MOCK TEST — 3. týden

Motivace

Dokončili jsme kapitolu nevlastních integrálů zavedením tzv. Froullaniho integrálu, definice a věta viz aparát. Dále jsme začali téma stejnoměrné konvergence funkčních řad. Z aparátu využíváme jen definici stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti na množině.

Aparát

DEF: (Froullaniho integrál)

$a,b > 0,\ \ I(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$

V:

$f \in (0,\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =: f_0$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f_\infty$
Potom:

1. $f_0,f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = (f_\infty - f_0)\ln\frac{b}{a}$
2. $f_0, \in \mathbb{R} \wedge \int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \boxed{K} \Rightarrow I(a,b) = f_0 \ln\frac{b}{a}$
3. $\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \boxed{K} \wedge f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = -f_\infty \ln\frac{b}{a}$
4. $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \boxed{K} \Rightarrow I(a,b) = 0$

Příklady

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos{(ax)}-\cos{(bx)}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{b\sin{(ax)} - a\sin{(bx)}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$
$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin{(ax)}\sin{(bx)}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n} a_i \cos b_i x\,\mathrm{d}x$$

Aparát

DEF: (SK funkční posloupnosti na množině A)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
řekneme, že $\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ $\boxed{SK}$ na množině A
$\iff \exists f : A \to \mathbb{C}$ tak, že
$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$
pro všechna z, takže i pro supremum $\sup\limits_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$
$\iff \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$

Příklady

vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n$ na a) $A = [0, \frac{1}{2}]$, b) $A = [0, 1]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $A = [0,1]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $A = [0,1]$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy