

# Řešená sbírka typových příkladů

Na úvod přikládáme některé užitečné věty ze skript Matematické Analýzy II prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. Doslovná znalost vět a důkazů není vyžadována, ale na paní prof. udělá jistě dojem. Alternativní znění s patřičným důkazem vítána.

**Def** (Riemannův integrál)

Pokud pro funkci  $f$  definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu  $I = \langle a, b \rangle$  platí

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $I$**  a toto číslo značíme symbolem

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \text{zkráceně} \quad \int_a^b f.$$

O funkci  $f$  říkáme, že je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu  $I$ .

**Věta** (Newtonova formule).

Nechť existuje  $\int_a^b f$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  a nechť existuje funkce  $F$  taková, že

- $F$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ,
- $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in (a, b)$ .

Pak platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \triangleq [F(x)]_a^b.$$

**Věta** (Metoda per partes pro určitý integrál).

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojitě na  $\langle a, b \rangle$  a diferencovatelné v  $(a, b)$ . Když existují integrály  $\int_a^b f'g$  a  $\int_a^b fg'$ , pak

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Věta** (Substituce v určitém integrálu).

Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí

- $\varphi$  je spojitá na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a diferencovatelná v  $(\alpha, \beta)$ ,
- $f$  je spojitá na  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ .

Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Zde jsme si dovolili vložit pár základních příkladů z integrálního počtu. Příklady jsou brány ze sbírky Děmidoviče seřazeny do následujících kategorií:

5 příkladů na využití Newtonovy formule

5 příkladů na využití per partes v určitém integrálu

5 příkladů na substituci

5 integrálů s méně obvyklými funkcemi.

Příklady v online testu by se neměly typově ani obtížnostně lišit, ideální čas na vyřešení by se tedy měl pohybovat kolem jedné minuty. Stále máte možnost ovlivnit obtížnost příkladů v online testu!

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

**Řešení:**

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

**Řešení:**

$$\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+3} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x, dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

**Řešení:**

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\ln 2} x e^{3x} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

**Řešení:**

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$$

**Řešení:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^4 x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$$

**Řešení:**

$$\int_\mu^{+\infty} (x+\mu)^2 e^{-(x-\mu)} dx$$

**Řešení:**

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x} \cos(\pi x) dx$$

**Řešení:**