



# Анализ устойчивости геодезических пунктов наземных и ГНСС-сетей с использованием синтезированных алгоритмов МНК-оптимизации данных

Н.С. Косарев<sup>1</sup>✉, В.А. Падве<sup>1</sup>, Д.И. Косарева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет геосистем и технологий,  
Новосибирск, Россия

✉ kosarevnsk@yandex.ru

**ЦИТИРОВАНИЕ** Косарев Н.С., Падве В.А., Косарева Д.И. Анализ устойчивости геодезических пунктов наземных и ГНСС-сетей с использованием синтезированных алгоритмов МНК-оптимизации данных // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2024. Т. 68. № 1. С. 8–20. DOI:10.30533/GiA-2024-001.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА** устойчивость геодезических пунктов, деформация, МНК-оптимизация, синтезированный вариант параметрической версии, регуляризация решения, псевдообратная матрица, дефект матрицы, масштабный показатель точности (МПТ), ковариационная матрица, коррелированные массивы

**АННОТАЦИЯ** В статье рассматриваются вопросы анализа устойчивости геодезических пунктов в пространстве-времени. Первый пример описывает ситуацию с двумя подвижными реперами в нивелирной сети, мобильность которых определяется надежно. Здесь используется вариант МНК<sup>1</sup>-оптимизации коррелированных парных данных. Второй пример иллюстрирует более сложную геопространственную ситуацию на объекте, подверженном деформационным процессам. Этот пример, использующий данные ГНСС<sup>2</sup>-наблюдений, анализируется как свободная сеть. В такой ситуации наглядно проявляются достоинства синтезированного варианта параметрической версии (СВПВ) МНК-оптимизации ГНСС-наблюдений. Центральный блок гиперматрицы коэффициентов СВПВ представляет собой стабилизирующее слагаемое, обеспечивающее регуляризацию решения по А.Н. Тихонову. Кроме того, в теле обратной матрицы коэффициентов автоматически вычисляются элементы регуляризованной псевдообратной матрицы  $A^+$  для исходной матрицы плана  $A$ . С помощью псевдообратной

1 МНК — метод наименьших квадратов; англ. — «least squares», LS.

2 ГНСС — глобальная навигационная спутниковая система.

матрицы  $A^+$  вычисляется ранг исходной матрицы  $A$ , по которому определяется ее дефект  $d$ , используемый при вычислении корректного значения безразмерного масштабного показателя точности данных  $\mu^2$ . Моделирование деформаций для второго примера потребовало дополнительно воспользоваться переходом от приращений геоцентрических координат к топоцентрическим. В результате были получены два массива точек фрагмента ГНСС-сети, сопровождаемых соответствующими ковариационными матрицами координат. По этим коррелированным массивам выполнялся их анализ, подтвердивший, что деформация имела место именно на том пункте, где она и моделировалась.

## 1 Введение

Анализ устойчивости опорных пунктов классических и спутниковых сетей является неотъемлемым звеном при проведении деформационного мониторинга критически важных объектов инфраструктуры [1–3]. Некорректный учет или неверный выбор опорных пунктов в деформационных сетях приводит к построению недостоверных прогнозных моделей поведения различных инженерных объектов, что, в свою очередь, может привести к серьезным последствиям социального и экономического характера.

Устойчивость опорных пунктов геодезического построения (ГП) в пространстве-времени, применяемого при анализе деформационных процессов техногенного или природного происхождения, определяется лишь путем повторных наблюдений на пунктах объекта. В этом случае предполагается, что результаты каждого цикла наблюдений подвергаются МНК-оптимизации, результаты которой характеризуются соответствующей ковариационной матрицей [4].

В зарубежной литературе геодезические построения, которые развиваются на объекте, подверженном деформационным процессам, классифицируются на два вида: абсолютные и относительные<sup>3</sup>. В абсолютных ГП опорные пункты размещаются вне деформационной части объекта, подверженного геодезическому мониторингу. Таким образом, предполагая, что эти опорные пункты остаются устойчивыми в пространстве-времени, можно оценить абсолютные смещения объекта мониторинга [5]. В относительных ГП все пункты предполагаются расположенными внутри деформационной части объекта, подверженного геодезическому мониторингу. В этом случае могут быть оценены только относительные смещения элементов объекта мониторинга [6].

В отечественной и зарубежной литературе вопросу устойчивости опорных пунктов высотной основы посвящено огромное количество публикаций. Так, в работе В.Н. Ганьшина и соавт.<sup>4</sup> сделан обзор существующих подходов решения озвученной проблемы начиная с 60-х до 80-х годов XX века. П.Д. Пеневым в статье [7] предложена методика определения устойчивости исходных реперов, базирующаяся на анализе свободной нивелирной сети, в которой псевдообратная матрица вычисляется по методу P. Meissl<sup>5</sup> [8]. Б.Н. Дьяков в работе [9] провел сравнительный анализ способов Костехеля и Марчака, по результатам которого была отмечена необходимость учета значения рейтинга каждого репера в сети при поиске наиболее устойчивого пункта в свободной нивелирной сети. В работах М.Г. Мустафина [10–14] обобщен современный российский и мировой опыт по оценке устойчивости опорных пунктов высотной основы.

3 Chrzanowski A., Chen Y.Q., Secord J.M. Geometrical analysis of deformation surveys // *Proceedings of a Workshop on Deformation Measurements*. 1986. P. 170–206.

4 Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов / В.Н. Ганьшин, А.Ф. Стороженко, А.Г. Ильин и др. М.: Недра, 1981. 215 с.

5 Meissl P. The internal accuracy of a pile of points // *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*. 1962. Vol. 50. Iss. 5. P. 6. (Оригинал на немецком языке.)

Вопрос стабильности опорных пунктов в спутниковых геодезических построениях и в сетях деформационного мониторинга в российской технической литературе освещен не так широко, как в зарубежных публикациях [15, 16]. Существует лишь ряд исследований, связанных в основном с анализом высотного положения отдельных пунктов, подверженных влиянию температуры окружающей среды [17–19]. В то же время следует отметить, что задача контроля устойчивости опорных пунктов в спутниковых геодезических построениях, предназначенных для деформационного мониторинга, не является тривиальной, так как требует учета различных сезонных вариаций, вызванных такими факторами, как приливные эффекты, нагрузочные влияния, а также остаточное воздействие неучета тропосферной задержки, которое особенно проявляется при обработке ГНСС-измерений в методе точного точечного позиционирования (англ. — «Precise Point Positioning», PPP) [20, 21]. Все это говорит о необходимости проведения исследований, направленных на решение озвученной выше задачи.

В рамках данной работы авторами предложен один из возможных вариантов решения задачи по анализу устойчивости опорных пунктов в спутниковых сетях с использованием синтезированного варианта параметрической версии алгоритма МНК-оптимизации данных. В качестве тест-объектов, на которых были проведены исследования, выступили одномерные и трехмерные геодезические построения.

## 2 Описание синтезированного варианта параметрической версии алгоритма МНК-оптимизации данных

Синтезированный вариант алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации данных (СВПВ) [22, 24] схематически характеризуется структурой, представленной в табл. 1.

**Таблица 1** ➤

Структурная схема алгоритма СВПВ:  $\mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{L}$

**Table 1**

Block diagram of the SVPV algorithm:  $\mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{L}$

$\mathbf{M}$				$\mathbf{b}$		$\mathbf{L}$
$\mathbf{K}_{\Delta}^{-1}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{I}$	$\cdot$	$\mathbf{V}_{\Delta}$	$=$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{K}_x^{-1} = \alpha \cdot \mathbf{I}$	$\mathbf{A}^T$		$\delta\mathbf{X}$		$\mathbf{0}$
$-\mathbf{I}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{0}$		$\lambda$		$\mathbf{L}$

В табл. 1 обозначено:  $\mathbf{K}_{\Delta}^{-1} = \mathbf{K}_L^{-1}$  — обратная ковариационная матрица исходных данных  $\Delta$ , она же — свободных членов  $\mathbf{L}$ . Центральный блок  $\alpha \cdot \mathbf{I}$  гиперматрицы коэффициентов  $\mathbf{M}$  — стабилизирующее слагаемое, обеспечивающее регуляризацию решения<sup>6</sup>. Коэффициент  $\alpha$  (параметр регуляризации) в стабилизирующем слагаемом принимается равным  $10^{-m}$ . Блок  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, а блок  $\mathbf{A}$  — матрица плана геодезического построения. Гипервектор корней системы  $\mathbf{b}$  содержит три блока: МНК-поправки к данным  $\mathbf{V}_{\Delta}$ , МНК-поправки  $\delta\mathbf{X}$  к приближенным значениям параметров  $\mathbf{X}^0$  и множители Лагранжа  $\lambda$ .

Блоки решения  $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$  образуют структуру, изображенную в табл. 2.

**Таблица 2** ➤

Структурная схема решения алгоритма СВПВ:  $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$

**Table 2**

Block diagram of the solution of the SVPV algorithm:  $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$

$\mathbf{b}$		$\mathbf{M}^{-1}$				$\mathbf{L}$
$\mathbf{V}_{\Delta}$	$=$	$\mathbf{K}_{\Delta}^{yp}$	$\mathbf{K}_{12}$	$\mathbf{K}_{13}$	$\cdot$	$\mathbf{0}$
$\delta\mathbf{X}$		$\mathbf{K}_{21}$	$\mathbf{K}_x^{yp}$	$\mathbf{A}^+$		$\mathbf{0}$
$\lambda$		$\mathbf{K}_{31}$	$(\mathbf{A}^+)^T$	$\mathbf{K}_{33}$		$\mathbf{L}$

<sup>6</sup> Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

В табл. 2 обозначено: гипервектор решения  $\mathbf{b}$ ; блоки априорных ковариационных матриц уравненных значений данных  $\mathbf{K}_\Delta^{\text{yp}}$  и параметров  $\mathbf{K}_x^{\text{yp}}$ ; блок  $\mathbf{A}^+$  — регуляризованная псевдообратная матрица, характеризующаяся свойством наименьших квадратов (РП-МНК-матрица);  $\mathbf{K}_y$  — вспомогательные блоки, которые могут быть использованы при пошаговой реализации алгоритма СВПВ.

Блоки  $\mathbf{A}^+$  и  $(\mathbf{A}^+)^T$  обеспечивают вычисление априорной ковариационной матрицы уравненных значений параметров:  $\mathbf{K}_{\bar{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{K}_y (\mathbf{A}^+)^T$ . Они же дают возможность определения ранга исходной матрицы плана  $\mathbf{A}$  по формуле С.Р. Рао<sup>7</sup>, что позволяет просто оценивать дефект  $d$  исходной матрицы  $\mathbf{A}$  и корректно вычислять величину масштабного показателя точности (МПТ).

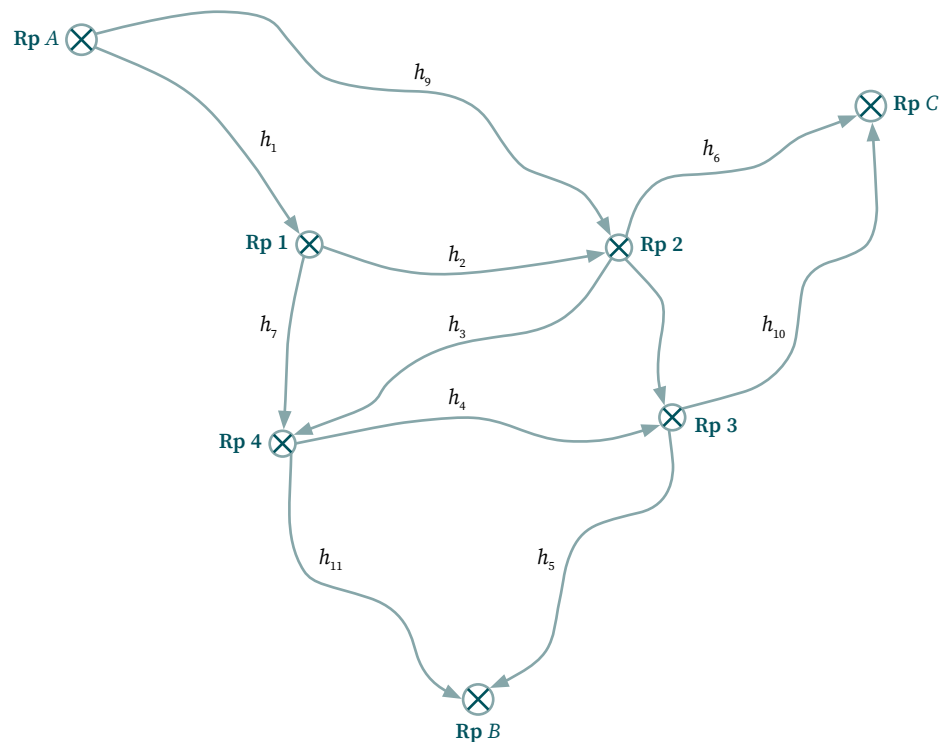
## 3 Результаты и обсуждение

### 3.1 Стабильность реперов нивелирования


Рассмотрим анализ стабильности в пространстве-времени отметок четырех реперов, которые определялись дважды по материалам нивелирования III класса (рис. 1).

**Рис. 1**   
Схема нивелирной сети  
III класса

**Fig. 1**  
Diagram of a class III leveling  
network



В табл. 3 приведены результаты измеренных превышений в первом и втором циклах.

**Таблица 3**   
Результаты измерений  
превышений в первом и втором  
циклах

**Table 3**  
Results of excess measurements  
in the first and second cycles

Цикл	Измеренные превышения, м										
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$	$h_9$	$h_{10}$	$h_{11}$
1	4,098	-3,226	-2,593	4,380	0,620	-2,310	-5,840	1,780	<b>0,910</b>	<b>-4,080</b>	5,022
2	4,098	-3,326	-2,493	4,280	0,720	-2,210	-5,840	1,780	<b>0,810</b>	<b>-3,980</b>	5,022

<sup>7</sup> Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1986. 548 с.

**Рис. 2**

Массивы уравненных значений отметок реперов сети нивелирования III класса по циклам и их апостериорные ковариационные матрицы

**Fig. 2**

Arrays of equalized values of reference points of the class III leveling network by cycles and their a posteriori covariance matrices

Стабильные реперы II класса Rp A (отметка 29,634 м), Rp B (отметка 32,916 м) и Rp C (отметка 28,237 м) охватывали изучаемый регион, в котором были заложены четыре новых репера: Rp 1, ..., Rp 4.

Два цикла нивелирования III класса  $y$  и  $y'$  проводились в разное время, и в каждом цикле использовалось лишь девять превышений, набор которых определялся различными факторами организационного плана. Материалы нивелирования по каждому циклу подвергались МНК-оптимизации, результатом которой были массив уравненных значений отметок определяемых реперов и массив апостериорных значений ковариационных матриц этих отметок  $K_y$  и  $K_{y'}$  (рис. 2).

**Анализ коррелированных разностей отметок**
 $\alpha = 0,05 \quad t_t = 1,96$ 

Первый цикл							Второй цикл						
Уравненные отметки			Ковариационная матрица отметок первого цикла $K_y$ , см <sup>2</sup>				Уравненные отметки			Ковариационная матрица отметок второго цикла $K_{y'}$ , см <sup>2</sup>			
№	$y$ , м	СКП, мм					№	$y'$ , м	СКП, мм				
1	33,746	14	<b>1,86</b>	0,60	0,54	0,97	1	33,744	8	<b>0,70</b>	0,24	0,25	0,47
2	30,533	10	0,60	<b>0,99</b>	0,44	0,43	2	30,433	8	0,24	<b>0,62</b>	0,27	0,26
3	32,305	9	0,54	0,44	<b>0,88</b>	0,59	3	32,207	8	0,25	0,27	<b>0,60</b>	0,43
4	27,920	11	0,97	0,43	0,59	<b>1,22</b>	4	27,926	10	0,47	0,26	0,43	<b>0,92</b>

Разности, см							
№	$d = y - y' = W$	$d^{\text{доп}} = t_t \sqrt{N_{jj}}$	Решение	Ковариационная матрица разностей: $K_d = K_y + K_{y'} = N_d$ , см <sup>2</sup>			
1	0,20	3,14	нормально	<b>2,56</b>	0,84	0,79	1,44
2	<b>9,96</b>	2,49	много	0,84	<b>1,61</b>	0,71	0,68
3	<b>9,76</b>	2,38	много	0,79	0,71	<b>1,48</b>	1,02
4	-0,58	2,86	нормально	1,44	0,68	1,02	<b>2,13</b>

При обработке коррелированных парных данных  $y$  и  $y'$  по способу условий, их уравнения связи — это элементарные линейные функции (разности данных):

1 ➤

$$\Phi_{kl}(Y_{n1}) = D_{kl} = Y_{kl} - Y'_{kl} = 0_{kl},$$

где  $n$  — число наблюдений,  
 $k$  — количество пар.

Ковариационные матрицы данных  $y$  и  $y'$  представляют собой блочно-диагональную структуру следующего вида:

2 ➤

$$K_Y = \begin{pmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_{y'} \end{pmatrix}$$

Коэффициенты  $B_{kn} = \{\partial D_{kl} / \partial Y_{kl}\}$  линеаризованных условных уравнений поправок  $B_{nk} \cdot \tilde{V}_{kl} + W_{kl} = 0_{kl}$  представляют собой блоки единичных матриц:

3 ➤

$$B_{kn} = (\mathbf{I}_{kk} \quad \vdots \quad -\mathbf{I}_{kk}).$$

Свободные члены  $W_{kl}$  этих уравнений поправок равны разностям данных наблюдений в парах:

4 ➤

$$W_{kl} = y_{kl} - y'_{kl} = d_{kl}.$$

Дальнейшее развитие процесса МНК-оптимизации коррелированных парных данных имеет смысл, если разности-невязки (4) не превышают допустимых значений:

$$d_j^{\text{доп}} = w_j^{\text{доп}} = t_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{N_{jj}} = t_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\{K_y + K_{y'}\}_{jj}}, \forall j = 1, \dots, k.$$

Здесь  $t_{1-\alpha/2}$  —  $(100-\alpha/2)$  %-я квантиль стандартного нормального распределения, а величины  $N_{jj}$  — диагональные элементы ковариационной матрицы разностей-невязок:

$$N_{\Delta} = \mathbf{B} \mathbf{K}_y \mathbf{B}^T = \mathbf{K}_y + \mathbf{K}_{y'} = \mathbf{K}_d = \mathbf{K}_w.$$

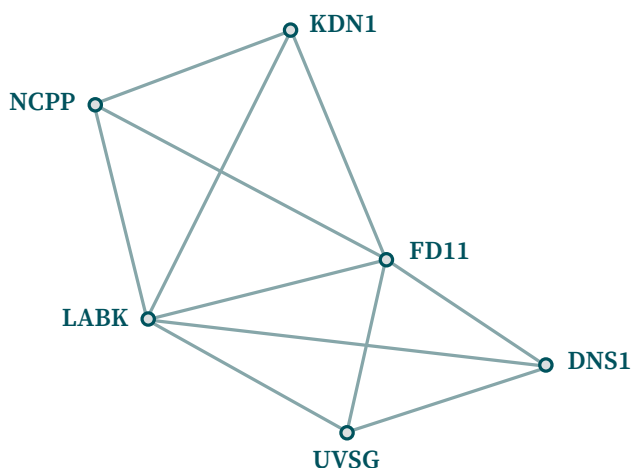
Единичные недопустимые разности  $d_j$  свидетельствуют либо о грубых промах в отдельных первичных или вторичных данных, либо о **перемещении  $j$ -й точки в пространстве**.

Как следует из рис. 2, два репера — № 2 и № 3, соединенные превышением  $h_g$ , опустились практически на 10 см, а само измеренное значение этого превышения осталось неизменным. Превышение  $h_g$ , связывающее стабильные реперы № 1 и № 4, также сохранило свое численное значение. Остальные превышения, связывающие эти реперы с двумя стабильными реперами № 1 и № 4 и опорными реперами Rp A, Rp B и Rp C, изменились на те же 10 см.

**Рис. 3**   
Фрагмент ГНСС-сети

**Fig. 3**  
A fragment of the GNSS network

### 3.2 Стабильность опорных пунктов в ГНСС-построениях



Измерения в более сложной пространственной конструкции геодезического построения — сети геодезических пунктов (рис. 3), находящейся в сложных физико-географических условиях и характеризующейся активной динамикой, обусловленной добычей углеводородов [23], проводились с использованием ГНСС-технологий.

Результаты сеансов ГНСС-наблюдений рассматривались как наблюдения в **свободном** геодезическом построении и были подвергнуты МНК-оптимизации с использованием алгоритма СВПВ [22, 24].

Структурная схема алгоритма СВПВ ( $Mb = L$ ), реализующего МНК-оптимизацию ГНСС-наблюдений, представлена в табл. 1.

Фрагмент матрицы плана сети  $\mathbf{A}_{45-18}$  для ГНСС-построения, изображенного на рис. 3 (табл. 4), сформирован из триад вида  $\pm \mathbf{I}_{3,3}$ , которые описывают связи концов базовых линий. В табл. 4 представлен северо-западный фрагмент этой матрицы, содержащий базовые линии между пунктами NCPP–KDN1 и NCPP–LABK. Подобным же образом описаны остальные базовые линии указанной сети.

**Таблица 4**   
Фрагмент матрицы плана

**Table 4**  
Fragment of the plan matrix

Базовые линии	1_NSPP			2_KDN1			3_LABK		
	$X_1$	$Y_1$	$Z_1$	$X_2$	$Y_2$	$Z_2$	$X_3$	$Y_3$	$Z_3$
NCPP-KDN1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	-1	0	0	1	0	0	0
NCPP-LABK	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	-1	0	0	0	0	0	1

Данная матрица плана оказалась матрицей **неполного столбцового ранга**. Для определения ее дефекта  $d = k - R(\mathbf{A})$  использовалась формула С.Р. Рао

$$7 \quad R(\mathbf{A}_{nk}) = R(\mathbf{A}_{kn}^+ \cdot \mathbf{A}_{nk} = \mathbf{H}_{kk}) = tr(\mathbf{H}_{kk}).$$

Участвующая в формуле  $\mathbf{A}^+$  — регуляризованная псевдообратная матрица, характеризующаяся свойством наименьших квадратов (РП-МНК-матрица), вычисляется автоматически отдельным блоком ( $\mathbf{A}_{kn}^+$ ) в теле обратной гиперматрицы коэффициентов  $\mathbf{M}^{-1}$  (см. табл. 2).

Апостериорная ковариационная матрица МНК-оптимизированных координат объекта  $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{yp}$  вычислялась отдельно по формуле

$$8 \quad \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{yp} = \bar{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} = \mu^2 \cdot \mathbf{A}^+ \mathbf{K}_{\Delta} (\mathbf{A}^+)^T.$$

МПТ  $\mu^2$ , реализующий переход от априорной ковариационной матрицы к апостериорной, вычисляется по формуле

$$9 \quad \mu^2 = \frac{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{K}_{\Delta}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}}{n - k + d}.$$

В заключение вычисляются оптимизированные значения всех шести координат ГНСС-объекта и их показатели точности.

Дальнейшие исследования стабильности объекта выполнялись путем моделирования «проседания» одного из пунктов по направлению нормали к эллипсоиду. Результаты сеансов были получены путем искусственного «понижения» отметки пункта UVSG в топоцентрической системе координат ENU [25] по каждой базовой линии, соединяющей остальные пункты фрагмента (см. рис. 3) с UVSG на 0,02 м.

Переход от приращений геоцентрических координат  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  к топоцентрическим координатам  $E, N, U$  осуществлялся по формуле

$$10 \quad \begin{pmatrix} E \\ N \\ U \end{pmatrix} = \mathbf{R}_b^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{R}_b$  — матрица преобразования

$$11 \quad \mathbf{R}_b = \begin{pmatrix} -\sin L & -\cos L \cdot \sin B & \cos L \cdot \cos B \\ \cos L & -\sin L \cdot \sin B & \sin L \cdot \cos B \\ 0 & \cos B & \sin B \end{pmatrix},$$

где  $B$  и  $L$  — геодезические широта и долгота первого пункта базовой линии ( $b$ ), вторым концом которой всегда был пункт UVSG.

Вычисленное значение топоцентрической высоты  $U$  понижалось на указанные выше 0,02 м, а затем выполнялся обратный переход от топоцентрических координат к приращениям геоцентрических координат:

$$12 \quad \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_b \cdot \begin{pmatrix} E \\ N \\ U \end{pmatrix}.$$

Все пять триад приращений координат базовых линий, вычисленных по формуле (12), вводились заново в соответствующие измеренные значения триад в алгоритме СВПВ. Алгоритм вырабатывал новый вектор МНК-поправок к приближенным значениям координат этой сети (табл. 5).

Изменения МНК-поправок (корней решения алгоритма СВПВ) четко отражают наибольшие изменения таких поправок для координат пункта UVSG, для которого было смоделировано «понижение» отметки  $U$  вдоль по нормали к эллипсоиду. Разности, найденные по материалам двух циклов наблюдений, оценивались на допустимость по формуле (5).



**Таблица 5**

Сравнительная таблица изменений МНК-поправок в приближенные значения пространственных координат XYZ

**Table 5**

Comparative table of changes in LS-corrections to approximate values of spatial coordinates XYZ

Пункт	МНК-поправки, см		Разности $d$ , см	$d^{\text{доп}}$ , см	Решение
	Цикл 1	Цикл 2			
NCPР	82,50	82,54	0,04	0,12	Хорошо
	191,53	191,69	0,16	0,24	Хорошо
	-147,07	-146,78	0,30	0,46	Хорошо
KDN1	-30,60	-30,56	0,04	0,11	Хорошо
	-106,99	-106,83	0,16	0,25	Хорошо
	-32,94	-32,64	0,30	0,47	Хорошо
LABK	-30,40	-30,36	0,04	0,12	Хорошо
	-107,47	-107,30	0,16	0,24	Хорошо
	-35,09	-34,80	0,29	0,44	Хорошо
FD11	-30,45	-30,41	0,04	0,13	Хорошо
	-106,31	-106,14	0,16	0,27	Хорошо
	-33,56	-33,27	0,29	0,51	Хорошо
UVSG	<b>-30,34</b>	<b>-30,58</b>	<b>-0,24</b>	<b>0,11</b>	<b>Плохо</b>
	<b>-106,55</b>	<b>-107,29</b>	<b>-0,74</b>	<b>0,24</b>	<b>Плохо</b>
	<b>-33,91</b>	<b>-35,37</b>	<b>-1,46</b>	<b>0,48</b>	<b>Плохо</b>
DNS1	40,34	40,37	0,03	0,12	Хорошо
	249,06	249,23	0,17	0,24	Хорошо
	268,79	269,08	0,29	0,43	Хорошо

Естественно, что остальные пункты, хотя и не меняли свое пространственное положение, также получили новые МНК-поправки, не превышающие 3 мм. Алгоритм СВРВ является сложным нелинейным преобразованием значительного объема данных, в связи с чем такие поправки — это «числовой шум», который сопровождает математические преобразования данного алгоритма.

## 4 Выводы

В данной работе выполнен анализ устойчивости геодезических пунктов в наземных и ГНСС-сетях с использованием синтезированных алгоритмов МНК-оптимизации геопространственных данных.

Первый пример описывает ситуацию с двумя подвижными реперами в нивелирной сети, мобильность которых определяется надежно. Второй пример иллюстрирует более сложную геопространственную ситуацию на объекте, подверженном деформационным процессам. Этот пример, использующий данные ГНСС-наблюдений, анализируется как свободная сеть. Моделирование деформаций для второго примера потребовало дополнительно воспользоваться переходом от приращений геоцентрических координат к топоцентрическим. В результате были получены два массива точек фрагмента ГНСС-сети, сопровождаемых соответствующими ковариационными матрицами координат. По этим коррелированным массивам выполнялся их анализ, подтвердивший, что деформация имела место именно на том пункте, где она и моделировалась.

Рассмотренные примеры мониторинга геопространственных данных с использованием синтезированного варианта алгоритма параметрической версии МНК-оптимизации таких данных как в примере с нивелирной сетью, так и в случае анализа ГНСС-наблюдений для фрагмента пространственного геодезического построения, находящегося в сложных физико-географических



условиях, а также вероятностно-статистический анализ полученных результатов демонстрируют мощный потенциал реализованного вычислительного аппарата.

Описанная и проиллюстрированная на примерах технология СВПВ использует регуляризацию данных по А.Н. Тихонову, автоматически строит псевдообратную матрицу  $A^+$ , характеризующуюся свойством наименьших квадратов с точностью до параметра регуляризации  $\alpha$ . Дополнительно следует отметить, что при вычислении обратной матрицы коэффициентов автоматически определяются априорные значения ковариационных матриц МНК-оптимизированных (уровненных) значений как результатов измерений, так и координат пунктов (параметров).

#### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Duchnowski R., Wyszowska P. Unstable Object Points during Measurements — Deformation Analysis Based on Pseudo Epoch Approach // *Sensors*. 2022. Vol. 22. 9030. DOI:10.3390/s22239030.
2. Zhou J., Shi B., Liu G., Ju S. Accuracy analysis of dam deformation monitoring and correction of refraction with robotic total station // *PLoS ONE*. 2021. Vol. 16(5). P. e0251281. DOI:10.1371/journal.pone.0251281.
3. Banimostafavi Z., Sharifi M.A., Farzaneh S. Evaluation of unstable points detection methods in geodetic GNSS-based networks // *Iranian Journal of Geophysics*. 2023. Vol. 16(4). P. 175–192. DOI:10.30499/ijg.2023.350587.1441.
4. Amiri-Simkooei A.R., Alaei-Tabatabaei S.M., Zangeneh-Nejad F., Voosoghi B. Stability analysis of deformation-monitoring network points using simultaneous observation adjustment of two epochs // *Journal of Surveying Engineering*. 2017. Vol. 143(1). P. 04016020. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000195.
5. Odziemczyk W. Application of Optimization Algorithms for Identification of Reference Points in a Monitoring Network // *Sensors*. 2021. Vol. 21. P. 1739. DOI:10.3390/s21051739.
6. Маркузе Ю.И., Лэ Ань Куонг. Исследование алгоритма для анализа деформаций геодезических пунктов при наблюдении за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений // *Геодезия и картография*. 2017. № 7. С. 23–30. DOI:10.22389/0016-7126-2017-925-7-23-30.
7. Пенев П.Д. Анализ устойчивости реперов высотной основы // *Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка»*. 2005. № 4. С. 3–16.
8. Wiśniewski Z., Kamiński W. Estimation and Prediction of Vertical Deformations of Random Surfaces, Applying the Total Least Squares Collocation Method // *Sensors*. 2020. Vol. 20. P. 3913. DOI:10.3390/s20143913.
9. Дьяков Б.Н. Сравнительный анализ способов Костехеля и Марчака // *Маркшейдерский вестник*. 2009. № 6. С. 43–46.
10. Мустафин М.Г., Наумов А.С. Контроль допустимых деформаций земной поверхности при строительстве вертикальных выработок в условиях застроенных территорий // *Записки Горного института*. 2012. Т. 198. С. 194–197.
11. Нгуен Х.В., Мустафин М.Г. Анализ и пути развития методов оценки устойчивости опорных реперов при наблюдениях за оседаниями земной поверхности // *Естественные и технические науки*. 2017. № 5(107). С. 89–96.
12. Мустафин М.Г., Нгуен Х.В. Способ оценки вертикальных смещений оснований зданий и сооружений // *Естественные и технические науки*. 2018. № 11(125). С. 240–247.
13. Мустафин М.Г., Нгуен Х.В. Оценка вертикальных смещений оснований зданий и сооружений на основе анализа элементов деформационной сети // *Геодезия и картография*. 2019. Т. 80. № 3. С. 11–19. DOI:10.22389/0016-7126-2019-945-3-11-19.
14. Мустафин М.Г., Васильев Г.Е. Оценка смещений пунктов свободной геодезической сети при повторных наблюдениях с незакрепленных точек // *Вестник СГУГиТ*. 2023. Т. 28. № 4. С. 38–48.
15. Owczarż K. A review of geodetic and remote sensing methods used for detecting surface displacements caused by mining // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2020. Vol. 609. No. 1. P. 012076. DOI:10.1088/1755-1315/609/1/012076.
16. Eteje S.O. Detailed Geodetic Technique Procedures for Structural Deformation Monitoring and Analysis // *International Journal of Scientific and Technological Research*. 2020. Vol. 6(7). P. 7–23. DOI:10.7176/JSTR/6-07-02.

17. Шестаков Н.В., Герасимов Г.Н., Герасименко М.Д. Учет сезонных вариаций координат пунктов GPS/ГЛОНАСС-наблюдений при исследовании современных движений земной коры // Геодезия и картография. 2009. № 9. С. 46–51.
18. Богданец Е.С., Черёмухина О.О. Анализ влияния температурного поля на высотное положение сети базовых GNSS-станций // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2017. № 1. С. 17–21.
19. Бовшин Н.А. Исследование зависимости координат EPN/IGS-станций от температуры окружающей среды // Геодезия и картография. 2022. № 3. С. 2–13. DOI:10.22389/0016-7126-2022-981-3-2-13.
20. Калинин В.В., Устинов А.В., Косарев Н.С. Влияние атмосферных нагрузок на результаты спутникового мониторинга здания станционного узла Загорской ГАЭС-2 методом PPP // Вестник СГУГиТ. 2020. Т. 25. № 3. С. 34–41. DOI:10.33764/2411-1759-2020-25-3-34-41.
21. Вшивкова О.В., Маслов Е.В. Влияние ошибки моделирования тропосферной задержки на результаты высокоточного позиционирования PPP-методом // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2023. Т. 67. № 2. С. 21–31. DOI:10.30533/GiA-2023-009.
22. Падве В.А. Математическая обработка и анализ результатов геодезических измерений: монография. В 2 ч. Ч. 2. Синтезированные и комбинированные алгоритмы точностной МНК-оптимизации и анализа результатов измерений. Новосибирск: СГУГиТ, 2018. 135 с.
23. Карпик А.П., Обиденко В.И., Косарев Н.С., Шендрик Н.К. Исследование однородности координатной основы ГСК-2011 при построении геодезической сети специального назначения // Геодезия и картография. 2021. № 10. С. 2–12. DOI:10.22389/0016-7126-2021-976-10-2-12.
24. Падве В.А., Косарев Н.С. Синтезированные варианты МНК-оптимизации геопространственных данных в геодезии, ГНСС-технологиях, метрологии и кадастре. Новосибирск: СГУГиТ, 2024. 166 с.
25. Teunissen P.J.G., Montenbruck O. (eds.) Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems. Springer International Publishing AG, 2017. 1272 p.

**АВТОРЫ****Косарев Николай Сергеевич**

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ), Новосибирск, Россия

кафедра инженерной геодезии и маркшейдерского дела,  
факультет геодезии и менеджмента

канд. техн. наук, доцент

 0000-0003-1806-3651

**Падве Владимир Абрамович**

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ), Новосибирск, Россия

кафедра прикладной информатики и информационных систем,  
факультет геодезии и менеджмента

канд. техн. наук, доцент

 0000-0003-3865-474X

**Косарева Дарья Ивановна**

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет геосистем и технологий»  
(СГУГиТ), Новосибирск, Россия

кафедра кадастра и территориального планирования,  
факультет кадастра и природопользования

Поступила 15.01.2024. Принята к публикации 22.02.2024. Опубликовано 28.02.2024.



# Analysis of stability of geodetic points in terrestrial and GNSS networks using technologies of synthesized version of algorithms LS-optimization of data

Nikolai S. Kosarev<sup>1</sup>✉, Vladimir A. Padve<sup>1</sup>, Daria I. Kosareva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia  
✉ kosarevnsk@yandex.ru

**CITATION** Kosarev NS, Padve VA, Kosareva DI. Analysis of stability of geodetic points in terrestrial and GNSS networks using technologies of synthesized version of algorithms LS-optimization of data. *Izvestia vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2024;68(1): 8–20. DOI:10.30533/GiA-2024-001.

**KEYWORDS** stability of geodetic points, deformation, LS-optimization, synthesized version of the parametric version, regularization of the solution, pseudo-inverse matrix, matrix defect, scale accuracy index (SAI), covariance matrix, correlated arrays


**ABSTRACT** The problems of analyzing the stability of geodetic points in space-time are considered. The first example describes the situation of two movable benchmarks in a leveling network, the mobility of which is reliably determined. A variant of LS-optimization of correlated paired data is used. The second example illustrates a more complex geospatial situation at an object to deformation processes. This example, which uses global navigation satellite systems (GNSS) observational data, is analyzed as a loose network. In such a situation, the advantages of the synthesized version of the parametric version (SVPV) of LS-optimization of GNSS observations are manifested clearly. The central block of the hypermatrix of the SVPV coefficients is a stabilizing component that ensures the regularization of the Tikhonov solution. In addition, the body of the inverse coefficient matrix automatically calculates the elements of the regularized pseudo-inverse matrix  $\mathbf{A}^+$  for the original matrix of plan  $\mathbf{A}$ . Using the pseudo-inverse matrix  $\mathbf{A}^+$ , the rank of the original matrix  $\mathbf{A}$  is calculated, which is used to determine its defect  $d$ , which is used to calculate the correct value of the dimensionless scale accuracy index (SAI) of the  $\mu^2$  data. Deformation modeling for the second example required additional use of the transition from geocentric to telocentric increments. As a result, two arrays of points of the GNSS network fragment were obtained, accompanied by corresponding covariance coordinate matrices. Their analysis was carried out on these correlated arrays, which confirmed that the deformation took place exactly at the point where it was modeled.

## REFERENCES


1. Duchnowski R, Wyszowska P. Unstable Object Points during Measurements — Deformation Analysis Based on Pseudo Epoch Approach. *Sensors*. 2022;22: 9030. DOI:10.3390/s22239030.
2. Zhou J, Shi B, Liu G, Ju S. Accuracy analysis of dam deformation monitoring and correction of refraction with robotic total station. *PLoS ONE*. 2021;16(5): e0251281. DOI:10.1371/journal.pone.0251281.
3. Banimostafavi Z, Sharifi MA, Farzaneh S. Evaluation of unstable points detection methods in geodetic GNSS-based networks. *Iranian Journal of Geophysics*. 2023;16(4): 175–192. DOI:10.30499/ijg.2023.350587.1441.
4. Amiri-Simkooei AR, Alaei-Tabatabaei SM, Zangeneh-Nejad F, Voosoghi B. Stability analysis of deformation-monitoring network points using simultaneous observation adjustment of two epochs. *Journal of Surveying Engineering*. 2017;143(1): 04016020. DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000195.
5. Odziemczyk W. Application of Optimization Algorithms for Identification of Reference Points in a Monitoring Network. *Sensors*. 2021;21: 1739. DOI:10.3390/s21051739.
6. Markuze YuI, Le AC. Investigation of an algorithm for analyzing deformations of geodetic points when observing horizontal displacements of hydraulic structures. *Geodesy and Cartography*. 2017;78(7): 23–30. (In Russian). DOI:10.22389/0016-7126-2017-925-7-23-30.
7. Penev PD. Stability analysis of height reference points. *Izv. Vuzov "Geodesy and aerophotosurveying"*. 2005;4: 3–16. (In Russian).
8. Wiśniewski Z, Kamiński W. Estimation and Prediction of Vertical Deformations of Random Surfaces, Applying the Total Least Squares Collocation Method. *Sensors*. 2020; 20:3913. DOI:10.3390/s20143913.
9. Dyakov BN. Comparative analysis of the methods of Kostehel and Marczak. *Mine Surveyor's Bulletin*. 2009;6: 43–46. (In Russian).
10. Mustafin MG, Naumov AS. Controls allowed earth deformation construction vertical openings in built-up area. *Journal of Mining Institute*, 2012;198: 194–197. (In Russian).
11. Nguyen HV, Mustafin MG. Analysis and ways of development of methods for assessing the stability of reference benchmarks when observing earth surface sedimentation. *Natural and technical sciences*. 2017;5(107): 89–96. (In Russian).
12. Mustafin MG, Nguyen HV. A method for assessing vertical displacements of the foundations of buildings and structures. *Natural and technical sciences*. 2018;11(125): 240–247. (In Russian).
13. Mustafin MG, Nguyen HV. The estimation of the building's vertical shifts and construction groundworks on the basis of deformation network element analysis. *Geodesy and Cartography*. 2019;80(3): 11–19. (In Russian). DOI:10.22389/0016-7126-2019-945-3-11-19.
14. Mustafin MG, Vasiljev GE. Estimation of deformations of free geodetic networks by repeating measurements from unfixed stations. *Vestnik SGUGiT*. 2023;28(4): 38–48. (In Russian). DOI: 10.33764/2411-1759-2023-28-4-38-48.
15. Owczarż K. A review of geodetic and remote sensing methods used for detecting surface displacements caused by mining. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2020;609(1): 012076. DOI:10.1088/1755-1315/609/1/012076.
16. Eteje SO. Detailed Geodetic Technique Procedures for Structural Deformation Monitoring and Analysis. *International Journal of Scientific and Technological Research*. 2020;6(7): 7–23. DOI:10.7176/IJSTR/6-07-02.
17. Shestakov NV, Gerasimov GN, Gerasimenko MD. Account of season coordinates variations of GPS/GLONASS — observation stations while researching current crustal movements. *Geodesy and Cartography*. 2009;(9): 46–51. (In Russian).
18. Bogdanets ES, Cheryomukhina OO. Analysis of the influence of the temperature field on the altitude position of a network of GNSS base stations. *Izv. Vuzov "Geodesy and aerophotosurveying"*. 2017;1: 17–21. (In Russian).
19. Bovshin NA. Investigating the ambient temperature dependence of EPN/IGS stations positions. *Geodesy and Cartography*. 2022;83(3): 2–13. (In Russian). DOI:10.22389/0016-7126-2022-981-3-2-13.
20. Kalinnikov VV, Ustinov AV, Kosarev NS. Impact of atmospheric loadings on the results of GNSS monitoring of main building of Zagorskaya PSPP-2 by PPP method. *Vestnik SGUGiT*. 2020;25(3): 34–41. (In Russian). DOI:10.33764/2411-1759-2020-25-3-34-41.
21. Vshivkova OV, Maslov EV. The effect of the tropospheric delay modeling error on the results of precise point positioning (PPP). *Izvestia Vuzov "Geodesy and aerophotosurveying"*. 2023;67(2): 21–31. (In Russian). DOI:10.30533/GiA-2023-009.

22. Padve VA. *Matematicheskaya obrabotka i analiz rezul'tatov geodezicheskikh izmerenii* [Mathematical processing and interpretation of the results of geodetic measurements] [monography]. In 2 parts. Part 2. Sintezirovanniye I kombinirovannye algoritmy tochnostnoi MNK-optimizatsii I analiza rezul'tatov izmerenij [Synthesized and combined algorithms for precision OLS optimization and analysis of measurement results]. Novosibirsk: SSUGT; 2018. 134 p. (In Russian).
23. Karpik AP, Obidenko VI, Kosarev NS, Shendrik NK. Studying the homogeneity of the coordinate base SSC-2011 at arranging a special-purpose geodetic network. *Geodesy and Cartography*. 2021;82(10): 2–12. DOI:10.22389/0016-7126-2021-976-10-2-12.
24. Padve VA, Kosarev NS. *Sintezirovanniye varianty MNK-optimizatsii geoprostranstvennykh dannykh v geodezii, GNSS-tekhnologiyakh, metrologii i kadastre* [Synthesized options for least squares optimization of geospatial data in geodesy, GNSS technologies, metrology and cadastre]. Novosibirsk: SSUGT; 2024. 166 p. (In Russian).
25. Teunissen PJG, Montenbruck O (eds.) Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems. Springer International Publishing AG; 2017. 1272 p.

**AUTHORS Nikolai S. Kosarev**

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia  
 Department of Engineering Geodesy and Mine Surveying,  
 Faculty of Geodesy and Management  
 Ph.D. in Engineering, Associate Professor  
 0000-0003-1806-3651

**Vladimir A. Padve**

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia  
 Department of Applied Information Science and Systems,  
 Faculty of Geodesy and Management  
 Ph.D. in Engineering, Associate Professor  
 0000-0003-3865-474X

**Daria I. Kosareva**

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia  
 Department of Cadastre and Territorial Planning, Faculty of Cadastre and Land Use

Submitted: January 15, 2024. Accepted: February 22, 2024. Published: February 28, 2024.