MOCK TEST — 7. týden

Motivace

Před tím, než se pustíte do Fourierových řad si zopakujte trig identity zde:
Trig Cheat Sheet (Lamar)

Aparát

DEF: (Fourierova řada)

Nechť je $f \in R(a,b)$, $T := \frac{b-a}{2}$.
Trig. řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$ $\forall x \in (a,b)$,
$a_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$
$b_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$
nazvu FŘ fce f na $< a,b >$ ... často $T = \pi$

DEF: (Po částech spojitá f)

Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
Řekneme, že f je p.č spojitá na $[a,b] \iff$
$\exists\ \sigma$ dělení $a \equiv x_0 < \cdots < x_m \equiv b$ takové, že

1. $(\forall i \in \hat{m})(f \in C(x_{i-1},x_i))$
2. $(\forall i \in \widehat{m-1})(\exists f(x_i^{\pm}) \equiv \lim\limits_{y \to x_i^{\pm}} f(y) \in \mathbb{R}$ a $\exists f(a^+), f(b^-) \in \mathbb{R}$

DEF: (Periodické prodloužení)

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
fci $f_{per} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def $f_{per}(x) \coloneqq f\left(x - \lfloor\frac{x-a}{b-a}\rfloor(b-a)\right)$
nazveme periodické prodloužení fce f.

Je-li navíc f p.č spoj. na $[a,b]$, def $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem
$f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ a nazveme regularizované periodické prodložení

V:

Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ má p.č. spojitou derivaci na [a,b]
Potom FŘ fce f na (a,b) $\boxed{BK}$ na $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ k funkci f^*

Příklady

najděte FŘ fce $f(x) = x$ na   a) $(-\pi,\pi)$ b) $(0,2\pi)$

Pokud dál nechcete počítat přes Eulerovy koeficienty, lze využívat

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \text{na} \quad (-\pi,\pi)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \sin(nx) \quad \text{na} \quad (0,2\pi)$$

najděte FŘ fce $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ na $(0,2\pi)$
najděte FŘ fce $f(x) = \sin^4(x)$ na $(-\pi,\pi)$
najděte FŘ fce $f(x) = \sin(\alpha x)$ na $(-\pi,\pi)$ $\alpha \in \mathbb{R}$
najděte FŘ fce $f(x) = \cos(\alpha x)$ na $(-\pi,\pi)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy