MOCK TEST — 12. týden

Motivace

Diferenciální počet funkcí více proměnných. Aparát se rozrostl o *chain rule*

Aparát

DEF: (Parciální derivace)
Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$ nazýváme ji parciální derivace f podle i- té proměnné v bodě a spec. v metrických prostorech (X,ρ) (Y,σ)

Def: (Diferencovatelnost, Totální derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$a \in \Omega$. Řekneme, že f je dif. v bodě a $\Leftrightarrow \exists T \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takové, že $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|f(x)-f(a)-T(x-a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$
Zobrazení $T \coloneqq Df(a)$ se nazve (totální) derivace f v bodě a

Pozn: (Vztah derivace a parc. derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dif. v $a \in \Omega \Rightarrow \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ $\forall i \in \hat{n}$, $\forall j \in \hat{m}$ a platí

$$Df(a) \equiv {}^{\varepsilon_m}(Df(a))^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

V:
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$
Nechť $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ na H_a a jsou spoj. v $a) \Rightarrow f$ je dif. v a

obecně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

V:
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na H_a a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ je spoj. v a
$\Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

DEF: (směrová derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$
$D_v f(a) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a-hv)-f(a)}{h}$

pozn. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv D_{e_i} f(a)$

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dif. v $a \in \Omega$
Pak $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^{\ltimes})^{\#} \overset{Riesz}{\Rightarrow} \exists! w \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)v =< w,v >_2= w^T v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$

Def $\nabla f(a) \coloneqq w^T \ldots$ gradient f v a, $Df(a) = \nabla f(a) v$

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

V:(Derivace složené fce)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$
f dif. v $a \in \mathbb{R}$, g dif v $f(a)$, $f(\Omega) \subset U$
Potom $g \circ f$ je dif. v a a platí $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$

pozn.

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ltimes},\mathbb{R}^{\gtrdot}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

pozn. Řetězové pravidlo:

$(Df(a))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)),\ i \in \hat{s},\ j \in \hat{n}$

$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

Příklady

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ ,\ \ (x,y) = (0,0) \\ 0\ ,\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) f spoj. v 0?

(b) f dif. v 0?

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ spoj. v 0?

Dokažte: $\arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-xyz} = \arctan x + \arctan y + \arctan z$
$f(x,y,z) = xyz \cdot e^{-x+y+z}$, $\frac{\partial^{m+n+v}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^v} f(x,y,z)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\ \ (x,y) = (0,0) \\ 0\ ,\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Vyš. spoj. a dif. f v (0,0)

(b) Spoč. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$w(x,y) = \begin{pmatrix} f(ax,by) \\ g(cx,dy) \end{pmatrix}$, $Dw(x,y) =?$

$f = f(\xi,\eta)$, $\xi = x+y+z$, $\eta = x^2+y^2+z^2$
$w = f \circ g\,(x,y,z), \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \xi(x,y,z) \\ \eta(x,y,z) \end{pmatrix}$, $Dw(x,y,z) =?$

$u = u(\xi, \eta, \varphi)$, $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\varphi = \sqrt{x^2 + z^2}$

$$w = u \circ g, \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + z^2} \\ \sqrt{y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} \end{pmatrix}, \; Dw(x,y,z) = ?$$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy