MOCK TEST — 2. týden

Motivace

Tenhle týden byl brutální a proto je důležité, abyste se dostatečně orientovali v látce z minulého týdne, než budete pokračovat v určování konvergence následujících nevlastních integrálů

Aparát

Z minula připomínám a doplňuji o další kritéria

$$\int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x \ \boxed{K} \iff p > -1$$
$$\int_1^\infty x^p \,\mathrm{d}x \ \boxed{K} \iff p < -1$$

B-C kritérium pro nevlastní integrál

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x \ \boxed{K} \quad \iff \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall b_1, b_2 \in (b-\delta, b)) \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \epsilon$$

Dirichlet + Abel

Nechť $b \in \overline{\mathbb{R}}$ je jediný kritický bod $\int_a^b fg$.

$\forall c \in (a,b)$ je f R-integrabilní na $\langle a, b \rangle$, g monotónní na (a,b). Platí-li:

- **(Dirichlet)** $F(y) = \int_a^y f$ je omezena na (a,b), $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$
- **(Abel)** $\int_a^b f \ \boxed{K}$ (tzn. $\exists \lim\limits_{y \to b^-} F(y)$), g omezena na (a,b)

Pak $\int_a^b fg \ \boxed{K}$

Hardy

f,$g : \langle a, \infty) \to \mathbb{R}$,

f p-periodická s $p > 0$ ($f(x) = f(x+p)$, $\forall x \geq a$),

f je R-int. na $\langle a, a+p \rangle$,

g je monotonní na $\langle a, \infty \rangle$, $g(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$

$$\int_a^\infty fg = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \int_a^\infty fg \ \boxed{K} \\ \neq 0 & \Rightarrow \int_a^\infty g \ \boxed{K} \iff \int_a^\infty fg \ \boxed{K} \end{cases}$$

Příklady

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} \, \mathrm{d}x \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p \sin x}{1 + x^q} \, \mathrm{d}x \ \ p \in \mathbb{R}, \ q \geq 0 \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda + \sin x} \, \mathrm{d}x \ \ \lambda > 0 \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^r} \, \mathrm{d}x \ \ r \in \mathbb{R} \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

$$\int_0^\infty x^2 \cos(e^x) \, \mathrm{d}x \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x \quad \boxed{AK} \ \boxed{NeAK} \ \boxed{D}$$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy **str. ještě nevim**