MOCK TEST — 5. týden

Motivace

Začali jsme téma funkčních řad, kde jsme vyšetřovali bodovou a stejnoměrnou konvergenci. Využíváme často Weierstrasse, aparát je doplněn spec. i o M-test. Někdy, obzvlášť u určování krajních bodů A se používá definice SK nebo NPSK (důsledek BC) Při odhadování je také často výhodné využít suprema funkce, které se zjistí derivací a zjištění maxima.

Aparát

DEF: (SK Funkčních řad)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A, resp. $\boxed{LSK}$ na A $\Longleftrightarrow$
$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\boxed{SK}$ na A, resp. $\boxed{LSK}$ na A, kde $S_n(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

V: (Weierstrass)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$,
$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq g_n(z))$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ $\boxed{SK}$ na A
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A

pozn: (M-test)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$,
$\exists\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ $(n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \leq M_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ $\boxed{K}$ na A
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A

V: (B-C krit. pro funkce)

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A $\iff$
$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|\sum_{n=1}^{\infty} f_n| < \epsilon)$

V: (NPSK)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A $\implies f_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$

Příklady

vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}$, kde $x \in \mathbb{R}_0^+$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, na $A = [0,\infty)$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, na $A = \mathbb{R}$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^6 n}\right)$, $\alpha > 0$, $x = \mathbb{R}^+ \equiv (0,\infty)$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$
vyšetřete $\boxed{BK}$ a $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy