Лекция 1: †

2 Sept

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \to f$), если

$$\forall x \in E\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0,1)$. Так как $\forall x \in (0,1)\colon x^n \to_{n\to\infty} 0$, $f_n \to f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. *$f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что*

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \to f \Longrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Longleftrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется равномерно ограниченной на E, если существует такое M, что

$$\forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leqslant M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. *Из равномерной сходимости следует поточечная*

1. *Если для всех $x \in E$ выполнено*
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$
где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E.

2. *Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что*
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$
то f_n не сходится равномерно к f на E.

3. *Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$.*

Доказательство.
$$\sup_{x\in E}|f_n(x)g_n(x)| \leqslant M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x\in E}|f_n(x)|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
□

4. **Критерий Коши**. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E, согда*[1] *для любого положительного ε существует N, что*
$$\forall n, m > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Тогда для любых $n, m > N$
$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)_n| \leqslant& \\ &\leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаметальна.
Следовательно, существует предел $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Устремим $m \to \infty$. Тогда
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

[1] С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

□

5. *Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f тоже непрерывна в точке a.*

Доказательство. Проверим, что
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что
$$\forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что
$$\forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.1.1}$$
Так как f_n непрерывна в точке a, можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:
$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$
Используем два полученых неравенства:
$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| \leqslant&\\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| +\\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| +\\ &+ |f_n(a) - f_n(a)| <\\ &< \frac{\varepsilon}{3} * 3 = \varepsilon\end{aligned}$$

□

6. **Теорема Стокса-Зайделя**. *Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна на E.*

Доказательство. Следствие из 5[прошлого свойства]. □

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функционоальный ряд

Рассмотрим функции $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — функциональный ряд,}$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — частичная сумма ряда.}$$
Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.
$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \to 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K.

Свойства.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* E, *когда* $r_n \rightrightarrows 0$ *на* E.

2. **Критерий Коши**. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* E, *когда для всех* $\varepsilon > 0$ *существует такое* N, *что*
$$\forall m > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \colon \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x) \right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. **Необходимое условие равномерной сходимости ряда**. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* E, *то* u_n *равномерно сходится к 0.*

   Доказательство. По критерию Коши для $p = 1$. □

4. **Признак сравнения**. *Пусть* $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}$ [2] *и для всех* $x \in E$ *выполнено неравенство* $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходится равномерно на* E, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *тоже сходится равномерно на* E.

   Доказательство. Обозначим частичные суммы
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$
   Заметим, что
$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \leqslant |C_m(x) - C_n(x)|.$$
   Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше ε при $m, n > N$ и $x \in E$. Тогда можем применить критерий Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. □

[2] Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае $\mathbb{C}$ не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве