Определения

Лекция 1

- для произвольных X и Y выражения

$$X \cap Y \;:=\; \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \quad \text{и} \quad X \setminus Y \;:=\; \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}$$

задают множества;

- для произвольного непустого X выражение

$$\bigcap X \;:=\; \{u \mid u \in v \text{ для всех } v \in X\}$$

задаёт множество.

$$\bigcup X \;:=\; \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое традиционно называют объединением X. В частности, для произвольных X и Y мы можем определить

$$X \cup Y \;:=\; \bigcup\{X, Y\} \;=\; \{u \mid u \in X \vee u \in Y\},$$

называемое объединением X и Y.

$$x \subseteq y \;:=\; \forall v\,(v \in x \to v \in y).$$

Стало быть, выражение

$$\mathcal{P}(X) \;:=\; \{u \mid u \subseteq X\}$$

задаёт множество, которое называют множеством-степенью X.

Рассмотрим условие

$$\mathrm{Ind}\,(x) \;:=\; \varnothing \in x \wedge \forall u\,(u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Будем называть X индуктивным, если верно $\mathrm{Ind}\,(X)$. Интуитивно

Под бинарными (или двухместными) отношениями между X и Y мы будем понимать произвольные подмножества $X \times Y$. В частности, при $X = Y$ мы будем называть их ещё бинарными (или же двухместным) отношениями на X.

Пусть $R \subseteq X \times Y$. Временами мы будем использовать «инфиксную нотацию» и писать xRy вместо $(x, y) \in R$. Множества

$$\operatorname{dom}(R) := \{u \in X \mid \exists v\, uRv\} \quad \text{и}$$
$$\operatorname{range}(R) := \{v \in Y \mid \exists u\, uRv\},$$

называют областью определения и областью значений R соответственно. Для каждого $U \subseteq X$ множество

$$R[U] := \operatorname{range}(R \cap U \times Y) = \{v \in Y \mid \exists u\, (u \in U \wedge uRv)\}$$

называется образом U относительно R.

Обратное отношение к R определяется как

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Очевидно, его существование (как множества) гарантирует Sep, ведь для произвольной $(x, y) \in R$ выполнено $(y, x) \in Y \times X$. Если $V \subseteq Y$, то образ V относительно R^{-1} нередко называют прообразом V относительно R. Отметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{range}(R) &= \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right) = R[X], \\ \operatorname{range}\left(R^{-1}\right) &= \operatorname{dom}(R) = R^{-1}[Y]. \end{aligned}$$

Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ множество

$$R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y\, (xRy \wedge yQz)\}$$

называется композицией R и Q. Среди бинарных отношений на X особое место занимает

$$\mathrm{id}_X := \{(x, x) \mid x \in X\} = \left\{(x, y) \in X^2 \mid x = y\right\},$$

называемое тождественным отношением на X.

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ функционально, если

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Далее, R называют функцией из X в Y, и пишут $R : X \to Y$, если $\mathrm{dom}\,(R) = X$ и R функционально.

Пусть $f : X \to Y$. Значит, для любого $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называется значением f в x и обозначается через $f\,(x)$. Так, мы получаем

$$\mathrm{range}\,(f) \;=\; \{f\,(x) \mid x \in X\}.$$

Для каждого $U \subseteq X$ ограничение (или сужение) f *на* U определяется как

$$f \restriction_U \;:=\; f \cap U \times Y.$$

Разумеется, $f \restriction_U$ будет функцией из U в Y. Вообще, если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f \restriction_U = g$, то g называют ограничением f, а f — расширением g. Обозначим

$$Y^X \;:=\; \{f \mid f : X \to Y\}.$$

Под двухместными, трёхместными и т.д. функциями из X в Y понимают элементы Y^{X^2}, Y^{X^3} и т.д.

Функцию f из X в Y называют:

- сюрьективной, или на, если $\mathrm{range}\,(f) = Y$;
- инъективной, или одно-однозначной, если f^{-1} функционально.
- биективной, если f сюрьективна и инъективна.

Сюрьективные функции также называют сюрьекциями, инъективные — инъекциями, а биективные — биекциями. То, что f является биекцией из X на Y, иногда записывается так:

$$f : X \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Y.$$

Лекция 2

Важным следствием Inf является

$$\exists X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{Ind}\,(Y) \to X \subseteq Y)). \qquad (\mathrm{Nat})$$

Ясно, что Nat гарантирует существование наименьшего по включению индуктивного множества, которое обозначают через $\mathbb{N}$, или $\aleph_0$, или ω. Элементы $\mathbb{N}$ называют натуральными числами, разумеется.

Определим функцию последователя из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ как

$$\mathsf{s} \;:=\; \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}.$$

Под (естественным) порядком на $\mathbb{N}$ мы будем понимать

$$< \;:=\; \left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\right\}.$$

Лекция 3

Параметризованная теорема о рекурсии позволяет задать, например, сложение на $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{cases} +\,(k, 0) & = \; k, \\ +\,(k, \mathsf{s}\,(m)) & = \; \mathsf{s}\,(+\,(k, m)). \end{cases}$$

Здесь требуемые функции g_0 и h определяются по правилам

$$g_0\,(k) \;:=\; k \quad \text{и} \quad h\,(k, m, n) \;:=\; \mathsf{s}\,(n).$$

Разумееся, вместо $+\,(k, n)$ обычно пишут $k + n$. Очевидно,

$$+\,(k, 1) \;=\; +\,(k, \mathsf{s}\,(0)) \;=\; \mathsf{s}\,(+\,(k, 0)) \;=\; \mathsf{s}\,(k),$$

а потому данная запись согласуется с ранее введённым нами обозначением $k + 1$ для $\mathsf{s}\,(k)$.

С помощью параметризованной теоремы о рекурсии легко задать и другие арифметические операции на $\mathbb{N}$, такие как умножение и возведение в степень:

$$\begin{cases} k \cdot 0 & = \; 0, \\ k \cdot \mathsf{s}\,(m) & = \; (k \cdot m) + k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k^0 & = \; 1, \\ k^{\mathsf{s}(m)} & = \; k^m \cdot k. \end{cases}$$

(В частности, мы считаем $0^0 = 1$.)

Бинарное отношение f между X и Y называют частичной функцией из X в Y, и пишут $f :\subseteq X \to Y$, если f функционально.

Для произвольного X определим

$$X^* \ := \ \{f \mid \exists n \in \mathbb{N} \,(f : n \to X)\}.$$

Элементы X^* называют конечными последовательностями эл-ов X.

Напоследок приведём версию для класс-функции. Условие $\Phi(x, y)$ называется функциональным, если

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2).$$

Пусть $\Phi(x, y)$ функционально и u удовлетворяет $\exists y \, \Phi(u, y)$. Тогда за $[\![\Phi]\!](u)$ мы будем обозначать то самое единственное y, которое удовлетворяет $\Phi(u, y)$. Наконец, в случае, когда $\forall x \, \exists y \, \Phi(x, y)$, мы будем говорить, что Φ тотально.

Говорят, что X и Y равномощны, и пишут $X \sim Y$, если существует биекция из X на Y.

Рассмотрим один полезный пример. Пусть нас интересуют только подмножества X. Тогда для $Y \subseteq X$ под его характеристической функцией понимают $\chi_Y : X \to 2$, действующую по правилу

$$\chi_Y(x) \ := \ \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y, \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Говорят, что X по мощности меньше или равно Y, и пишут $X \preccurlyeq Y$, если существует инъекция из X в Y. Очевидно,

$$X \preccurlyeq Y \quad \Longleftrightarrow \quad X \sim Z \ \text{ для некоторого } \ Z \subseteq Y.$$

Запись $X \prec Y$ является сокращением для условия $X \preccurlyeq Y \wedge X \nsim Y$

Лекция 4

Говорят, что X имеет n элементов (или X имеет мощность n), где $n \in \mathbb{N}$, если $X \sim n$. Далее, X называют конечным, если $X \sim n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и бесконечным в противном случае.

Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

Для произвольного X обозначим

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \ := \ \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}.$$

Лекция 5

Под частично упорядоченным множеством, или ч.у.м., понимается упорядоченная пара вида $\langle A, \leqslant \rangle$, где $\leqslant$ — частичный порядок на A; в случае, когда $\leqslant$ линейно, $\langle A, \leqslant \rangle$ называется линейно упорядоченным множеством, или л.у.м.

Вообще, (непустые) множества с заданными на них предикатами и функциями называются структурами. В роли метапеременных для структур выступают готические прописные буквы: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...

Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и непустое $S \subseteq A$. Говорят, что $a \in A$ является:

- максимальным для S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $\neg(\exists x \in S)\, a < x$;
- минимальным для S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $\neg(\exists x \in S)\, x < a$;
- наибольшим для S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $(\forall x \in S)\, x \leqslant a$;
- наименьшим для S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $(\forall x \in S)\, a \leqslant x$.

При $S = A$ уточнение «для S» опускают. Кроме того, a называют:

- верхней гранью для S в $\mathfrak{A}$, если $(\forall x \in S)\, x \leqslant a$;
- нижней гранью для S в $\mathfrak{A}$, если $(\forall x \in S)\, a \leqslant x$;
- супремумом для S в $\mathfrak{A}$, если a — наим. верх. грань для S в $\mathfrak{A}$;
- инфимумом для S в $\mathfrak{A}$, если a — наиб. ниж. грань для S в $\mathfrak{A}$.

Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Будем говорить, что функция f из A в B сохраняет порядок, или является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если для любых $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \leqslant_A a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \leqslant_B f(a_2). \qquad (*)$$

Композиция гомоморфизмов снова является гомоморфизмом, как легко видеть. Инъективный гомоморфизм f из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называется вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если $(*)$ усиливается до эквивалентности.

Под изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ понимается сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если существует изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ называют автоморфизмами $\mathfrak{A}$. Их можно воспринимать как «абстрактные симметрии».

Говорят, что для ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ верен принцип трансфинитной индукции, если для всякого $X \subseteq A$,

$$\forall x \in A\, ((\forall y < x)\, y \in X \to x \in X) \quad \longrightarrow \quad X = A.$$

Кроме того, будем говорить, что для $\mathfrak{A}$ верен принцип минимального элемента, если для любого $X \subseteq A$,

$$X \neq \varnothing \quad \longrightarrow \quad \exists x \in X\, ((\forall y \in X)\, y \not< x);$$

такого рода ч.у.м. называют фундированными.

Фундированные л.у.м. ещё называют вполне упорядоченными множествами, или в.у.м., а соответствующие им (линейные) порядки — полными порядками. В частности, все ординалы будут в.у.м.

Пусть дано в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$. Мы будем называть $S \subseteq A$ начальным сегментом $\mathfrak{A}$, если для любых $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \leqslant a_2 \text{ и } a_2 \in S \quad \Longrightarrow \quad a_1 \in S.$$

В частности, легко видеть, что для каждого $a \in A$ множество

$$[0, a)_{\mathfrak{A}} := \{x \in A \mid x < a\}$$

является начальным сегментом $\mathfrak{A}$. Когда ясно, о каком $\mathfrak{A}$ идёт речь, нижний индекс $\cdot_{\mathfrak{A}}$ обычно опускается.

Обозначим через $\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$ множество всех начальных сегментов в.у.м. $\mathfrak{A}$, отличных от A, и определим

$$\subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \;:=\; \{(U,V) \in \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \times \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \mid U \subseteq V\}.$$

Разумеется, $\subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}}$ является частичным порядком на $\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$. Более того:

Лекция 6

Будем называть X транзитивным, если $\bigcup X \subseteq X$, что равносильно $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Для произвольного X определим

$$\in_X \;:=\; \{(u,v) \in X \times X \mid u \in v\}.$$

Мы будем говорить, что X является ординалом, или ординальным числом, если X транзитивно и $\in_X$ — строгий полный порядок на X. Для обозначения ординалов используют α, β, γ и их производные. При этом вместо $\alpha \in \beta$ нередко используется запись $\alpha < \beta$.

Пусть X — множество ординалов. Очевидно, транзитивность X равносильна тому, что для любых ординалов α и β,

$$\alpha < \beta \quad \text{и} \quad \beta \in X \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in X,$$

а потому мы можем воспринимать транзитивное X как «начальный сегмент» в классе всех ординалов относительно $<$.

Стоит отметить, что для каждого ординала α множество

$$\alpha + 1 \;:=\; \alpha \cup \{\alpha\}$$

является ординалом; при этом $\alpha \subsetneq \alpha + 1$ и не существует X такого, что $\alpha \subsetneq X \subsetneq \alpha + 1$. Ненулевой ординал α называется непредельным, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β, и предельным в противном случае. Как легко видеть, для любых ординалов α и β,

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 1 = \beta + 1.$$

Значит, у всякого непредельного ординала α имеется единственный «предшественник», которого можно обозначить через $\alpha - 1$.

Ясно, что для любых ординалов α и β,

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \simeq \langle \beta, \in_\beta \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Если $\mathfrak{A}$ — в.у.м., то $\operatorname{ord}(\mathfrak{A})$ будет обозначать ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$. Для любых ординалов α и β определим

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &:= \operatorname{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \oplus \langle \beta, \in_\beta \rangle), && \text{Error!} \\ \alpha \cdot \beta &:= \operatorname{ord}(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \otimes \langle \beta, \in_\beta \rangle). && \checkmark \end{aligned}$$

Очевидно, при данной интерпретации $\alpha + 1$ совпадает с $\alpha \cup \{\alpha\}$, т.е. расхождения с введённым ранее обозначением не возникает.

Отметим, что класс всех ординалов

$$\mathrm{Ord} := \{\alpha \mid \alpha \text{ — ординал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае Ord оказался бы ординалом, и мы получили бы $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$.

Лекция 7

Для любых множества X и ординала α обозначим

$$X^{<\alpha} := \{f \mid \exists \beta < \alpha\, (f : \beta \to X)\}.$$

Вообще, если $f : \beta \to X$, где β — ординал, то f называют β-посл-тью элементов X, или трансфинитной последовательностью элементов X длины β; поэтому $X^{<\alpha}$ — это просто множество всех трансфинитных последовательностей элементов X длины меньше α.

Ординал называют кардиналом, или кардинальным числом, если он не равномощен никакому меньшему ординалу (т.е. никакому своему элементу). Для обозначения кардиналов используют κ, μ, λ и т.п.

Ясно, что для любых кардиналов κ и μ,

$$\kappa \sim \mu \iff \kappa = \mu.$$

В дальнейшем $\operatorname{card}(X)$ будет обозначать кардинал, равномощный X; вместо $\operatorname{card}(X)$ часто пишут $|X|$, разумеется.

Для любых кардиналов κ и μ определим

$$\begin{aligned} \kappa + \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}), \\ \kappa \cdot \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \mu). \end{aligned}$$

Отметим, что класс всех кардиналов

$$\mathrm{Card} \ := \ \{\kappa \mid \kappa \text{ — кардинал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае $\bigcup \mathrm{Card}$ также было бы множеством, но оно, как нетрудно видеть, совпадает с классом всех ординалов *(в качестве простого упражнения)*.

Запись 2^A может иметь разный смысл в зависимости от того, идёт ли речь о множествах в целом, об ординалах или о кардиналах. В случае кардиналов считается, что

$$2^{\kappa} \ := \ \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\kappa)),$$

а не множеству всех функций из κ в 2 (которое, впрочем, имеет ту же мощность). Очевидно, $2^{\kappa} > \kappa$ для всех кардиналов κ.

Для каждого кардинала κ обозначим

$$\kappa^{+} \ := \ \text{наименьший из кардиналов, бóльших } \kappa.$$

Вместо $\aleph_0^+$ пишут $\aleph_1$, вместо $\aleph_1^+$ — $\aleph_2$ и так далее. На самом деле, можно было бы определить $\aleph_\alpha$ для произвольного ординала α.

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \mathrm{card}\,(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \qquad \text{(CH)}$$

Лекция 8

Пусть дано ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$. Под цепью в $\mathfrak{A}$ понимается непустое $S \subseteq A$ такое, что для любых $a_1, a_2 \in S$,

$$a_1 \ \leqslant_A \ a_2 \quad \text{или} \quad a_2 \ \leqslant_A \ a_1.$$

Иными словами, цепи суть непустые подмножества носителя, индуцирующие линейные порядки.