MOCK TEST — 13. týden

Motivace

Extrémy fcí více proměnných. Dodatečně přidávám Sylvestrovo kritérium z LAL 2.

Aparát

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ltimes},\mathbb{R}^{\gtrdot}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

$D^2f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\setminus}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ltimes},\mathbb{R}^{\gtrdot})) \simeq \mathbb{R}^{m,n,n}$

DEF:(lok. max., lok. min.)
Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $a \in \Omega$ lok. min.
$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$

Řekneme, že $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $a \in \Omega$ lok. max.
$\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists H_a \subset \Omega)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$

V: (Nutná podmínka)
Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má extrém v $a \in \Omega$, f je def. v $a \Rightarrow \boxed{\nabla f(a) = 0}$
(stacionární/kritický bod)

V: (Postačující podmínka)
Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^2 na Ω (všechny parciální der. druhého řádu spoj.), $a \in \Omega$, $\nabla f(a) = 0$
Potom platí:

1. $\nabla^2 f(a)$ PD $\Rightarrow$ má v a ostr. lok. min.
2. $\nabla^2 f(a)$ ND $\Rightarrow$ má v a ostr. lok. max.
3. $\nabla^2 f(a)$ IND $\Rightarrow$ má v a extrém (sedlový bod)

kde $\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$ je Hessova matice

V: (Sylvesterovo kritérium)
Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak platí:

1. Q je pozitivně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. při zachování značení z lemmatu 4.29 je $\Delta_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.
2. Q je negativně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ splňuje pro každé $k \in \hat{n}$:

$$\begin{aligned} \Delta_k > 0, &\ \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ \Delta_k < 0, &\ \text{je-li } k \text{ liché}. \end{aligned}$$

Příklady

Najděte extrémy/sedlové body:
$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$
$u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
$u(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
$u(x,y,z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x + y + z)$
$u(x,y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy