**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ   
Кафедра вычислительной математики**

БЕЛОБРОЦКИЙ

Денис Витальевич

**Численное исследование диффузии частиц в магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле**

Дипломная работа

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

доцент Полевиков В.К.

Допущена к защите

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2019 г.

Зав. кафедрой вычислительной математики

кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Репников

Минск, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

[ОГЛАВЛЕНИЕ 2](#_Toc9201793)

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc9201794)

[ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 4](#_Toc9201795)

[1.1 Основные уравнения 4](#_Toc9201796)

[1.2 Постановка задачи 7](#_Toc9201797)

[ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ 12](#_Toc9201798)

[2.1 Конечно-разностный метод 13](#_Toc9201799)

[2.2 Тангенциальный метод 17](#_Toc9201800)

[2.3 Релаксация 19](#_Toc9201801)

[ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ 20](#_Toc9201802)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 25](#_Toc9201803)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 26](#_Toc9201804)

# ВВЕДЕНИЕ

Благодаря своей способности к пондеромоторному взаимодействию с внешним магнитным полем магнитные жидкости не только спровоцировали развитие нового направления в механике жидкости, но и стали новым технологическим материалом, который нашел широкое применение в технике [1–4]. Магнитная жидкость представляет собой стабильную коллоидную суспензию ферромагнитных частиц, находящихся во взвешенном состоянии в жидкости-носителе (масло, вода, биосовместимая жидкость). Для обеспечения стабильности ферромагнитные частицы связываются поверхностно-активным веществом, которое образует защитную оболочку вокруг частиц для предотвращения слипания. Размер частиц порядка м, и они находятся в состоянии броуновского движения в жидкости-носителе. Благодаря тому, что частицы обладают магнитными свойствами, в магнитной жидкости происходит не только броуновское движение, но и диффузионный процесс магнитофореза [1,5]. Этот процесс диффузии становится значительным, когда магнитная жидкость находится под воздействием сильного градиента магнитного поля.

Предметом настоящего исследования является классическая феррогидростатическая задача о двусвязных равновесных формах магнитной жидкости, расположенной на горизонтальной пластине вокруг вертикального цилиндрического проводника с постоянным током [1,2,6]. Осесимметричные формы свободной поверхности, которые реализуются под воздействием магнитного поля проводника, являются предпочтительными для математической модели из-за структуры магнитного поля. Учитывая линейный закон намагниченности и пренебрегая скачком капиллярного давления на поверхности, задача была решена аналитически, см. [1,2]. Численное решение более детальной задачи, учитывающей как капиллярный скачок, так и (нелинейный) закон намагниченности Ланжевена, реализовано в [6]. Однако следует подчеркнуть, что как простейшие теоретические модели, изученные в [1,2], так и более продвинутые в [6], основаны на предположении об однородности магнитной жидкости, т.е. влиянии магнитофореза ферромагнитных частиц в жидкости. Целью данной работы является исследование влияния диффузии магнитных частиц на равновесные осесимметричные формы поверхности свободной магнитной жидкости. Поскольку величина намагниченности жидкости прямо пропорциональна концентрации частиц в объеме жидкости [1,2,7,8], которая определяется структурой магнитного поля, диффузионный эффект, как ожидается, станет заметным при сильно неоднородном магнитном поле.

# ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

## 1.1 Основные уравнения

Предполагая, что магнитные частицы имеют сферическую форму и одинаковый размер, массообмен магнитных частиц в магнитной жидкости можно описать уравнением [7,8]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где - объемная концентрация частиц в коллоиде; - переменная времени; - скорость конвективного движения; - коэффициент диффузии; - напряженность магнитного поля; - ускорение свободного падения; – магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума); магнитный момент частицы; - постоянная Больцмана; - температура частицы; - масса частицы; а также

функция Ланжевена. Мы предполагаем, что жидкость несжимаема, а граница непроницаема, поэтому

где обозначает внешнюю единичную нормаль на границе.

Уравнение (1) дополняется условием непроницаемости границ частицами:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где – нормальная компонента ускорения свободного падения.

Предполагается равномерное распределение концентрации в исходном состоянии:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |

Уравнение (1) вместе с условиями (2) и (3) представляют математическую модель процесса диффузии ферромагнитных частиц в магнитной жидкости. Отметим, что решение задачи (1) - (3) удовлетворяет условию сохранения средней концентрации:

где - объем жидкости (или пространственная область определения задачи).

Для , мы получаем стационарную задачу для концентрации при , которую можно записать в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  |  |

где - радиус-вектор текущей точки пространства.

Как показано в [8], задача (4) допускает аналитическое решение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Оценки порядка величины показывают, что влияние силы тяжести на диффузию броуновских частиц незначительно, что упрощает формулу определения :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

В этом случае изолинии напряженности магнитного поля также являются изолиниями концентрации частиц.

Магнитные свойства магнитной жидкости определяются ее намагниченностью , которая зависит как от напряженности магнитного поля , так и от концентрации частиц . В феррогидродинамике [1,2,7,8] - закон намагниченности Ланжевена для неравномерно концентрированной магнитной жидкости определяется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

где - намагниченность насыщения магнитной жидкости; - средняя концентрация, соответствующая равномерному распределению частиц.

Равновесная форма поверхности определяется балансом нормальных напряжений и капиллярных сил и может быть найдена из уравнения гидростатики [1, с. 134; 11, с. 74]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

и условия для скачка давления на свободной поверхности жидкости [1, с. 142; 11, с. 80]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

где – давление внутри жидкости, – давление вне жидкости, – магнитная постоянная, – намагниченность жидкости, и – величина и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля, – плотность магнитной жидкости, – ускорение свободного падения, – коэффициент поверхностного натяжения, – сумма главных кривизн поверхности, принимающая положительное значение, если поверхность выпукла.

Силовые линии магнитного поля, создаваемого проводником с током, лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику и имеют форму окружностей, то есть нормальная составляющая вектора напряженности магнитного . Следовательно, второе слагаемое в правой части уравнения (9) обращается в 0. Тогда из (9) получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Воспользовавшись тем, что:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

преобразуем уравнение (8):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Проинтегрируем полученное уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Преобразуем (10):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Тогда из (13) и (14) получаем уравнение равновесия свободной поверхности магнитной жидкости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Уравнение (15) дополняется граничными условиями, а также нелокальным (интегральным) условием сохранения объема жидкости. В качестве граничных условий мы понимаем либо условия, когда жидкость контактирует со сплошной стенкой, заданной геометрией стенки и заданным углом смачивания, либо условия симметрии.

## 1.2 Постановка задачи

Рассмотрим каплю магнитной жидкости, расположенную на горизонтальной пластине вокруг вертикального цилиндрического проводника (см. *Рисунок 1*). Пусть - радиус проводника, - объем жидкости, - угол смачивания (контакта) на твердых стенках. Поскольку предполагается, что свободная поверхность является осесимметричной, ее форма определяется равновесной линией. Введем цилиндрические координаты , , сопоставив ось в соответствие с осью симметрии, направив ее противоположно вектору силы тяжести и поместив ось на поверхность пластины. Пусть - длина дуги неизвестной равновесной линии, которая принимает значения в верхней точке контакта, т.е. при , и в нижней точке контакта, то есть при . Форма меридиана будет описываться параметрическими функциями ,. Тогда кривизна поверхности определяется формулой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

где штрих обозначает дифференцирование по .

Постоянный ток генерирует азимутальное магнитное поле с напряженностью вокруг проводника, где - сила тока. Благодаря азимутальной ориентации поля его структура не зависит от магнитных свойств жидкости. Кроме того, поскольку в каждой точке осесимметричной свободной поверхности, скачок магнитного давления на поверхности равен нулю.

Используя (5) - (7), нетрудно показать, что:

где

Тогда проведём следующую цепочку преобразований над уравнением (16)(15):

Из (15) получим:

В итоге переходим к следующей задаче:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 1.* Иллюстрация проблемы |

Была использована параметризация длины дуги, в результате чего дифференцирование тождества относительно приводит ко второму дифференциальному уравнению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Естественные условия в контактных точках следующие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Предполагая, что объем капли является заданной величиной, мы можем определить ее как объем тела вращения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

Таким образом, математическая задача для определения формы свободной поверхности в параметрическом представлении , состоит из дифференциальных уравнений (17) и (18), граничных условий (19) и ограничения области (20).

Рассмотрим уравнение (17) в дифференциальной форме:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Теперь введем безразмерные переменные:

и подставим в уравнение (21):

Произведем аналогичные преобразования для (18).

Тогда получим переформулированную задачу (17)-(20) в обезразмеренной по радиусу проводника форме:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

где вышеуказанные величины означают:

Отметим, что и – неизвестные константы, а (число Бонда), , и (безразмерный объём) – заданные безразмерные параметры. Чтобы определить постоянную, мы запишем первое из уравнений (22) в форме:

и проинтегрируем его от до :

Воспользовавшись граничными условиями, вычислим интегралы:

Также, учтём нелокальное ограничение (последнее уравнение в (22)) и, в итоге, получим формулу, определяющую постоянную :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |
|  |  |

Решение , безразмерной задачи (22) и (23) описывает равновесную форму свободной поверхности магнитной жидкости и определяется пятью параметрами: , , , и .

# ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Следуя стратегии из [9], мы переформулируем задачу (22) и (23) в новых переменных , , для получения явной формулы для вычисления (неизвестной) постоянной в процессе итерации. Также, чтобы изучить влияние диффузионного процесса, рассмотрим модели как с учетом диффузионного эффекта, так и с учетом равномерной концентрации частиц в жидкости. В последнем случае воспользуемся математической моделью, описанной в [6].

Получим задачу, обезразмеренную по длине кривой. Подставим новые переменные в уравнение (21):

Тогда получим задачу:

Найдем константу , воспользовавшись уравнением для вычисления кривизны поверхности жидкости (16):

Проинтегрируем всё выражение по от до :

Выразим :

Вычислим интегралы:

В итоге получим:

## 2.1 Конечно-разностный метод

Рассмотрим безразмерную задачу (22)-(23):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

для модели с неоднородной концентрацией частиц:

для модели с однородной концентрацией частиц (из [6]):

где:

Построим разностные схемы (здесь и далее в этом пункте, чтобы избежать путаницы, опустим штрихи над переменными):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Уравнения разностных схем имеют порядок аппроксимации , так как вторая разностная производная имеет порядок , и все первые производные аппроксимируются средней разностной производной, которая также имеет порядок аппроксимации . Краевые условия имеют порядок аппроксимации , так как левая и правая разностные производные имеют этот порядок.

Повысим порядок аппроксимации краевых условий до . Повысим порядок условия :

То есть:

Повысим порядок условия :

То есть:

Таким образом получим разностные схемы с порядком аппроксимации :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Дискретизируем дифференциальную задачу (24) на равномерной сетке по конечно-разностной схеме (для простоты опустим черточки над и ):

Получим следующий неявный итерационный алгоритм:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Приведём к более удобному для итераций виду:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где

Интегралы , и вычисляются по формуле средних прямоугольников:

Легко видеть, что получим две системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональными матрицами, решения которых на каждой итерации будем искать методом правой прогонки. Вычисления (итерации) будем проводить, пока не выполнится следующее условие:

где – заданная точность,

## 2.2 Тангенциальный метод

Кроме того, мы вводим новую переменную , представляющую собой угол между касательной к равновесной линии , и осью . Учитывая то, что и , проблему (22) и (23) можно переформулировать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

для модели с неоднородной концентрацией частиц:

для модели с однородной концентрацией частиц (из [6]):

где:

Дискретизируем дифференциальную задачу (25) на равномерной сетке по конечно-разностной схеме:

где решение разностной схемы является приближением неизвестного решения дифференциальной задачи (25) в узлах сетки . Интегралы , и вычисляются по формуле средних прямоугольников.

Поскольку для у нас имеются граничные условия и , можно использовать рекурсивную формулу для вычисления из для или наоборот из для . Оба варианта тангенциального метода обсуждались в [9]; первый оказывается более стабильным и приводит к более быстрым итерационным алгоритмам. Поэтому воспользуемся первым вариантом решения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

где - номер итерации. Вычисления на каждой итерации проводятся по рекуррентным формулам. Сначала вычисляем значения сетки по рекуррентной формуле (26). Затем с помощью (27) и (28) вычисляем новые приближенные значения координат свободной поверхности на итерации. И, наконец, сеточная функция и безразмерная длина вычисляются из найденных значений , , .

Вычисления (итерации) будем проводить, пока не выполнится условие, аналогичное тому, которое было описано в предыдущем пункте.

## 2.3 Релаксация

Для улучшения устойчивости вычислительных алгоритмов воспользуемся методом релаксации:

где – параметр релаксации. Тогда изменится условие проведения вычислений (итераций):

# ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В качестве начального приближения используется параметрически заданная функция:

Численное исследование выполнено при начальных значениях , , , , и . Параметр характеризует магнитные свойства жидкости, - величину силы тока в проводнике. Отметим, что начальные значения , , , и соответствуют экспериментальным физическим данным из [6]. Все вычисления были выполнены на равномерной сетке с шагом . Число Бонда будет постоянным и равным единице на протяжении всех результатов, так как исследования поведения жидкости при изменении этого параметра выходит за рамки данной работы. Для достижения задаваемых параметров () проводятся итерации по приближению их значений. Например, если мы хотим получить результат при , то мы применяем описанные ранее алгоритмы для начального значения (см. выше), затем увеличиваем постепенно значение с некоторым шагом (например, ), пока не достигнем заданного значения. При этом мы каждый раз применяем алгоритм к текущему значению параметра, а в качестве начального приближения берем предыдущее полученное (корректное) решение.

Сравним результаты, полученные двумя разными методами, описанными выше, чтобы удостовериться в корректности получаемых результатов. Вычисления были проведены при следующих параметрах: , , , .

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 2.* Сравнение конечно-разностного (фиолетовый) и тангенциального (зеленый) методов при |

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Время получения результатов** | |
| **Тангенциальный** | **Конечно-разностный** |
| 9752 ms. (9 sec.) | 28673 ms. (28 sec.) |

Таблица 2

|  |  |
| --- | --- |
| **Невязка решений разными методами** | |
|  | **Невязка** |
| 0.05 | 0.000499866 |
| 1.0 | 0.010129 |
| 2.0 | 0.0308665 |
| 3.0 | 0.0476025 |

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 3.* Результаты вычислений конечно-разностным методом при |

На *Рисунке* *Рисунок 3* показаны результаты только конечно-разностного метода, так как результаты тангенциального метода при таких же параметрах получены не были. Исходя из *Рисунка* *Рисунок 2*, *Таблицы* Таблица 1 и *Таблицы*

Таблица 2 можно сказать, что результаты двух методов достаточно близки и тангенциальный метод вычисляет результаты гораздо быстрее. Исходя из всего вышеописанного и того, что при результаты удалось получить только с помощью конечно-разностного метода, можно сказать, что тангенциальный метод можно использовать в тех случаях, когда необходима быстрота вычислений и можно пренебречь точностью. Конечно-разностный же метод необходимо использовать для получения более точных результатов с большими параметрами, при которых тангенциальный метод результатов не дает. Далее будем рассматривать результаты, полученные конечно-разностным методом.

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 4.* Слева – неоднородная концентрация, по центру – однородная, справа – сравнение при неоднородной (фиолетовый) и однородной (зеленый) концентрации. |

Характерные равновесные осесимметричные формы капли при для трех значений представлены на *Рисунке* *Рисунок 4*. Они показывают, что увеличение параметра вызывает смещение линии контакта на пластине в направлении градиента магнитного поля, т.е. ближе к проводнику, и соответственно высота линии соприкосновения с проводником становится выше. Как показано, диффузия частиц приводит к заметному усилению этого процесса по сравнению с однородной концентрацией частиц. Мы видим значительную зависимость, как в количественном, так и в качественном отношении, между случаем аппроксимации с однородным распределением частиц и случаем учёта диффузии магнитных частиц. В первом случае высота капли растет не так интенсивно, как в последнем случае. При достаточно больших значениях основная масса частиц концентрируется в непосредственной близости от проводника, а их концентрация вдали от проводника близка к нулю и не оказывает заметного влияния на форму свободной поверхности. Другими словами, вблизи точки контакта, расположенной на пластине, сила, побуждающая жидкость двигаться в направлении проводника, незначительна, и в этом районе свободная поверхность формируется в основном под действием капиллярных сил и силы тяжести.

Также рассмотрим влияние параметра на форму магнитной жидкости. Этот параметр характеризует чувствительность жидкости к магнитному полю, поэтому с его уменьшением уменьшается и должна уменьшаться и высота жидкости. Рассмотрим результаты при и .

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 5.* Влияние параметра |

На рисунке параметр принимает значения , и с уменьшением этого параметра по рисунку видно, что высота жидкости также уменьшается. При близком к жидкость не меняет форму при изменении силы тока в проводнике.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные результаты, проиллюстрированные на нескольких графиках, дают основание сделать вывод, что диффузия ферромагнитных частиц в магнитной жидкости под действием неоднородного магнитного поля сильно влияет на форму свободной поверхности магнитной жидкости. Аппроксимация с однородной концентрацией частиц является применимой только для задач феррогидростатики с почти однородными магнитными полями.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989.
2. Berkovski B, Bashtovoi V. Magnetic fluids and applications handbook. New York: Begell House Publ.; 1996.
3. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. - Ин-т высоких температур АН СССР, 1985. — 188 стр.
4. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. - М.: Химия, 1989. — 240 с.
5. Blums E, Cebers A, Maiorov MM. Magnetic fluids. Berlin: Walter de Gruyter; 1997.
6. Баштовой В.Г., Будник А.М., Полевиков В.К., Рекс А.Г. Исследование двухсвязных равновесных форм магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника // Магнитная гидродинамика. – 1984, №2. – С. 47-53.
7. Bashtovoi VG, Polevikov VK, Suprun AE, Stroots AV, Beresnev SA. Influence of Brownian diffusion on the statics of magnetic fluid. Magnetohydrodynamics 2007;43(1):17–25.
8. Polevikov V, Tobiska L. On the solution of the steady-state diffusion problem for ferromagnetic particles in a magnetic fluid. Math Model Anal 2008;13(2):233–40.
9. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. Vol. 4, No. 1. – P. 66–93.
10. Beresnev S., Polevikov V., Tobiska L. Numerical study of the influence of diffusion of magnetic particles on equilibrium shapes of a free magnetic fluid surface // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – Vol. 14, No. 4. – P. 1403 – 1409.
11. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М., 1989.