MOCK TEST — 10. týden

Motivace

Začali jsme a zároveň skončili téma Topologie. Do aparátu dávám jen definice T_{0-4} prostorů, zbytek máte z přednášek.

Aparát

Definice 2.45 (Axiomy oddělitelnosti):
Následující výroky nazýváme axiomy oddělitelnosti:

$$
\begin{aligned}
T_0: &\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y), && \text{(Kolmogorov)}\\
T_1: &\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y), && \text{(Fréchet)}\\
T_2: &\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset), && \text{(Hausdorff)}\\
T_3: &\quad (\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x \supset U, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset), && \text{(regulární)}\\
T_4: &\quad (\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, V \supset B, U \in \tau, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset). && \text{(normální)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
T_3 \not\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0\\
T_1 + T_4 \Rightarrow T_1 + T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0\\
T_1 \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\{x\} \in c\tau)
\end{gathered}
$$

Příklady

$X \neq \emptyset$ $|x| \geq 2$, $\tau_0 := \{\emptyset, X\}$ není T_0

$X = \{a,b\}$ $a \neq b$, $\tau := \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ je T_0, ale ne T_1 … ověř, že τ je topologie

$X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ $\alpha \notin \mathbb{R}$, $\tau := \tau_{obv}^{\mathbb{R}} \cup \{X \setminus F \mid F \subset \mathbb{R} \text{ koneč}\}$ je T_1, ale ne T_2

$$X = \mathbb{R}, \quad \beta_x := \begin{cases} \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \mid \epsilon > 0\}, \ x \neq 0 \\ \{(-\epsilon, +\epsilon) \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}\}, \ x = 0 \end{cases} \quad \text{je } T_2\text{, ale ne } T_3$$

Reference

[1] Cvika