Řešená sbírka typových příkladů

Na úvod přikládáme některé užitečné věty ze skript Matematické Analýzy II prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. Doslovná znalost vět a důkazů není vyžadována, ale na paní prof. udělá jistě dojem. Alternativní znění s patřičným důkazem vítána.

Def (Riemannův integrál)
Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$ platí

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** I a toto **číslo** značíme symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{zkráceně} \quad \int_a^b f.$$

O funkci f říkáme, že je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu I.

Věta (Newtonova formule).
Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že

- F je spojitá na $\langle a, b\rangle$,
- $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \triangleq [F(x)]_a^b.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál).
Nechť funkce f a g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a diferencovatelné v (a, b). Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Věta (Substituce v určitém integrálu).
Nechť pro funkce f a φ platí

- φ je spojitá na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a diferencovatelná v (α, β),
- f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$.

Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Zde jsme si dovolili vložit pár základních příkladů z integrálního počtu. Příklady jsou brány ze sbírky Děmidoviče a seřazeny do následujících kategorií:
5 příkladů na využití Newtonovy formule
5 příkladů na využití per partes v určitém integrálu
5 příkladů na substituci
5 integrálů s méně obvyklými funkcemi.

Příklady v online testu by se neměly typově ani obtížnostně lišit, ideální čas na vyřešení by se tedy měl pohybovat kolem jedné minuty až dvou minut. Stále máte možnost ovlivnit obtížnost příkladů v online testu!

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cancel{1-x^2}}{(1+x^2)\cancel{(1-x^2)}}\,\mathrm{d}x \quad = \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^3-2x^2+x-2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \quad = arcsinh \sinh 2 - arcsinh \sinh 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x+1)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x+1)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-2} \frac{\cos^2 x(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x})}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \int_{-1}^{-2} \frac{\cancel{\cos^2 x}\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln|-2| - \ln|-1| = \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky vyjdou

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \quad = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$$

$$\int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky vyjdou

$$\int_0^2 \frac{3/2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{1/2}{x+3}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 3 = \ln 3\sqrt{5}$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x, \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin x\, dx \quad = 2x\cos x\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x\, dx \quad = 2(2\pi + 0) = 4\pi$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \quad = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\int_0^{\sqrt{3}} 1\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x \quad = -x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} 1 \,\mathrm{d}x + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 \quad = 2(1 - \frac{1}{e})$$

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$\int_0^{\ln 2} xe^{3x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{3x}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

$$\cancel{\int_0^{0.75} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

Řešení: Posloucháme zpětnou vazbu a souhlasíme, tento příklad je do online testu nevhodný

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad = 2\int_0^1 1\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2 - 2\arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \quad = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \quad = \tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^5 t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t \quad = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 t \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y \quad = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - 2y^2 + y^4)\,\mathrm{d}y = (y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5})\Big|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{53}{480}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \quad = 2\sqrt{t}\Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x \quad + \int_1^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 1\,\mathrm{d}x + \int_1^3 (-1)\,\mathrm{d}x = -1$$

$$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x \quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^4 x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^4 x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cancel{(1+\cos^2 x)}(1-\cos^2 x)}}{\sqrt{\cancel{1+\cos^2 x}}}\,\mathrm{d}x \quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$\int_\mu^{+\infty} (x+\mu)^2 e^{-(x-\mu)}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_\mu^{+\infty} (x+\mu)^2 e^{-(x-\mu)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (t+2\mu)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(3) + 4\mu\Gamma(2) + 4\mu^2\Gamma(1) = 2 + 4\mu + 4\mu^2$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\pi x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\pi^2+\pi^2} = \frac{1}{2\pi}$$

Proč? Protože:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{ibx}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{e^{-(a-ib)x}}{-(a-ib)}\Big]_0^\infty = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}$$