

Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

29 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.

Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y .

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y , а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ – замкнуто, $B \cap Y$ – замкнуто. Тогда $A \times B$ – замкнуто в $X \times Y$.

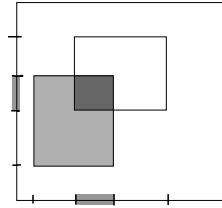


Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y , а $X \setminus A$ открыто в X . Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. \square

Practice. Для любых $A \subset X$, $B \subset Y$:

1. $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$
2. $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \stackrel{?}{\geq} d(p, p'') \stackrel{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

$$2. \Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

A это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y .

$$3. \Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d \text{ Рассмотрим } W \in \Omega_{X \times Y}.$$

$$\exists A \subset X, B \subset Y \text{ - открытые, } (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

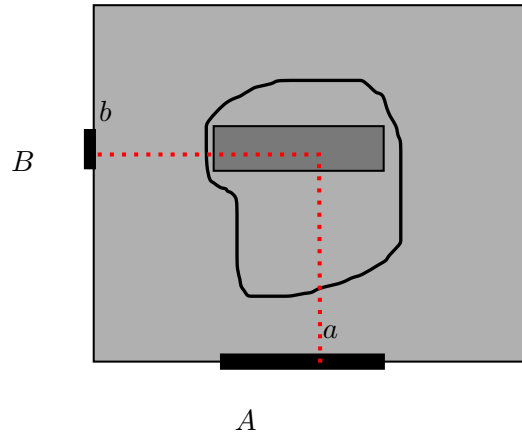


Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (x'', y'')) &\stackrel{?}{\leq} d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) \\ &\stackrel{\text{II}}{\leq} \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \stackrel{\text{II}}{\leq} \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}. \end{aligned}$$

□

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \rightarrow X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i .

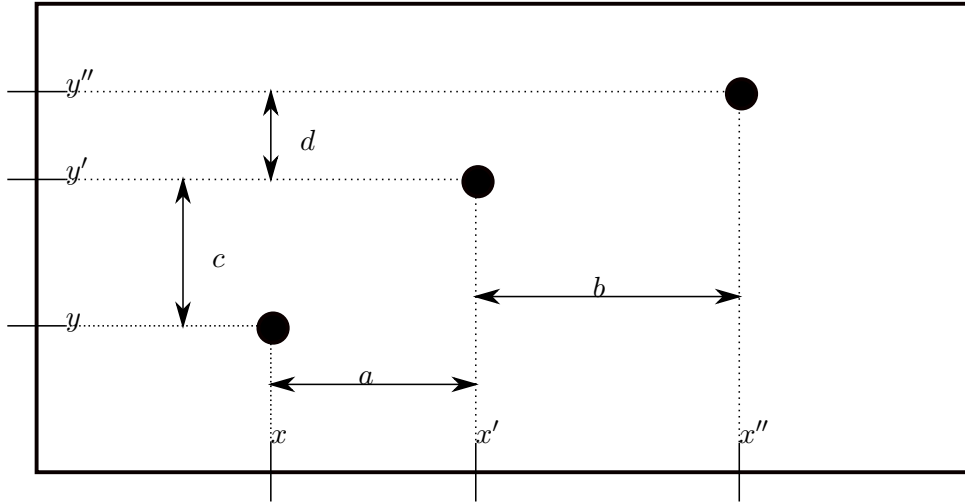


Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Def 2 (Тихоновская топология). Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \Omega_i\}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобратся с отрезком $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \rightarrow Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тожественное отображение непрерывно. $id_X : X \rightarrow X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

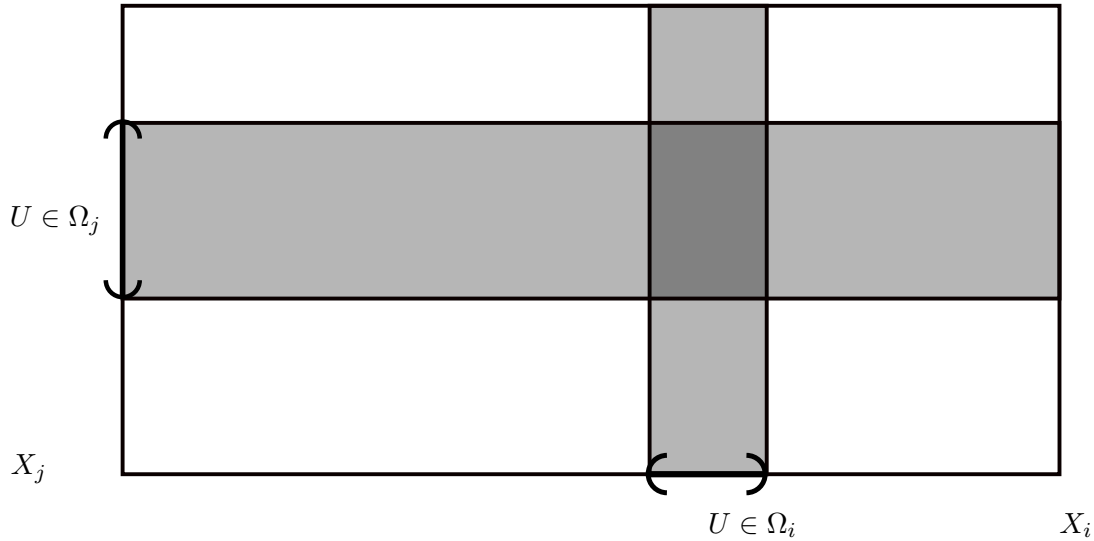


Рис. 1.4: Тихоновская топология

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

Theorem 4. f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. \Rightarrow)

$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

\Leftarrow)

$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$ - внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. X, Y – метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$.

Тогда f – непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. \Rightarrow) Так как f – непрерывна в точке x , существует окрестность $V \ni x : f(V) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

\Leftarrow) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$.
 $\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.

$f : X \rightarrow Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x_0 \in X$. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что f тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. Композиция непрерывных отображений непрерывна.

1.9 Гомеоморфизм

Designation. X, Y – топологические пространства.

Def 6. Гомеоморфизм между X и Y – непрерывное биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что $f^{-1} : Y \rightarrow X$ тоже непрерывно.

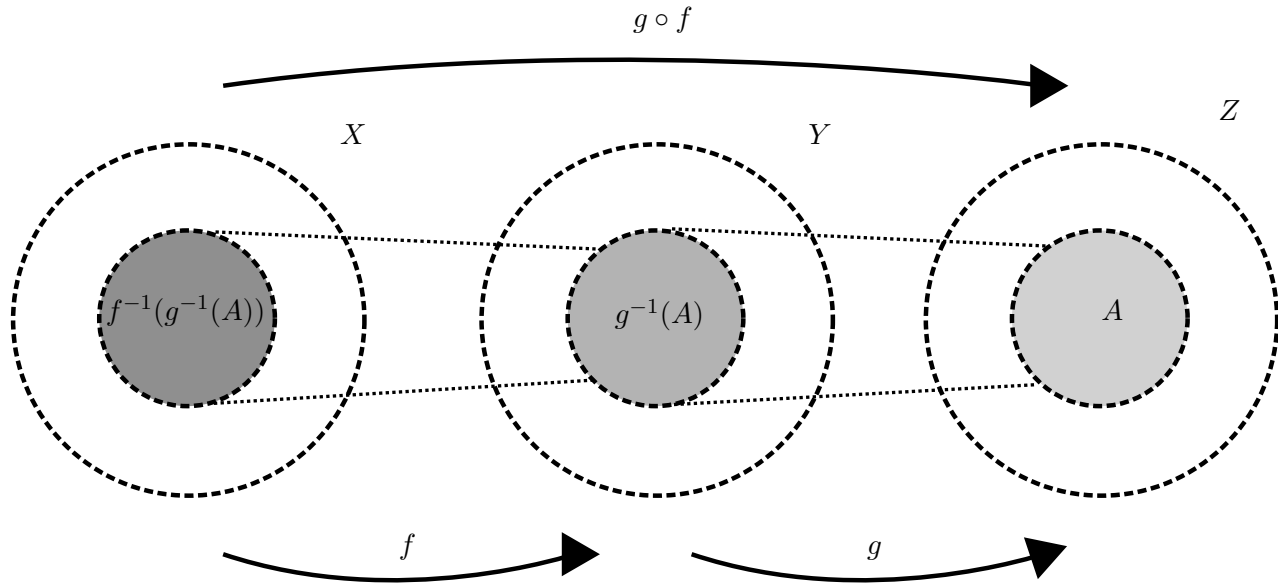


Рис. 1.5: Композиция отображений

Def 7. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. Тожественное отображение — гомеоморфизм.
2. Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.
3. Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.

Theorem 7. Гомеоморфность — отношение эквивалентности.

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y .
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f — биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1 , f — непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке $(1, 0)$.

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d : (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d] \cong (c, d]$
- $\forall a, b : (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b : [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 8. Открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен \mathbb{R}^n

Designation. D^n — замкнутый единичный шар в \mathbb{R}^n

Designation. S^n — единичная сфера в \mathbb{R}^{n+1}

Theorem 9. $S^n \setminus \{\text{точка}\} \cong \mathbb{R}^n$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.10 Аксиомы

1.10.1 Аксиомы счетности

Def 8. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ — такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество — не более, чем счетное.

Def 9. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сечности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 10. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 10. $2AC \Rightarrow 1AC$

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 11. Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Statement. \mathbb{R} имеет счетную базу.

Theorem 12. Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.

Theorem 13. Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.

Corollary. \mathbb{R}^n имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 11. Топологическое свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 14. Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in \mathcal{A}$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.10.2 Сепарабельность

Def 12. Всюду плотное множество – множество, замыкание которого есть все пространство.

Def 13. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R}

Def 14. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. X, Y – сепарабельны $\implies X \times Y$ тоже.

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 15.

- Счетная база \implies сепарабельность.
- Для метризуемых пространств сепарабельность \implies счетная база

1.10.3 Аксиомы отделимости

Def 15. X обладает свойством T_1 , если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U , что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 16. $T_1 \iff$ любая точка является замкнутым множеством.

Def 16. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y : U \cap V = \emptyset$.

Def 17. X хаусдорфово \iff Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 18. X – регулярно, если

- обладает T_1
 - \forall замкнутого $A \subset X \forall x \in X \setminus A \exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$
- Другое название T_3 -пространство

Def 19. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \emptyset) \exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$

Другое название T_4 -пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.

Нормальность не наследственная.

Def 20. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единицу на B .

□

Lemma (Урысон). X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1] : f|_A = 0 \wedge f|_B = 1$

1.11 СВЯЗНОСТЬ

Designation. X — топологическое пространство.

Def 21 (Связное топологическое пространство).

X связно, если:

- его нельзя разбить на два непустых открытых множества;
- его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;
- не существует открыто-замкнутых множеств, кроме \emptyset и X ;
- не существует сюръективного непрерывного отображения $f : X \rightarrow 0, 1$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- \mathbb{Q} несвязно

1.11.1 Связные множества

Def 22. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C , что $ClA \cap C = \emptyset \wedge ClC \cap B = \emptyset$.
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V : U \cap V = \emptyset \wedge U \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap A \neq \emptyset$.
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.

Связные множества на прямой

Statement. Отрезок $[0, 1]$ связан.

Theorem 17. Для $X \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:

1. X — связно
2. X — выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)
3. X — интервал, точка или пустое множество

1.11.2 Связность при отображении

Theorem 18. X — связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ связно.

Theorem 19. X связно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(X)$ содержит все числа между a и b .

Доказательство. По теореме 18 $f(X)$ связно. Тогда по определению $f(X)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. \square

1.11.3 Компоненты связности

Def 23. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X .

Exs.

1. $[0, 1] \cup [2, 3]$ две компоненты связности — $[0, 1]$ и $[2, 3]$.
2. Компоненты связности \mathbb{Q} — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств). Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ тоже связно.

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V .

$$\exists i, j \in I : U \cap A_i \neq \emptyset \wedge V \cap A_j \neq \emptyset.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Противоречие. \square

Theorem 20. Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:

- каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;
- различные компоненты связности не пересекаются.

Доказательство.

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x . Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме 1.11.3 полученное множество связно, значит это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются.

Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \emptyset$. По лемме 1.11.3 $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

□

Lemma. Замыкание связного множества связно.

Theorem 21. Компоненты связности замкнуты.

Доказательство. Следует из леммы 1.11.3.

□

Note. компоненты связности не всегда открыты. Например, в \mathbb{Q} .

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.12 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 24. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 25. X линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ех.

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \exists \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

Theorem 22. Если X линейно связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ в $f(X)$.

□

Lemma. Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X \exists \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \rightarrow \exists \bar{\alpha} = \alpha(1 - t)$

Транзитивность: если α идет из x в y , а β из x в z , построим путь γ , идущий из x в z :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

1.12.1 Компоненты линейной связности

Def 26. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 27 (переформулировка). Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.12.2 Линейная связность и связность

Theorem 23. Если X линейно связно, то оно связно.

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ex (Связность не влечет линейную связность). Рассмотрим множество

$$\left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность

График линейно связан, значит он связан, а $(0, 0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X , следовательно, X — связно.

2. $(0, 0)$ не соединяется путем с другими точками

Пусть α — путь с началом в $(0, 0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) = (0, 0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

Докажем, что T открыто в $[0, 1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

$$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связан, $T = [0, 1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0, 0)$.

□

1.12.3 Локальная линейная связность

Def 28. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x : V \subset U$.

Ex. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связно.

Theorem 24. В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.

Доказательство. 1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.

2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности. \square

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 25. Интервалы $[0, 1]$, $[0, +\infty)$, \mathbb{R} , S^1 попарно негомеоморфны.

Theorem 26. \mathbb{R}^2 не гомеоморфна никакому интервалу и S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества \mathbb{R}^2 связно.

\square

1.13 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 29. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны
2. Все ахти дискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. \mathbb{R} некомпактно

Def 30. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A , $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X , $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

Theorem 27 (лемма Гейне-Бореля). *Отрезок $[0, 1]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $l_0 = [0, 1]$, $\{U_i\}$ — открытые множества в \mathbb{R} , $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i . Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i . Обозначим ее l_1 .

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \dots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0 . Она лежит в каком-то U_{i_0} . С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n . Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i . Противоречие. \square

Theorem 28. *Если X компактно и $A \subset X$ замкнуто, то A компактно.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X , выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. \square

Theorem 29. *Если X, Y компактны, то $X \times Y$ компактно.*

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$.

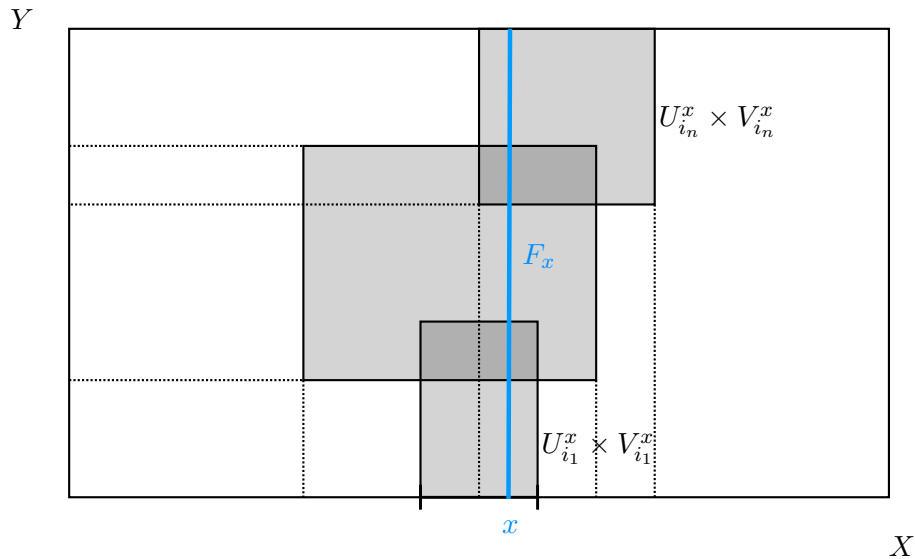


Рис. 1.6: Покрытие и гомеоморфизм

2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x := \{x\}Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U_{i_1}^x \times V_{i_1}^x, \dots, U_{i_n}^x \times V_{i_n}^x$.
3. $U^x = U_{i_1}^x \cap \dots \cap U_{i_n}^x$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X . $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".
4. Получили окрестности U^x для всех точки $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

□

Theorem 30. Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X .

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \ni x : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A : U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x , не пересекающая A . □

Theorem 31. Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы 30.

$$U := \bigcup U_{a_i}, V := \bigcap V_{a_i}.$$

U и V — открытые множества, $U \supset A$, $V \ni x$, $U \cap V = \emptyset$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть A, B замкнуты и $A \cap B = \emptyset$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \supset B : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . Аналогично получим открытые $U := \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V := \bigcap V_{a_i} \supset B$, $U \cap V = \emptyset$. Доказали, что X нормально.

□

1.13.1 Компактность в \mathbb{R}^n

Designation. X — метрическое пространство.

Def 31. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 32. Диаметр множества A :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. A ограничено тогда и только тогда, когда $\text{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 32. Компактное метрическое пространство ограничено.

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 33. Множество в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство.

\Rightarrow По прошлому следствию 1.13.1.

\Leftarrow Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. Тогда A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.13.2 Центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 33. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 34. X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Доказательство.

\Rightarrow От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \emptyset$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

\Leftarrow Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств A_1, \dots, A_n . Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из A_1, \dots, A_n , это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i \in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X , хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Не умоляя общности A_0 компактно. По теореме 34 (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$ имеет непустое пересечение. \square

Theorem 35. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Note. Теорема 35 обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

1.13.3 Непрерывные отображения компактов

Theorem 36. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X . Выберем в нем конечное подпокрытие V_{i_1}, \dots, V_{i_n} . Тогда U_{i_1}, \dots, U_{i_n} — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. \square

Theorem 37. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(x)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. \square

Theorem 38. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная биекция. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. f непрерывно \iff прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно \iff f -образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. \square

1.13.4 Вложения компактов

Def 34. $f : X \rightarrow Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.13.5 Лемма Лебега

Theorem 39 (Лемма Лебега). X — компактное метрическое пространство. $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i .

Def 35. Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство.

$$\forall x \in X \exists r_x > 0, U_i \in \{U_i\} : B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что $\left\{B_{\frac{r_x}{2}}\right\}_{x \in X}$ — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

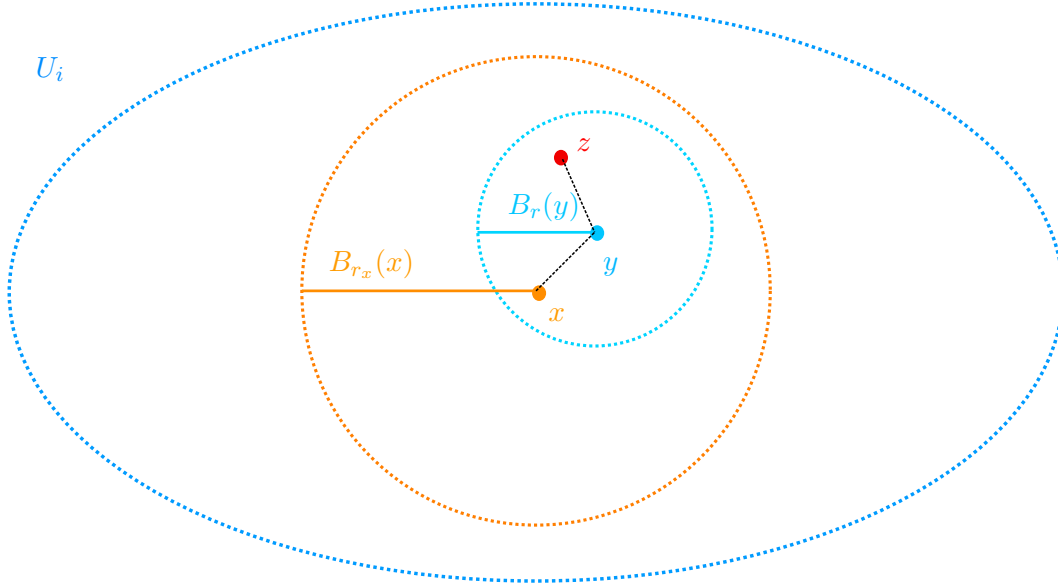


Рис. 1.7: lemma lebege

$$r \leq \frac{r_x}{2}, \overline{xy} < r + \frac{r_x}{2} \leq r_x.$$

□

1.14 Полные метрические пространства

1.14.1 Компактность полных метрических пространств

1.15 Факторизация

Def 36. Пусть X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство X/\sim — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X .

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X .

1.15.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на X .

Def 37. Каноническая проекция X на X/\sim или отображение факторизации — отображение

$$p : X \rightarrow X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 40. Каноническая проекция непрерывна.

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X .

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. Следующие свойства наследуются факторпространством:

- Связность
- Линейная связность
- Компактность
- Сепарабельность

1.15.2 Стягивание множества в точку

Def 38. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A , операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме ??)

1.15.3 Несвязное объединение

Def 39. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологией: A открыто в $X \sqcup Y \iff A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y .

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.15.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение.

Def 40. \sim — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A : a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f .

Ех. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y , $A = \{x_0\}$, $f(x_0) = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0) .

Ех. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ех. Если склеить \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , получилась **лента Мебиуса**.

Def 41. Пусть X — топологическое пространство. Γ — подгруппа группы $\text{Homeo}(X)$ — группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство X/\sim обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ех. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где \mathbb{Z} действует на \mathbb{R} параллельными переносами.

Theorem 41. Пусть $p : X \rightarrow X/\sim$ — каноническая проекция. $f : X \rightarrow Y$ переводит эквивалентные точки в равные:

$$\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : f = \bar{f} \circ p$.
2. \bar{f} непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.

Доказательство.

- Определим $\bar{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- \implies По непрерывности композиции, если \bar{f} непрерывна, то f тоже.
- \impliedby В обратную сторону — по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 42 (Склеивание концов отрезка). $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0, 1] \rightarrow S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$. Соответствующее $\bar{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$ — биекция. По теореме ?? \bar{f} непрерывно. $[0, 1]/\{0, 1\}$ — компактно, S^1 — хаусдорфово, следовательно, \bar{f} — гомеоморфизм. \square

Theorem 43. X — замкнуто, Y — хаусдорфово. $f : X \rightarrow Y$ — непрерывно и сюръективно. Тогда

$$X/\sim \cong Y,$$

где \sim определяется условием

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Theorem 44. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B — замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме ?? достаточно построить сюръективный гомеоморфизм $f : B \rightarrow S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x| \right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

\square

1.16 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 42. n -мерное многообразие — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n .

Число n — размерность многообразия.

Theorem 45. При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны.

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m .

Ex. 0-мерные многообразия — не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество \mathbb{R}^n или любого многообразия — многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n — n -мерное многообразие

Ех. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n / \{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно \mathbb{RP}^n .

Def 43. n -мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо \mathbb{R}^n , либо $\mathbb{R}_+^n := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M .

Def 44. Поверхность – двумерное многообразие.

Ех. D^n – многообразие с краем, S^{n-1} – его край.

Theorem 46. \mathbb{R}_+^n не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в \mathbb{R}^n .

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) – тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) – бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ($abab$) – проективная плоскость \mathbb{RP}^2 .

Theorem 47.

- Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).
- Пусть в m -угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать их между собой.

1.16.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 48 (без доказательства). Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда

1. M – компактно, без края $\implies M \cong S^1$
2. M – некомпактно, без края $\implies M \cong \mathbb{R}$
3. M – компактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, 1]$
4. M – некомпактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, +\infty)$

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края – несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.16.2 Сферы

Def 45. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2 , вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 46. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – \mathbb{RP}^2 , сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.16.3 Классификация поверхностей

Statement. Поверхность — связное двумерное многообразие.

Theorem 49.

- Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.
- Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.
- Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.16.4 Эйлерова характеристика

Def 47. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 50. Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n$, $\chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$

- $\chi(\text{сферы с } p \text{ ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с } q \text{ пленками}) = 2 - q$