

Билеты по алгебре
II семестр

Тамарин Вячеслав

21 мая 2020 г.

Оглавление

Вопрос 1	Подгруппа, порожденная множеством. Явное описание. Примеры образующих в D_n и $GL_n(K)$. Понятие циклической группы.	2
i	Подгруппа, порожденная множеством	2
ii	Примеры образующих в D_n и $GL_n(K)$	2
Вопрос 2	Порядок элемента. Эквивалентное определение. Соотношение $g^n = e$ и порядок элемента g . Порядок элемента в группе \mathbb{Z}/n	3

Вопрос 1 Подгруппа, порожденная множеством. Явное описание. Примеры образующих в D_n и $GL_n(K)$. Понятие циклической группы.

i Подгруппа, порожденная множеством

Определение 1: Подгруппа, порожденная множеством

G — группа, $X \subset G$. Наименьшая группа $H \leq G$, содержащая X называется подгруппой, порожденной X .

Обозначение. $\langle X \rangle$.

Замечание. Эта группа всегда существует и совпадает с $\bigcap_{X \subset L \leq G} L = \langle X \rangle$

Утверждение (Явное описание порожденной подгруппы).

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n} \mid x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

Для $n = 1$ считаем, что такое произведение равно нейтральному элементу.

Доказательство.

- \supseteq Любой элемент $x_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ должен принадлежать подгруппе, порожденной X , из чего следует это включение.
- \subseteq Заметим, что заданное множество — подгруппа G : произведение двух элементов и обратный элемент имеют такой же вид, нейтральный — случай с $n = 0$. Поэтому это множество — подгруппа G , содержащая X . Так как $\langle X \rangle$ — минимальная группа с этим свойством, получаем нужное включение.

□

Определение 2: Группа, порожденная множеством

Группа G называется порожденной множеством X , если $\langle X \rangle = G$. Если X конечно, имеет место обозначение $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Все x_i называются образующими G . Если для группы G существует такой конечный набор, она называется конечно порожденной.

Определение 3: Циклическая подгруппа

G — группа, $g \in G$. Подгруппа вида $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ называется циклической подгруппой, порожденной g .

Определение 4: Циклическая группа

Группа G называется циклической, если она порождена одним элементом, то есть $\exists g \in G: G = \langle g \rangle$.

ii Примеры образующих в D_n и $GL_n(K)$

Образующие D_n Заметим, что одним элементом эта группа порождена быть не может, так как она не абелева.

Утверждение. Поворот f_φ на угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ и симметрия f_l относительно одной из разрешенных прямых. Тогда $\langle f_\varphi, f_l \rangle = D_n$.

Доказательство. Любой поворот на $\frac{2\pi k}{n}$ можно получить повтором f_φ^k . Докажем, что

$$\left| \left\{ f_l^\varepsilon f_\varphi^k \mid \varepsilon \in \{0, 1\}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} \right| = 2n.$$

Пусть $f_l^{\varepsilon_1} f_\varphi^{k_1} = f_l^{\varepsilon_2} f_\varphi^{k_2}$. Тогда $f_l^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} f_\varphi^{k_1 - k_2} = \text{id}$.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $f_l^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} f_\varphi^{k_1 - k_2} = \text{id} \implies k_1 = k_2$. Иначе $f_l^\varepsilon = f_\varphi^k$, но поворот не может быть равен симметрии, так как при симметрии на месте остается только прямая, а при повороте либо одна точка, либо все пространство. □

Образующие $GL_n(K)$ Здесь образующими будут матрицы элементарных преобразований: транспозиций (которые можно выразить через оставшиеся), псевдоотражения (домножение на число) и трансвекции (прибавление одной строки к другой, умноженной на число).

Вопрос 2 Порядок элемента. Эквивалентное определение. Соотношение $g^n = e$ и порядок элемента g . Порядок элемента в группе \mathbb{Z}/n

Определение 5: Порядок элемента

Порядок элемента $g \in G$ — количество элементов в подгруппе $\langle g \rangle$.

Обозначение. $\text{ord } g$

Лемма 1. Пусть $g \in G$. Если $\text{ord } g$ конечен, то $\text{ord } g = n$, где n — наименьшее натуральное число, что $g^n = e$, иначе такого n не существует.

Доказательство.

- Пусть $g^n = e$. Докажем, что $\text{ord } g \leq n$. Рассмотрим $\{e, g, g^2, \dots, g^n, \dots\}$. Начиная с g^n элементы повторяются. А именно

$$g^m = g^{nq+r} = g^r.$$

Следовательно, различных элементов группы $\langle g \rangle$ всего n .

- Пусть $\text{ord } g = \infty$ и $g^n = e$ при $n \in \mathbb{N}$. но в группе $\langle g \rangle$ не более n элементов. Противоречие.
- Пусть $m = \text{ord } g < \infty$. Рассмотрим $\{e, g, \dots, g^m\}$. Здесь $m + 1$ элемент, поэтому там есть два равных. Пусть $g^i = g^j \implies g^{i-j} = e$. Но тогда $|\langle g \rangle| \leq i - j$. Значит, $i = m, j = 0, g^m = e$. Также получаем, что до этого ни один $g^k = e$, поэтому, m и есть минимальное.

□

Утверждение. Пусть $g \in G, g^n = e, n \in \mathbb{N}$. Тогда $n : \text{ord } g$.

Доказательство. Поделим с остатком $n = q \cdot \text{ord } g + r, 0 \leq r < \text{ord } g$. Тогда $e = g^n = g^r$. Если $r \neq 0$, то $g^r \neq e$. Следовательно, $r = 0$. □

Лемма 2. Пусть G — группа, $g \in G$. Тогда существует такой единственный гомоморфизм $f: \mathbb{Z} \rightarrow G, f(1) = g$.

Доказательство. Такой гомоморфизм существует (как задан в условии, все условия выполняются). Заметим, что $g(n) = g(1)^n = g^n$. Поэтому он задан однозначно. □

Теорема 1: Об изоморфности циклической группы

Пусть $g \in G$ Если $\text{ord } g = n$, то $\langle g \rangle$ изоморфна группе \mathbb{Z}/n . Если $\text{ord } g = \infty$, то $\langle g \rangle$ изоморфна \mathbb{Z} .

Доказательство.

- Пусть $\text{ord } g = n$. Построим $f: \mathbb{Z}/n \rightarrow G$ так $f(\bar{k}) = g^k$. Проверим корректность: пусть $k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$, то есть $k_1 = k_2 + sn \implies g^{k_1} = g^{k_2} \cdot g^{sn} = g^{k_2}$. Из свойств элементов \mathbb{Z}/n и f следуют необходимые условия гомоморфизма. Также заметим, что это биекция.
- Пусть $\text{ord } g = \infty$. Построим гомоморфизм $f: \mathbb{Z} \rightarrow G, f(1) = g \implies f(n) = g(1)^n = g^n$. Он сюръективен, проверим инъективность: пусть $\ker f \neq 0$, тогда $\exists k \in \mathbb{N}: g^k = e$, а тогда $\langle g \rangle$ конечна. Противоречие.

□