MOCK TEST — 2. týden

Motivace

Tenhle týden byl zatim relativně ez.
Dokončili jsme kapitolu nevlastních integrálů zavedením tzv. Froullaniho integrálu, definice a věta viz aparát. Než se pustíte do funkčních posloupností, ujistěte se, že zvládnete většinu příkladu z předchozích týdnů.

Aparát

DEF: (Froullaniho integrál)

$a,b > 0,\ \ I(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$

V:

$f \in (0,\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =: f_0$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f_\infty$
Potom:

1. $f_0, f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = (f_\infty - f_0)\ln\frac{b}{a}$
2. $f_0, \in \mathbb{R} \wedge \int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ \boxed{K} \Rightarrow I(a,b) = f_0 \ln\frac{b}{a}$
3. $\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ \boxed{K} \wedge f_\infty \in \mathbb{R} \Rightarrow I(a,b) = -f_\infty \ln\frac{b}{a}$
4. $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ \boxed{K}\ \Rightarrow I(a,b) = 0$

Příklady

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{b \sin{(ax)} - a \sin{(bx)}}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x} \, \mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin{(ax)} \sin{(bx)}}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} a_i \cos b_i x \, \mathrm{d}x$$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy **str. ještě nevim**