

Řešená sbírka typových příkladů

Na úvod přikládáme některé užitečné věty ze skript Matematické Analýzy II prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. Doslovná znalost vět a důkazů není vyžadována, ale na paní prof. udělá jistě dojem. Alternativní znění s patřičným důkazem vítána.

Def (Riemannův integrál)

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$ platí

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu I** a toto číslo značíme symbolem

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \text{zkráceně} \quad \int_a^b f.$$

O funkci f říkáme, že je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu I .

Věta (Newtonova formule).

Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že

- F je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
- $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \triangleq [F(x)]_a^b.$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál).

Nechť funkce f a g jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a diferencovatelné v (a, b) . Když existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Věta (Substituce v určitém integrálu).

Nechť pro funkce f a φ platí

- φ je spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a diferencovatelná v (α, β) ,
- f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$.

Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Zde jsme si dovolili vložit pár základních příkladů z integrálního počtu. Příklady jsou brány ze sbírky Děmidoviče a seřazeny do následujících kategorií:

5 příkladů na využití Newtonovy formule

5 příkladů na využití per partes v určitém integrálu

5 příkladů na substituci

5 integrálů s méně obvyklými funkcemi.

Příklady v online testu by se neměly typově ani obtížnostně lišit, ideální čas na vyřešení by se tedy měl pohybovat kolem jedné minuty až dvou minut. Stále máte možnost ovlivnit obtížnost příkladů v online testu!

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4} dx$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4} dx = \int_0^1 \frac{\cancel{1-x^2}}{(1+x^2)(\cancel{1-x^2})} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^3-2x^2+x-2}} dx$$

Řešení:

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \sqrt{\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x^2+1)}} dx = \int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} \sinh 2 - \operatorname{arcsinh} \sinh 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x + 1)}{x} dx$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-2} \frac{(1-\sin^2 x)(\tan^2 x + 1)}{x} dx &= \int_{-1}^{-2} \frac{\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right)}{x} dx = \int_{-1}^{-2} \frac{\cancel{\cos^2 x} \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{x} dx = - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln |-2| - \ln |-1| = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky vyjdou

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$$

$$\int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+3} dx$$

Řešení: Rozkladem na parciální zlomky vyjdou

$$\int_0^2 \frac{3/2}{x+1} dx + \int_0^2 \frac{1/2}{x+3} dx = \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{3}{2} \ln 3 = \ln 3\sqrt{5}$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin x dx = 2x \cos x \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx = 2(2\pi + 0) = 4\pi$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

Řešení:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} 1 dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx$$

Řešení:

$$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx = -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 1 \, dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 \, dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx = -x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} \, dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{3x} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx = \frac{1}{3} x e^{3x} \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

$$\int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Řešení: Posloucháme zpětnou vazbu a souhlasíme, tento příklad je do online testu nevhodný

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} \, dt = 2 \int_0^1 1 \, dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = 2 - 2 \arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos^3 t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} \, dt = \tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^5 t}{\cos t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 t \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 t)^2 \sin t \, dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-y^2)^2 \, dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2y^2+y^4) \, dy = \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{53}{480}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2} \, dt = 2\sqrt{t} \Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1$$

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx + \int_1^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx = \int_1^3 1 \, dx + \int_1^3 (-1) \, dx = -1$$

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos^4 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx$$

Řešení:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos^4 x}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(1 + \cos^2 x)(1 - \cos^2 x)}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 2$$

$$\int_\mu^{+\infty} (x + \mu)^2 e^{-(x-\mu)} \, dx$$

Řešení:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x} \cos(\pi x) \, dx$$

Řešení: