

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \rightarrow f$), если

$$\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество \mathbb{R}^n .

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N \forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$