MOCK TEST — 4. týden

Motivace

Pokračování stejnoměrné konvergence funkčních posloupností. Aparát jsme rozšířili o SK součinu a podílu funkčních posloupností a o Diniho větu.

Aparát

DEF: (SK funkční posloupnosti na množině A)

Nechť $fn : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
řekneme, že $\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ $\boxed{SK}$ na množině A
$\iff \exists f : A \to \mathbb{C}$ tak, že
$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in A)(|f_n(z) - f(z)| < \epsilon)$
pro všechna z, takže i pro supremum $\sup\limits_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$
$\iff \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0$

V: (SK součinu funkčních posloupností)

Nechť $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g \implies f_n \cdot g_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \cdot g$, pokud f,g jsou omezené funkce na A $\Leftrightarrow \{f_n\}, \{g_n\}$ jsou stejnoměrně/stejně omezené na A
$\Leftrightarrow (\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(|f_n(z)| \geq K)$

V: (Dini)

$\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$ kompakt.
$f_n, f : A \to \mathbb{R}$ spoj. na A vzhledem k A, $f_n \overset{A}{\to} f$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ monot.
$\implies f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$

Příklady

vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n$ na a) $A = [0, \frac{1}{2}]$, b) $A = [0, 1]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $A = [0{,}1]$
vyšetřete $\boxed{SK}$ $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $A = [0{,}1]$

najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset D_{f_n}$ $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$
najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset D_{f_n}$ $f_n(x) = \arctan(nx)$
najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset D_{f_n}$ $f_n(x) = x \arctan(nx)$
najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset [0{,}\infty]$, $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$

Bonus:
najděte f_n a g_n z věty o součinu, které obě $\boxed{SK}$, ale $f_n \cdot g_n$ nebude $\boxed{SK}$
(tedy ověřte nutnost podmínky omezenosti)
zformulujte podobné tvrzení pro podíl (SK podílu funkčních posloupností)
Najděte př. $\{f_n\}$, f, a A, tak aby $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$, ale $\{f_n\}$ nebyla omezená

najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset D_{f_n}$ $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
najděte největší interval $\boxed{SK}$, $A \subset D_{f_n}$ $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

Reference

[1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy