$$\int_{-1}^{1} g(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_{int}} g(\xi_i)w_i,$$

квадратурные формулы Гаусса

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sum_{I=1}^{2} N^A_{,\xi_I}(\underline{\xi}) * \xi_{I,i} * \sum_{j=1}^{2} K_{i,j} \sum_{J=1}^{2} N^B_{,\xi_J}(\underline{\xi})\xi_{J,j} |\underline{\hat{J}}(\xi)|\, d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\sum_{q_2=1}^{n\_int}\sum_{I=1}^{2} N^A_{,\xi_I}(\underline{\xi}) * \xi_{I,i} * \sum_{j=1}^{2} K_{i,j} \sum_{J=1}^{2} N^B_{,\xi_J}(\underline{\xi})\xi_{J,j} |\underline{\hat{J}}(\xi)|\, w_{q_2} d\xi_2 =$$

$$= \sum_{q_1=1}^{n_{int}}\sum_{q_2=1}^{n_{int}}\sum_{I=1}^{2} N^A_{,\xi_I}(\underline{\xi}) * \xi_{I,i} * \sum_{j=1}^{2} K_{i,j} \sum_{J=1}^{2} N^B_{,\xi_J}(\underline{\xi})\xi_{J,j} |\underline{\hat{J}}(\xi)|\, w_{q_2} w_{q_1} =$$

$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ производная сложной функции

$\xi_{I,i}$ – производная $\frac{\partial \xi_I}{\partial x_i}$, $\xi_{J,j}$ – производная $\frac{\partial \xi_J}{\partial x_j}$

$N^A(\underline{\xi}) = \frac{1}{4}(1+\xi_1^A\xi_1)(1+\xi_2^A\xi_2)$ – базисные функции для двумерного случая (задача 2а)

$N^A_{,\xi_1}(\underline{\xi}) = \frac{1}{4}\xi_1^A(1+\xi_2^A\xi_2)$ – производная по ξ_1

$N^A_{,\xi_2}(\underline{\xi}) = \frac{1}{4}\xi_2^A(1+\xi_1^A\xi_1)$ – производная по ξ_2

Перейдем к корням Лежандра

$N^A_{,\xi_I}(\xi) = N^A_{,\xi_I}(\xi_{q_1}, \xi_{q_2})$

$$\sum_{I=1}^{2} N^A_{,\xi_I}(\xi)\xi_{I,i} = \sum_{I=1}^{2} N^A_{,\xi_I}(\xi_{q_1},\xi_{q_2})\xi_{I,i} = N^A_{,\xi_{q_1}}(\xi_{q_1},\xi_{q_2})\xi_{q_1,i} + N^A_{,\xi_{q_2}}(\xi_{q_1},\xi_{q_2})\xi_{q_2,i} =$$

Берём производную по ξ_{q_1} - $N^A_{,\xi_{q_1}}(\xi_{q_1},\xi_{q_2}) = \frac{1}{4}\xi_1^A(1+\xi_2^A\xi_{q_2})$

Берём производную по ξ_{q_2} - $N^A_{,\xi_{q_2}}(\xi_{q_1},\xi_{q_2}) = \frac{1}{4}\xi_2^A(1+\xi_1^A\xi_{q_1})$

$$= \frac{1}{4}\xi_1^A\left(1+\xi_2^A\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_1}}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\xi_2^A\left(1+\xi_1^A\xi_{q_1}\right)*\frac{\partial\xi_{q_2}}{\partial x_i}$$

Аналогично для $N^B_{,\xi_J}(\xi)$

$$= \sum_{q_1=1}^{n_{int}}\sum_{q_2=1}^{n_{int}}\left(N^A_{,\xi_{q_1}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_1}}{\partial x_i}+N^A_{,\xi_{q_2}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_2}}{\partial x_i}\right)*\sum_{j=1}^{2}K_{i,j}\left(N^B_{,\xi_{q_1}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_1}}{\partial x_j}+N^B_{,\xi_{q_2}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_2}}{\partial x_j}\right)|\hat{J}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)|w_{q_2}w_{q_1} =$$

Подставим $N^A_{,\xi_{q_1}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) = \frac{1}{4}\xi_1^A\left(1+\xi_2^A\xi_{q_2}\right)$

$N^A_{,\xi_{q_2}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) = \frac{1}{4}\xi_2^A\left(1+\xi_1^A\xi_{q_1}\right)$

и $N^B_{,\xi_{q_1}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) = \frac{1}{4}\xi_1^B\left(1+\xi_2^B\xi_{q_2}\right)$

$N^B_{,\xi_{q_2}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) = \frac{1}{4}\xi_2^B\left(1+\xi_1^B\xi_{q_1}\right)$

$$= \sum_{q_1=1}^{n_{int}}\sum_{q_2=1}^{n_{int}}\left(\frac{1}{4}\xi_1^A\left(1+\xi_2^A\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_1}}{\partial x_i}+\frac{1}{4}\xi_2^A\left(1+\xi_1^A\xi_{q_1}\right)*\frac{\partial\xi_{q_2}}{\partial x_i}\right)*\sum_{j=1}^{2}K_{i,j}\left(\frac{1}{4}\xi_1^B\left(1+\xi_2^B\xi_{q_2}\right)*\frac{\partial\xi_{q_1}}{\partial x_j}+\frac{1}{4}\xi_2^B\left(1+\xi_1^B\xi_{q_1}\right)*\frac{\partial\xi_{q_2}}{\partial x_j}\right)|\hat{J}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)|w_{q_2}w_{q_1} =$$

$$\hat{J}(\underline{\xi}) = \hat{J}(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

$$\hat{J}(\xi_1, \xi_2)_*^T = A_*^T$$

$$\left|\hat{J}(\xi_1, \xi_2)\right| = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы $\hat{J}(\xi_1, \xi_2)$.

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы $\hat{J}(\xi_1, \xi_2)$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$ транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов

матрицы $\hat{J}(\xi_1, \xi_2)$

$$\hat{J}(\xi_1, \xi_2)^{-1} = \frac{1}{\left|\hat{J}(\xi_1, \xi_2)\right|} * \hat{J}(\xi_1, \xi_2)_*^T = \frac{1}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)} * \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}}$$

Рассмотрим 1й элемент $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}$

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)} * \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} * \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\partial \sum_{A=1}^{n\_ne} N^A(\xi_1, \xi_2) * x_{e_2}^A}{\partial \xi_2}}{\left(\frac{\partial \sum_{A=1}^{n\_ne} N^A(\xi_1, \xi_2) * x_{e_1}^A}{\partial \xi_1} * \frac{\partial \sum_{A=1}^{n\_ne} N^A(\xi_1, \xi_2) * x_{e_2}^A}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \sum_{A=1}^{n\_ne} N^A(\xi_1, \xi_2) * x_{e_2}^A}{\partial \xi_1} * \frac{\partial \sum_{A=1}^{n\_ne} N^A(\xi_1, \xi_2) * x_{e_1}^A}{\partial \xi_2}\right)}$$

Правая часть слабой формы

$$\sum_{e=1}^{n\_el}\int_{\Omega_e} w^h f dV - \sum_{e=1}^{n\_el}\int_{\partial\Omega_\gamma^e} w^h \gamma_n dS$$

Рассмотрим 1й интеграл

$$\int_{\Omega_e} w^h f dV = \int_{\Omega_e} \sum\nolimits_{A=1}^{n_{ne}} c_e^A N^A(\underline{\xi}) f dV = \sum\nolimits_{A=1}^{n_{ne}} c_e^A \int_{\Omega_\xi} N^A(\underline{\xi}) f(\underline{x}(\underline{\xi})) * \left|\hat{\mathrm{J}}(\underline{\xi})\right| d\underline{\xi} =$$

$$= < c_e^1 c_e^2 \dots c_e^{n_{ne}} > \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix} N^1 \\ \dots \\ N^{n_{ne}} \end{pmatrix}(\underline{\xi}) f(\underline{x}(\underline{\xi})) * \left|\hat{\mathrm{J}}(\underline{\xi})\right| d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= < c_e^1 c_e^2 \dots c_e^{n_{ne}} > \sum_{q_2=1}^{n_{int}}\sum_{q_1=1}^{n_{int}}\begin{pmatrix} N^1 \\ \dots \\ N^{n_{ne}} \end{pmatrix}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) f\left(x\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)\right) * \left|\hat{\mathrm{J}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)\right| w_{q_1} w_{q_2} =$$

$$F_e^{int_k} = \sum_{q_2=1}^{n_{int}}\sum_{q_1=1}^{n_{int}} N^k\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right) f\left(x\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)\right) * \left|\hat{\mathrm{J}}\left(\xi_{q_1},\xi_{q_2}\right)\right| w_{q_1} w_{q_2}$$

$$\left.\begin{aligned} -f &= \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2} \\ \gamma_i &= \sum_{j=1}^{2} K_{ij}\frac{du(\xi)}{dx_j} \end{aligned}\right\} - f = \sum_{z=1}^{2}\frac{d\sum_{j=1}^{2} K_{zj}\frac{du(\xi)}{dx_j}}{dx_z} = \sum_{z=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} K_{zj}\frac{d\left(\frac{du(\xi)}{d\xi} * \frac{d\xi}{dx_j}\right)}{dx_z}$$

$$= < c_e^1 c_e^2 \dots c_e^{n_{ne}} > \begin{bmatrix} F_e^{int_1} \\ \dots \\ F_e^{int_{n_{ne}}} \end{bmatrix} = \underline{c_e^T}\,\underline{F_e^{int}}$$

F=0. Первый интеграл занулился.

Рассмотрим 2й интеграл правой части слабой формы

$$\gamma_n = -\underline{\gamma} * \underline{n}$$

$$\aleph = \{A | x_e^A \in \partial\Omega_\gamma^e\}$$

$$\int_{\partial\Omega_\gamma^e} w^h \gamma_n dS = \int_{\partial\Omega_\gamma^e} \sum\nolimits_{A=1}^{n_{ne}} c_e^A N^A(\underline{\xi})\,\gamma_n\, dS$$

$$= \text{ не все узлы участвуют в суммировании, а только те, что лежат на поверхности}$$

$$= \sum\nolimits_{A\in\aleph} c_e^A \int_{\partial\Omega_\gamma^e} N^A(\xi)\gamma_n\, dS =$$

$$= \sum\nolimits_{A\in\aleph} c_e^A \int_{\partial\Omega_\gamma^\xi} N^A(\xi)\gamma_n \left|\hat{\mathrm{J}}_S(\xi)\right| d\xi = < c_e^{\aleph_1} c_e^{\aleph_2} > \begin{bmatrix} F_e^{\gamma\aleph_1} \\ F_e^{\gamma\aleph_2} \end{bmatrix}$$

Правая часть слабой формы не влияет совсем на вектор F (он не равен 0 только на границах, где задано условие Дирихле).