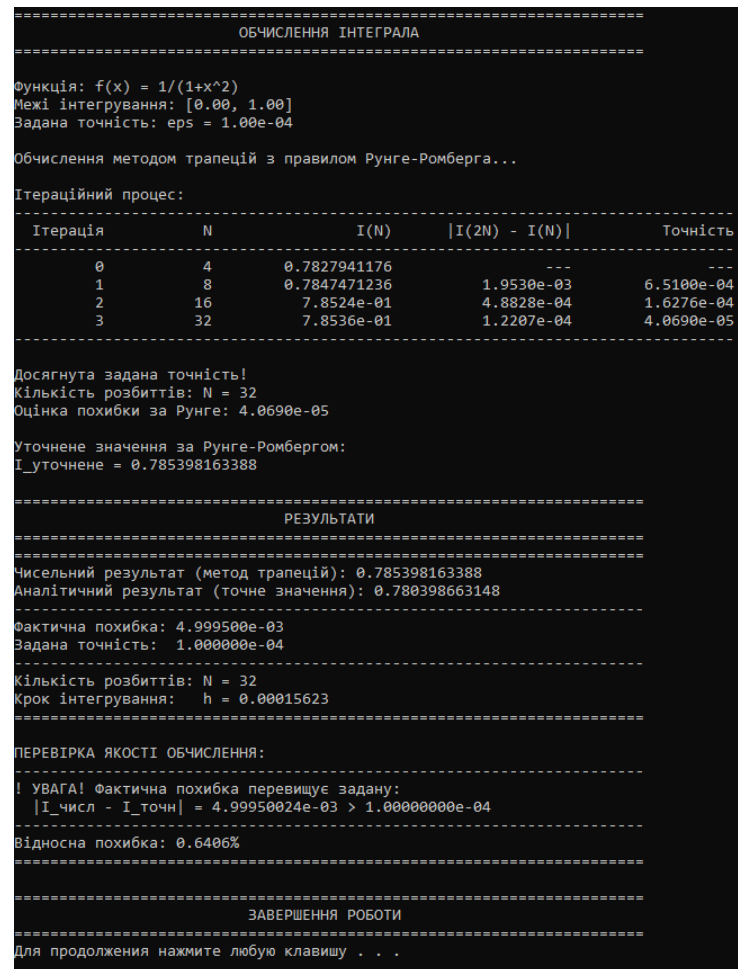
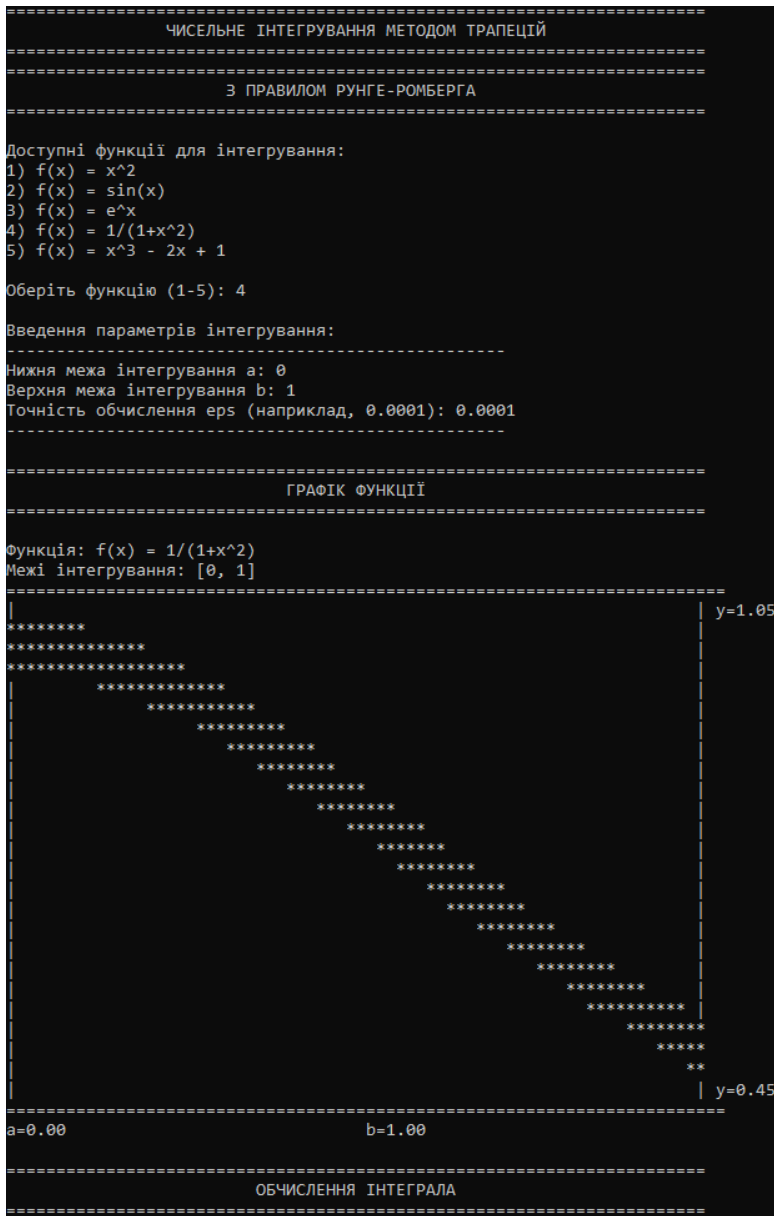


Рисунок 4 – Інтеграл від  $\frac{1}{1+x^2}$  на  $[0,1]$ .

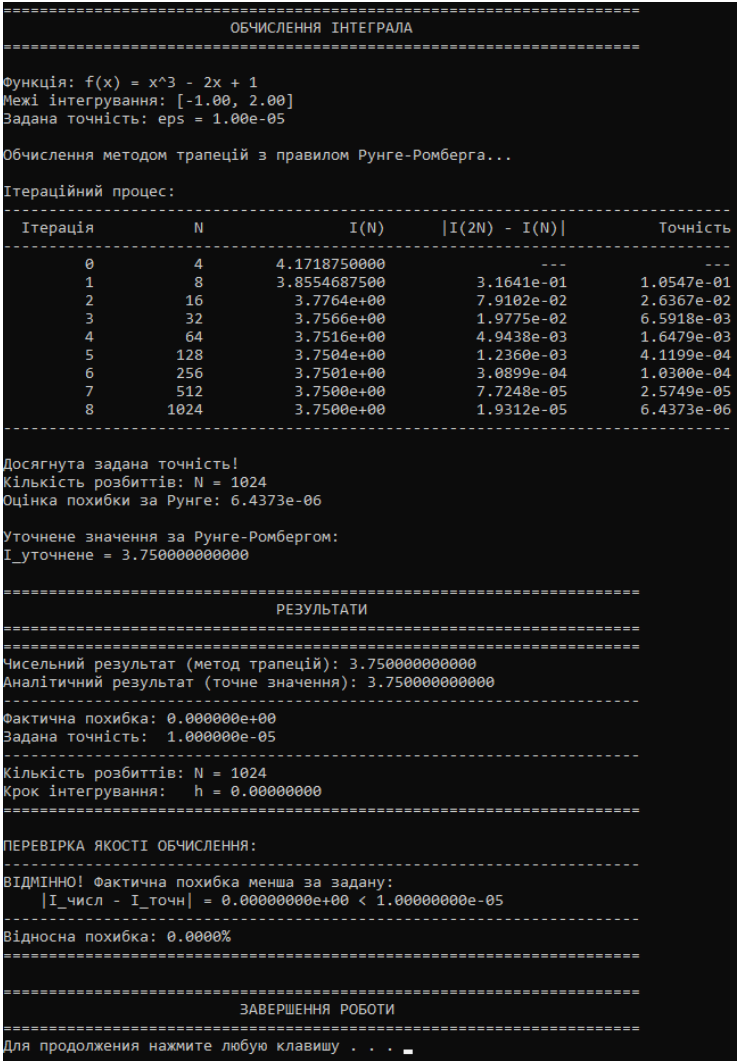


Рисунок 5 – Інтеграл від поліному на  $[-1,2]$ .

```
=====
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====
Функція: f(x) = x^2
Межі інтегрування: [0.00, 1.00]
Задана точність: eps = 1.00e-08

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:
=====


| Ітерація | N    | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|------|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4    | 0.3437500000 | ---          | ---        |
| 1        | 8    | 0.3359375000 | 7.8125e-03   | 2.6042e-03 |
| 2        | 16   | 3.3398e-01   | 1.9531e-03   | 6.5104e-04 |
| 3        | 32   | 3.3350e-01   | 4.8828e-04   | 1.6276e-04 |
| 4        | 64   | 3.3337e-01   | 1.2207e-04   | 4.0690e-05 |
| 5        | 128  | 3.3334e-01   | 3.0518e-05   | 1.0173e-05 |
| 6        | 256  | 3.3334e-01   | 7.6294e-06   | 2.5431e-06 |
| 7        | 512  | 3.3333e-01   | 1.9073e-06   | 6.3578e-07 |
| 8        | 1024 | 3.3333e-01   | 4.7684e-07   | 1.5895e-07 |
| 9        | 2048 | 3.3333e-01   | 1.1921e-07   | 3.9736e-08 |
| 10       | 4096 | 3.3333e-01   | 2.9802e-08   | 9.9341e-09 |


=====
Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 4096
Оцінка похибки за Рунге: 9.9341e-09

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 0.333333333333

=====
РЕЗУЛЬТАТИ
=====
Чисельний результат (метод трапецій): 0.333333333333
Аналітичний результат (точне значення): 0.333333333333
=====
Фактична похибка: 0.0000000e+00
Задана точність: 1.000000e-08
=====
Кількість розбиттів: N = 4096
Крок інтегрування: h = 0.00000000
=====
ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:
=====
ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 0.00000000e+00 < 1.00000000e-08
Відносна похибка: 0.0000%
=====
ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
=====
Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . .
```

Рисунок 6 – Результат тесту з високою точністю.



```

=====
ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ
=====
З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА
=====

Доступні функції для інтегрування:
1) f(x) = x^2
2) f(x) = sin(x)
3) f(x) = e^x
4) f(x) = 1/(1+x^2)
5) f(x) = x^3 - 2x + 1

Оберіть функцію (1-5): 2

Введення параметрів інтегрування:
-----
Нижня межа інтегрування a: 0
Верхня межа інтегрування b: 6.28318
Точність обчислення eps (наприклад, 0.0001): 0.001
-----

=====
ГРАФІК ФУНКЦІЇ
=====

Функція: f(x) = sin(x)
Межі інтегрування: [0, 6.28318]
-----

```



```

-----
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

```

```

=====
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція: f(x) = sin(x)
Межі інтегрування: [0.00, 6.28]
Задана точність: eps = 1.00e-03

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:
-----

```

| Ітерація | N | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|---|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4 | 0.0000000000 | ---          | ---        |
| 1        | 8 | 0.0000000000 | 2.2897e-12   | 7.6323e-13 |

```

-----

Достигнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 8
Оцінка похибки за Рунге: 7.6323e-13

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 0.000000000014

=====
РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 0.000000000014
Аналітичний результат (точне значення): 0.000000000014
-----

Фактична похибка: 3.214945e-14
Задана точність: 1.000000e-03
-----

Кількість розбиттів: N = 8
Крок інтегрування: h = 0.00000000

=====

ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:
-----

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 3.21494503e-14 < 1.00000000e-03
-----

Відносна похибка: 0.2283%
=====

=====
ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
=====

Для продовження натисніть будь-яку клавішу . . . █

```

Рисунок 7 – Результат тесту з великим інтервалом.

### **Короткі висновки**

У ході виконання лабораторної роботи я ознайомився з методом чисельного інтегрування, а саме складеною формулою трапецій. Під час практичної частини я реалізував ітераційний алгоритм, який обчислює значення інтеграла, послідовно подвоюючи кількість поділів ( $N$ ) на кожному кроці.

Програма коректно оцінює похибку обчислень на кожній ітерації за допомогою правила Рунге-Ромберга. Алгоритм включає автоматичну зупинку: обчислення тривають лише доти, доки оцінка похибки (за правилом Рунге-Ромберга) не стане меншою за задану користувачем точність  $\epsilon_{rs}$ .

Це дозволяє переконатися, що фінальне значення інтеграла було знайдено саме з необхідною точністю, а також визначити, яка саме кількість поділів  $N$  була для цього достатньою.

Також я реалізував програму з використанням лише стандартних бібліотек, яка зчитує межі інтегрування  $[a, b]$  та точність  $\epsilon_{rs}$ , виконує ітераційне обчислення, виводить знайдене значення інтеграла, фінальну кількість поділів  $N$  та досягнуту похибку.

Програма враховує некоректний ввід даних, коректно обробляє граничні випадки та забезпечує детальний вивід.

### **Список використаних джерел**

1. Ковальчук, О. М. Чисельні методи та алгоритми розв'язування рівнянь. – Львів: Книжковий клуб, 2021.
2. Іваненко, П. С. Основи програмування на C++ для математичних обчислень. – Київ: Видавничий дім "Київський університет", 2020.
3. Семененко, В. П. Комплексні числа та методи їх обчислення у програмуванні. – Харків: ХТЗ, 2019.
4. Петренко, А. М. Алгебраїчні рівняння 1–4 ступеня: теорія та практика. – Одеса: ОНУ, 2020.
5. Гриценко, І. В. Графічне відображення функцій та чисельні методи в C++. – Київ: Літера, 2018.