MOCK TEST — 6. týden

Motivace

Doděláváme téma SK funkčních řad, kde se nám aparát rozhodl o Abelovo a Dirichiletovo kritérium. Dále jsme se, podobně jako v týdnu 4 zabývali větama o záměně. Hodí se znát součet geometrické řady a základní taylory.

Aparát

DEF: (SK Funkčních řad)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A, resp. $\boxed{LSK}$ na A $\iff$
$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\boxed{SK}$ na A, resp. $\boxed{LSK}$ na A, kde $S_n(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

V: (Abel, Dirichlet)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$,
Nechť $gn : A \to \mathbb{R}$,
$\{gn\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní,

Dirichlet: $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|s_n(z)| \leq K) \wedge g_n \overset{A}{\rightrightarrows} 0$
Abel: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ $\wedge$ $(\exists L > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z)(|g_n(z)| \leq L)$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ na A

Příklady

vyšetřete $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $A = [0,\infty]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $A = [0,\infty]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{x^2+n^2}}$ na $A = \mathbb{R}$

Aparát

V: (O limitě)

Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$ a platí,

(i) $z_0 \in A'$

(ii) $\exists \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f_n =: a_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na A

potom:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boxed{K}$
2. $\exists \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$, kde s je součtem fce $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} s(z)$

V: (O spojitosti)

Nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in A$
Pokud pro $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n$ je spoj, v z_0 vzhledem k A) a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ k součtové fci s, potom s je spoj. v z_0 vzhledem k A

V: (O integraci)

Nechť $f_n : < a,b > \ \to \mathbb{R}$,
Nechť platí:

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})(f_n$ je R-int na $< a,b >)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na $< a,b >$ k součt. fci s

potom:

1. s je R-int na $< a,b >$
2. $\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$

V: (O derivaci)

Nechť $f_n : (a,b) \ \to \mathbb{R}$, diferenc.
Nechť platí:

(i) $(\exists\, c \in (a,b))(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ $\boxed{K}$$)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ $\boxed{SK}$ na (a,b)

potom:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\boxed{SK}$ na (a,b) k součt. fci s
2. s je dif. na (a,b)
3. $\forall x \in (a,b)$, $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

V: (Abelova věta)

Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.

Příklady

lze zaměnit $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$?
pro jaká $x \in \mathbb{R}$ platí: $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$?
$f_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$, lze prohodit $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$?

sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$
sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$

DÚ
sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$
sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

Reference

[1] Boris Dĕmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy