MOCK TEST — 11. týden

Motivace

Limity funkcí více proměnných. Hodí se znát definici, spec. pak tu v normovaných prostorech. Dále na důkaz NEexistence limity používáme Heineho, dalo by se to dokázat i z negace vlastnosti míti limitu, ale to by bylo na dlouho. Vše viz aparát.

Aparát

DEF: (Limita top. prostoru)
Nechť $(X, \tau_X),\ (Y, \tau_Y)$ top prostory
$f : Df \subset X \to Y$, $x_0 \in Df'$, $y \in Y$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \backslash \{x_0\} \cap Df)(f(x) \in H_y)$$

spec. v metrických prostorech (X,ρ) (Y, σ) ... nahradíme okolí koulema

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \rho(x,x_0) < \delta)(\sigma(f(x),y < \epsilon)$$

spec. v normovaných prostorech $\rho = \|\cdot\|$, lib. $\sigma = \widetilde{\|\cdot\|}$ v $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \widetilde{\|\cdot\|})$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta)(\widetilde{\|f(x) - y\|} < \epsilon)$$

v příkladech $X = \mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$, $Y = \mathbb{R}$ s normou $|\cdot|$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall x \in Df,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta)(|f(x) - y| < \epsilon)}$$

V: (Heine)
$f : Df \subset X \to Y$, (X,ρ) (Y,σ)
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D_f}} f(x) = y \iff (\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f\backslash_{\{x_0\}})(x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to y)$

Příklady

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy+y^2-1}{x^2+y^2-2}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4}\cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Lze fci $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ dodef. spoj. v počátku?
Lze fci $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dodef. spoj. v počátku?

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy