Schalldurchgang durch Trennwände

Eine Schallwelle, charakterisiert durch die Schallschnelle v_e, den Schallwechseldruck p_e und die Schallintensität I_e, fällt unter einem Winkel φ auf eine Trennwand.
Geometrie und Materialeigenschaften der Trennwand werden durch die Dicke d und die Dichte ρ des Wandmaterials oder die flächenbezogene Masse m' beschrieben. A ist die Wandfläche.

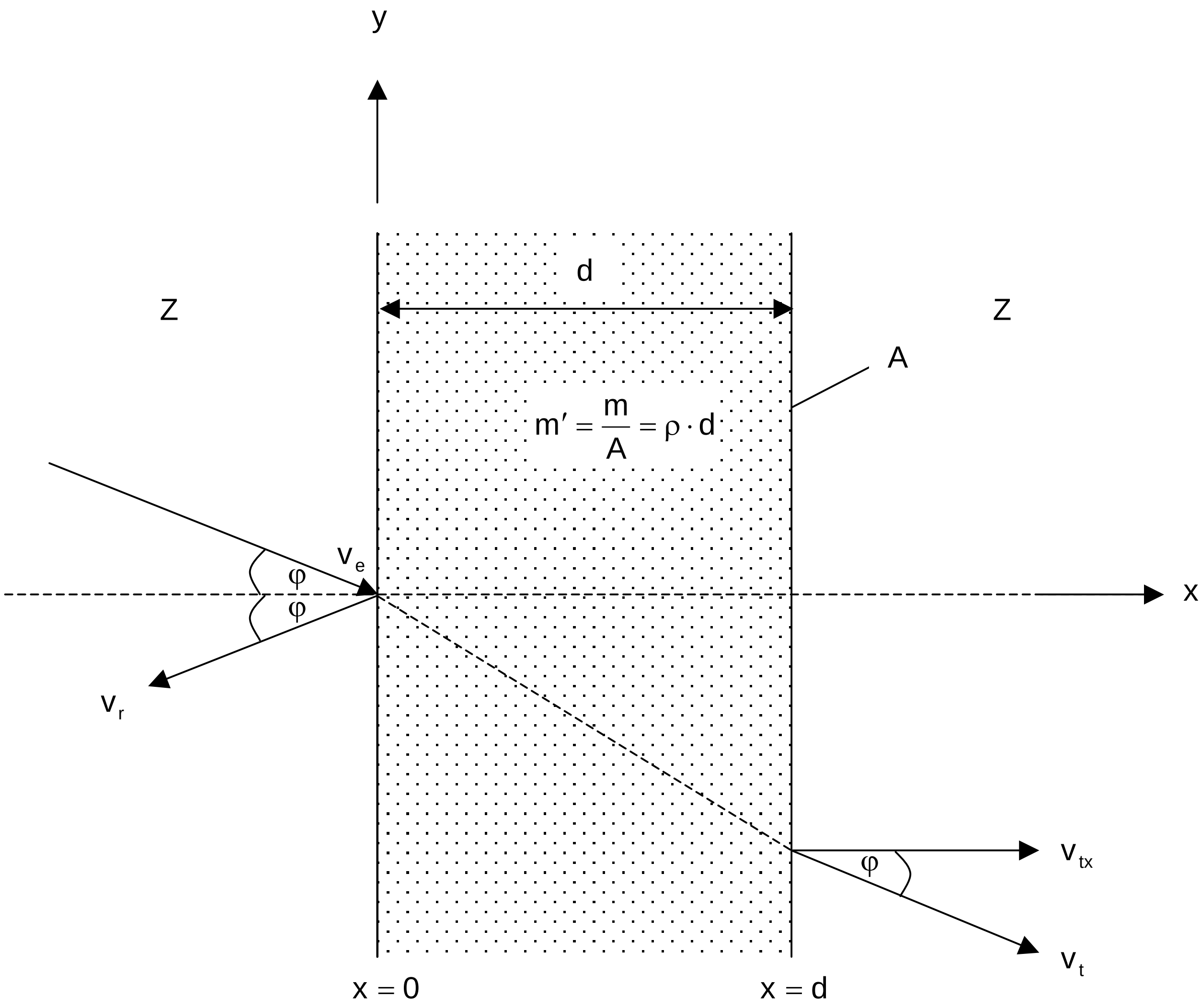

Bild 1. *Schalldurchgang durch eine Trennwand*

Die Schallwelle durchdringt die Wand. Beim Ein- und Austritt wird jeweils ein Teil der Welle an der Grenzfläche Luft/Wand bzw. Wand/Luft reflektiert. Der transmittierte Anteil folgt dem Brechungsgesetz. Die Reflexion an der Grenzfläche Wand/Luft können wir hier vernachlässigen.
Wir wollen ein Maß für die Schalldämmwirkung der Wand einführen. Dieses muß proportional zum Verhältnis der einfallenden Schallintensität I_e zur Intensität des durch die Wand hindurch gehenden (transmittierten) Schalles I_t sein.

Da die Schallintensität proportional zum Quadrat des Betrages der Amplitude des Schallwechseldruckes $\hat{p}$ ist,

$$I = \frac{|\hat{p}|^2}{2Z}, \tag{1}$$

(Z ist der Schallwellenwiderstand oder die Schallkennimpedanz des Ausbreitungsmediums, in diesem Fall der Luft), können wir dieses Intensitätsverhältnis auch durch das Quadrat des Betrages vom Verhältnis der Amplituden der Schallwechseldrücke von einfallender ($\hat{p}_e$) und transmittierter Welle ($\hat{p}_t$) beschreiben.
Das Schalldämm-Maß muß auch unsere Empfindung, d. h. die Empfindlichkeit der Wahrnehmung des Schalles durch das Ohr, gut wiedergeben. Deshalb bilden wir den Logarithmus der Intensitäten. Ein Skalierungsfaktor liefert uns gut handhabbare Zahlenwerte.
Wir bezeichnen das Schalldämm-Maß mit R („reduction index“):

$$R = 10 \lg \left| \frac{\hat{p}_e}{\hat{p}_t} \right| \text{ dB}. \tag{2}$$

Die Maßeinheit von R ist 1 db (Dezibel).

Wie hängt das Schalldämm-Maß von den Eigenschaften der Schallquelle und den material-spezifischen Kenngrößen der Wand ab? Dazu leiten wir eine wichtige Beziehung her.

Zuerst stellen wir die Bewegungsgleichung für ein Volumenelement dV der Wand auf und gehen vom Gleichgewicht aller auf das Volumenelement wirkenden Kräfte aus. Auf das Volumenelement sollen keine äußeren Kräfte wirken, deshalb gilt für die inneren Kräfte $F^{(i)}$:

$$\sum_k F_k^{(i)} = 0. \tag{3}$$

Das Volumenelement erfährt durch den Schallwechseldruck eine Beschleunigung a, es wirkt die Trägheitskraft $-dm \cdot a$. Die Druckkraft $-dp \cdot A$ wirkt als weitere innere Kraft (alle inneren Kräfte erhalten ein negatives Vorzeichen).
Es gilt demzufolge:

$$-dm \cdot a - dp \cdot A = 0. \tag{4}$$

Für das Volumenelement können wir schreiben

$$dV = A \cdot dx. \tag{5}$$

Die Wand wird in x-Richtung beschleunigt, deshalb setzen wir für a ein

$$a = \frac{dv_{tx}}{dt}. \tag{6}$$

(5) und (6) in (4) ergibt

$$dm\frac{dv_{tx}}{dt}+\frac{dp}{dx}dV=0. \tag{7}$$

Setzen wir

$$dV=\frac{dm}{\rho}, \tag{8}$$

(ρ ist die Dichte des Wandmaterials) in Gl. (7) ein, können wir das Massenelement dm eliminieren und erhalten

$$\frac{dv_{tx}}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=0 \qquad \text{(Eulersche Bewegungsgleichung).} \tag{\textbf{9}}$$

Zwischen der Wandvorderseite (Einfallsebene am Ort $x=0$) und der Wandrückseite (am Ort $x=d$) entsteht eine Differenz der Schallwechseldrücke $p(0,t)$ und $p(d,t)$.
Diese bewirkt nach Gl. (9) eine Beschleunigung der Trennwand in x-Richtung. Die Wand hat die flächenbezogene Masse m'. Dafür können wir schreiben

$$m'=\frac{m}{A}=\frac{\rho\cdot V}{A}=\frac{\rho\cdot A\cdot d}{A}=\rho\cdot d. \tag{10}$$

Eingesetzt in Gl. (9) ergibt das

$$\frac{dv_{tx}}{dt}+\frac{d}{m'}\cdot\frac{p(d,t)-p(0,t)}{d}=0. \tag{11}$$

Nach Umformung von Gl. (11) folgt

$$m'\frac{dv_{tx}}{dt}=p(0,t)-p(d,t). \tag{\textbf{12}}$$

Für den Schallwechseldruck am Ort $x=d$ gilt

$$p(d,t)=p_t(d,t). \tag{13}$$

In dieser Herleitung soll die Absorption des Schalles im Wandmaterial vernachlässigt werden, d. h. es soll gelten

$$p_t(d,t)=p_t(0,t) \tag{14}$$

und

$$v_t(d,t)=v_t(0,t). \tag{15}$$

(Diese Näherung ist zulässig, da für $Z_{Luft} << Z_{Wand}$ der Schallabsorptionsgrad sehr klein wird.)
Der Schallwechseldruck am Ort $x = 0$ ist nach dem Superpositionsprinzip die Überlagerung der Schallwechseldrücke von einfallender und reflektierter Schallwelle:

$$p(0,t) = p_e(0,t) + p_r(0,t). \tag{16}$$

Für die Bewegung eines Wandteilchens der Masse m_0 in y-Richtung muß der Impulserhaltungssatz gelten, den wir unter Beachtung von Gl. (15) wie folgt formulieren können:

$$m_0 v_e(0,t)\sin\varphi = m_0[v_r(0,t) + v_t(0,t)]\sin\varphi. \tag{17}$$

v_e, v_r und v_t sind die Schallschnellen der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle.
Der Schall soll sich als harmonische Welle ausbreiten. Für diesen Fall gilt

$$v(x,t) = \frac{p(x,t)}{Z}. \tag{18}$$

Demzufolge können wir Gl. (17) auch schreiben

$$p_e(0,t) = p_r(0,t) + p_t(0,t). \tag{19}$$

Für die Differenz der Schallwechseldrücke vor und hinter der Trennwand folgt aus Gl. (13)-(19):

$$p(0,t) - p(d,t)) = 2[p_e(0,t) - p_t(0,t)]. \tag{20}$$

Die Komponente von $v_t(x,t)$ in x-Richtung am Ort $x = 0$ ergibt sich mit Gl. (18) aus

$$v_{tx}(0,t) = \frac{p_t(0,t)}{Z} \cdot \cos\varphi. \tag{21}$$

Gl. (20) und (21) eingesetzt in Gl. (12) ergibt nach Umformung

$$\frac{m'\cos\varphi}{2Z} \cdot \frac{dp_t(0,t)}{dt} + p_t(0,t) = p_e(0,t). \tag{\textbf{22}}$$

Diese Gleichung entspricht einer Differentialgleichung für eine erzwungene Schwingung mit sehr großer Dämpfung. Wir bilden deshalb für p_e den Lösungsansatz:

$$p_e(0,t) = \hat{p}_e \cos(2\pi ft). \tag{23}$$

In komplexer Schreibweise bedeutet das

$$p_e(0,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}_e \exp(i2\pi ft)\right]. \tag{24}$$

Analog können wir für p_t schreiben:

$$p_t(0,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}_t \exp(i2\pi ft)\right]. \tag{25}$$

Wir führen die weitere Rechnung im Komplexen fort. Gl. (24) und (25) eingesetzt in Gl. (22) ergibt

$$\frac{m' \cos\varphi}{2Z} \hat{p}_t i2\pi f \exp(i2\pi ft) + \hat{p}_t \exp(i2\pi ft) = \hat{p}_e \exp(i2\pi ft). \tag{26}$$

Gl. (26) läßt sich vereinfachen zu

$$\hat{p}_t\left(i\frac{\pi m' f \cos\varphi}{Z} + 1\right) = \hat{p}_e\,. \tag{27}$$

Die Amplitude $\hat{p}_e$ ist reell. Aus Gl. (27) ist ersichtlich, daß die Amplitude der transmittierten Welle komplex wird, was Ausdruck einer Phasenverschiebung zwischen einfallender und transmittierter Schallwelle ist.
Es folgt

$$\frac{\hat{p}_e}{\hat{p}_t} = \left(i\frac{\pi m' f \cos\varphi}{Z} + 1\right) \tag{28}$$

und

$$\left|\frac{\hat{p}_e}{\hat{p}_t}\right|^2 = \left(\frac{\pi m' f \cos\varphi}{Z}\right)^2 + 1. \tag{29}$$

Für die meisten Schallschutz-Trennwände gilt $\left(\frac{\pi m' f \cos\varphi}{Z}\right)^2 >> 1.$

Wir können deshalb für das Schalldämm-Maß schreiben

$$\underline{\underline{R = 20 \lg \frac{\pi m' f \cos\varphi}{Z} \mathrm{dB}}}\ . \tag{30}$$

Diese Beziehung wird auch als das Massegesetz für das theoretische Schalldämm-Maß einer Trennwand bezeichnet.

Folgende Schlußfolgerungen ergeben sich nun aus Gl. (30):

1. Die Schalldämm-Wirkung einer Trennwand steigt mit ihrer flächenbezogenen Masse, d. h. eine Wand dämmt den Schall umso besser, je dicker sie ist und je größer die Dichte des Materials ist, aus dem sie besteht.

2. Hohe Frequenzen werden besser gedämmt als tiefe.

3. Die Schalldämmung ist am größten für senkrecht einfallenden Schall, bei schrägem Schalleinfall wird die Dämmwirkung vermindert.

Literatur:

[1] E. Hering, R. Martin, M. Stohrer, Physik für Ingenieure, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, Bonn, 6. Aufl., 1997.

[2] H. Henn, G. R. Sinambari, M. Fallen, Ingenieurakustik, Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 2. Aufl. 1999.

[3] L. Cremer, M. Hubert, Vorlesungen über Technische Akustik, Springer-Verlag Berlin, 4. Aufl. 1990.

[4] L. Cremer, M. Heckl, Körperschall, Springer-Verlag Berlin, 2. Aufl. 1996.

[5] W. Heimke, Naturwissenschaftliches Grundwissen für Ingenieure des Bauwesens, Verlag für Bauwesen Berlin, München, 2. Aufl. 1992.