

Конспект по матанализу
II семестр
Современное программирование, факультет математики и
компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

20 марта 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1.1.1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$, $x, x_0 \in (a, b)$. Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n .

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Переход: $n - 1 \rightarrow n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 1.1.2 (Хитрая теорема о среднем). $f, g \in C[a, b]$, $g \geq 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a, b]$.

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$\begin{aligned} m \int_a^b g(x)dx &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \end{aligned}$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary. Если $|f^{(n+1)}| \leq M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 1.1.3. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме ??, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \cdot \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x_0}^x.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Definition 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением** отрезка $[a, b]$.

Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$.

Θ называется **оснащением дробления** τ , если $\Theta = \{t_1, \dots, t_n\} : t_j = [x_{j-1}, x_j]$.

Пара (τ, Θ) называется **оснащенным дроблением**.

Definition 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a, b]$, (τ, Θ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, **интегральной суммой** называется

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Theorem 1.2.1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \Theta)$ — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \Theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] : \left(|s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_j)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{|b - a|} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла

Definition 3: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением отрезка** $[a, b]$.

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, Θ)

Definition 4

$f \in C[a, b]$, (Θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$. Тогда

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j+1})$$

называется интегральной суммой.

Theorem 1.3.1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такие, что для любого оснащенного разбиения (τ, Θ) отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \Theta}(t) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \Theta} \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(r_j)| (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$. □

Лекция 2

21 feb

1.3.1 Свойства

Property.

1 $c \in (a, b)$:

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\rightarrow b} f dx.$$

2 $\int_a^{\rightarrow b} f dx$ — сходится $\implies \lim_{A \rightarrow b} \int_A^{\rightarrow b} f = 0$

2' Если $\int_A^{\rightarrow b} f \not\rightarrow_{A \rightarrow b} \implies \int_a^{\rightarrow b} f$ расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).

ЛИНЕЙНОСТЬ f, g — функции на $[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся} \implies \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g.$$

МОНОТОННОСТЬ $f \leq g$, $\int_a^{\rightarrow b} f$ и $\int_a^{\rightarrow b} g$ сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g.$$

Definition 5: Абсолютная сходимость

Говорят, что $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^{\rightarrow b} |f|$.

Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится и верно неравенство

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f \right| \leq \int_a^{\rightarrow b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\rightarrow b} |f| \text{ сходится} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \implies \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left| \int_a^B f \right| \leq \int_a^B |f| dx.$$

Definition 6: Условная сходимость

$\int_a^{\rightarrow b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, а $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ расходится.

интегрирование по частям $f, g \in C^1[a, b)$

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g, \quad f g \Big|_a^{\rightarrow b} = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. \square

замена переменной $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$, $f \in C[a, b)$. Если существует предел, обозначим его так: $\exists \lim_{x \rightarrow \beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

Доказательство. $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y) dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

\implies Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta)$, $\gamma_n \rightarrow \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f.$$

\Longleftarrow Пусть $\exists \int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} (f \circ g) \varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.

2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b)$, $c_n \rightarrow b$ — $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = c_n$.

Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β , либо к числу меньшему β .

• $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \beta$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k}=c_{n_k})}.$$

• $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta$

$$\varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$

Но должно быть равно b . Противоречие.

Значит $\gamma_n \rightarrow b$.

$$\int_{\alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

Theorem 1.3.2 (Признаки сравнения). Пусть $0 \leq f \leq g$, $f, g \in C[a, b)$. Тогда

1. если $\int_a^{\rightarrow b} g$ сходится, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится,
2. если $\int_a^{\rightarrow b} g$ расходится, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ расходится.

Доказательство.

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \implies \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

Theorem 1.3.3 (Признаки Абеля и Дирихле). $f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$, g монотонна.

Признак Дирихле Если f имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, $g \rightarrow 0$, то $\int_a^{\rightarrow b} fg$ сходится.

Признак Абеля Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, g ограничена, то $\int_a^{\rightarrow b} fg$ сходится.

Доказательство. F — первообразная f . $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\rightarrow b} fg dx = \int_a^{\rightarrow b} g dF = Fg \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} Fg' dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B \rightarrow b-} F(B)g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\rightarrow b} Fg' dx \leq M \cdot \int_a^{\rightarrow b} |g'| dx = M \cdot \left| \int_a^{\rightarrow b} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|.$$

□

Example 1.3.1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta dx.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \leq C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \quad \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\rightarrow \infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln \frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходится.

Example 1.3.2.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leq 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ – ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ – убывает.

Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

Example 1.3.3 (Более общий вид).

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$, f монотонна.

Если при $x \rightarrow +\infty$ $f \rightarrow 0$, то интегралы сходятся,

Если при $x \rightarrow +\infty$ $f \not\rightarrow 0$, то интегралы расходятся.

Remark.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Practice.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 dx \text{ сходится?}$$

1.4 Вычисление площадей и объемов

1.4.1 Площади

1. $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$, $P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x) dx$
2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b]$, $f \geq g$, $T_{f,g} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

Corollary (Принцип Кавальери). Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $f \geq 0$, g непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [\alpha, \beta], r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть τ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n$, $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$, $m_j =$

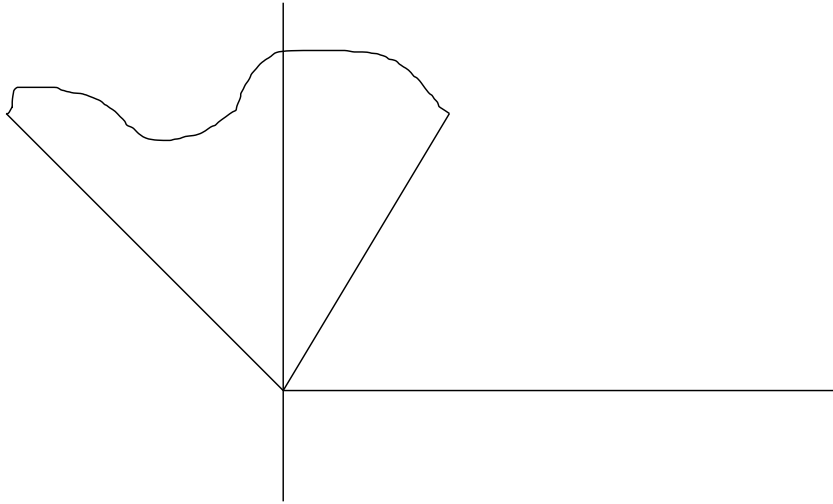


Рис. 1.1: sector

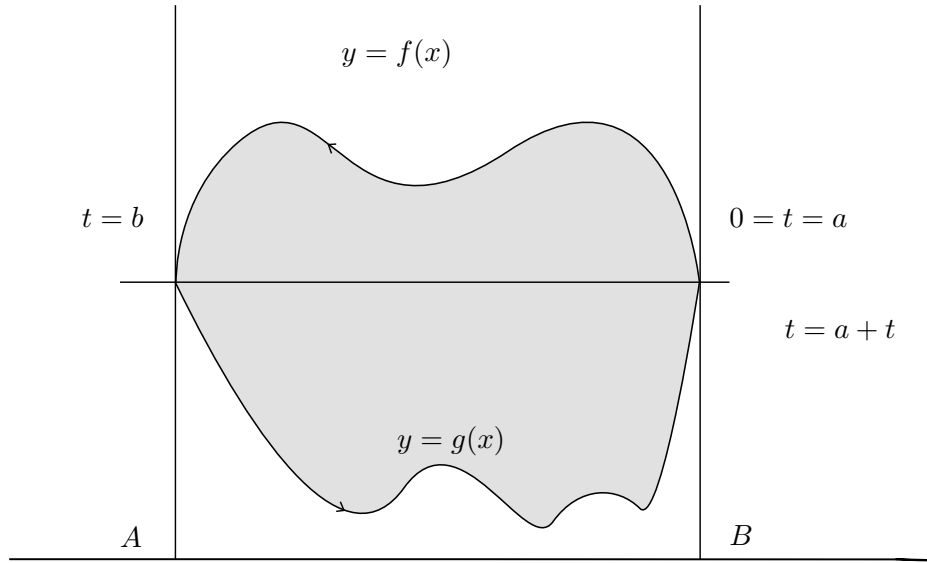
$$\min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$$

$$\sum \frac{m_j^2}{2} (\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leq S(\tilde{P}_f) \leq \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$. Значит

$$S(\tilde{P}_f) \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\varphi) d\varphi.$$

4. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой. $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$



$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\begin{aligned} \int_A^B g(x) dx &= \int_b^{a+T} y(f) x'(t) dt \\ &\quad \begin{matrix} x=x(t) \\ t \in [b, a+T] \\ dx=x'(t) dt \\ g(x'(t))=y(t) \end{matrix} \\ \int_A^B f(x) dx &= - \int_b^a y(t) x'(t) dt \\ &\quad \begin{matrix} x=x(t) \\ t \in [a, b] \end{matrix} \end{aligned}$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx = - \int_a^{a+T} y(t) x'(t) dt = \int_a^{a+T} y'(t) x(t) dt.$$

1.4.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3$, $T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

Definition 7

Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

$\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение на T :

$$\forall \Delta \subset [a, b] \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

Example 1.4.1. T — тело вращения, $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Доказательство формулы. Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело T и τ разбиение отрезка $[a, b]$. Поместим его между двумя цилиндрами.

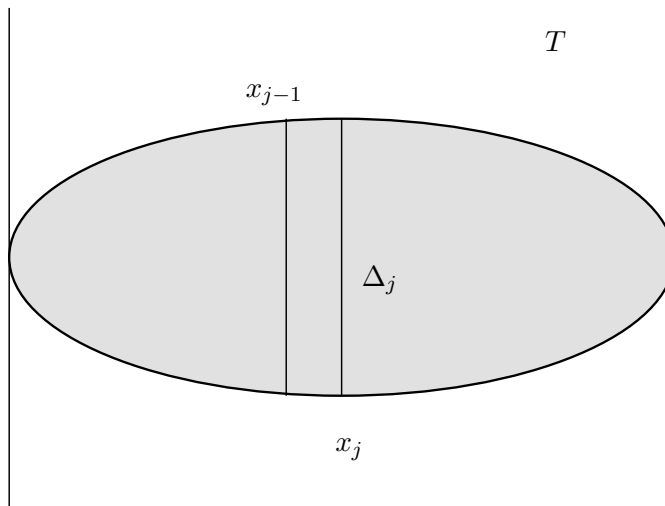


Рис. 1.2: cylinder

$$\sum (x_j - x_{j-1})S(T(x_*\Delta_j)) \leq V \leq (x_j - x_{j-1})S(T(x^*\Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы.

□

Example 1.4.2 (Интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$T = \{0 \leq y \leq e^{-(x^2+y^2)}\}$$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = I e^{-x^2}.$$

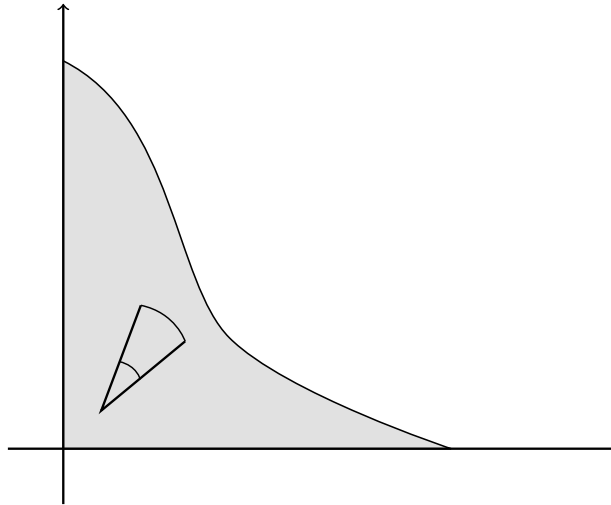


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона

Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi (y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

1.5 Кривые в \mathbb{R}^n и их площади

Definition 8: Путь

Путь в \mathbb{R}^n — отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C[a, b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad \gamma_i — координатные отображения для γ .$$

Начало пути — $\gamma(a)$, конец пути — $\gamma(b)$.

Носители пути — $\gamma([a, b])$.

γ замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$\gamma \in C^n[a, b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a, b] \iff \gamma$ — r -гладкий путь.

γ^{-1} — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a - b + t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Note. Разные пути могут иметь один общий носитель.

Definition 9

Два пути $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если существует строго возрастающая сюръекция

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Statement. Это отношение эквивалентности.

Definition 10: Кривая

Кривая в \mathbb{R}^n — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

Example 1.5.1.

$$\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t).$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Можно определить:

начало кривой

- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривая r -гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

1.5.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c \in (a, b)$.

$$\gamma = \gamma|_{[a, c]}, \quad \gamma = \gamma|_{[c, b]} \implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$, где \forall дробления $[a, b]$ $\tau = \{x_j\}$

Definition 11: Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_{\tau} l_{\tau}$, где

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \quad \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

Practice. Придумать пример бесконечно длинного пути.

Definition 12

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

Definition 13

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

Property.

1. $\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

2. *Аддитивность*

$$\gamma : [a, b], c \in (ab) \quad \gamma = \gamma|_{[a, c]}, \quad \gamma\gamma|_{[c, b]}.$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma).$$

Доказательство.

1 \implies 2 τ — дробление $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \tau^l &= (\tau \cap [a, c] \cup \{c\}) \\ \tau^r &= (\tau \cap [c, b] \cup \{c\}) \end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| \leq l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{\tau^r}(\gamma^r) \leq l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

2 \implies 1 τ^l — дробление $[a, b]$, τ^r — дробление $[c, d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\leq l_{\tau}(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \\ \sup_{\tau^l} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^l \\ \sup_{\tau^r} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^r \end{aligned}$$

□

Theorem 1.5.1 (Длина гладкого пути). $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкий путь. Тогда γ обязательно спр и

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \\ \gamma'(t) &= (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)). \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2}. \end{aligned}$$

Доказательство. 1. $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (m_j(\Delta))^2}, \quad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a, b]$ чему равно $l(\gamma|_{\Delta})$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$. Тогда

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1})|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$\begin{aligned} l_{\tau} &= \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} = \\ &= \sum_{j=1}^m (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2} \end{aligned}$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta| m(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq |\Delta| M(\Delta).$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |\gamma'_k(t)| dt &= \int_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} dt. \\ m(\Delta) &\leq \max \sqrt{\dots} \leq M(\Delta). \\ |\Delta| m(\Delta) &\leq \int_{\Delta} |\gamma'(t)| dt \leq |\Delta| M(\Delta). \end{aligned}$$

3.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \quad \forall j \in [1, k] : |\gamma'_j(s) - \gamma'_j(t)| < \varepsilon.$$

$$|\Delta| < \delta \implies M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leq \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta)| \leq \varepsilon n$$

4. Теперь возьмем дробление $[a, b]$ на кусочки длиной меньше δ .

$$[a, b] = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq l(\gamma|_{\Delta_j}) \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \int_{\Delta_j} |\gamma'| \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq l(\gamma) \leq \sum_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \\ \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq \int_a^b |\gamma'| \leq \sum_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j) |\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_j| = \varepsilon n(b-a).$$

□

Example 1.5.2. Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

1.5.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в \mathbb{R}^3 .

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a, b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a, b]\}$.

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Remark. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок.

$$l(\gamma|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{Дифференциал дуги}} dt.$$

Если f задана на носителе пути γ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t) |\gamma'(t)| dt$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

2.1 Нормированные пространства

Example 2.1.1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Если $p = +\infty$, $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leq j \leq m}$.

Note. Все нормы в \mathbb{R}^m эквивалентны.

Example 2.1.2. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывна}\}$, оно линейно над \mathbb{R}^m . Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.1. $C(K)$ — полно.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность функций $\{f_n\} \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальна, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \rightarrow \infty$. $f_k(x) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. f_{n_0} — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \implies |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |f_{n_0}(x_2) - f(x_2)| \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon}_{\max_{x \in K} |f - f_n| \leq \varepsilon}.$$

□

Example 2.1.3. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — ограниченна}\}$, оно линейно над \mathbb{R}^m . Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.2. $l_\infty(X)$ — полно.

Доказательство. Аналогично.

□

Note. $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

Note. Замкнутое подпространство полного пространства полно.

Example 2.1.4. $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Theorem 2.1.3. $(C^1[a, b], \varphi_3)$ полно.

Доказательство. $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \rightarrow_{n, k \rightarrow \infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \rightarrow 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \rightarrow 0$. Тогда $\|f_n - f_k\| \rightarrow 0$ и $\|f'_n - f'_k\| \rightarrow 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f'_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, тое есть $\exists g = f'$.
2. $f_3(f_n - f) \rightarrow 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \rightarrow 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max |f'_n - g| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$\begin{aligned} &= \left| f_n(x) - \left(\int_a^x f'_n(t)dt + f(a) \right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x (g(t) - f'_n(t))dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x |g(t) - f'_n(t)|dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2) \end{aligned}$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \rightarrow f \wedge f'_n \rightarrow g$.

□

Remark. $\|f_n - f\| \rightarrow 0, \quad f_n \in C(K) \implies f \in C(K).$

$$x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow f(x_0).$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f(n).$$

Remark. Из того, что $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ и $\|f'_n - g\|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

Practice. $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

Лекция 4

6 march

2.1.1 Продолжение примеров

1. $C_p[a, b] = \{f \in C[a, b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a,b]} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Это норма:

- Не меньше нуля
- $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- Неравенство треугольника $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$ (сейчас доказывать не будем)

Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

Theorem 2.1.4 (без доказательства). (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $\exists!(Y, \tilde{\rho})$ — полное метрическое пространство, такое что

- (a) $X \subset Y$
- (b) $\rho = \tilde{\rho}|_{X \times X}$
- (c) $Y = dX$

Такое пространство пополняется до $L_p(a, b)$.

2. $l_p = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j|^p\}, \quad p \geq 1$ Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Practice. l_p полно

Note. В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- l_p . Возьмем шар $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leq 1\}$

$$e^1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

Practice. Проверить не компактность $B = \{f \in C[a, b] \mid \|f\| = 1\}$ в $C[a, b]$.

2.2 Сжимающие отображения

Definition 14

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \rightarrow X$. U называется **сжимающим отображением**, если

$$\forall \gamma < 1 \forall x_1, x_2 \in X : \rho(U(x_1), U(x_2)) \leq \gamma \rho(x_1, x_2).$$

Theorem 2.2.1 (Принцип сжимающих отображений). (X, ρ) *полно*.

1. U — сжимающее отображение $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$ — неподвижная точка
2. Если $\exists N : U^N$ — сжимающее отображение $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$

Доказательство.

1. Рассмотрим траекторию точки x_1 .

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \dots, x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq$$

$$\dots$$

$$\leq \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n : \rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d (1 + \gamma + \dots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как наше пространство полно, существует предел этой последовательности. $U(x_n) = x_{n+1}$. Первое стремится к $U(x_*)$, второе — к x_* .

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2. $\exists x_*$, посмотрим на $U^N(x_*)$. Посмотрим на последовательное применение U несколько раз. На N -ом шаге мы придем в x_* .

Единственность уже доказали.



Example 2.2.1 (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка).

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \quad a, b \in C[0, 1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти $f \in C^1[0, 1]$. То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt.$$

Заведём отображение $U : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, что $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt$. Хотим найти неподвижную точку отображения U (то есть такую f).

Пусть $(U_0(f))(x) = - \int_0^x a(t)f(t)dt$. Правда ли, что

1. $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2. $\exists n: U_0^n$ — сжимающее отображение из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

Проверим

1. При $n = 1$, очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U(U^{n-1}(f)) - U(U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f)) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2. $\|U_0^n(f - g)\|_\infty \leq \gamma \|f - g\|$

Пусть $f - g = h$. $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma \|h\|$. Пусть $M = \max|a|$, $\|h\|_\infty |h(x)|$.

$$\begin{aligned} (U_0^1(h))(x) &= - \int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ (U_0^2(h))(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2) \left(\int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\ &\vdots \\ (U_0^n(h))(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\dots) dt_n \end{aligned}$$

Оценим

$$|(U_0^n(h))(x)| \leq M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leq \left(M^n \frac{x^n}{n!} \right) \|h\|_\infty.$$

Выражение в скобках стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, U_0^n сжимающее.

Note. На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

$f \in C[0, 1]$. Так как $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$, $f \in C^1[a, b]$

Practice. X полно, $U : X \rightarrow X$, $\forall x, y: \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$.

1. Верно ли, что U сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

Definition 15: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо \mathbb{R} , либо \mathbb{C}). $U : X \rightarrow Y$ называется **линейным**, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X: U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X, \lambda - \text{скаляр}: U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Note. Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейных отображений: $U(x_1) = Ux_1$

Designation. $\text{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y .

Definition 16

X_1, \dots, X_n — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

Designation. $\text{Poly}(X_1, \dots, X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Definition 17

Если Y — поле скаляров, линейное отображение $U : X \rightarrow Y$ называется **линейным функционалом**.

Example 2.2.2. $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \text{ лишь конечное число отлично от нуля}\}$
 $U : X \rightarrow X, x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

Example 2.2.3 (δ -функция). $\delta : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$.

Example 2.2.4. $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf = \int_a^b f(x)dx$

Example 2.2.5. $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

Example 2.2.6. $U \in \text{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}}_n; \mathbb{R}), U(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

Example 2.2.7. $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), U(x, y) = (x, y)$

Example 2.2.8. $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) = [x, y]$ — векторное произведение.

Example 2.2.9. Определитель, все возможные формы объема.

Example 2.2.10. $U_j \in \text{Hom}(X, Y)$. Можно сделать из этого полилинейное $U \in \text{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$,
 $U(x_1, \dots, x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots U_n x_n$.

Example 2.2.11. $U : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Uf = f'$

Theorem 2.2.2 (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения). X, Y — линейные нормированные пространства с одним полем скаляров, $U \in \text{Hom}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C \forall x \in X : \|Ux\|_Y \leq C\|x\|_X$

Definition 18

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y .

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X, \|Ux\| \leq C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Note. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Note.

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Example 2.2.12. Нормы в прошлых примерах

?? $\|U\| = \infty$

?? $\|U\| = 1$

?? $\|U\| = b - a$

?? $\|U\| = b - a$

?? $\|U\| = 1$

Theorem 2.2.3 (Условие непрерывности полилинейного отображения). $U \in \text{Poly}(X_1, \dots, X_m; Y)$, X_i, Y — линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n: \|U(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|$

Note. В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n}\}.$$

Definition 19: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf \{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \ \|U(x_1, \dots, x_n)\| < C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|\}.$$

Theorem 2.2.4 (эквивалентные способы вычисления оператора). U — линейное непрерывное отображение $X \rightarrow Y$. Тогда

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\|.$$

Доказательство. Обозначим супремумы за A, B, C, D . Очевидно, что $C \geq B$ и $C \geq D$

$$C = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что $B \geq A$. $x \neq 0$, $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|U\tilde{x}\| \leq B.$$

Значит, $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq B$.

Теперь докажем, что $D \geq A$.

$$x \neq 0, \varepsilon > 0: \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - \varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leq D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \frac{D}{1-\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D.$$

□

Remark. В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

Theorem 2.2.5 (эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора). $U : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$.

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|} = \sup_{\|x_j\|=1} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\|x_j\| < 1} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1} \|U(x_1, \dots, x_n)\|.$$

2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

Theorem 2.2.6 (О свойствах операторной нормы). $U_1, U_2, U_3 : X \rightarrow Y$ — линейные непрерывные операторы, λ — скаляр. Тогда

1. $\|U_1 + U_2\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \iff U = 0$
4. $U : X \rightarrow Y, V : Y \rightarrow Z$ — линейные отображения.

$$\|VU\| \leq \|V\| \cdot \|U\|$$

$$VU = V \circ U$$

$$VUx = V(U(x))$$

Designation. $L(X, Y) \subset \text{Hom}(X, Y)$ — пространство линейных операторов.

Лекция 5

Note. $L(X; Y) \subset \text{Hom}(X; Y)$ — линейные отображения из X в Y . Это линейное нормированное пространство.

Note. То же самое верно для полилинейных отображений. То есть выполнены аксиомы нормы, доказательство аналогичное. $L(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) \subset \text{Poly}(X_1, \dots, X_n; Y)$.

Theorem 2.2.7 (О полноте пространства операторов). Если Y полно, то $L(X; Y)$ тоже полно.

Доказательство.

1. Построение предельного оператора.

$\{U_n\} \subset L(X, Y)$ — фундаментальна, то есть $\|U_n - U_m\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим $x \in X$:

$$\|U_m x - U_n x\|_Y = \|(U_m - U_n)x\|_Y \leq \|U_m - U_n\| \cdot \|x\|_X \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда $\{U_m x\}$ фундаментальна в Y , следовательно, $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} U_m x =: U(x)$

2. Линейность предельного отображения.

$$U(x_1 + x_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} (U_m(x_1 + x_2)) = \lim U_m x_1 + \lim U_m x_2 = Ux_1 + Ux_2$$

$$U(\lambda x) = \lambda Ux$$

3. Непрерывность U .

$$\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leq 1 \cdot \|x\|.$$

Устремим $n \rightarrow \infty$:

$$\exists N \forall n > N \forall x \in X : \|U_m x - Ux\| \leq \|x\|.$$

По неравенству треугольника, при достаточно большом $m > N$

$$\|Ux\| \leq \|Ux - U_m x\| + \|U_m x\| \leq \|x\| + \|U_m\| \cdot \|x\| \leq (1 + \|U_m\|) \cdot \|x\|.$$

Следовательно, U непрерывно.

13 march
18 апреля
в 11:00
в каб 301
коллоквиум

4. Сходимость $\{U_m\}$ к U по норме $L(X, Y)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X: \|U_m x - U_n x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

При $x \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > N \forall x \in X: \|U_m x - Ux\| \leq \varepsilon \|x\| \iff \|U_m - U\| \leq \varepsilon.$$

□

Theorem 2.2.8. Если Y полно, то $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ полно.

Example 2.2.13 (Самый важный случай). Y — пространство скаляров. $L(X, Y) = X^*$ — сопряженное пространство — пространство линейных непрерывных функционалов.

Theorem 2.2.9. $L_1 = L(X_1 \dots X_k; L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)) \simeq L(X_1, \dots, X_n; Y) = L_2$, то есть существует изометрический (сохраняющий норму) изоморфизм.

Доказательство. Построим биекцию. $U \in L_1: U(x_1, \dots, x_k) \in L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)$,
 $U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n) \in Y$.

Определим $\tilde{U}(x_1, \dots, x_n) := U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Оно будет полилинейно непрерывно. Это же определение работает и в обратную сторону.

Теперь нужно понять, что с нормой все в порядке.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ k < i \leq n}} \|U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)\| \right) = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq n}} \|\tilde{U}(x_1, \dots, x_n)\| = \tilde{U}.$$

□

2.3 Дифференциальные отображения

Definition 20

X, Y — нормированные пространства, $E \subset X$, $x \in E$, x — внутренняя точка, $f: E \rightarrow Y$. f — дифференцируемо в точке x , если $\exists L \in L(X, Y)$:

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h), \quad h \rightarrow 0, x+h \in E.$$

Note. $x, h \in X$, $f(x), f(x+h) \in Y$, $Lh \in Y$

Что такое $o(h)$:

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \alpha(x, h).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definition 21

L — дифференциал f в точке x .

Designation. Обозначения дифференциала $D_x f, f'(x), d_x f, df(x)$

Формула из определения выглядит так

$$f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Note. Это определение — дифференцируемость по Фреше.

Note. В конечномерном случае из линейности L автоматически следует непрерывность.

Theorem 2.3.1. Если дифференциал в точке x существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists L_1, L_2: f(x+h) - f(x) = L_1 h + o(h)$. Тогда $L_1 h - L_2 h - o(h)$, докажем, что $L = L_1 - L_2$ равно нулю.

Зафиксируем $h \neq 0$.

$$\|Lh\| = \frac{\|L(th)\|}{\|t\|} = \underbrace{\frac{\|L(th)\|}{\|th\|}}_{\rightarrow 0, t \rightarrow 0} \|x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\|Lh\| = 0 \implies L = 0$. □

Definition 22

Если $f: E \subset X \rightarrow Y$ (E открыто), f дифференцируема во всех точках E , $df: E \rightarrow L(X, Y)$ — производное отображение.

Note. Если f дифференцируема в точке x , то f непрерывна.

Правила дифференцирования

Линейность $f_1, f_2: E \subset X \rightarrow Y$, f_1, f_2 непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2$ — скаляры: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ дифференцируема в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

Дифференциал композиции X, Y, Z — линейные нормируемые пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$, U, V открыты, $f: U \rightarrow Y, g: V \rightarrow Z$, $x \in U, f(x) \in V$, f дифференцируема в точке x , g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x .

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= \\ &= dg(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) \\ &= dg(f(x))(df(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\ &= dg(f(x))df(x)h + \underbrace{dg(f(x))(o(h)) + o(f(x+h) - f(x))}_{=?=o(h)} \\ \frac{\|dg(f(x))(o(h))\|_Z}{\|h\|_X} &\leq \frac{\|dg(f(x))\| \|o(h)\|}{\|h\|_X} \rightarrow 0. \\ \frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} &= \underbrace{\frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|f(x+h) - f(x)\|}}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|}}_{\text{ограничено}} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Дифференцирование обратного $x \in U \subset X$, U открыто, $f : U \rightarrow Y$, существует окрестность $V(f(x))$ в Y , в которой $\exists f^{-1}$. Предположим, что f дифференцируема в точке x , $\exists (df(x))^{-1} \in L(Y, X)$, f^{-1} непрерывна в точке $f(x)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y, X)} = (df(x))^{-1}.$$

Note. Здесь слишком много условий

Доказательство. $f(x) = y$, $f^{-1}(y) = x$, $f(x+h) = y+t$, $f^{-1}(y+t) = x+h$. $h \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0$. Давайте запишем

$$t = f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h).$$

Тогда $\|t\| \leq C\|h\|$. Воспользуемся тем, что $df(x)$ обратим.

$$(df(x))^{-1}t = h + (df(x))^{-1}(o(h)) \quad (2.3.1)$$

$$\|(df(x))^{-1}(o(h))\| \leq \|(df(x))^{-1}\| \cdot \|o(h)\| \leq \frac{\|h\|}{2}, \quad \|h\| < \delta.$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \left(\|h\| < \delta \implies \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|(df(x))^{-1}\|} \right).$$

Тогда $\forall \|h\| < \delta: \|(df(x))^{-1}t\| \geq \frac{\|h\|}{2} \implies \|h\| \leq C\|t\|$. Перепишем ??

$$f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = (df(x))^{-1}t + o(t).$$

Это определение дифференцируемости. Тогда

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}.$$

□

2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования

0. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема.

$$df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x)h.$$

1. $f : U \subset X \rightarrow Y$, f постоянно, то есть $f(x) = y_0 \quad \forall x \in U$. Тогда $df(x) = 0$ (нулевое линейное отображение, все переводит в нуль).

2. $f \in L(X, Y)$, $df(x) = f$.

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = (df(x))(h).$$

3. $f(x, y) = x^2 + 2xy$. $h = (h_x, h_y)$

$$\begin{aligned} f(x+h_x, y+h_y) - f(x, y) &= x^2 + xh_x + h_x^2 + 3xy + 3xh_y + 3yh_x - x^2 - 3xy + 3h_xh_y = \\ &= (2x + 3y)h_x + 3xh_y + \underbrace{h_x^2 + 3h_xh_y}_{o(h)} \end{aligned}$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

4. $x \in U \subset X$, $f : U \rightarrow Y$, $A \in L(Y, Z)$. Если f дифференцируема в точке x , то $A \circ f$ дифференцируема в точке x и $d(A \circ f)(x) = Adf(x)$
5. $x \in U \subset X$, $f : U \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$. Это n отображений: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $f_j : U \rightarrow Y_j$. f дифференцируема в точке x , тогда и только тогда, когда f_1, \dots, f_n дифференцируемы в точке x_0 .

Доказательство. $f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h) \in Y$. Левая часть равна

$$(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)).$$

А правая

$$(L_1h, L_2h, \dots, L_nh) + o(h).$$

□

6. $x_j : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$.

$$dx_j(x)h = h_j.$$

Это удобное обозначение базиса, которое мы будем дальше использовать.

7. $A : X_1 \times X_n \rightarrow Y$ — полилинейное и непрерывное. Оставим только два сомножителя. $A : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$.

$$A(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - A(x_1, x_2) = A(x_1, h_1) + A(h_1, x_2) + \underbrace{A(h_1, h_2)}_{o(h)}.$$

$$dA(x_1, x_2)h = A(h_1, x_1) + A(x_1, h_2).$$

Или можно записать так:

$$dA(x_1, x_2) = A(dx_1, x_2) + A(x_1, dx_2).$$

Совершенно аналогично для n координат.

Property.

- 1) $f(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \left(dx_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

$$df(x)h = \sum_{j=1}^n \left(h_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

- 2) $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$d(f_1 f_2 \dots f_n)(x) = f_2(x) f_3(x) \dots df_1(x) + \dots$$

- 3) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное произведение.

$$d\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle.$$

- 4) $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle.$$

- 5) $f : X \rightarrow Y$ над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(\lambda f) = \underbrace{f}_{\in Y} \underbrace{d\lambda}_{L(X, \mathbb{R})} + \lambda \underbrace{df}_{\in L(X, Y)}.$$

Practice. $U = \{A \in L(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in L(X, Y)\}$ — множество обратимых линейных отображений. $f : U \rightarrow L(X, Y)$, $f(A) = A^{-1}$. Найти df .

2.5 Частные производные

Definition 23: Частные производные

Пусть $a \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. U — окрестность точки a . $f : U \rightarrow Y$. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Определим $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$, $\varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

$d\varphi_j(a_j)$ называется частным дифференциалом (частной производной) f по x_j в точке a , если существует.

Designation. Частный дифференциал обозначается кучей способов

$$\partial_{x_j} f(a), \frac{\partial f}{\partial x_j}, \partial_j f(a) \in L(x_j, Y).$$

Лекция 6

20 march

2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$

Statement. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда f_1, f_2, \dots, f_n дифференцируемы в точке x и

$$df(x) = (df_1(x), \dots, df_n(x)), \quad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad f_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Запишем

$$df(x)h = (df_1(x)h, \dots, df_n(x)h).$$

Тогда

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)).$$

Первое слагаемое равно $df(x)h$, а правая

□

Statement. Если $n = 1$, то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x , то существуют все частные производные и

$$df(x)h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j, \quad h = (h_1, \dots, h_m)^T.$$

при этом

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right).$$

Statement. Вернемся к ???. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x и существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$

$$\partial f(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \vdots \\ df_n(x)h \end{pmatrix}.$$

Statement. Если есть отображения $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, и они дифференцируемы, то $d(f \circ g)(x) = dg(f(x))df(x)$:

$$\begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Правило цепочки:

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

Statement.

Example 2.6.1 (вычисление частных производных). Пусть $f(x, y) = x^3 + 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x.$$

То есть

$$df(x, y)h = (3x^2 + 3y \quad 3x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Через градиенты

grad.

Statement. Если $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, то частные производные можно определять формулами

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \quad e_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T.$$

(Единица стоит на i -м месте.) Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

Definition 24: Производная по вектору

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v . Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v .

Property (Экстремальное свойство градиента). В случае \mathbb{R}^m

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle,$$

откуда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq |\text{grad} f(x)| |v|.$$

Функция растёт быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right|.$$

Доказательство. Все рассуждения предполагают, что f дифференцируема в x .

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x + tv) - f(x) = df(x)(tv) + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = df(x)v + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\rightarrow 0}.$$

□

2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

Theorem 2.7.1 (Теорема о конечном приращении). Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ непрерывно на $[x, x + t] \subset U$ и дифференцируемо на $(x, x + h)$. Тогда

$$\|f(x + h) - f(x)\|_Y \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

Доказательство. Обозначим супремум $M = \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\Theta \in (0,1)} \|df(x + \Theta h)\|_{L(X,Y)}$. Достаточно проверить

$$\forall [\xi', \xi''] \subset (x, x + h): \|f(\xi') - f(\xi'')\| \leq M \|\xi' - \xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1 = [\xi'_1, \xi''_1]: \|f(\xi'_1) - f(\xi''_1)\| \geq (M + \varepsilon_0) \|\xi'_1 - \xi''_1\|, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Разделим отрезок пополам: $\Delta_1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 = [\xi'_1, \frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}] \cup [\frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}, \xi''_1]$. На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность $\Delta_1 \supset \Delta_2 \dots$. Пусть $\{\xi_0\} = \cap \Delta_i$. Тогда

$$f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0) = df(\xi_0)\delta + \alpha(\delta), \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0: \left(\|\delta\| < \varepsilon \implies \|f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\delta\|, \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности $\exists N: \forall n > N \quad \Delta_n \subset B(\xi_0, \varepsilon)$.

$$\|f(\xi'_n) - f(\xi''_n)\| \leq \begin{cases} \|f(\xi'_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi_0\| \\ \|f(\xi''_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi''_n - \xi_0\| \end{cases} = \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi''_n\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

Note. В правой части можно ююю

Note. На прямой теорема Лагранжа дает существование $\xi \in (x, x + \varepsilon)$:

$$|f(x + h) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

Note. В \mathbb{R}^n есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

Corollary. Если f из теоремы и $A \in L(X, Y)$, то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi - Ah)\| \|h\| = \sup_{v \in (0,1)} \|df(x+vh - Ah)\| \|h\|.$$

Это теорема при $g(x) = f(x) - Ax$.

Corollary. Если K — выпуклый компакт в X , $f \in C^1(K, Y)$, то f — Липшицево на K .

Definition 25

Если $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо во всех точках U и $df: U \rightarrow L(X, Y)$ непрерывно, то говорят, что f непрерывно дифференцируемо на U и пишут $f \in C^1(U, Y)$

Note. $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ непрерывно дифференцируемо на U тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

Theorem 2.7.2 (Признак дифференцируемости). Пусть $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$, $x \in U$. Предположим, что f имеет все частные дифференциалы в U и они непрерывны в точке x . Тогда f дифференцируема в точке x .

Доказательство. Докажем для $m = 2$. Дифференциал должен выглядеть так: $Lh = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \partial_{x_2} f(x)h_2$. $x \in U \subset X_1 \times X_2$.

Проверим $\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = o(h)$ при $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x) - Lh\| &\leq \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)h_2\|}_{\leq \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + \Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)h_1\|}_{\leq \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1 + \Theta_1 h_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leq . \end{aligned}$$

Заметим, что $\|h_1\| \leq \|h\| \wedge \|h_2\| \leq \|h\|$. Тогда можем переписать так:

$$\leq \|h\| \cdot \left(\sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_2} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремится к 0 при $h \rightarrow 0$. □

Corollary. Непрерывная дифференцируемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

Theorem 2.7.3 (Теорема о конечном приращении для функций). Пусть $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x+h] \in U$ и дифференцируема на $(x, x+h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x+h)$, что

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Corollary. Если U — выпуклое множество и $df(x) = 0$ для любого x из U , то $f(x) = \text{const}$ на U .

Corollary. Если U — открытое связное множество и $df(x) = 0$ для всех $x \in U$, то $f(x) = \text{const}$ на U .