Лабораторная работа 2

7 декабря 2022 г.

Дедлайн 18 декабря, 23:59.

1 Задание на «четверку»

1.1 Постановка задачи, уравнения

Рассматривается задача обжатия надувной пневматической конструкции (см. рис. 1.1). Начало координат примем на поверхности земли, ось y направлена вверх, ось x — вправо.

Форма обжатой оболочки может быть определена в результате решения следующей системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_1 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) &= A_x \\
y_1 + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) &= A_y \\
x_2 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) &= B_x \\
y + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) &= B_y \\
(\phi_1 + \phi_2)y + (x_2 - x_1) &= C
\end{aligned} \tag{1}
$$

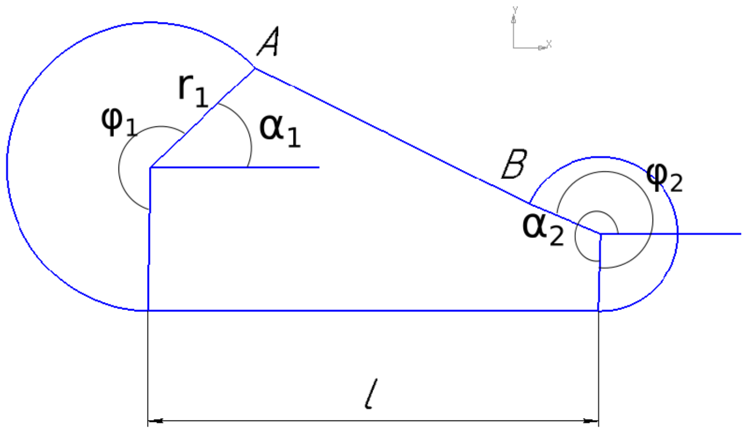

Рис. 1: Обозначения

Полезные соотношения:

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 \\ y &= y_1 = y_2 \\ \alpha_1 + \phi_1 &= \frac{3\pi}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Исходные данные:

$$\begin{gathered} A_x = -0.353 \quad B_x = 0.353 \\ A_y = B_y = 0.3 \\ C = \frac{3\pi}{8} \end{gathered} \tag{3}$$

1.2 Решение уравнений методом установления

Система (1) решается методом установления. От нелинейной системы алгебраических уравнений, которую в векторном виде можно записать как

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

перейдем к линейной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{5}$$

Допустим, что функция $\mathbf{F}$ потенциальна, то есть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$. Тогда

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{d\Phi}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \leq 0 \tag{6}$$

Следовательно, при большом $\tau \to \infty$ решением $\mathbf{x}$ нестационарной системы (5) будет минимум потенциала Φ, то есть нуль функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, или, иначе, решение нелинейной системы (4). «Время» τ в (5) является фиктивным, вспомогательным параметром, не имеющим физического смысла.

Решим систему (5), заменив производную на конечную разность:

$$\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x_n}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}(\mathbf{x_n})\Delta\tau \tag{7}$$

Отметим, что порядок уравнений в векторе $\mathbf{F}$ и порядок неизвестных в векторе $\mathbf{x}$ играют важную роль для сходимости итеративной процедуры (подумайте, почему это может быть). Приведем вариант нумерации (один из возможных), при котором процесс сходится:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) - A_x \\ x_2 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) - B_x \\ y_1 + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) - A_y \\ (\phi_1 + \phi_2)y + (x_2 - x_1) - C \\ y + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) - B_y \end{pmatrix} \tag{8}$$

2 Задание на «пятерку»

Предположим, что в центре линии AB на рисунке 1.1 сосредоточена масса m. Нужно смоделировать динамику движения баллона во времени, то есть сделать «мультфильм» о том, как баллон «прыгает» на твердой поверхности.

Динамика баллона (точнее, точек $A, B, A_y = B_y$) подчиняется второму закону Ньютона:

$$m\frac{d^2 A_y}{dt^2} = pl - mg, \tag{9}$$

где p — давление внутри баллона, положим, 2000 Па. Массу примем за 100 кг. $l = x_2 - x_1$ и определяется для каждого момента времени путем решения системы (1). Моделировать нужно промежуток времени от 0 до 2.5 секунд.

Рассмотрим методические аспекты решения уравнения (9). Уравнение (9) является уравнением второго порядка (там присутствует вторая производная от координаты) и эквивалентна системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dA_y}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{1}{m}\left(pl - mg\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Каждое уравнение системы (10) может быть решено аналогично тому, как решалась система (5) (то есть по формулам (7)). Таким образом, решение на $n+1$-ом шаге может быть выражено через решение на n-м шаге в виде:

$$\begin{aligned} A_y^{n+1} &= A_y^n + v_y^n \Delta t \\ v_y^{n+1} &= v_y^n + \frac{1}{m}\left(pl - mg\right)\Delta t \end{aligned} \tag{11}$$

В (11) индекс n означает, что величина вычисляется в момент времени $t_n = n\Delta t$. Шаг по времени Δt является константой и выбирается малым. Чтобы посчитать величину $l = x_2 - x_1$, необходимо на каждом шаге по времени решить систему (1).

Отличие времени t в (11) от «времени» τ в (7) состоит в том, что t — это настоящее физическое время, а τ — фиктивное «время», математический трюк, введенное для того, чтобы сделать решение нелинейной системы алгебраических уравнений (4) попроще.

Таким образом, в основе программы должно быть два цикла: внешний, по времени t, и внутренний, в котором меняется фиктивное время τ. Шаг по «настоящему» времени $\Delta t = 0.01$. Шаг по фиктивному «времени» $\Delta\tau = 0.005$.

Для построения графика и анимации могут быть полезными команды patches.Arc из matplotlib и camera.snap() и camera.animate() из celluloid.

3 Распараллеливание

Вам нужно реализовать параллельные алгоритмы решения систем дифференциальных уравнений (5) и (10).

На оценку 4 или 5 нужно решить с использованием параллельных вычислений только систему (5).

На оценку 6 или 7 нужно, в дополнение к предыдущему, сделать визуализацию решения (можно на Питоне), провести анализ работы алгоритма (ускорение, эффективность, время выполнения в зависимости от шага по времени).

На оценку 8, 9 или 10 нужно в дополнение к предыдущему реализовать параллельное решение системы (10), снабдить визуализацией (возможно в Питоне), провести исследования производительности.

Результатом работы являются исполняемые файлы и отчет, в котором должны быть описаны основные результаты и выводы.

В качестве фреймворка для разработки предлагается на выбор MPI или CUDA.