

Міністерство освіти і науки України  
Криворізький національний університет  
Кафедра моделювання і програмного забезпечення

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

з дисципліни «Числові методи»

Тема: «Чисельне інтегрування»

Варіант 11

Виконав студент:

групи ІПЗ–23–2

Первітін Д. Р.

Перевірив викладач

Шамрай О. В.

Смолянський П. С.

Кривий Ріг – 2025

## Лабораторна робота № 7

### Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами визначеного інтегрування, навчитися реалізовувати складену формулу трапецій для обчислення інтеграла.

Розуміти особливості обчислювальних алгоритмів, що вимагають досягнення заданої точності  $\text{eps}$ . Також навчитися автоматично визначати необхідну кількість поділів ( $N$ ), використовуючи правило Рунге-Ромберга для оцінки похибки та контролю за досягненням заданої точності, використовуючи лише стандартні бібліотеки C++ для реалізації алгоритмів та обчислень.

### Завдання до роботи

**Задача 11.** Знайти інтеграл від заданої функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  за складеною формулою трапецій із заданою точністю  $\text{eps}$ . Відрізок при цьому ділиться на  $N$  рівних частин. При цьому необхідне число  $N$  потрібно визначити виходячи з правила Рунге-Ромберга.

## Скріншот екрану програми з результатом роботи програми

```

=====
          ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція: f(x) = x^2
Межі інтегрування: [0.00, 1.00]
Задана точність: eps = 1.00e-04

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:

  Ітерація      N        I(N)      |I(2N) - I(N)|      Точність
  -----  -----
    0            4      0.343750000      --- 
    1            8      0.3359375000     7.8125e-03   2.6042e-03
    2           16      3.3398e-01      1.9531e-03   6.5104e-04
    3           32      3.3350e-01      4.8828e-04   1.6276e-04
    4           64      3.3337e-01      1.2207e-04   4.0690e-05

Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 64
Оцінка похибки за Рунге: 4.0690e-05

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 0.333333333333

=====
          РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 0.333333333333
Аналітичний результат (точне значення): 0.333333333333

Фактична похибка: 0.000000e+00
Задана точність: 1.000000e-04

Кількість розбиттів: N = 64
Крок інтегрування: h = 0.00000000

=====
          ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:
=====

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 0.00000000e+00 < 1.00000000e-04

Відносна похибка: 0.0000%
```

### Рисунок 1 – Інтеграл від $x^2$ на $[0,1]$ .

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ

З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА

```

=====
          ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція: f(x) = sin(x)
Межі інтегрування: [0.00, 3.14]
Задана точність: eps = 1.00e-05

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:

-----  


| Ітерація | N   | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|-----|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4   | 1.8961188982 | ---          | ---        |
| 1        | 8   | 1.9742316020 | 7.8113e-02   | 2.6038e-02 |
| 2        | 16  | 1.9936e+00   | 1.9339e-02   | 6.4462e-02 |
| 3        | 32  | 1.9984e+00   | 4.8230e-03   | 1.6077e-03 |
| 4        | 64  | 1.9996e+00   | 1.2050e-03   | 4.0168e-04 |
| 5        | 128 | 1.9999e+00   | 3.0121e-04   | 1.0040e-04 |
| 6        | 256 | 2.0000e+00   | 7.5300e-05   | 2.5100e-05 |
| 7        | 512 | 2.0000e+00   | 1.8825e-05   | 6.2749e-06 |


-----  

Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 512
Оцінка похибки за Рунге: 6.2749e-06

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 2.00000000016

-----  

          РЕЗУЛЬТАТИ
-----  

-----  

Чисельний результат (метод трапецій): 2.00000000016
Аналітичний результат (точне значення): 2.00000000000
-----  

Фактична похибка: 1.574940e-11
Задана точність: 1.000000e-05
-----  

Кількість розбиттів: N = 512
Крок інтегрування: h = 0.0000000
-----  

-----  

ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:  

-----  

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 1.57494018e-11 < 1.0000000e-05
-----  

Відносна похибка: 0.000%
-----  

-----  

          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
-----  

Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . .

```

Рисунок 2 – Інтеграл від  $\sin(x)$  на  $(0,\pi)$ .

```

-----  

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ  

-----  

З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА  

-----  

Доступні функції для інтегрування:  

1)  $f(x) = x^2$   

2)  $f(x) = \sin(x)$   

3)  $f(x) = e^x$   

4)  $f(x) = 1/(1+x^2)$   

5)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$   

-----  

Оберіть функцію (1-5): 3  

-----  

Введення параметрів інтегрування:  

-----  

Нижня межа інтегрування a: 0  

Верхня межа інтегрування b: 1  

Точність обчислення eps (наприклад, 0.0001): 0.001  

-----  

-----  

ГРАФІК ФУНКЦІЇ  

-----  

-----  

Функція:  $f(x) = e^x$   

Межі інтегрування: [0, 1]  

-----  

  

-----  

-----  

a=0.00           b=1.00  

-----  

-----  

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА  

-----
```

```

=====
          ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція: f(x) = e^x
Межі інтегрування: [0.00, 1.00]
Вадана точність: eps = 1.00e-03

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:

    Ітерація      N      I(N)      |I(2N) - I(N)|      Точність
    -----  -----
        0          4      1.7272219046      ---      ---
        1          8      1.7205185922      6.7033e-03      2.2344e-03
        2         16      1.7188e+00      1.6775e-03      5.5915e-04

Досягнута задана точність!
Кількість розбіттів: N = 16
Оцінка похиби за Рунге: 5.5915e-04

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 1.718281974052

=====
                    РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 1.718281974052
Аналітичний результат (точне значення): 1.718281828459

Фактична похибка: 1.455928e-07
Вадана точність: 1.000000e-03

Кількість розбіттів: N = 16
Крок інтегрування: h = 0.0000001

=====
ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 1.45592846e-07 < 1.0000000e-03

Відносна похибка: 0.0000%
```

Рисунок 3 – Інтеграл від  $e^x$  на  $[0,1]$ .

# ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ

## З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА

Доступні функції для інтегрування:

- 1)  $f(x) = x^2$
- 2)  $f(x) = \sin(x)$
- 3)  $f(x) = e^x$
- 4)  $f(x) = 1/(1+x^2)$
- 5)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Оберіть функцію (1-5): 4

Введення параметрів інтегрування:

Нижня межа інтегрування a: 0

Верхня межа інтегрування b: 1

Точність обчислення eps (наприклад, 0.0001): 0.0001

## ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функція:  $f(x) = 1/(1+x^2)$

Межі інтегрування:  $[0, 1]$

a=0.00

b=1.00

## ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА

```

=====
          ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

функція: f(x) = 1/(1+x^2)
Межі інтегрування: [0.00, 1.00]
Задана точність: eps = 1.00e-04

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:



| Ітерація | N  | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|----|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4  | 0.7827941176 | ---          | ---        |
| 1        | 8  | 0.7847471236 | 1.9530e-03   | 6.5100e-04 |
| 2        | 16 | 7.8524e-01   | 4.8828e-04   | 1.6276e-04 |
| 3        | 32 | 7.8536e-01   | 1.2207e-04   | 4.0690e-05 |



Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 32
Оцінка похиби за Рунге: 4.0690e-05

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 0.785398163388

=====
          РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 0.785398163388
Аналітичний результат (точне значення): 0.780398663148

Фактична похибка: 4.999500e-03
Задана точність: 1.000000e-04

Кількість розбиттів: N = 32
Крок інтегрування: h = 0.00015623
=====

ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:

! УВАГА! Фактична похибка перевищує задану:
|I_числ - I_точн| = 4.99950024e-03 > 1.00000000e-04

Відносна похибка: 0.6406%
=====

          ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
=====

Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . .

```

Рисунок 4 – Інтеграл від  $\frac{1}{1+x^2}$  на  $[0,1]$ .

# ЧИСЛЕННЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ

## З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА

Доступні функції для інтегрування:

- 1)  $f(x) = x^2$
- 2)  $f(x) = \sin(x)$
- 3)  $f(x) = e^x$
- 4)  $f(x) = 1/(1+x^2)$
- 5)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Оберіть функцію (1-5): 5

Введення параметрів інтегрування:

Нижня межа інтегрування a: -1

Верхня межа інтегрування b: 2

Точність обчислення ерс (наприклад, 0.0001): 0.00001

## ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функція:  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Межі інтегрування: [-1, 2]

## ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА

Рисунок 5 – Інтеграл від поліному на  $[-1,2]$ .

# ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ

## З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА

Доступні функції для інтегрування:

- 1)  $f(x) = x^2$
- 2)  $f(x) = \sin(x)$
- 3)  $f(x) = e^x$
- 4)  $f(x) = 1/(1+x^2)$
- 5)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Оберіть функцію (1-5): 1

Введення параметрів інтегрування:

Нижня межа інтегрування a: 0

Верхня межа інтегрування b: 1

Точність обчислення eps (наприклад, 0.0001): 0.00000001

## ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функція:  $f(x) = x^2$

Межі інтегрування:  $[0, 1]$

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА

```

=====
        ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА
=====

Функція: f(x) = x^2
Межі інтегрування: [0.00, 1.00]
Задана точність: eps = 1.00e-08

Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...

Ітераційний процес:



| Ітерація | N    | I(N)        | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|------|-------------|--------------|------------|
| 0        | 4    | 0.343750000 | ---          | ---        |
| 1        | 8    | 0.335937500 | 7.8125e-03   | 2.6042e-03 |
| 2        | 16   | 3.3398e-01  | 1.9531e-03   | 6.5104e-04 |
| 3        | 32   | 3.3350e-01  | 4.8828e-04   | 1.6276e-04 |
| 4        | 64   | 3.3337e-01  | 1.2207e-04   | 4.0690e-05 |
| 5        | 128  | 3.3334e-01  | 3.0518e-05   | 1.0173e-05 |
| 6        | 256  | 3.3334e-01  | 7.6294e-06   | 2.5431e-06 |
| 7        | 512  | 3.3333e-01  | 1.9073e-06   | 6.3578e-07 |
| 8        | 1024 | 3.3333e-01  | 4.7684e-07   | 1.5895e-07 |
| 9        | 2048 | 3.3333e-01  | 1.1921e-07   | 3.9736e-08 |
| 10       | 4096 | 3.3333e-01  | 2.9802e-08   | 9.9341e-09 |



Досягнута задана точність!
Кількість розбиттів: N = 4096
Оцінка похибки за Рунге: 9.9341e-09

Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:
I_уточнене = 0.333333333333

=====
                    РЕЗУЛЬТАТИ
=====

Чисельний результат (метод трапецій): 0.333333333333
Аналітичний результат (точне значення): 0.333333333333

Фактична похибка: 0.000000e+00
Задана точність: 1.000000e-08

Кількість розбиттів: N = 4096
Крок інтегрування: h = 0.00000000

=====
ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:
=====

ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:
|I_числ - I_точн| = 0.00000000e+00 < 1.00000000e-08

Відносна похибка: 0.000%

=====
                    ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ
=====

Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . .

```

### Рисунок 6 – Результат тесту з високою точністю.

ЧИСЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ТРАПЕЦІЙ

З ПРАВИЛОМ РУНГЕ-РОМБЕРГА

Доступні функції для інтегрування:

- 1)  $f(x) = x^2$
- 2)  $f(x) = \sin(x)$
- 3)  $f(x) = e^x$
- 4)  $f(x) = 1/(1+x^2)$
- 5)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Оберіть функцію (1-5): 2

Введення параметрів інтегрування:

Нижня межа інтегрування a: 0

Верхня межа інтегрування b: 6.28318

Точність обчислення eps (наприклад, 0.0001): 0.001

ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функція:  $f(x) = \sin(x)$

Межі інтегрування: [0, 6.28318]

a=0.00

b=6.28

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА

```
=====  
ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА  
=====  
  
Функція: f(x) = sin(x)  
Межі інтегрування: [0.00, 6.28]  
Задана точність: eps = 1.00e-03  
  
Обчислення методом трапецій з правилом Рунге-Ромберга...  
  
Ітераційний процес:  
=====  


| Ітерація | N | I(N)         | I(2N) - I(N) | Точність   |
|----------|---|--------------|--------------|------------|
| 0        | 4 | 0.0000000000 | ---          | ---        |
| 1        | 8 | 0.0000000000 | 2.2897e-12   | 7.6323e-13 |

  
Досягнута задана точність!  
Кількість розбиттів: N = 8  
Оцінка похибки за Рунге: 7.6323e-13  
  
Уточнене значення за Рунге-Ромбергом:  
I_уточнене = 0.00000000014  
  
=====  
РЕЗУЛЬТАТИ  
=====  
  
Чисельний результат (метод трапецій): 0.00000000014  
Аналітичний результат (точне значення): 0.00000000014  
  
Фактична похибка: 3.214945e-14  
Задана точність: 1.000000e-03  
  
Кількість розбиттів: N = 8  
Крок інтегрування: h = 0.00000000  
  
=====  
ПЕРЕВІРКА ЯКОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ:  
=====  
ВІДМІННО! Фактична похибка менша за задану:  
|I числ - I_точн| = 3.21494503e-14 < 1.0000000e-03  
  
Відносна похибка: 0.2283%  
  
=====  
ЗАВЕРШЕННЯ РОБОТИ  
=====  
Для продовження нажмите будь-яку клавішу . . . ■
```

Рисунок 7 – Результат тесту з великим інтервалом.

## Короткі висновки

У ході виконання лабораторної роботи я ознайомився з методом чисельного інтегрування, а саме складеною формулою трапецій. Під час практичної частини я реалізував ітераційний алгоритм, який обчислює значення інтеграла, послідовно подвоюючи кількість поділів ( $N$ ) на кожному кроці.

Програма коректно оцінює похибку обчислень на кожній ітерації за допомогою правила Рунге-Ромберга. Алгоритм включає автоматичну зупинку: обчислення тривають лише доти, доки оцінка похибки (за правилом Рунге-Ромберга) не стане меншою за задану користувачем точність  $\text{eps}$ .

Це дозволяє переконатися, що фінальне значення інтеграла було знайдено саме з необхідною точністю, а також визначити, яка саме кількість поділів  $N$  була для цього достатньою.

Також я реалізував програму з використанням лише стандартних бібліотек, яка читує межі інтегрування  $[a, b]$  та точність  $\text{eps}$ , виконує ітераційне обчислення, виводить знайдене значення інтеграла, фінальну кількість поділів  $N$  та досягнуту похибку.

Програма враховує некоректний ввід даних, коректно обробляє граничні випадки та забезпечує детальний вивід.

**Список використаних джерел**

1. Ковальчук, О. М. Чисельні методи та алгоритми розв'язування рівнянь. – Львів: Книжковий клуб, 2021.
2. Іваненко, П. С. Основи програмування на C++ для математичних обчислень. – Київ: Видавничий дім "Київський університет", 2020.
3. Семененко, В. П. Комплексні числа та методи їх обчислення у програмуванні. – Харків: ХТЗ, 2019.
4. Петренко, А. М. Алгебраїчні рівняння 1–4 ступеня: теорія та практика. – Одеса: ОНУ, 2020.
5. Грищенко, І. В. Графічне відображення функцій та чисельні методи в C++. – Київ: Літера, 2018.