**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ   
Кафедра вычислительной математики**

БЕЛОБРОЦКИЙ

Денис Витальевич

**Численное исследование диффузии частиц в магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле**

Дипломная работа

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

доцент Полевиков В. К.

Допущена к защите

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2019 г.

Зав. кафедрой вычислительной математики

кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Репников

Минск, 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

[ОГЛАВЛЕНИЕ 2](#_Toc9199693)

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc9199694)

[МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 4](#_Toc9199695)

[Основные уравнения 4](#_Toc9199696)

[Постановка задачи 7](#_Toc9199697)

[ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ 11](#_Toc9199698)

[Конечно-разностный метод 13](#_Toc9199699)

[Тангенциальный метод 17](#_Toc9199700)

[Релаксация 19](#_Toc9199701)

[РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ 19](#_Toc9199702)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 23](#_Toc9199703)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 24](#_Toc9199704)

# ВВЕДЕНИЕ

Благодаря своей способности к пондеромоторному взаимодействию с внешним магнитным полем магнитные жидкости не только спровоцировали развитие нового направления в механике жидкости, но и стали новым технологическим материалом, который нашел широкое применение в технике [1–4]. Магнитная жидкость представляет собой стабильную коллоидную суспензию ферромагнитных частиц, находящихся во взвешенном состоянии в жидкости-носителе (масло, вода, биосовместимая жидкость). Для обеспечения стабильности ферромагнитные частицы связываются поверхностно-активным веществом, которое образует защитную оболочку вокруг частиц для предотвращения слипания. Размер частиц порядка м, и они находятся в состоянии броуновского движения в жидкости-носителе. Благодаря тому, что частицы обладают магнитными свойствами, в магнитной жидкости происходит не только броуновское движение, но и диффузионный процесс магнитофореза [1,5]. Этот процесс диффузии становится значительным, когда магнитная жидкость находится под воздействием сильного градиента магнитного поля.

Предметом настоящего исследования является классическая феррогидростатическая задача о двусвязных равновесных формах магнитной жидкости, расположенной на горизонтальной пластине вокруг вертикального цилиндрического проводника с постоянным током [1,2,6]. Осесимметричные формы свободной поверхности, которые реализуются под воздействием магнитного поля проводника, являются предпочтительными для математической модели из-за структуры магнитного поля. Учитывая линейный закон намагниченности и пренебрегая скачком капиллярного давления на поверхности, задача была решена аналитически, см. [1,2]. Численное решение более детальной задачи, учитывающей как капиллярный скачок, так и (нелинейный) закон намагниченности Ланжевена, реализовано в [6]. Однако следует подчеркнуть, что как простейшие теоретические модели, изученные в [1,2], так и более продвинутые в [6], основаны на предположении об однородности магнитной жидкости, т.е. влиянии магнитофореза ферромагнитных частиц в жидкости. Целью данной работы является исследование влияния диффузии магнитных частиц на равновесные осесимметричные формы поверхности свободной магнитной жидкости. Поскольку величина намагниченности жидкости прямо пропорциональна концентрации частиц в объеме жидкости [1,2,7,8], которая определяется структурой магнитного поля, диффузионный эффект, как ожидается, станет заметным при сильно неоднородном магнитном поле.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

## Основные уравнения

Предполагая, что магнитные частицы имеют сферическую форму и одинаковый размер, массообмен магнитных частиц в магнитной жидкости можно описать уравнением [7,8]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где - объемная концентрация частиц в коллоиде; - переменная времени; - скорость конвективного движения; - коэффициент диффузии; - напряженность магнитного поля; - ускорение свободного падения; – магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума); магнитный момент частицы; - постоянная Больцмана; - температура частицы; - масса частицы; а также

функция Ланжевена. Мы предполагаем, что жидкость несжимаема, а граница непроницаема, поэтому

где обозначает внешнюю единичную нормаль на границе.

Уравнение (1) дополняется условием непроницаемости границ частицами:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где – нормальная компонента ускорения свободного падения.

Предполагается равномерное распределение концентрации в исходном состоянии:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |

Уравнение (1) вместе с условиями (2) и (3) представляют математическую модель процесса диффузии ферромагнитных частиц в магнитной жидкости. Отметим, что решение задачи (1) - (3) удовлетворяет условию сохранения средней концентрации:

где - объем жидкости (или пространственная область определения задачи).

Для , мы получаем стационарную задачу для концентрации при , которую можно записать в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  |  |

где - радиус-вектор текущей точки пространства.

Как показано в [8], задача (4) допускает аналитическое решение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Оценки порядка величины показывают, что влияние силы тяжести на диффузию броуновских частиц незначительно, что упрощает формулу определения :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

В этом случае изолинии напряженности магнитного поля также являются изолиниями концентрации частиц.

Магнитные свойства магнитной жидкости определяются ее намагниченностью , которая зависит как от напряженности магнитного поля , так и от концентрации частиц . В феррогидродинамике [1,2,7,8] - закон намагниченности Ланжевена для неравномерно концентрированной магнитной жидкости определяется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

где - намагниченность насыщения магнитной жидкости; - средняя концентрация, соответствующая равномерному распределению частиц.

Равновесная форма поверхности определяется балансом нормальных напряжений и капиллярных сил и может быть найдена из уравнения гидростатики [1, 11]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

и условия для скачка давления на свободной поверхности жидкости [1, 11]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

где – давление внутри жидкости, – давление вне жидкости, – магнитная постоянная, – намагниченность жидкости, и – величина и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля, – плотность магнитной жидкости, – ускорение свободного падения, – коэффициент поверхностного натяжения, – сумма главных кривизн поверхности, принимающая положительное значение, если поверхность выпукла.

Силовые линии магнитного поля, создаваемого проводником с током, лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику и имеют форму окружностей, то есть нормальная составляющая вектора напряженности магнитного . Следовательно, второе слагаемое в правой части уравнения (9) обращается в 0. Тогда из (9) получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Воспользовавшись тем, что:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

преобразуем уравнение (8):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Проинтегрируем полученное уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Преобразуем (10):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Тогда из (13) и (14) получаем уравнение равновесия свободной поверхности магнитной жидкости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Уравнение (15) дополняется граничными условиями, а также нелокальным (интегральным) условием сохранения объема жидкости. В качестве граничных условий мы понимаем либо условия, когда жидкость контактирует со сплошной стенкой, заданной геометрией стенки и заданным углом смачивания, либо условия симметрии.

## Постановка задачи

Рассмотрим каплю магнитной жидкости, расположенную на горизонтальной пластине вокруг вертикального цилиндрического проводника (см. *Рисунок 1*). Пусть - радиус проводника, - объем жидкости, - угол смачивания (контакта) на твердых стенках. Поскольку предполагается, что свободная поверхность является осесимметричной, ее форма определяется равновесной линией. Введем цилиндрические координаты , , сопоставив ось в соответствие с осью симметрии, направив ее противоположно вектору силы тяжести и поместив ось на поверхность пластины. Пусть - длина дуги неизвестной равновесной линии, которая принимает значения в верхней точке контакта, т.е. при , и в нижней точке контакта, то есть при . Форма меридиана будет описываться параметрическими функциями ,. Тогда кривизна поверхности определяется формулой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

где штрих обозначает дифференцирование по .

Постоянный ток генерирует азимутальное магнитное поле с напряженностью вокруг проводника, где - сила тока. Благодаря азимутальной ориентации поля его структура не зависит от магнитных свойств жидкости. Кроме того, поскольку в каждой точке осесимметричной свободной поверхности, скачок магнитного давления на поверхности равен нулю.

Используя (5) - (7), нетрудно показать, что:

где

Тогда проведём следующую цепочку преобразований над уравнением (16)(15):

Из (15) получим:

В итоге переходим к следующей задаче:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 1.* Иллюстрация проблемы |

Была использована параметризация длины дуги, в результате чего дифференцирование тождества относительно приводит ко второму дифференциальному уравнению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Естественные условия в контактных точках следующие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Предполагая, что объем капли является заданной величиной, мы можем определить ее как объем тела вращения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

Таким образом, математическая задача для определения формы свободной поверхности в параметрическом представлении , состоит из дифференциальных уравнений (17) и (18), граничных условий (19) и ограничения области (20).

Рассмотрим уравнение (17) в дифференциальной форме:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Теперь введем безразмерные переменные:

и подставим в уравнение (21):

Произведем аналогичные преобразования для (18).

Тогда получим переформулированную задачу (17)-(20) в обезразмеренной по радиусу проводника форме:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

где вышеуказанные величины означают:

Отметим, что и – неизвестные константы, а (число Бонда), , и (безразмерный объём) – заданные безразмерные параметры. Чтобы определить постоянную, мы запишем первое из уравнений (22) в форме:

и проинтегрируем его от до :

Воспользовавшись граничными условиями, вычислим интегралы:

Также, учтём нелокальное ограничение (последнее уравнение в (22)) и, в итоге, получим формулу, определяющую постоянную :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |
|  |  |

Решение , безразмерной задачи (22) и (23) описывает равновесную форму свободной поверхности магнитной жидкости и определяется пятью параметрами: , , , и .

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Следуя стратегии из [9], мы переформулируем задачу (22) и (23) в новых переменных , , для получения явной формулы для вычисления (неизвестной) постоянной в процессе итерации. Также, чтобы изучить влияние диффузионного процесса, рассмотрим модели как с учетом диффузионного эффекта, так и с учетом равномерной концентрации частиц в жидкости. В последнем случае воспользуемся математической моделью, описанной в [6].

Получим задачу, обезразмеренную по длине кривой. Подставим новые переменные в уравнение (21):

Тогда получим задачу:

Найдем константу , воспользовавшись уравнением для вычисления кривизны поверхности жидкости (16):

Проинтегрируем всё выражение по от до :

Выразим :

Вычислим интегралы:

В итоге получим:

## Конечно-разностный метод

Рассмотрим безразмерную задачу (22)-(23):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

для модели с неоднородной концентрацией частиц:

для модели с однородной концентрацией частиц (из [6]):

где:

Построим разностные схемы (здесь и далее в этом пункте, чтобы избежать путаницы, опустим штрихи над переменными):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Уравнения разностных схем имеют порядок аппроксимации , так как вторая разностная производная имеет порядок , и все первые производные аппроксимируются средней разностной производной, которая также имеет порядок аппроксимации . Краевые условия имеют порядок аппроксимации , так как левая и правая разностные производные имеют этот порядок.

Повысим порядок аппроксимации краевых условий до . Повысим порядок условия :

То есть:

Повысим порядок условия :

То есть:

Таким образом получим разностные схемы с порядком аппроксимации :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Дискретизируем дифференциальную задачу (24) на равномерной сетке по конечно-разностной схеме (для простоты опустим черточки над и ):

Получим следующий неявный итерационный алгоритм:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Приведём к более удобному для итераций виду:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где

Интегралы , и вычисляются по формуле средних прямоугольников:

Легко видеть, что получим две системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональными матрицами, решения которых на каждой итерации будем искать методом правой прогонки. Вычисления (итерации) будем проводить, пока не выполнится следующее условие:

где – заданная точность,

## Тангенциальный метод

Кроме того, мы вводим новую переменную , представляющую собой угол между касательной к равновесной линии , и осью . Учитывая то, что и , проблему (22) и (23) можно переформулировать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

для модели с неоднородной концентрацией частиц:

для модели с однородной концентрацией частиц (из [6]):

где:

Дискретизируем дифференциальную задачу (25) на равномерной сетке по конечно-разностной схеме:

где решение разностной схемы является приближением неизвестного решения дифференциальной задачи (25) в узлах сетки . Интегралы , и вычисляются по формуле средних прямоугольников.

Поскольку для у нас имеются граничные условия и , можно использовать рекурсивную формулу для вычисления из для или наоборот из для . Оба варианта тангенциального метода обсуждались в [9]; первый оказывается более стабильным и приводит к более быстрым итерационным алгоритмам. Поэтому воспользуемся первым вариантом решения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

где - номер итерации. Вычисления на каждой итерации проводятся по рекуррентным формулам. Сначала вычисляем значения сетки по рекуррентной формуле (26). Затем с помощью (27) и (28) вычисляем новые приближенные значения координат свободной поверхности на итерации. И, наконец, сеточная функция и безразмерная длина вычисляются из найденных значений , , .

Вычисления (итерации) будем проводить, пока не выполнится условие, аналогичное тому, которое было описано в предыдущем пункте.

## Релаксация

Для улучшения устойчивости вычислительных алгоритмов воспользуемся методом релаксации:

где – параметр релаксации. Тогда изменится условие проведения вычислений (итераций):

# РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Численное исследование выполнено при начальных значениях , , , , и . Параметр характеризует магнитные свойства жидкости, - величину силы тока в проводнике. Отметим, что начальные значения , , , и соответствуют экспериментальным физическим данным из [6]. Все вычисления были выполнены на равномерной сетке с шагом . Число Бонда будет постоянным и равным единице на протяжении всех результатов, так как исследования поведения жидкости при изменении этого параметра выходит за рамки данной работы.

Сравним результаты, полученные двумя разными методами, описанными выше, чтобы удостовериться в корректности получаемых результатов. Вычисления были проведены при следующих параметрах: , , , .

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 2.* Сравнение конечно-разностного (фиолетовый) и тангенциального (зеленый) методов при |

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Время получения результатов** | |
| **Тангенциальный** | **Конечно-разностный** |
| 9752 ms. (9 sec.) | 28673 ms. (28 sec.) |

Таблица 2

|  |  |
| --- | --- |
| **Невязка решений разными методами** | |
|  | **Невязка** |
| 0.05 | 0.000499866 |
| 1.0 | 0.010129 |
| 2.0 | 0.0308665 |
| 3.0 | 0.0476025 |

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 3.* Результаты вычислений конечно-разностным методом при |

На *Рисунке* *Рисунок 3* показаны результаты только конечно-разностного метода, так как результаты тангенциального метода при таких же параметрах получены не были. Исходя из *Рисунка* *Рисунок 2*, *Таблицы* Таблица 1 и *Таблицы*

Таблица 2 можно сказать, что результаты двух методов достаточно близки и тангенциальный метод вычисляет результаты гораздо быстрее. Исходя из всего вышеописанного и того, что при результаты удалось получить только с помощью конечно-разностного метода, можно сказать, что тангенциальный метод можно использовать в тех случаях, когда необходима быстрота вычислений и можно пренебречь точностью. Конечно-разностный же метод необходимо использовать для получения более точных результатов с большими параметрами, при которых тангенциальный метод результатов не дает. Далее будем рассматривать результаты, полученные конечно-разностным методом.

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 4.* Слева – неоднородная концентрация, по центру – однородная, справа – сравнение при неоднородной (фиолетовый) и однородной (зеленый) концентрации. |

Характерные равновесные осесимметричные формы капли при для трех значений представлены на *Рисунке* *Рисунок 4*. Они показывают, что увеличение параметра вызывает смещение линии контакта на пластине в направлении градиента магнитного поля, т.е. ближе к проводнику, и соответственно высота линии соприкосновения с проводником становится выше. Как показано, диффузия частиц приводит к заметному усилению этого процесса по сравнению с однородной концентрацией частиц. Мы видим значительную зависимость, как в количественном, так и в качественном отношении, между случаем аппроксимации с однородным распределением частиц и случаем учёта диффузии магнитных частиц. В первом случае высота капли растет не так интенсивно, как в последнем случае. При достаточно больших значениях основная масса частиц концентрируется в непосредственной близости от проводника, а их концентрация вдали от проводника близка к нулю и не оказывает заметного влияния на форму свободной поверхности. Другими словами, вблизи точки контакта, расположенной на пластине, сила, побуждающая жидкость двигаться в направлении проводника, незначительна, и в этом районе свободная поверхность формируется в основном под действием капиллярных сил и силы тяжести.

Также рассмотрим влияние параметра на форму магнитной жидкости. Этот параметр характеризует чувствительность жидкости к магнитному полю, поэтому с его уменьшением уменьшается и должна уменьшаться и высота жидкости. Рассмотрим результаты при и .

|  |
| --- |
|  |
| *Рисунок 5.* Влияние параметра |

На рисунке параметр принимает значения , и с уменьшением этого параметра по рисунку видно, что высота жидкости также уменьшается. При близком к жидкость не меняет форму при изменении силы тока в проводнике.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные результаты, проиллюстрированные на нескольких графиках, дают основание сделать вывод, что диффузия ферромагнитных частиц в магнитной жидкости под действием неоднородного магнитного поля сильно влияет на форму свободной поверхности магнитной жидкости. Аппроксимация с однородной концентрацией частиц является применимой только для задач феррогидростатики с почти однородными магнитными полями.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989.
2. Berkovski B, Bashtovoi V. Magnetic fluids and applications handbook. New York: Begell House Publ.; 1996.
3. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. - Ин-т высоких температур АН СССР, 1985. — 188 стр.
4. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. - М.: Химия, 1989. — 240 с.
5. Blums E, Cebers A, Maiorov MM. Magnetic fluids. Berlin: Walter de Gruyter; 1997.
6. Баштовой В.Г., Будник А.М., Полевиков В.К., Рекс А.Г. Исследование двухсвязных равновесных форм магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника // Магнитная гидродинамика. – 1984, №2. – С. 47-53.
7. Bashtovoi VG, Polevikov VK, Suprun AE, Stroots AV, Beresnev SA. Influence of Brownian diffusion on the statics of magnetic fluid. Magnetohydrodynamics 2007;43(1):17–25.
8. Polevikov V, Tobiska L. On the solution of the steady-state diffusion problem for ferromagnetic particles in a magnetic fluid. Math Model Anal 2008;13(2):233–40.
9. Polevikov VK. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. Vol. 4, No. 1. – P. 66–93.
10. Beresnev S., Polevikov V., Tobiska L. Numerical study of the influence of diffusion of magnetic particles on equilibrium shapes of a free magnetic fluid surface // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – Vol. 14, No. 4. – P. 1403 – 1409.
11. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М., 1989.