Конспект по матанализу в формате вопросов коллоквиума
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 8, 2019

Contents

[section]

Chapter 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

   (a) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

      i. $a + b = b + a$ (коммутативность)
      ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
      iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)
      iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

   (b) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

      i. $xy = yx$ (коммутативность)
      ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)
      iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)
      iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)
      v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \overset{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на $\mathbb{R}$

   Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

   Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

   Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

   Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} a = b \\ a > b \\ a < b \end{array}\right.$ (антисимметричность)

(b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

(c) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в $\mathbb{R}$

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты)**.** $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}(\text{замкнутый отрезок})$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}(\text{открытый слева отрезок})$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}(\text{открытый справа отрезок})$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}(\text{открытый отрезок})$$

Def 5 (Лучи)**.** $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists\ x \in \mathbb{R} : a \leq x\ \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists\ y \in \mathbb{R} : a \geq y\ \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A.

$//\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Аксиома (Архимед)**.** *Множество натуральных чисел не ограниченно сверху.*

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Proof. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. $\square$

1.3.2 Аксиома индукции

Аксиома (индукции). *Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

Statement (Обоснование метода математической индукции). *Пусть $P_1, P_2, \dots$ - последовательность суждений. Предположим, что*

1. *P_1 - верно*
2. *Для любого $k : P_k \to P_{k+1}$*

Тогда все условия P_i верны.

Proof. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \varnothing$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1$, $l - 1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. □

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1.3.1 (Неравенство Бернулли). *Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geq 1 + n(a-1), \quad n \in \mathbb{N}$*

Proof. Индукция:
База: $n = 1 : \quad a \geq 1 + (a - 1)$
Переход: $n \to n + 1$
Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a-1).$$

Тогда:

$$\begin{gathered} a^{n+1} \geq a + n(a-1)a = (a-1) + 1 + n(a-1)a = \\ 1 + (a-1)(1+na) \geq 1 + (a-1)(1+n) \end{gathered}.$$

□

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Proof. Пусть $a^n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a-1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$. Противоречие □

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B), где $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$, такая что всякое число из A не более любого из B.

Def 8. Число c лежит в щели (A, B), если $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Аксиома (Кантор, Дедекинд). *В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.*

Statement. *Квадратный корень из 2 существует и единственный.*

Proof.

1. Существование
   Рассмотрим множества:

   $$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\},\ B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

   Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \le v \le b\ \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

   Lemma. *В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.*

   Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

   $$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \ \Rightarrow\ v \text{ - не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \ \Rightarrow\ v \text{ - не в щели} \end{array}\right.$$

   Противоречие.

2. Единственность
   Возьмем $c \ge 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \ge 0 \wedge c_1 \ne c : c_1^2 = 2$. Тогда

   $$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array}\right. \Rightarrow 2 > 2$$

   Опять противоречие.

$\square$

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c, для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 1.3.2. *Квадратный корень из двух иррационален.*

Proof. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q$$

$\square$

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v\rangle$ - любой отрезок с концами в $u, v \quad (u \leq v)$. Его длина $|\langle u, v\rangle| := v - u$

Theorem 1.3.3. *Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида (a, b), где $a < b$ существует точка вида rc, где $r \in \mathbb{Q}$.*

Proof. Заменим $c \to 1, a \to \frac{a}{c}, b \to \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leq r \leq b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$. Среди таких p существует наименьший p_0.
Возьмем $\frac{p_0 - 1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$ □

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b), где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 1.3.4. *На каждом отрезке вида (a, b), где $a < b$, существует иррациональное число.*

Proof. По следствию из теоремы 1.3.3 $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \land r \notin \mathbb{Q}$. □

1.3.7 Число e

Def 12. Рассмотрим последовательность $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Число e – предел $\{a_n\}$.

Statement. $\{a_n\}$ - *сходится.*

Proof.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} =$$
$$= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333$$

□

Theorem 1.3.5. *e - иррационально.*

Proof. $2 < e < 3$
Пусть $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $q > 1$.

$$\frac{p}{q} = \lim_{n \to \infty} \left((1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{q!}) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) =$$
$$= (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$
$$q!p = S + \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)\dots n}\right) = S + a.$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$. Обозначим предел за a. Докажем, что $a \notin \mathbb{Z}$.

Statement. $0 < a < 1$

Proof.

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\ldots n} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}.$$

$$0 < a \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1.$$

□

□

1.4 Свойства подмножеств $\mathbb{R}$

1.4.1 Грани

Def 13 (supremum)**.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.
Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 14 (infimum)**.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.
Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его верхних границ.

Theorem 1.4.1 (об описании точной верхней грани)**.** *Пусть $A \neq \varnothing$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x = \sup A$
2. x *– верхняя граница для A и* $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Proof.

$1 \Rightarrow 2$
$x = \sup A \Rightarrow x$ - верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \varnothing$. Тогда $y \leq x - \varepsilon, \quad \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x. Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

$2 \Rightarrow 1$
x - верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x - наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ - верхняя граница A. Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x - не верхняя граница. □

Theorem 1.4.2 (об описании точной нижней грани)**.** *Пусть $A \neq \varnothing$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x = \inf A$
2. x *– нижняя граница для A и* $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 15. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 1.4.3 (о связности отрезка)**.** *Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Для любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F-$ замкнуты$\wedge E \neq \varnothing \wedge F \neq \varnothing$, то $E \cap F \neq \varnothing$.

Proof. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \varnothing$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x - предельная точка для E, с другой стороны, предельная точка для F. Так как E, F - замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \varnothing$. Противоречие. □

1.4.3 Предельные и изолированные точки

Def 16. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 17. Проколотая окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

Def 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.
u называется предельной точкой для A, если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{U}_\varepsilon (u) \cap A \neq \varnothing.$$

Examples.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.
3. Для $\mathbb{Q}$ все предельные точки - $\mathbb{R}$.

Def 19. Все точки множества A, не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A - \text{изолированная, если } \exists\ \varepsilon > 0 :\ U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon (u) \cap A = \varnothing$$

Examples.

1. $[1, 2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1, 2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. *Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ $(y = \inf A)$.*

$$\left[\begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y \text{ - предельная точка } A \\ y \in A \end{array} \right.$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 1.4.4 (о вложенных отрезках)**.** $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$.
$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *- последовательность замкнутых отрезков* $I_{n+1} \subseteq I_n$*. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.*

Proof. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots$$
$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots$$

Заметим, что $a_k \leq b_j \ \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j], \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Proof. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geq k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.
В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 1.4.5 (о компактности)**.** *Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Proof. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$.
Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] \text{ - бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] \text{ - бесконечно} \end{cases}$
Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \land x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. □

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 1.4.6 (о вложенных полуоткрытых отрезках)**.** *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \ldots \supset J_n \supset \ldots, \qquad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \left[\begin{array}{l} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \varnothing \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \Longleftrightarrow \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \ldots \end{array} \right.$$

Proof. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\exists! t \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. □

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем

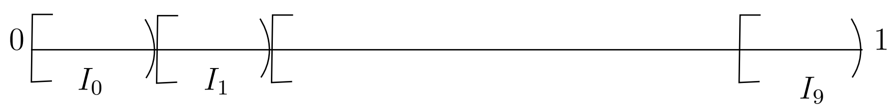

Figure 1.1: Decimal decomposition

собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей
3. И так далее

Получим $0.i_1 i_2 i_3 \ldots$ – десятичную запись числа x.

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 1.4.7. *Пусть* $(j_1, j_2, \dots)$ *- цифры от нуля до девяти.* $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9\ \forall k \geq n$. *Тогда* $\exists! x \in [0, 1)$ *для которого* $0.j_1 j_2 \dots$ *- десятичное представление.*

Proof. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме 1.4.6 существует непустое пересечение, равное одной точке - и есть наше число. □

Chapter 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 20. b – предел функции f в точке x_0, если для любой окрестности U в точке b существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки $x_0 : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 21. b – предел функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 22. b – предел функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim x \to x_0 |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 2.1.1. *$f : A \to \mathbb{R}$, x - предельная точка для A.*
Если a, b - предельные для f в точке x_0, то $a = b$.

Proof. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b. Так как a, b - предельные,

$$\begin{array}{c} \exists \overset{\circ}{V}_1 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{array}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V} (x) = \overset{\circ}{V}_1 (x) \cap \overset{\circ}{V}_2 (x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
Противоречие. $\square$

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 23. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 2.1.2 (о пределе сужения)**.** $f : A \to \mathbb{R}, x \in A',\ B \subset A'$
Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. *Тогда* $z = \lim_{x_0}(f \restriction_B)$.

Proof. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}$: $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. $\square$

Theorem 2.1.3 (частичное обращение теоремы о пределе сужения)**.** *Если* $B = \overset{\circ}{W}_\delta (x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \restriction_B = z$, *то* $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Proof. $\forall U(z)\ \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : f \restriction_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.
$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0. $\square$

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 2.1.4 (Предельный переход в неравенстве)**.** $f, g : A \to \mathbb{R},\ x \in A'$. *Предположим, что существуют пределы у* f, g *в точке* x_0 *равные соответственно* a, b. *Пусть* $a < b$. *Тогда существует проколотая окрестность* $\overset{\circ}{V} (x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Proof. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b. Так как a, b - предельные,

$$\begin{array}{c} \exists \overset{\circ}{V}_1 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{array}.$$

Возьмем $\overset{\circ}{V} (x) = \overset{\circ}{V}_1 (x) \cap \overset{\circ}{V}_2 (x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. $\square$

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 2.1.5 (Принцип двух полицейских)**.** $f, g, k : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A$
Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$. *Тогда* $\lim_{x_0} g = b$.

Proof. Рассмотрим $\overset{\circ}{U} (b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2\colon \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U}$$

$$\left. \begin{array}{c} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{array} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$$

$\square$

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 2.1.6 (Предел линейной комбинайии)**.** $f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x_0} h = \alpha a + \beta b$

Proof.

$$\begin{gathered} |\alpha f(x) = \beta g(x) - \alpha a - \beta b| = \\ = |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leq \\ \leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{gathered}.$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \to 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ \exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{array}.$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 :$

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A'$
Предположим, что $\lim_{x_0} f = 0$ *и* $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

Proof. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f:

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$. □

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$
Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab.$

Proof.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ \leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$ в некоторой проколотой окрестности x_0, а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0. Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left.\begin{aligned} &|g(x)||f(x) - a| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \\ &|a||g(x) - b| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ их сумма стремится к нулю при } x \to x_0.$$

$\square$

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b,\ b \neq 0$
Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Proof.

Lemma. *В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$. То есть $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$*

Proof. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) = b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \Longrightarrow \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

$\square$

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{aligned} |\tfrac{f(x)}{g(x)} - \tfrac{a}{b}| = \tfrac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ \leq \tfrac{1}{c|b|}|(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \\ \leq \tfrac{1}{|b|c}|g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a||g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned} .$$

$\square$

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} q^j = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \in \mathbb{R}$.

Statement. *Если $|q| < 1$, то $f(x)$ имеет предел, иначе не имеет предела.*

Proof.

$|q| < 1$

Lemma.

$$q^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow |q|^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. *Proof.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0$ $N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$.

□

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1-q^n}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

2. $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5. $q < 1$

$$|f(n)| = |\frac{q^n - 1}{q - 1}| \geq \frac{1}{|q - 1|}(|q|^n - 1).$$

Эта функция тоже не имеет предела.

□

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 24. $f : A \to \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$
f – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ (f(x_1) < f(x_2)).$$

f – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2)).$$

f – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 2.1.7 (о пределе монотонной функции)**.** *$f : A \to \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на $A, x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

Proof. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leq M\ \forall x \in A$.
$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$
Note. Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

2.1.13 Предел композиции

Def 25. $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}, f(A) \subset B$. Тогда задана функция композиции $h = g \circ h$.

Theorem 2.1.8. *Пусть $b = \lim_{x \to x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y \to b} g(y) = d$. Тогда $\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = d$, если хотя бы одно условие выполнено:*

1. *$f(x) \neq b, \quad x \neq x_0$*
2. *$b \in B, g$ - непрерывна в точке $b : d = g(b)$*

Proof. Пусть U окрестность точки d ; $\exists V(b)$:

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W} (x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \to f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) in U$. Пусть выполнено второе условие. Либо $f(x) \neq b$, тогда $g(f(x)) \in U$, либо $f(x) = b$, тогда $g(f(x)) = d \in U$ □

2.2 Критерий Коши

2.2.1 Критерий Коши

Theorem 2.2.1 (Критерий Коши)**.** $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},\ x_0 \in A'$. *$x$ - либо число, либо $\pm\infty$.*
Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Proof. $1 \Rightarrow 2$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \to a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow\ \forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$.

Lemma. *Если выполнено условие Коши, то f ограничено вблизи x_0.*

Proof. Применим условие : зафиксируем какую-то точку y из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности x_0 выполнено $f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$, то есть $f(x)$ ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности, f - ограничена.

Def 26. Пусть $g : B \to \mathbb{R}$ ограничена на $B, E \subset B$. Колебание f на E - это $\sup_{x \in E} g(x) - \inf_{x \in E} g(x) = osc_E(g)$

Если $\forall x, y \in E\ |g(x) - g(y)| \leq \rho \Rightarrow osc_E(g) \leq \rho$: $\forall\ x, y \in E - \rho < g(x) - g(y) \leq g \Rightarrow g(x) \leq g(y) + \rho \Rightarrow \sup_E g \leq g(y) + \rho, \sup_E g - \rho \leq g(y)\ \forall\ y \in E \Rightarrow \sup_E g - \rho$ - нижняя граница, $\inf_E g \geq \sup_E g - \rho$.

$/sup - inf \leq sup - (sup - \rho) = \rho$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$osc_B(f) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что $|f(x) - f(y)| \leq \rho\ \forall\ x, y \in B \Rightarrow osc_B(f) \leq \rho$. Пусть $d = osc_B(f)$; $x, y \in B$

$$m = \inf_{z \in B} f(z) \leq f(x) \leq \sup_{z \in B} f(x) = M$$

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq f(y) \leq \sup_{z \in B} f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = osc_B(f) = d$$

d - верхняя граница для множества чисел $|f(x) - f(y)|$, доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо. □

f удовлетворяет условию Коши в $x_0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \overset{\circ}{V}(x_0) :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A$. По лемме f ограничена.

Заведем вспомогательную функцию $g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$ - предельная точка для g, g ограничена на A. $\overset{\circ}{V}(x_0); m = m_{\overset{\circ}{V}} = m_{\overset{\circ}{V},g} = \inf_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} g(x); M = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} g(x)$. Всегда $m \leq M$, заведем еще $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\overset{\circ}{V}}$ - множество inf по всем проколотым окрестностям, аналогично заведем множество sup.

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$ образует щель. Если $\overset{\circ}{W} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow m_{\overset{\circ}{W}} \geq m_{\overset{\circ}{V}}; M_{\overset{\circ}{W}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}$. Пусть $a \in \Gamma, b \in \Delta$, $\exists\ \overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{W}$: $a = m_{\overset{\circ}{V}}, b = M_{\overset{\circ}{W}}$. Пусть $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{W}$; $a \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq b$. Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей f это щель. $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$ узкая щель. $\varepsilon > 0$; $\exists\ \overset{\circ}{V}$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow M_{\overset{\circ}{V},f} - m_{\overset{\circ}{V},f} \leq \varepsilon$, то есть там только одно число c.

$\forall\ \overset{\circ}{V}(x_0)\ m_{\overset{\circ}{V},f} \leq c \leq M_{\overset{\circ}{V},f} . x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow m_{\overset{\circ}{V},f} \leq f(x) \leq M_{\overset{\circ}{V},f} \Rightarrow |f(x) - c| \leq |M - m| \leq \varepsilon$.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \overset{\circ}{V}(x_0) : osc_{\overset{\circ}{V} \cap A}(f - c) \leq \varepsilon$. □

2.3 Ряды

2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

Def 27. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ряд – символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – последовательность $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\quad S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \text{ - } \textit{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 2.3.1 (Лейбниц)**.** *Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательност*
$0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. *Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.*

Proof.
$\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{array}{l} S_k = a_1, +a_2 + \ldots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots a_{2^n}) \end{array}.$$

Заменим в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \le a_2 \le 2a_4 + 4a_8 + \ldots 2^{n-1} a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \ldots 2^n a_{2^n} \le 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

$\Leftarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T. Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^n} + \ldots a_{2^{n+1}-1} \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots 2^n a_{2^n} \le a_1 + T.$$

$\square$

Theorem 2.3.2. *Пусть $s > 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \le 1$.*

2.4 Верхние и нижние пределы

2.4.1 Определение и свойства

Def 28. $f : A \to \mathbb{R}$

$$a = \varlimsup_{x \to x_0} = \lim_{x \to x_0} \sup f(x)$$

$$b = \varliminf_{x \to x_0} = \lim_{x \to x_0} \inf f(x).$$

Число a называется верхним пределом f в точке x_0.
Число b называется нижним пределом f в точке x_0.

Property. *1.* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. *Сумма двух функций* $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0}(f+g) \le \overline{\lim}_{x_0} f + \overline{\lim}_{x_0} g.$$

Рассмотрим $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \le M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f+g) \le M_{\overset{\circ}{V}} \le M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{x_0}}(f+g) \le M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim_{x_0}}(f,g) \le M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

Theorem 2.4.1 (Теорема об описании верхнего предела)**.** *Пусть f - ограниченная функция на множестве A. $x_0 \in A$. Число a является верхним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

Proof. Пусть 1 и 2 выполнены. $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$.
Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и найдем для него $\overset{\circ}{V}$.

$$\overline{\lim_{x_0}} f \le M_{\overset{\circ}{V}} \le a + \varepsilon.$$

Тогда $\overline{\lim}_{x_0} \le a$.

$$\forall \overset{\circ}{U}: M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim_{x_0}} f \ge a + \varepsilon.$$

Так как ε любое, $\overline{\lim}_{x_0} f \ge a$

Теперь в обратную сторону. Пусть $a = \overline{\lim}_{x_0} f$.

$$a = \overline{\lim_{x_0}} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}: a \le M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Рассмотрим произвольную проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0.

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

$\square$

Theorem 2.4.2 (Теорема об описании нижнего предела)**.** *Пусть f - ограниченная функция на множестве A. $x_0 \in A$. Число b является нижним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0)$:

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \overset{\circ}{U}(x_0)$:

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

Proof. Аналогично $\square$

2.5 Последовательности

2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Def 29. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует конечный предел $\lim_\infty x_n$.

Statement. *Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, $b \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N}$ *- конечное* $: \forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$

Proof. Запишем определение того, что $\lim_\infty x_n = b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \tag{2.1}$$

$1 \Rightarrow 2$. Пусть 2.1 верно. Возьмем $A = \{1, \dots N\}$ - конечно. Следовательно, верно 2.
$2 \Rightarrow 1$. Возьмем $N = \max\{A\}$, получим 1. $\square$

Def 30. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция. $y_n = x_{\varphi(n)}$ – перестановка $\{x_n\}$.

Corollary. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

Def 31. Пусть $\{n_k\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. $\{y_k\} : y_k = y_{n_k}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$

Statement. *Если $\{x_n\}$ сходится к b, то любая подпоследовательность тоже сходится к b.*

Proof. Аналогично 2.1.3. $\square$

2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

Lemma. *$x \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *x_0 - предельная точка для X.*
2. *$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X, x_n \neq x_0$. Более того $\{x_n\}$ можно выбрать такБ что $x_k \neq x_j, \quad i \neq j$.*

Proof. $2 \Rightarrow 1$. Возьмем любую проколотую окрестность точки x_0. Хотим: $\overset{\circ}{V} \cap X \neq 0$.

$$\overset{\circ}{V} = (x - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x + \varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$. Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. По принципу двух полицейских $|x_n - x_0| \to 0$. Теперь сделаем все неравными: $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$, дальше возьмем $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$ и скажем, что $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X_1, x_2 \neq x_1$ и так далее, $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \dots |x_0 - x_{n-1}|, x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$ □

Theorem 2.5.1 (Вторая форма теоремы о компактности)**.** *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Proof. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\exists M : |x_n| \leq M, \quad \forall n$. Разберем два случая:

1. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.
2. A - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для A. Тогда по лемме 2.5.2 существует $\{a_k\} \in A, a_k \to b, a_k \neq a_l, k \neq l$.

   Тогда $\forall k \exists ! n_k : a_k = x_{n_k}$, где номера n_k попарно различны, но не упорядочены. То есть $\{x_{n_k}\}$ - перестановка $\{x_n\}$, а значит тоже сходится.

□

2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

Theorem 2.5.2. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$
2. $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \to x_0 \; f(a_n) \to a$

Proof. $1 \Rightarrow 2$. Берем последовательность $a_n \in A, a_n \neq x_0$. Надо $f(a_n) \to b$.

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\exists N : a_n \in V \;\forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} \; (a_n \neq x_0).$$

Получаем

$$|f(a_n) - b| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$. От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\neg\text{"}a = \lim_{x_0} f\text{"} : \exists \varepsilon > 0 \forall \beta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x = x_0, x \in A, \quad |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Возьмем

$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, \in A.$$

Получаем, что $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. С другой стороны, по принципу двух полицейских:

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Longrightarrow x_n \to x_0.$$

Противоречие.

Случай $x_0 = \infty$.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Возьмем $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow x_n \to \infty$. □

2.6 Бесконечные пределы

2.6.1 Бесконечные пределы

Def 32. $f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$. Говорят, что f имеет предел $+\infty(-\infty)$ в точке x_0, если: $\forall U(\pm\infty)$ существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

На языке неравенств: $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Def 33. Говорят, что f стремиться к бесконечности в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$. То есть $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$.

Statement. *Пусть $f(x) \neq 0$ в проколотой окрестности x_0. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f - стремиться к бесконечности в точке x_0*
2. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Proof. $1 \Rightarrow 2$ (тогда дополнительное условие 2.6.1 можно не накладывать).

$$\varepsilon > 0 M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ (здесь условие 2.6.1 необходимо). $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$. Тогда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 :

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Longleftrightarrow |f(x)| > M.$$

□

2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

2.7.1 O и o. Соотношения транзитивности

Def 34. $f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$.
f называется бесконечно малой в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$.
f называется бесконечно большой в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$.

Def 35. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что g доминирует функцию f вблизи x_0 и пишут $f = O(g)$ $(x \to x_0)$, если $\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$.

Def 36. Функции f, g называются сравнимым вблизи x_0, если $f = O(g) \wedge g = O(f)$. Обозначение: $f \asymp g$.

Property. $f = O(g) \wedge g = O(h) \Longrightarrow f = O(h)$

Proof.

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leq c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$$

$$\exists \overset{\circ}{V}(x_0), \exists c_1 : |g(x)| \leq c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$:

$$|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq c|h_(x)|.$$

□

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0, то $f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f}{g}$ - ограниченная функция.

Def 37. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что $f(x) = o(g(x))$ вблизи x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U} (x_0) :$

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0, то $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$ - ограниченная функция.

2.7.2 Эквивалентные функции

Def 38. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что f, g эквивалентны вблизи x_0 , если $f - g = o(g)$, при $x \to x_0$. Обозначение: $f \sim g$.

Note. Определение асимметрично!

Lemma. *$f \sim g$, при $x \to x_0 \Longrightarrow g \sim x_0$, при $x \to x_0$*

Proof. Проверим, что $g = O(f)$ вблизи x_0 :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|.$$

$$\frac{1}{2}|g(x)| \leq |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leq 2|f(x)|.$$

□

Note. Если $g(x) \neq 0$ вблизи x_0, $f \sim g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

Statement. *Полезные преобразования для вычисления пределов:*

1. $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$ *При* $x \to +\infty : p(x) \sim a_n x^n$
2. $p(x) = (x - x_0)^l (b_0 + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0.$ *Тогда* $p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$
3. $f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \ldots + 1} \sim \frac{x}{n} \to 0, \quad x \to x_0$

Theorem 2.7.1. *f, g не обращаются в нуль вблизи x_0, $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$ вблизи x_0. Тогда fg, f_1g_1 одновременно имеют или не имеют предел в точке x_0. Ели пределы существуют, то они равны.*

Note. Аналогичная теорема верна для $\frac{f}{g}$ и $\frac{f_1}{g_1}$

Proof.

$$fg = f_1g_1 \qquad \underbrace{\frac{f}{f_1}\frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен}1} \qquad .$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \qquad \underbrace{\frac{f}{f_1}\frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен}1} \qquad .$$

□