

MOCK TEST — 11. týden

Motivace

Limity funkcí více proměnných. Hodí se znát definici, spec. pak tu v normovaných prostorách. Dále na důkaz NEexistence limity používáme Heineho, dalo by se to dokázat i z negace vlastnosti míti limitu, ale to by bylo na dlouho. Vše viz aparát.

Aparát

DEF: (Limita top. prostoru)

Nechť (X, τ_X) , (Y, τ_Y) top prostory
 $f : Df \subset X \rightarrow Y$, $x_0 \in Df$, $y \in Y$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall H_y)(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \setminus \{x_0\} \cap Df)(f(x) \in H_y)$$

spec. v metrických prostorzech (X, ρ) (Y, σ) ... nahradíme okolí koulema

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df, 0 < \rho(x, x_0) < \delta)(\sigma(f(x), y) < \epsilon)$$

spec. v normovaných prostorzech $\rho = \|\cdot\|$, lib. $\sigma = \widetilde{\|\cdot\|}$ v $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \widetilde{\|\cdot\|})$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in Df, 0 < \|x - x_0\| < \delta)(\widetilde{\|f(x) - y\|} < \epsilon)$$

v příkladech $X = \mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$, $Y = \mathbb{R}$ s normou $|\cdot|$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \epsilon)(\exists \delta)(\forall x \in Df, 0 < \|x - x_0\| < \delta)(|f(x) - y| < \epsilon)}$$

V: (Heine)

$f : Df \subset X \rightarrow Y, (X, \rho) (Y, \sigma)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_f}} f(x) = y \iff (\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f \setminus \{x_0\})(x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y)$$

Příklady

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2-xy+y^2-1}{x^2+y^2-2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Lze fci $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ dodef. spoj. v počátku?

Lze fci $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dodef. spoj. v počátku?

Motivace

Úvod do diferenciálního počtu více proměnných.

Aparát

DEF: (Parciální derivace)

Bud' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \hat{n}$ a $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

kde e_i je i-tý vektor standardní báze \mathbb{R}^n nazýváme ji parciální derivace f podle i- té proměnné v bodě a spec. v metrických prostorech (X, ρ) (Y, σ)

Def: (Diferencovatelnost, Totální derivace)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in \Omega$. Řekneme, že f je dif. v bodě a $\Leftrightarrow \exists T \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takové, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$

Zobrazení $T := Df(a)$ se nazve (totální) derivace f v bodě a

Pozn: (Vztah derivace a parc. derivace)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dif. v $a \in \Omega \Rightarrow \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \forall i \in \hat{n}, \forall j \in \hat{m}$ a platí

$$Df(a) \equiv {}^{\varepsilon_m} (Df(a))^{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

V:

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$

Nechť $(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ na } H_a \text{ a jsou spoj. v } a) \Rightarrow f$ je dif. v a

obecně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

V:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, a \in \Omega, \exists \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ na } H_a \text{ a } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ je spoj. v } a$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

DEF: (směrová derivace)

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n, a \in \Omega$$

$$D_v f(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - hv) - f(a)}{h}$$

$$\underline{\text{pozn. }} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv D_{e_i} f(a)$$

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dif. v $a \in \Omega$

Pak $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \equiv (\mathbb{R}^\times)^\# \xrightarrow{Riesz} \exists! w \in \mathbb{R}^n, Df(a)v = \langle w, v \rangle_2 = w^T v, \forall v \in \mathbb{R}^n$

Def $\nabla f(a) := w^T \dots$ gradient f v a , $Df(a) = \nabla f(a)v$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Příklady

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

spoč. směrovou derivaci f v bodě $(1,1)^T$ ve směru jednotkového vektoru, jehož úhel k ose x je 60

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) = (0,0) \\ 0, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Reference

- [1] Boris Děmidovič - Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy