

MOCK TEST — 10. týden

Motivace

Začali jsme a zároveň skončili téma Topologie. Do aparátu dávám jen definice T_{0-4} prostorů, zbytek máte z přednášek.

Aparát

Definice 2.45 (Axiomy oddělitelnosti):

Následující výroky nazýváme axiomy oddělitelnosti:

- | | |
|---|--------------|
| T_0 : $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y),$ | (Kolmogorov) |
| T_1 : $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y),$ | (Fréchet) |
| T_2 : $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset),$ | (Hausdorff) |
| T_3 : $(\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x \supset U, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset),$ | (regulární) |
| T_4 : $(\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, V \supset B, U \in \tau, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset).$ | (normální) |

$$\begin{aligned} T_3 &\not\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \\ T_1 + T_4 &\Rightarrow T_1 + T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \\ T_1 &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\{x\} \in c\tau) \end{aligned}$$

Příklady

$X \neq \emptyset$ $|x| \geq 2$, $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$ není T_0

$X = \{a, b\}$ $a \neq b$, $\tau := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ je T_0 , ale ne $T_1 \dots$ oveď, že τ je topologie

$X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ $\alpha \notin \mathbb{R}$, $\tau := \tau_{obv}^{\mathbb{R}} \cup \{X \setminus F \mid F \subset \mathbb{R} \text{ konečný}\}$ je T_1 , ale ne T_2

$$X = \mathbb{R}, \quad \beta_x := \begin{cases} \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}, & x \neq 0 \\ \{(-\epsilon, +\epsilon) \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{je } T_2, \text{ ale ne } T_3$$

Dokažte:

1. $\forall \{X, \rho\} : x \in X, \rho > 0 : \overline{B_x(r)} \subsetneq C_x(r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$
2. $\forall \{X, \|\cdot\|\} : x \in X, \rho > 0 : \overline{B_x(r)} = C_x(r) := \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$

ZBYTEK JSEM SI NEPSAL NEBO NEPOCHOPIL.
PROSIL BYCH ZAJEMCE O DOPLNENI

Reference

- [1] Cvika