MOCK TEST — 11. týden

Motivace

Limity funkcí více proměnných. Hodí se znát definici, spec. pak tu v normovaných prostorech. Dále na důkaz NEexistence limity používáme Heineho, dalo by se to dokázat i z negace vlastnosti míti limitu, ale to by bylo na dlouho. Vše viz aparát.

Aparát

DEF: (Limita top. prostoru)
Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) top prostory
$f : Df \subset X \to Y$, $x_0 \in Df'$, $y \in Y$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \backslash \{x_0\} \cap Df)(f(x) \in H_y)$$

spec. v metrických prostorech (X,ρ) (Y, σ) … nahradíme okolí koulema

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \rho(x,x_0) < \delta)(\sigma(f(x),y < \epsilon)$$

spec. v normovaných prostorech $\rho = \|\cdot\|$, lib. $\sigma = \widetilde{\|\cdot\|}$ v $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \widetilde{\|\cdot\|})$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta)(\|\widetilde{f(x) - y}\| < \epsilon)$$

v příkladech $X = \mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$, $Y = \mathbb{R}$ s normou $|\cdot|$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta)(|f(x) - y| < \epsilon)}$$

V: (Heine)
$f : Df \subset X \to Y$, (X,ρ) (Y,σ)
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f \setminus_{\{x_0\}})(x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to y)$

Příklady

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy+y^2-1}{x^2+y^2-2}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Lze fci $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ dodef. spoj. v počátku?
Lze fci $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dodef. spoj. v počátku?

Motivace

Úvod do diferenciálního počtu více proměnných.

Aparát

DEF: (Parciální derivace)
Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$ nazýváme ji parciální derivace f podle i- té proměnné v bodě a spec. v metrických prostorech (X,ρ) (Y,σ)

Def: (Diferencovatelnost, Totální derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$a \in \Omega$. Řekneme, že f je dif. v bodě a $\Leftrightarrow \exists T \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takové,
že $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$
Zobrazení $T \coloneqq Df(a)$ se nazve (totální) derivace f v bodě a

Pozn: (Vztah derivace a parc. derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dif. v $a \in \Omega \Rightarrow \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ $\forall i \in \hat{n}$, $\forall j \in \hat{m}$ a platí

$$Df(a) \equiv {}^{\varepsilon_m}(Df(a))^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

V:
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$
Nechť $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ na H_a a jsou spoj. v $a) \Rightarrow f$ je dif. v a

obecně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

V:
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\exists \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na H_a a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ je spoj. v a
$\Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

DEF: (směrová derivace)
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$
$D_v f(a) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a-hv)-f(a)}{h}$

pozn. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv D_{e_i} f(a)$

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dif. v $a \in \Omega$
Pak $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^{\ltimes})^{\#} \overset{Riesz}{\Rightarrow} \exists! w \in \mathbb{R}^n$, $Df(a)v = < w,v >_2 = w^T v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$

Def $\nabla f(a) \coloneqq w^T \ldots$ gradient f v a, $Df(a) = \nabla f(a) v$

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

Příklady

$f(x,y) = x^2 + y^2$
spoč. směrovou derivaci f v bodě $(1,1)^T$ ve směru jednotkového vektoru, jehož úhel k ose x je 60
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ (x,y) = (0,0) \\ 0 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy