[section]

Конспект по матанализу в формате вопросов коллоквиума
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 2, 2019

Contents

Chapter 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

   (a) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

      i. $a + b = b + a$ (коммутативность)

      ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)

      iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)

      iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

   (b) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

      i. $xy = yx$ (коммутативность)

      ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)

      iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)

      iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)

      v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \overset{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на $\mathbb{R}$

   Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

   Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

   Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

   Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} a = b \\ a > b \\ a < b \end{array}\right.$ (антисимметричность)

(b) $a < b \land b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

(c) $a < b \land c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d) $a < b \land c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e) $u < v \land x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества на $\mathbb{R}$

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты)**.** $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}(\text{замкнутый отрезок})$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}(\text{открытый слева отрезок})$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}(\text{открытый справа отрезок})$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}(\text{открытый отрезок})$$

Def 5 (Лучи)**.** $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists\ x \in \mathbb{R} : a \leq x\ \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists\ y \in \mathbb{R} : a \geq y\ \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A.

$//\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

Аксиома (Архимед)**.** *Множество натуральных чисел не ограниченно сверху.*

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Доказательство. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. $\square$