

Конспект по матанализу  
II семестр  
Современное программирование, факультет математики и  
компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

10 апреля 2020 г.

# Оглавление

# Глава 1

## Интергирование

### 1.1

#### Лекция 1

14 feb

##### 1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i,$$

а  $R_{n,x_0}$  — остаток.

**Theorem 1.1.1** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).  $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$ ,  $x, x_0 \in (a, b)$ . Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База:  $n = 1$ . По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ .

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

### 1.1.2 Теорема о среднем

**Theorem 1.1.2** (Хитрая теорема о среднем).  $f, g \in C[a, b]$ ,  $g \geq 0$ . Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

*Доказательство.* Найдем максимум и минимум  $f$  на  $[a, b]$ .

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$\begin{aligned} m \int_a^b g(x)dx &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \end{aligned}$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

#### Corollary 1

Если  $|f^{(n+1)}| \leq M$ , то существует понятие какая оценка сверху для  $|R_{n,x_0}f(x)|$ .

**Theorem 1.1.3.** Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

*Доказательство.* Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 1.1.2, где  $g(t) = (x-t)^n$ , получаем, что

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \cdot \left( -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_{x_0}^x.$$

□

## 1.2 Приближенное вычисление интеграла

**Definition 1: Дробление**

Пусть  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $a < x_0 < \dots < x_n < b$ . Тогда  $\tau$  называется дроблением отрезка  $[a, b]$ .

Мелкость дробления  $|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ .

$\Theta$  называется оснащением дробления  $\tau$ , если  $\Theta = \{t_1, \dots, t_n\} : t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ .

Пара  $(\tau, \Theta)$  называется оснащённым дроблением.

**Definition 2: Интегральная сумма**

Если  $f \in C[a, b]$ ,  $(\tau, \Theta)$  — оснащённое дробление отрезка  $[a, b]$ , интегральной суммой называется

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

**Theorem 1.2.1.**  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \Theta)$  — оснащённое дробление отрезка  $[a, b]$ ,  $|\tau| < \delta :$

$$\left| S_{\tau, \Theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \Theta}(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

*Доказательство.* По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] : \left( |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_j)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{|b - a|} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

**1.3 Приближенное вычисление интеграла****Definition 3: Дробление**

Пусть  $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $a < x_0 < \dots < x_n < b$ . Тогда  $\tau$  называется дроблением отрезка  $[a, b]$ .

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащённое дробление — пара  $(\tau, \Theta)$

**Definition 4**

$f \in C[a, b]$ ,  $(\Theta, \tau)$  — оснащенное дробление отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

называется **интегральной суммой**.

**Theorem 1.3.1.**  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такие, что для любого оснащенного дробления  $(\tau, \Theta)$  отрезка  $[a, b]$ ,  $|\tau| < \delta$  :

$$\left| S_{\tau, \Theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \Theta} \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

*Доказательство.* По теореме Кантора о равномерной непрерывности  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :  $(\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(r_j)| (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь  $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$ . □

## Лекция 2

21 feb

### 1.3.1 Свойства

**Property.**

1  $c \in (a, b)$ :

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\rightarrow b} f dx.$$

2  $\int_a^{\rightarrow b} f dx$  — сходится  $\implies \lim_{A \rightarrow b} \int_A^{\rightarrow b} f = 0$

2' Если  $\int_A^{\rightarrow b} f \not\rightarrow_{A \rightarrow b-} \implies \int_a^{\rightarrow b} f$  расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).

**линейность**  $f, g$  — функции на  $[a, b]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся} \implies \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g.$$

**МОНОТОННОСТЬ**  $f \leq g, \int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$  сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g.$$

### Definition 5: Абсолютная сходимость

Говорят, что  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится абсолютно, если сходится  $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ .

Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится абсолютно, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится и верно неравенство

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f \right| \leq \int_a^{\rightarrow b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\rightarrow b} |f| \text{ сходится} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \implies \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого  $B$  :

$$\left| \int_a^B f \right| \leq \int_a^B |f| dx.$$

### Definition 6: Условная сходимость

$\int_a^{\rightarrow b} f$  называется условно сходящимся, если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, а  $\int_a^{\rightarrow b} |f|$  расходится.

**интегрирование по частям**  $f, g \in C^1[a, b]$

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g, \quad f g \Big|_a^{\rightarrow b} = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство.  $\square$

**замена переменной**  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b), \varphi \in C^1[\alpha, \beta), f \in C[a, b)$ . Если существует предел, обозначим его так:  $\exists \lim_{x \rightarrow \beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$ .

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

Доказательство.  $D \in [\alpha, \beta)$ .

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y) dy.$$

Обычная формула замены перменной:  $\Phi = F(\varphi(x))$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$ . Возьмем любую последовательность  $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \rightarrow \beta-$ .

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\exists \int_{\alpha}^{\beta-} (f \circ g)\varphi'$ . Надо проверить, что  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ .

1.  $\varphi(\beta-) < b$  — очевидно.

2.  $\varphi(\beta-) = b$   $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b), c_n \rightarrow b - \exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = c_n$ .

Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к  $\beta$ , либо к числу меньшему  $\beta$ .

•  $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \beta$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_{n_k})} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_{n_k}} f.$$

•  $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta$

$$\varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta-)) < b.$$

Но должно быть равно  $b$ . Противоречие.

Значит  $\gamma_n \rightarrow \beta$ .

$$\int_{\alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

**Theorem 1.3.2** (Признаки сравнения). Пусть  $0 \leq f \leq g$ ,  $f, g \in C[a, b)$ . Тогда

1. если  $\int_a^{\rightarrow b} g$  сходится, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится,
2. если  $\int_a^{\rightarrow b} g$  расходится, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  расходится.

*Доказательство.*

1. Используем критерий Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Rightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

**Theorem 1.3.3** (Признаки Абеля и Дирихле).  $f \in C[a, b)$ ,  $g \in C^1[a, b)$ ,  $g$  монотонна.

**Признак Дирихле** Если  $f$  имеет ограниченную первообразную на  $[a, b)$ ,  $g \rightarrow 0$ , то  $\int_a^{\rightarrow b} fg$  сходится.

**Признак Абеля** Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится,  $g$  ограничена, то  $\int_a^{\rightarrow b} fg$  сходится.

*Доказательство.*  $F$  — первообразная  $f$ .  $F(B) = \int_a^B f$ .

$$\int_a^{\rightarrow b} fgdx = \int_a^{\rightarrow b} g dF = Fg \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} Fg'dx.$$



**признак Даламбера**  $\lim_{B \rightarrow b-} F(B)g(B) = 0$

**признак Абеля**  $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть  $M = \max F$ , он существует, так как  $F$  ограничена в любом случае.

$$\int_a^{b-} F g' dx \leq M \cdot \int_a^{b-} |g'| dx = M \cdot \left| \int_a^{b-} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|.$$

□

**Example 1.3.1.**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай  $\alpha > 1$ . Метод удавливания логарифма:  $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$ ,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \leq C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$  сходится.

Если  $\alpha < -1$ ,

$$\varepsilon > 0 \quad \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\rightarrow \infty}.$$

Тогда  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$  расходится.

Если  $\alpha = -1$ , сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln \frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходится.

**Example 1.3.2.**

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$ .

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2.  $0 < \alpha \leq 1$ . По признаку Дирихле:  $f(x) = \sin x$  – ограничена первообразная,  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  – убывает.

Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

**Example 1.3.3** (Более общий вид).

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$ ,  $f$  монотонна.

Если при  $x \rightarrow +\infty$   $f \rightarrow 0$ , то интегралы сходятся,

Если при  $x \rightarrow +\infty$   $f \not\rightarrow 0$ , то интегралы расходятся.

*Remark.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится} \not\Rightarrow f \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

*Practice.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 dx \text{ сходится?}$$

## 1.4 Вычисление площадей и объемов

### 1.4.1 Площади

1.  $f \in C[a, b]$ ,  $f \geq 0$ ,  $P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ . Тогда  $S(P_f) = \int_a^b f(x) dx$
2. Криволинейная трапеция.  $f, g \in C[a, b]$ ,  $f \geq g$ ,  $T_{f,g} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$ . Тогда  $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

#### Corollary 2: Принцип Кавальери

Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ ,  $f \geq 0$ ,  $g$  непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [\alpha, \beta], r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть  $\tau$  — дробление  $[\alpha, \beta]$ ,  $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n$ ,  $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \beta$ . Пусть  $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$ ,  $m_j = \min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$ .

$$\sum \frac{m_j^2}{2} (\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leq S(\tilde{P}_f) \leq \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$ . Значит

$$S(\tilde{P}_f) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

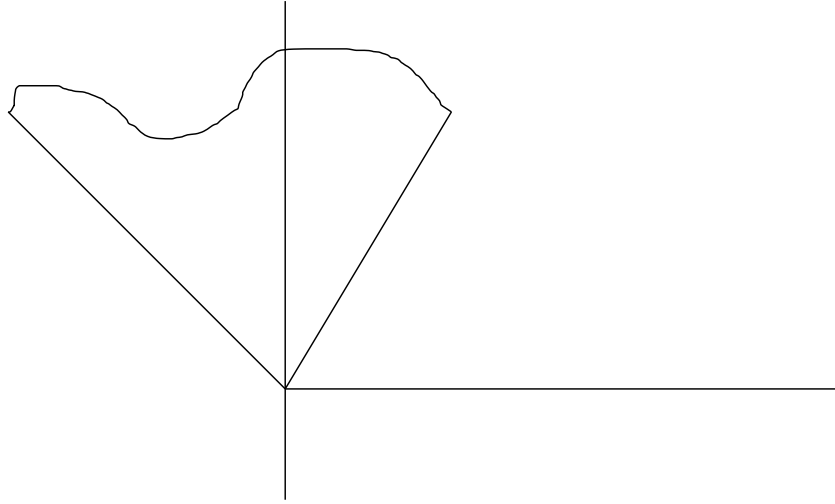


Рис. 1.1: sector

4. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой.  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t)$ .  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx.$$

$$\int_A^B g(x)dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [b, a+T] \\ dx=x'(t)dt \\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t)dt$$

$$\int_A^B f(x)dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [a, b]}}{=} - \int_b^a y(t)x'(t)dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx = - \int_a^{a+T} y(t)x'(t)dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t)dt.$$

### 1.4.2 Объемы

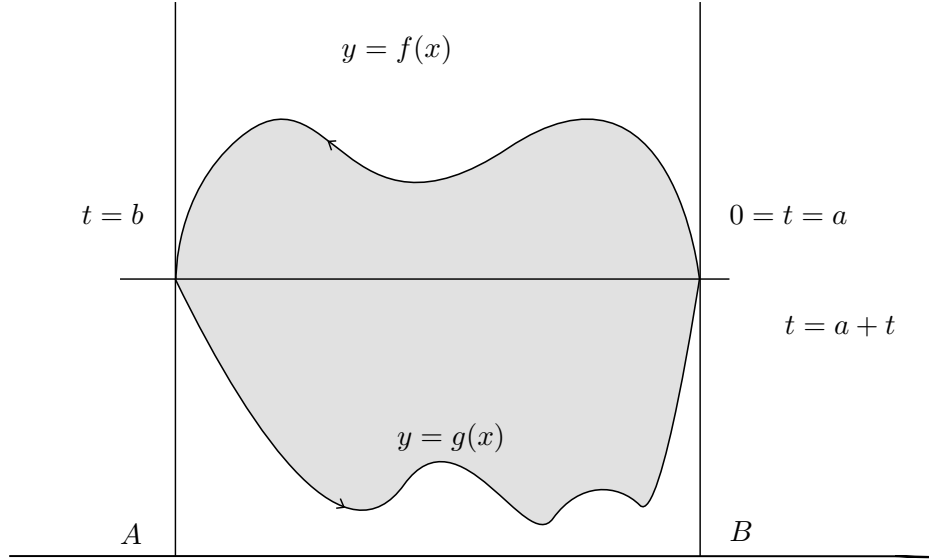
1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура  $T \subset \mathbb{R}^3$ ,  $T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$ .

#### Definition 7

Сечение  $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$ .

$\forall x : T(x)$  имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$



3. Дополнительное ограничение не  $T$ :

$$\forall \Delta \subset [a, b] \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

**Example 1.4.1.**  $T$  — тело вращения,  $f \in C[a, b]$ ,  $f \geq 0$ .

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

*Доказательство формулы.* Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием  $V = SH$ . Рассмотрим тело  $T$  и  $\tau$  дробление отрезка  $[a, b]$ . Поместим его между двумя цилиндрами.

$$\sum (x_j - x_{j-1})S(T(x_*\Delta_j)) \leq V \leq \sum (x_j - x_{j-1})S(T(x^*\Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к  $\int_a^b S(T(x))dx$  как интегральные суммы. □

**Example 1.4.2** (Интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$T = \{0 \leq y \leq e^{-(x^2+y^2)}\}$$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = I e^{-x^2}.$$

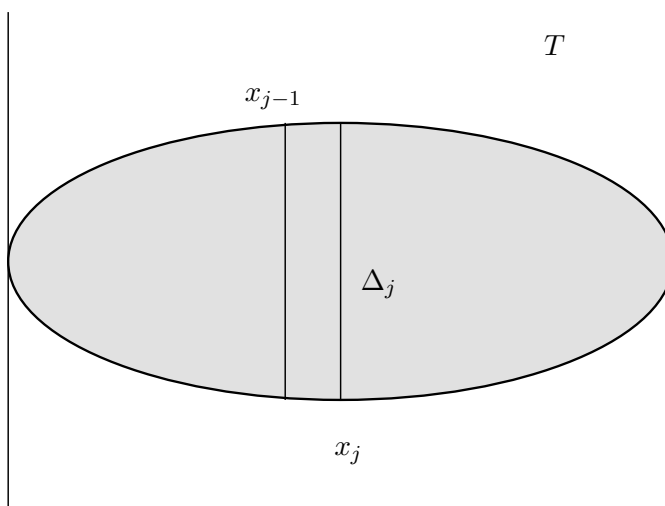


Рис. 1.2: cilinder

## Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что  $V = I^2$ .

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где  $r(y) = \sqrt{-\ln y}$ . Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi (y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

1.5 Кривые в  $\mathbb{R}^n$  и их площади**Definition 8: Путь**

Путь в  $\mathbb{R}^n$  — отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \in C[a, b]$ .

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути —  $\gamma(a)$ , конец пути —  $\gamma(b)$ .

Носители пути —  $\gamma([a, b])$ .

$\gamma$  замкнут, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

$\gamma \in C^n[a, b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^n[a, b] \iff \gamma$  —  $r$ -гладкий путь.

$\gamma^{-1}$  — противоположный путь, если  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a - b + t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

*Note.* Разные пути могут иметь один общий носитель.

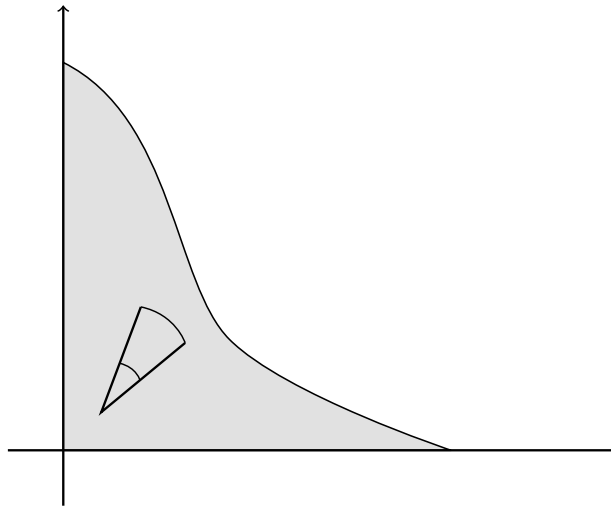


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона

**Definition 9**

Два пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  эквивалентны, если существует строго возрастающая сюръекция

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

**Statement.** Это отношение эквивалентности.

**Definition 10: Кривая**

Кривая в  $\mathbb{R}^n$  — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

**Example 1.5.1.**

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t). \\ \gamma_2 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2(t) &= (-t, \sqrt{1-t^2}). \end{aligned}$$

Можно определить:

- начало кривой
- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривая  $r$ -гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

**1.5.1 Поговорим о длине**

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in (a, b)$ .

$$\gamma = \gamma|_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma|_{[c,b]} \implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$ , где  $\forall$  дробления  $[a, b]$   $\tau = \{x_j\}$

### Definition 11: Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — путь.  $l(\gamma) = \sup_{\tau} l_{\tau}$ , где

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \quad \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

*Practice.* Придумать пример бесконечно длинного пути.

### Definition 12

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

### Definition 13

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

**Property.**

$$\boxed{1.} \quad \gamma \sim \tilde{\gamma} \implies l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$$

$$\boxed{2.} \quad \text{Аддитивность}$$

$$\gamma : [a, b], c \in (a, b) \quad \gamma = \gamma|_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma|_{[c,b]}.$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}).$$

*Доказательство.*

$$\boxed{1 \implies 2} \quad \tau \text{ — дробление } [a, b].$$

$$\begin{aligned} \tau^l &= (\tau \cap [a, c] \cup \{c\}) \\ \tau^r &= (\tau \cap [c, b] \cup \{c\}) \end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| \leq l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \leq l(\gamma^l) + l(\gamma^r).$$

$$\boxed{2 \implies 1} \quad \tau^l \text{ — дробление } [a, c], \tau^r \text{ — дробление } [c, b]. \tau = \tau^l \cup \tau^r.$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\leq l_{\tau}(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \\ \sup_{\tau^l} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^l \\ \sup_{\tau^r} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^l}(\gamma^l) \quad \forall \tau^r \end{aligned}$$

□

**Theorem 1.5.1** (Длина гладкого пути).  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкий путь. Тогда  $\gamma$  обязательно спр и

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2}.$$

*Доказательство.* 1.  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок. Пусть  $m_j(\Delta) = \min_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$ ,  $M_j(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$ .

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (m_j(\Delta))^2}, \quad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех  $\Delta \subset [a, b]$  чему равно  $l(\gamma|_{\Delta})$ ?

Пусть  $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$ . Тогда

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1})|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} =$$

$$= \sum_{j=1}^m (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2}$$

Выражение под корнем не превосходит  $M(\Delta)$  и не менее  $m(\Delta)$

$$|\Delta| m(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq |\Delta| M(\Delta).$$

2.

$$\int_{\Delta} |\gamma'_k(t)| dt = \int_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} dt.$$

$$m(\Delta) \leq \max \sqrt{\dots} \leq M(\Delta).$$

$$|\Delta| m(\Delta) \leq \int_{\Delta} |\gamma'(t)| dt \leq |\Delta| M(\Delta).$$

3.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \quad \forall j \in [1, k] : |\gamma'_j(s) - \gamma'_j(t)| < \varepsilon.$$

$$|\Delta| < \delta \implies M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leq \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta)| \leq \varepsilon n$$

4. Теперь возьмем дробление  $[a, b]$  на кусочки длиной меньше  $\delta$ .

$$[a, b] = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq l(\gamma|_{\Delta_j}) \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$



$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leq \int_{\Delta_j} |\gamma'| \leq M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq l(\gamma) \leq \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \\ \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq \int_a^b |\gamma'| \leq \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j) |\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_j| = \varepsilon n(b-a).$$

□

**Example 1.5.2.** Посчитаем длину окружности:  $\gamma = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$ ,  $|\gamma'| = 1$ . Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

### 1.5.2 Важные частные случаи общей формулы

1.  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  — путь в  $\mathbb{R}^3$ .

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt.$$

2. Длина графика функции.  $f \in C^1[a, b]$ ,  $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a, b]\}$ .

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах  $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

*Remark.*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок.

$$l(\gamma|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{Дифференциал дуги}} dt.$$

Если  $f$  задана на носителе пути  $\gamma$  получаем «неравномерную длину»:  $\int_a^b f(t) |\gamma'(t)| dt$

## Глава 2

# Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

### 2.1 Нормированные пространства

**Example 2.1.1.**  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ .

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Если  $p = +\infty$ ,  $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leq j \leq m}$ .

*Note.* Все нормы в  $\mathbb{R}^m$  эквивалентны.

**Example 2.1.2.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт. Рассмотрим множество  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывна}\}$ , оно линейно над  $\mathbb{R}^m$ . Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

**Theorem 2.1.1.**  $C(K)$  — полно.

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность функций  $\{f_n\} \subset C(K)$ . Возьмем  $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальна, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим  $k \rightarrow \infty$ .  $f_k(x) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Возьмем  $n_0 > N$ .  $f_{n_0}$  — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \implies |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |f_{n_0}(x_2) - f(x_2)| \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно,  $f \in C(K)$ . Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon}_{\max_{x \in K} |f - f_n| \leq \varepsilon}.$$

□

**Example 2.1.3.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт. Рассмотрим множество  $l_\infty(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — ограниченна}\}$ , оно линейно над  $\mathbb{R}^m$ . Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

**Theorem 2.1.2.**  $l_\infty(X)$  — полно.

*Доказательство.* Аналогично.

□

*Note.*  $C(K) \subset l_\infty(K)$  — замкнутое подпространство.

*Note.* Замкнутое подпространство полного пространства полно.

**Example 2.1.4.**  $K = [a, b]$ ,  $C^1(K) = C^1[a, b]$ .

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\}.$$

Определим норму  $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

**Theorem 2.1.3.**  $(C^1[a, b], \varphi_3)$  полно.

*Доказательство.*  $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$  фундаментальна. Так как  $\varphi_3(f_n - f_k) \rightarrow_{n, k \rightarrow \infty} 0$ ,  $\varphi_1(f_n - f_k) \rightarrow 0$  и  $\varphi_2(f_n - f_k) \rightarrow 0$ . Тогда  $\|f_n - f_k\| \rightarrow 0$  и  $\|f'_n - f'_k\| \rightarrow 0$ . Получаем, что  $\{f_n\}$  фундаментальна в  $C[a, b]$  и  $\{f'_n\}$  фундаментальна в  $C[a, b]$ .

Докажем два пункта:

1.  $f \in C^1$ , тое есть  $\exists g = f'$ .
2.  $f_3(f_n - f) \rightarrow 0$

Докажем, что  $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \rightarrow 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max |f'_n - g| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$\begin{aligned} &= \left| f_n(x) - \left( \int_a^x f'_n(t)dt + f(a) \right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x (g(t) - f'_n(t))dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x |g(t) - f'_n(t)|dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2) \end{aligned}$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что  $f_n \rightarrow f \wedge f'_n \rightarrow g$ .

□

*Remark.*  $\|f_n - f\| \rightarrow 0, \quad f_n \in C(K) \implies f \in C(K).$

$$x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow f(x_0).$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f(n).$$

*Remark.* Из того, что  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  и  $\|f'_n - g\|$ , следует  $f' = g$ . То есть

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

*Practice.*  $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$

## Лекция 4

6 march

### 2.1.1 Продолжение примеров

1.  $C_p[a, b] = \{f \in C[a, b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a, b]} = \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Это норма:

- Не меньше нуля
- $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- Неравенство треугольника  $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$  (сейчас доказывать не будем)

Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

**Theorem 2.1.4** (без доказательства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $\exists!(Y, \tilde{\rho})$  — полное метрическое пространство, такое что

- (a)  $X \subset Y$
- (b)  $\rho = \tilde{\rho}|_{X \times X}$
- (c)  $Y = dX$

Такое пространство пополняется до  $L_p(a, b)$ .

2.  $l_p = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j|^p\}, \quad p \geq 1$  Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Practice.*  $l_p$  полно

*Note.* В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- $l_p$ . Возьмем шар  $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leq 1\}$

$$e^1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

*Practice.* Проверить не компактность  $B = \{f \in C[a, b] \mid \|f\| = 1\}$  в  $C[a, b]$ .

## 2.2 Сжимающие отображения

### Definition 14

$(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $U : X \rightarrow X$ .  $U$  называется **сжимающим отображением**, если

$$\forall \gamma < 1 \forall x_1, x_2 \in X : \rho(U(x_1), U(x_2)) \leq \gamma \rho(x_1, x_2).$$

**Theorem 2.2.1** (Принцип сжимающих отображений).  $(X, \rho)$  *полно*.

1.  $U$  — сжимающее отображение  $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$  — неподвижная точка
2. Если  $\exists N : U^N$  — сжимающее отображение  $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$

*Доказательство.*

1. Рассмотрим траекторию точки  $x_1$ .

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \dots, x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq$$

$$\dots$$

$$\leq \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n : \rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d (1 + \gamma + \dots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\{x_n\}$  фундаментальна. Так как наше пространство полно, существует предел этой последовательности.  $U(x_n) = x_{n+1}$ . Первое стремится к  $U(x_*)$ , второе — к  $x_*$ .

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2.  $\exists x_*$ , посмотрим на  $U^N(x_*)$ . Посмотрим на последовательное применение  $U$  несколько раз. На  $N$ -ом шаге мы придем в  $x_*$ .

Единственность уже доказали.



**Example 2.2.1** (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка).

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \quad a, b \in C[0, 1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти  $f \in C^1[0, 1]$ . То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt.$$

Заведем отображение  $U : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , что  $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt$ . Хотим найти неподвижную точку отображения  $U$  (то есть такую  $f$ ).

Пусть  $(U_0(f))(x) = - \int_0^x a(t)f(t)dt$ . Правда ли, что

1.  $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2.  $\exists n: U_0^n$  — сжимающее отображение из  $C[0, 1]$  в  $C[0, 1]$ .

Проверим

1. При  $n = 1$ , очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U(U^{n-1}(f)) - U(U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f)) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2.  $\|U_0^n(f - g)\|_\infty \leq \gamma \|f - g\|$

Пусть  $f - g = h$ .  $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma \|h\|$ . Пусть  $M = \max|a|$ ,  $\|h\|_\infty |h(x)|$ .

$$\begin{aligned} (U_0^1(h))(x) &= - \int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ (U_0^2(h))(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2) \left( \int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\ &\vdots \\ (U_0^n(h))(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\dots) dt_n \end{aligned}$$

Оценим

$$|(U_0^n(h))(x)| \leq M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leq \left( M^n \frac{x^n}{n!} \right) \|h\|_\infty.$$

Выражение в скобках стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Значит,  $U_0^n$  сжимающее.

*Note.* На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

$f \in C[0, 1]$ . Так как  $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$ ,  $f \in C^1[a, b]$

*Practice.*  $X$  полно,  $U : X \rightarrow X$ ,  $\forall x, y: \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$ .

1. Верно ли, что  $U$  сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

### 2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

#### Definition 15: Линейное отображение

$X, Y$  — линейные пространства над одним полем скаляров (либо  $\mathbb{R}$ , либо  $\mathbb{C}$ ).  $U : X \rightarrow Y$  называется **линейным**, если

1.  $\forall x_1, x_2 \in X: U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2.  $\forall x \in X, \lambda — \text{скаляр}: U(\lambda x) = \lambda U(x)$

*Note.* Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейных отображений:  $U(x_1) = Ux_1$

**Designation.**  $\text{Hom}(X, Y)$  — множество всех линейных отображений из  $X$  в  $Y$ .

#### Definition 16

$X_1, \dots, X_n$  — линейные пространства,  $Y$  — линейное пространство над одним скаляром.  $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

**Designation.**  $\text{Poly}(X_1, \dots, X_n, Y)$  — множество всех полилинейных отображений.

#### Definition 17

Если  $Y$  — поле скаляров, линейное отображение  $U : X \rightarrow Y$  называется **линейным функционалом**.

**Example 2.2.2.**  $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \text{ лишь конечное число } x_j \neq 0\}$   
 $U : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

**Example 2.2.3** ( $\delta$ -функция).  $\delta : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$ .

**Example 2.2.4.**  $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf = \int_a^b f(x)dx$

**Example 2.2.5.**  $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

**Example 2.2.6.**  $U \in \text{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}}_n; \mathbb{R}), U(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

**Example 2.2.7.**  $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), U(x, y) = (x, y)$

**Example 2.2.8.**  $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) = [x, y]$  — векторное произведение.



**Example 2.2.9.** Определитель, все возможные формы объема.

**Example 2.2.10.**  $U_j \in \text{Hom}(X, Y)$ . Можно сделать из этого полилинейное  $U \in \text{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$ ,  
 $U(x_1, \dots, x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots U_n x_n$ .

**Example 2.2.11.**  $U : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,  $Uf = f'$

**Theorem 2.2.2** (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения).  $X, Y$  — линейные нормированные пространства с одним полем скаляров,  $U \in \text{Hom}(X, Y)$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $U$  непрерывно
2.  $U$  непрерывно в 0
3.  $\exists C \forall x \in X : \|Ux\|_Y \leq C\|x\|_X$

### Definition 18

$U$  — непрерывное линейное отображение (оператор) из  $X$  в  $Y$ .

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X, \|Ux\| \leq C\|x\|\}.$$

$\|U\|$  — операторная норма.

*Note.* Если  $U$  — разрывное отображение, считаем, что  $\|U\| = \infty$ .

*Note.*

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

**Example 2.2.12.** Нормы в прошлых примерах

**2.2.2**  $\|U\| = \infty$

**2.2.3**  $\|U\| = 1$

**2.2.4**  $\|U\| = b - a$

**2.2.5**  $\|U\| = b - a$

**2.2.11**  $\|U\| = 1$

**Theorem 2.2.3** (Условие непрерывности полилинейного отображения).  $U \in \text{Poly}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $X_i, Y$  — линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $U$  непрерывно
2.  $U$  непрерывно в 0
3.  $\exists C \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n: \|U(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|$

*Note.* В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n}\}.$$

### Definition 19: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf \{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \ \|U(x_1, \dots, x_n)\| < C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|\}.$$

**Theorem 2.2.4** (эквивалентные способы вычисления оператора).  $U$  — линейное непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$ . Тогда

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\|.$$

*Доказательство.* Обозначим супремумы за  $A, B, C, D$ . Очевидно, что  $C \geq B$  и  $C \geq D$

$$C = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что  $B \geq A$ .  $x \neq 0$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$ .

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|U\tilde{x}\| \leq B.$$

Значит,  $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq B$ .

Теперь докажем, что  $D \geq A$ .

$$x \neq 0, \varepsilon > 0: \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - \varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leq D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \frac{D}{1-\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D.$$

□

*Remark.* В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

**Theorem 2.2.5** (эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора).  $U : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ .

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|} = \sup_{\|x_j\|=1} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\|x_j\| < 1} = \sup_{\|x_j\| \leq 1}.$$

### 2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

**Theorem 2.2.6** (О свойствах операторной нормы).  $U_1, U_2, U_3 : X \rightarrow Y$  — линейные непрерывные операторы,  $\lambda$  — скаляр. Тогда

1.  $\|U_1 + U_2\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$
2.  $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3.  $\|U\| = 0 \iff U = 0$
4.  $U : X \rightarrow Y, V : Y \rightarrow Z$  — линейные отображения.

$$\begin{aligned}\|VU\| &\leq \|V\| \cdot \|U\| \\ VU &= V \circ U \\ VUx &= V(U(x))\end{aligned}$$

**Designation.**  $L(X, Y) \subset \text{Hom}(X, Y)$  — пространство линейных операторов.

### Лекция 5

*Note.*  $L(X; Y) \subset \text{Hom}(X; Y)$  — линейные отображения из  $X$  в  $Y$ . Это линейное нормированное пространство.

*Note.* То же самое верно для полилинейных отображений. То есть выполнены аксиомы нормы, доказательство аналогичное.  $L(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) \subset \text{Poly}(X_1, \dots, X_n; Y)$ .

**Theorem 2.2.7** (О полноте пространства операторов). Если  $Y$  полно, то  $L(X; Y)$  тоже полно.

*Доказательство.*

1. Построение предельного оператора.

$\{U_n\} \subset L(X, Y)$  — фундаментальна, то есть  $\|U_n - U_m\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим  $x \in X$ :

$$\|U_m x - U_n x\|_Y = \|(U_m - U_n)x\|_Y \leq \|U_m - U_n\| \cdot \|x\|_X \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда  $\{U_m x\}$  фундаментальна в  $Y$ , следовательно,  $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} U_m x =: U(x)$

2. Линейность предельного отображения.

$$U(x_1 + x_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} (U_m(x_1 + x_2)) = \lim U_m x_1 + \lim U_m x_2 = Ux_1 + Ux_2$$

$$U(\lambda x) = \lambda Ux$$

3. Непрерывность  $U$ .

$$\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leq 1 \cdot \|x\|.$$

Устремим  $n \rightarrow \infty$ :

$$\exists N \forall n > N \forall x \in X : \|U_m x - Ux\| \leq \|x\|.$$

По неравенству треугольника, при достаточно большом  $m > N$

$$\|Ux\| \leq \|Ux - U_m x\| + \|U_m x\| \leq \|x\| + \|U_m\| \cdot \|x\| \leq (1 + \|U_m\|) \cdot \|x\|.$$

Следовательно,  $U$  непрерывно.

13 march  
18 апреля  
в 11:00  
в каб 301  
коллоквиум

4. Сходимость  $\{U_m\}$  к  $U$  по норме  $L(X, Y)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X: \|U_m x - U_n x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

При  $x \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > N \forall x \in X: \|U_m x - Ux\| \leq \varepsilon \|x\| \iff \|U_m - U\| \leq \varepsilon.$$

□

**Theorem 2.2.8.** Если  $Y$  полно, то  $L(X_1, \dots, X_n; Y)$  полно.

**Example 2.2.13** (Самый важный случай).  $Y$  — пространство скаляров.  $L(X, Y) = X^*$  — сопряженное пространство — пространство линейных непрерывных функционалов.

**Theorem 2.2.9.**  $L_1 = L(X_1 \dots X_k; L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)) \simeq L(X_1, \dots, X_n; Y) = L_2$ , то есть существует изометрический (сохраняющий норму) изоморфизм.

*Доказательство.* Построим биекцию.  $U \in L_1: U(x_1, \dots, x_k) \in L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)$ ,  
 $U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n) \in Y$ .

Определим  $\tilde{U}(x_1, \dots, x_n) := U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Оно будет полилинейно непрерывно. Это же определение работает и в обратную сторону.

Теперь нужно понять, что с нормой все в порядке.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \left( \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ k < i \leq n}} \|U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)\| \right) = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq n}} \|\tilde{U}(x_1, \dots, x_n)\| = \tilde{U}.$$

□

## 2.3 Дифференциальные отображения

### Definition 20

$X, Y$  — нормированные пространства,  $E \subset X$ ,  $x \in E$ ,  $x$  — внутренняя точка,  $f: E \rightarrow Y$ .  $f$  — дифференцируемо в точке  $x$ , если  $\exists L \in L(X, Y)$ :

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h), \quad h \rightarrow 0, x+h \in E.$$

*Note.*  $x, h \in X$ ,  $f(x), f(x+h) \in Y$ ,  $Lh \in Y$

Что такое  $o(h)$ :

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \alpha(x, h).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

### Definition 21

$L$  — дифференциал  $f$  в точке  $x$ .

**Designation.** Обозначения дифференциала  $D_x f, f'(x), d_x f, df(x)$

Формула из определения выглядит так

$$f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

*Note.* Это определение — дифференцируемость по Фреше.

*Note.* В конечномерном случае из линейности  $L$  автоматически следует непрерывность.

**Theorem 2.3.1.** Если дифференциал в точке  $x$  существует, то он единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\exists L_1, L_2: f(x+h) - f(x) = L_1 h + o(h)$ . Тогда  $L_1 h - L_2 h - o(h)$ , докажем, что  $L = L_1 - L_2$  равно нулю.

Зафиксируем  $h \neq 0$ .

$$\|Lh\| = \frac{\|L(th)\|}{\|t\|} = \underbrace{\frac{\|L(th)\|}{\|th\|}}_{\rightarrow 0, t \rightarrow 0} \|x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\|Lh\| = 0 \implies L = 0$ . □

### Definition 22

Если  $f: E \subset X \rightarrow Y$  ( $E$  открыто),  $f$  дифференцируема во всех точках  $E$ ,  $df: E \rightarrow L(X, Y)$  — производное отображение.

*Note.* Если  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , то  $f$  непрерывна.

### Правила дифференцирования

**Линейность**  $f_1, f_2: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $f_1, f_2$  непрерывны в точке  $x \in E$ . Тогда  $\forall \lambda_1, \lambda_2$  — скаляры:  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  дифференцируема в точке  $x$  и  $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

**Дифференциал композиции**  $X, Y, Z$  — линейные нормируемые пространства,  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$ ,  $U, V$  открыты,  $f: U \rightarrow Y, g: V \rightarrow Z$ ,  $x \in U, f(x) \in V$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $x$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $f(x)$ . Тогда  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x$ .

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= \\ &= dg(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) \\ &= dg(f(x))(df(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\ &= dg(f(x))df(x)h + \underbrace{dg(f(x))o(h) + o(f(x+h) - f(x))}_{=?=o(h)} \\ \frac{\|dg(f(x))o(h)\|_Z}{\|h\|_X} &\leq \frac{\|dg(f(x))\| \|o(h)\|}{\|h\|_X} \rightarrow 0. \\ \frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} &= \underbrace{\frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|f(x+h) - f(x)\|}}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|}}_{\text{ограничено}} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

**Дифференцирование обратного**  $x \in U \subset X$ ,  $U$  открыто,  $f : U \rightarrow Y$ , существует окрестность  $V(f(x))$  в  $Y$ , в которой  $\exists f^{-1}$ . Предположим, что  $f$  дифференцируема в точке  $x$ ,  $\exists (df(x))^{-1} \in L(Y, X)$ ,  $f^{-1}$  непрерывна в точке  $f(x)$ . Тогда  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $f(x)$  и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y, X)} = (df(x))^{-1}.$$

*Note.* Здесь слишком много условий

*Доказательство.*  $f(x) = y$ ,  $f^{-1}(y) = x$ ,  $f(x+h) = y+t$ ,  $f^{-1}(y+t) = x+h$ .  $h \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0$ . Давайте запишем

$$t = f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h).$$

Тогда  $\|t\| \leq C\|h\|$ . Воспользуемся тем, что  $df(x)$  обратим.

$$(df(x))^{-1}t = h + (df(x))^{-1}(o(h)) \quad (2.3.1)$$

$$\|(df(x))^{-1}(o(h))\| \leq \|(df(x))^{-1}\| \cdot \|o(h)\| \leq \frac{\|h\|}{2}, \quad \|h\| < \delta.$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \left( \|h\| < \delta \implies \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|(df(x))^{-1}\|} \right).$$

Тогда  $\forall \|h\| < \delta: \|(df(x))^{-1}t\| \geq \frac{\|h\|}{2} \implies \|h\| \leq C\|t\|$ . Перепишем 2.3.1

$$f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = (df(x))^{-1}t + o(t).$$

Это определение дифференцируемости. Тогда

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}.$$

□

## 2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования

0.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема.

$$df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x)h.$$

1.  $f : U \subset X \rightarrow Y$ ,  $f$  постоянно, то есть  $f(x) = y_0 \quad \forall x \in U$ . Тогда  $df(x) = 0$  (нулевое линейное отображение, все переводит в нуль).

2.  $f \in L(X, Y)$ ,  $df(x) = f$ .

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = (df(x))(h).$$

3.  $f(x, y) = x^2 + 2xy$ .  $h = (h_x, h_y)$

$$\begin{aligned} f(x+h_x, y+h_y) - f(x, y) &= x^2 + xh_x + h_x^2 + 3xy + 3xh_y + 3yh_x - x^2 - 3xy + 3h_xh_y = \\ &= (2x + 3y)h_x + 3xh_y + \underbrace{h_x^2 + 3h_xh_y}_{o(h)} \end{aligned}$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

4.  $x \in U \subset X$ ,  $f : U \rightarrow Y$ ,  $A \in L(Y, Z)$ . Если  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , то  $A \circ f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $d(A \circ f)(x) = Adf(x)$
5.  $x \in U \subset X$ ,  $f : U \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ . Это  $n$  отображений:  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_j : U \rightarrow Y_j$ .  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , тогда и только тогда, когда  $f_1, \dots, f_n$  дифференцируемы в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*  $f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h) \in Y$ . Левая часть равна

$$(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)).$$

А правая

$$(L_1h, L_2h, \dots, L_nh) + o(h).$$

□

6.  $x_j : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ .

$$dx_j(x)h = h_j.$$

Это удобное обозначение базиса, которое мы будем дальше использовать.

7.  $A : X_1 \times X_n \rightarrow Y$  — полилинейное и непрерывное. Оставим только два сомножителя.  $A : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ .

$$A(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - A(x_1, x_2) = A(x_1, h_1) + A(h_1, x_2) + \underbrace{A(h_1, h_2)}_{o(h)}.$$

$$dA(x_1, x_2)h = A(h_1, x_1) + A(x_1, h_2).$$

Или можно записать так:

$$dA(x_1, x_2) = A(dx_1, x_2) + A(x_1, dx_2).$$

Совершенно аналогично для  $n$  координат.

### Property.

- 1)  $f(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \left( dx_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

$$df(x)h = \sum_{j=1}^n \left( h_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

- 2)  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$d(f_1 f_2 \dots f_n)(x) = f_2(x) f_3(x) \dots df_1(x) + \dots$$

- 3)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярное произведение.

$$d\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle.$$

- 4)  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle.$$

- 5)  $f : X \rightarrow Y$  над  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(\lambda f) = \underbrace{f}_{\in Y} \underbrace{d\lambda}_{L(X, \mathbb{R})} + \lambda \underbrace{df}_{\in L(X, Y)}.$$

*Practice.*  $U = \{A \in L(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in L(X, Y)\}$  — множество обратимых линейных отображений.  $f : U \rightarrow L(X, Y)$ ,  $f(A) = A^{-1}$ . Найти  $df$ .

## 2.5 Частные производные

### Definition 23: Частные производные

Пусть  $a \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .  $U$  — окрестность точки  $a$ .  $f : U \rightarrow Y$ .  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

Определим  $\varphi_j : X_j \rightarrow Y$ ,  $\varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$ .

$d\varphi_j(a_j)$  называется частным дифференциалом (частной производной)  $f$  по  $x_j$  в точке  $a$ , если существует.

**Designation.** Частный дифференциал обозначается кучей способов

$$\partial_{x_j} f(a), \frac{\partial f}{\partial x_j}, \partial_j f(a) \in L(x_i, Y).$$

### Лекция 6

20 march

## 2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m$ , $Y = \mathbb{R}^n$

**Statement.** Пусть  $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x$  тогда и только тогда, когда  $f_1, f_2, \dots, f_n$  дифференцируемы в точке  $x$  и

$$df(x) = (df_1(x), \dots, df_n(x)), \quad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad f_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* Пусть  $h \in \mathbb{R}^m$ . Запишем

$$df(x)h = (df_1(x)h, \dots, df_n(x)h).$$

Тогда

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)).$$

Первое слагаемое равно  $df(x)h$ , а правая

□

**Statement.** Если  $n = 1$ , то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x$ , то существуют все частные производные и

$$df(x)h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j, \quad h = (h_1, \dots, h_m)^T.$$

при этом

$$df(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right).$$

**Statement.** Вернемся к 2.6. Пусть  $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и существуют частные производные  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$

$$\partial f(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \vdots \\ df_n(x)h \end{pmatrix}.$$

**Statement.** Если есть отображения  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , и они дифференцируемы, то  $d(f \circ g)(x) = dg(f(x))df(x)$ :

$$\begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \frac{\partial (g_k \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_l}(x) & \dots \end{pmatrix}.$$



Правило цепочки:

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

**Statement.**

**Example 2.6.1** (вычисление частных производных). Пусть  $f(x, y) = x^3 + 3xy$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x.$$

То есть

$$df(x, y)h = (3x^2 + 3y \quad 3x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Через градиенты

grad.

**Statement.** Если  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , то частные производные можно определять формулами

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \quad e_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T.$$

(Единица стоит на  $i$ -м месте.) Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

#### Definition 24: Производная по вектору

Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \in X$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору  $v$  или вдоль вектора  $v$ . Если  $\|v\| = 1$ , то называют производной по направлению  $v$ .

**Property** (Экстремальное свойство градиента). В случае  $\mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle,$$

откуда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq |\text{grad} f(x)| |v|.$$

Функция растёт быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right|.$$

*Доказательство.* Все рассуждения предполагают, что  $f$  дифференцируема в  $x$ .

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x + tv) - f(x) = df(x)(tv) + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = df(x)v + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\rightarrow 0}.$$

□

## 2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

**Theorem 2.7.1** (Теорема о конечном приращении). Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  непрерывно на  $[x, x + t] \subset U$  и дифференцируемо на  $(x, x + h)$ . Тогда

$$\|f(x + h) - f(x)\|_Y \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

*Доказательство.* Обозначим супремум  $M = \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\Theta \in (0,1)} \|df(x + \Theta h)\|_{L(X,Y)}$ . Достаточно проверить

$$\forall [\xi', \xi''] \subset (x, x + h): \|f(\xi') - f(\xi'')\| \leq M \|\xi' - \xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1 = [\xi'_1, \xi''_1]: \|f(\xi'_1) - f(\xi''_1)\| \geq (M + \varepsilon_0) \|\xi'_1 - \xi''_1\|, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Разделим отрезок пополам:  $\Delta_1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 = [\xi'_1, \frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}] \cup [\frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}, \xi''_1]$ . На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность  $\Delta_1 \supset \Delta_2 \dots$ . Пусть  $\{\xi_0\} = \bigcap \Delta_i$ . Тогда

$$f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0) = df(\xi_0)\delta + \alpha(\delta), \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0: \left( \|\delta\| < \varepsilon \implies \|f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\delta\|, \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности  $\exists N: \forall n > N \quad \Delta_n \subset B(\xi_0, \varepsilon)$ .

$$\|f(\xi'_n) - f(\xi''_n)\| \leq \begin{cases} \|f(\xi'_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi_0\| \\ \|f(\xi''_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi''_n - \xi_0\| \end{cases} = \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi''_n\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

*Note.* В правой части можно ююю

*Note.* На прямой теорема Лагранжа дает существование  $\xi \in (x, x + \varepsilon)$ :

$$|f(x + h) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

*Note.* В  $\mathbb{R}^n$  есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

**Corollary 3**

Если  $f$  из теоремы и  $A \in L(X, Y)$ , то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi - Ah)\| \|h\| = \sup_{v \in (0,1)} \|df(x+vh - Ah)\| \|h\|.$$

Это теорема при  $g(x) = f(x) - Ax$ .

**Corollary 4**

Если  $K$  — выпуклый компакт в  $X$ ,  $f \in C^1(K, Y)$ , то  $f$  — Липшицево на  $K$ .

**Definition 25**

Если  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо во всех точках  $U$  и  $df: U \rightarrow L(X, Y)$  непрерывно, то говорят, что  $f$  непрерывно дифференцируемо на  $U$  и пишут  $f \in C^1(U, Y)$

*Note.*  $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$  непрерывно дифференцируемо на  $U$  тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

**Theorem 2.7.2** (Признак дифференцируемости). Пусть  $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ ,  $x \in U$ . Предположим, что  $f$  имеет все частные дифференциалы в  $U$  и они непрерывны в точке  $x$ . Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x$ .

*Доказательство.* Докажем для  $m = 2$ . Дифференциал должен выглядеть так:  $Lh = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \partial_{x_2} f(x)h_2$ .  $x \in U \subset X_1 \times X_2$ .

Проверим  $\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - Lh\| &\leq \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)h_2\|}_{\leq \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1+h_1, x_2+\Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)h_1\|}_{\leq \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1+\Theta_1 h_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leq . \end{aligned}$$

Заметим, что  $\|h_1\| \leq \|h\| \wedge \|h_2\| \leq \|h\|$ . Тогда можем переписать так:

$$\leq \|h\| \cdot \left( \sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_2} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремится к 0 при  $h \rightarrow 0$ . □

**Corollary 5**

Непрерывная дифференцируемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

**Theorem 2.7.3** (Теорема о конечном приращении для функций). Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[x, x+h] \in U$  и дифференцируема на  $(x, x+h)$ . Тогда существует такое  $\xi \in (x, x+h)$ , что

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

**Corollary 6**

Если  $U$  — выпуклое множество и  $df(x) = 0$  для любого  $x$  из  $U$ , то  $f(x) = \text{const}$  на  $U$ .

**Corollary 7**

Если  $U$  — открытое связное множество и  $df(x) = 0$  для всех  $x \in U$ , то  $f(x) = \text{const}$  на  $U$ .

**Лекция 7**

20 march

**2.8 Производные высших порядков****Definition 26**

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Частная производная

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

может быть определена на каком то подмножестве  $U$  (для простоты будем считать, что на всем  $U$ ). То есть  $\partial_j f: U \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, у которой могут быть частные производные

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(x)$$

— вторая производная. По индукции можно определить  $k$ -ю производную.

**Theorem 2.8.1** (о перестановочности производных). Пусть функция  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вторые частные производные  $\partial_{x_j} \partial_{x_k} f$  и  $\partial_{x_k} \partial_{x_j} f$  в  $U$  и они непрерывны в точке  $x \in U$ . Тогда  $\partial_{x_j} \partial_{x_k} f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x)$

*Доказательство.* Зафиксируем все переменные кроме  $x_k$  и  $x_j$ .

$$f(x) = f(x_1, x_2).$$

$$\underbrace{F(h_1, h_2)}_{\varphi(1) - \varphi(0)} = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1, x_2).$$

Где  $\varphi(t) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)$ . Это дифференцируемая функция. Можем взять производную

$$\varphi'(t) = \partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \cdot h_2 - \partial_{x_2} f(x_1, x_2 + h_2) \cdot h_2.$$

Сгруппируем второе с четвертым:

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \varphi'(\Theta_2) = h_2 \cdot (\partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + \Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2 + \Theta_2 h_2)) = \\ &= h_2 h_1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1 + \Theta_1 h_1, x_2 + \Theta_2 h_2) = \end{aligned}$$

Кроме того существуют  $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2$ , что

$$= h_1 h_2 \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1 + \Theta_1 h_1, x_2 + \Theta_2 h_2).$$

Посчитаем предел и воспользуемся непрерывностью производных

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1 + \Theta_1 h_1, x_2 + \Theta_2 h_2)}_{\partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1 + \tilde{\Theta}_1 h_1, x_2 + \tilde{\Theta}_2 h_2)}_{\partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2)}.$$

□

### Definition 27

$C^k(U, \mathbb{R})$  — множество функций, имеющих все  $k$ -ые частные производные, непрерывные в  $U$ .

### Corollary 8

Если  $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ , то для всех  $n \leq k$ ,  $1 \leq j_1, \dots, j_n$ ,  $\sigma \in S_n$ ,  $x \in U$  верно равенство

$$\partial_{j_n} \dots \partial_{j_1} f(x) = \partial_{j_{\sigma(n)}} \dots \partial_{j_{\sigma(1)}} f(x).$$

## 2.8.1 Общий случай

**Подход первый** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо на  $U$ , тогда  $df: U \rightarrow L(X, Y)$  тоже отображение между нормированными пространствами и может оказаться дифференцируемо в точке  $x \in U$ .

### Definition 28

Если отображение  $df$  определено в окрестности ...

### Подход второй

### Definition 29

Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$ . Определим

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \partial_h f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Если  $\partial_k$  существует в  $U$ , то  $\partial_h f: U \rightarrow Y$  и может оказаться, что существует производная по какому-нибудь вектору. ТО есть можно определить вторую производную по паре векторов

$$\partial_{h_2} \partial_{h_1} f(x).$$

Аналогично можно определить более старшие производные

$$\partial_{h_n} \partial_{h_{n-1}} \dots \partial_{h_1} f(x).$$

*Note.* Наличие непрерывных производных по всем направлениям в точке не гарантирует дифференцируемость в бесконечном случае.

### Property.

1.  $\partial_{\lambda h} f(x) = \lambda \partial_h f(x)$
2. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x$ , то  $\partial_h f(x) = df(x)h$
3. Если  $A \in L(Y, Z)$ , то  $\partial_h (A \circ f)(x) = A \partial_h f(x)$

### 2.8.2 Связь между двумя подходами

**Theorem 2.8.2** (о связи старших дифференциалов и производных по векторам). Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в точке  $x$ . Тогда  $\forall h_1, \dots, h_n \in X$ :

$$d^n f(x)(h_1, \dots, h_n) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_n} f(x).$$

*Доказательство.* Докажем для двух, то есть  $\partial^2 f(x)h_1, h_2) = \partial_{h_1} \partial_{h_2} f(x)$ .

$$\left( (d(df)(x))h_1 \right) h_2 = \left( \partial_{h_1} (df)(x) \right) h_2.$$

Это равно

$$\left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x + th_1) - df(x)}{t} \right) h_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x + th_1)h_2 - df(x)h_2}{t} = \partial_{h_1} (df(x)h) = \partial_{h_1} (\partial_{h_1} f(x)).$$

По индукции можно доказать, что утверждение верно для  $n$  переменных.  $\square$

### 2.8.3 Симметричность дифференциалов

**Theorem 2.8.3** (О симметричности  $n$ -го дифференциала). Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо  $n$  раз в точке  $x \in U$ . Тогда полилинейное отображение  $d^n f(x)$  является симметричной относительно любой пары своих аргументов.

*Доказательство.* Докажем, что второй дифференциал симметричный. Пусть  $\exists d^2 f(x)$  и для всех  $h_1, h_2: d^2 f(h_1, h_2) = d^2 f(h_2, h_1)$ . Хотим доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, h_1, h_2)}{t^2} = df(x)h_1, h_2.$$

То есть

$$\|F(t, h_1, h_2) - t^2 d^2 f(h_1, h_2)\| = o(t^2).$$

Заведём отображение  $F(t, h_1, h_2) = f(x + t(h_1, h_2)) - f(x + th_1) - f(x + th_2) + f(x)$ . Пусть  $\varphi(v) = f(x + t(h_2 + v)) - f(x + tv)$ , где  $v$  сонаправлен с  $h_2$  и  $\|v\| \leq \|h_2\|$ .

$$F(t, h_1, h_2) = \varphi(h_2) - \varphi(0).$$

Применим теорему о конечном приращении

$$\begin{aligned} \|\varphi(h_2) - \varphi(0) - \underbrace{(t^2 d^2 f(x)h_1)}_A h_2\| &\leq \sup_{\Theta \in (0,1)} \|d\varphi(\Theta h_2) - t^2 d^2 f(x)h_1\|_{L(X,Y)} \cdot \|h_2\|_{\|X\|} = \\ &= \sup_{\Theta \in (0,1)} \|df(x + t(h_1 + \Theta h_2)) \cdot t - df(x + t\Theta h_2)t - t^2 d^2 f(x)h_1\| \cdot \|h_2\|_{\|X\|} \end{aligned}$$

Известно, что  $df(x + \tilde{h}) = df(x) + d^2 f(x)\tilde{h} + \alpha(\tilde{h})$ , где  $\alpha(\tilde{h}) = o(\tilde{h})$  (это все операторы). Получаем

$$\cancel{df(x)} + \underline{d^2 f(t(h_1 + \Theta h_2))} + \alpha(h_1 + \Theta h_2) - \cancel{df(x)} - \underline{d^2 f(t\Theta h_2)} - \alpha(t\Theta h_2) - \underline{td^2 f(x)h_1}.$$

Первое и четвертое сокращаются, третье и шестое равны  $o(t)$ . Всего осталось  $o(t^2)$ .  $\square$

**Theorem 2.8.4** (частный случай,  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^n$ ). Пусть  $\{e_j\}_{j=1}^m$  — стандартный базис.

$$h_j = \left(h_j^{(1)}, \dots, h_j^{(m)}\right) \sum_{k=1}^m h_j^{(k)} e_k.$$

Тогда

$$d^n f(x)(h_1, \dots, h_m) = d^n f(x) \left( \sum_{k=1}^m h_1^{(k)} e_k, \dots, \sum_{k=1}^m h_m^{(k)} e_k \right)$$

**Theorem 2.8.5** (еще более частный случай,  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $h_i = h_j$ ). Если  $h = (h^{(1)}, \dots, h^{(n)})$ , То

$$d^n f(x)(h, \dots, h) = \sum_{1 \leq k_i \leq m} \prod H^{(k_j)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_n}} = .$$

Сгруппируем одинаковые слагаемые, в которых  $\alpha_1$  раз происходит дифференцирование по  $x_1$ ,  $\alpha_2$  — по  $x_2$  ...  $\alpha_m$  по  $x_m$ ,  $\sum \alpha_j = n$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$

$$= (h^{(1)})^{\alpha_1} \dots (h^{(m)})^{\alpha_m} = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^n f(x)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} = .$$

**Designation.**

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  — мультииндекс,  $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$ ,

$|\alpha| = \sum \alpha_j$  — высота  $\alpha$

$\alpha! = \prod \alpha_j! = \prod (h^{(j)})^{\alpha_j}$

Можно переписать формулу из теоремы

$$= \left(h^{(1)} \partial_{x_1} + \dots + h^{(m)} \partial_{x_m}\right)^n f(x) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^\alpha} h^\alpha.$$

*Practice.* В случае  $\mathbb{R}^2$  написать, что такое

$$d^2 f(x, y)(h, h), \quad h = (h_1, h_2).$$

## 2.9 Многомерная формула Тейлора

Пусть  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[x, x+h] \subset U$ ,  $t \in (0, 1)$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = f(x+th)$ ,  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ , то  $\varphi \in C^k[0, 1]$ .

$$\varphi' = df(x+th)h = \partial_h f(x+th)$$

$$\varphi''(t) = \partial_h \partial_h f(x+th) = d^2 f(x+th)(h, h)$$

⋮

$$\varphi^{(n)} = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{n! \partial^\alpha f}{\alpha! \partial x^\alpha}(x+th) h^\alpha$$

**Theorem 2.9.1** (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). Если  $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ ,  $[x, x+h] \subset U$ , то существует  $\nu \in (0, 1)$ :

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial |\alpha| f}{\partial x^\alpha} + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^\alpha}(x+\vartheta h).$$

**Theorem 2.9.2** (Формула Тейлора в дифференциалах). Если  $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ ,  $[x, x+h] \subset U$ , то существует  $\nu \in (0, 1)$ :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+\vartheta h) h^{k+1}.$$

**Theorem 2.9.3** (Формула Тейлора в дифференциалах в общем случае (без доказательства)). Если  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f \in C^{n+1}(U, Y)$ ,  $[x, x+h] \subset U$ , то существует  $\nu \in (0, 1)$ :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+\vartheta h) h^{k+1}.$$

## 2.10 Исследование внутренних экстремумов

### Definition 30

Определение экстремумов, максимумов, минимумов, локальных и глобальных аналогично одномерным.

**Theorem 2.10.1** (необходимое условие экстремума). Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in U$ . Тогда

1. Если для какого-то  $h$  существует  $\partial_h f(x_0)$ , то она равна 0.
2. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $df(x_0) = 0$

Note. В случае дифференцируемости в  $X = \mathbb{R}^m$  на  $m$  координат точки  $x_0$  получаем  $m$  уравнений.

$$\partial_1 f(x_0) = \dots = \partial_m f(x_0) = 0.$$

### Definition 31

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Точка  $x_0$  называется **стационарной** для  $f$ , если  $\text{grad} f(x_0) = 0$ .

**Theorem 2.10.2** (достаточное условие экстремума). Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема в окрестности точки  $x_0 \in U$  и  $df(x_0) = 0$ .

- Если для некоторого  $\nu > 0$  и любого  $h$  верно  $d^2 f(x_0)(h, h) \geq \nu \|h\|^2$ , то  $x_0$  — точка локального минимума.
- Если для некоторого  $\nu > 0$  и любого  $h$  верно  $-d^2 f(x_0)(h, h) \geq \nu \|h\|^2$ , то  $x_0$  — точка локального максимума.

Доказательство. По формуле Тейлора

□



*Note.* В  $\mathbb{R}^m$  сводится к положительной или отрицательной определенности матрицы, составленной из вторых частных производных.

$$h^T \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) h.$$

Для этого существует критерий Сильвестра.

## Лекция 8

3 Apr

## 2.11 Странные примеры экстремумов

### 2.11.1 Задача Гюйгенса

#### Description 1

Есть два шара с массами  $M$  и  $m \in (0, M)$ . Шар с массой  $M$  летит со скоростью  $V$  на покоящийся шар массой  $m$ . Какая скорость будет у малого шара после столкновения? И как ее вообще найти?

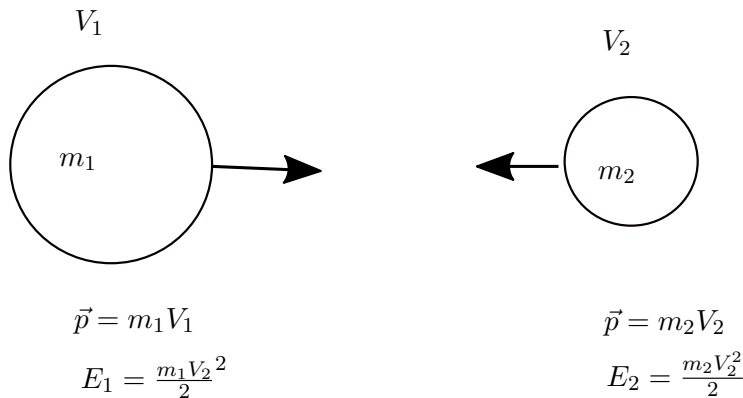


Рис. 2.1: balls

После столкновения посчитаем импульс и энергию. По закону сохранения импульса и закону сохранения энергии

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 \tilde{v}_1^2 + m_2 \tilde{v}_2^2 \\ m_1(v_1 - \tilde{v}_1) &= m_2(\tilde{v}_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - \tilde{v}_1^2) &= m_2(\tilde{v}_2^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Поделим одно на другое и получим, что  $v_1 + \tilde{v}_1 = v_2 + \tilde{v}_2$ . Далее можно подставить в первое уравнение и получить

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \tilde{v}_1 + m_2(v_1 + \tilde{v}_1 - v_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ \tilde{v}_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Если  $v_2 = 0$ ,

$$\tilde{v}_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

### Definition 32: Задача Гюйгенса

С какими массами  $m_1, \dots, m_n$  разместить по пути покоящегося шары, чтобы передался максимальный импульс?

$$v \cdot \frac{2M}{M + m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \dots \cdot \frac{2m_n}{m_n + m} = f(m_1, \dots, m_n) \cdot v \cdot 2^{n+1}.$$

Нужно найти максимум этой функции. Он существует, так как в бесконечности одной и переменных значение стремится к 0.

Посчитаем частные производные и

$$\partial_j f(\dots) = 0 \iff m_j^2 = m_{j-1}m_{j+1}.$$

Тогда

$$q = \frac{M}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \dots = \frac{m_n}{m}.$$

$$q^{n+1} = \frac{M}{m}, \quad q = \sqrt[n+1]{\frac{M}{m}}.$$

А скорость

$$\tilde{v} = 2^{n+1} \left( \frac{q}{q+1} \right)^{n+1} v.$$

TODO: дописать

## Лекция 9: †

10 Apr

## 2.12 Поверхности и криволинейные координаты

**Поверхность-график** Пусть  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция на открытом множестве, график функции, поверхность —

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in U\}.$$

**Параметризация** Отображение  $F: U \rightarrow S$ , такое что  $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$  — непрерывное, биективное отображение

**Пути на  $S$**  Если  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  — путь в  $U$ , то  $F \circ \gamma$  — путь в  $S$ , и наоборот.

**Криволинейные координаты на  $S$**   $(x, y)$  выполняют роль координат на  $S$ . Образы координатных линий — координатные кривые на  $S$ .

### 2.12.1 Касательная плоскость к графику функции

- Пусть  $f$  дифференцируемо в точке  $(x_0, y_0) \in U$ . Тогда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\dots), \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

$$df(x_0, y_0) = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)).$$

- Множество точек  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющий уравнению

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

называется касательной плоскостью к  $S$  в точке  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

- Эта плоскость единственна и

$$A = \partial_x f(x_0, y_0), \quad B = \partial_y f(x_0, y_0).$$

- Нормаль к плоскости

$$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) = (\nabla f(x_0, y_0), -1).$$

### 2.12.2 Касательный вектор

- Если гладкий путь в  $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , то касательный вектор к нему это  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ . Если путь лежит на поверхности  $S$ , то есть  $\Gamma = F \circ \gamma$ , то

$$\Gamma'(t) = (x'(t), y'(t), \partial_x f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t)).$$

- Касательный вектор к пути на поверхности перпендикулярен нормали и лежит в касательной плоскости.

Уравнение нормали

$$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1).$$

- Верно и обратное: любой вектор из касательной плоскости является касательным к некоторому пути на поверхности.

$$(u, v, w) \perp n \quad x(t) = x_0 + ut, \quad y(t) = y_0 + vt \text{ — путь в } U.$$

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

Продифференцировав это, мы получим равенство выше.

### 2.12.3 Чуть более общая ситуация

- Если  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , то получим график отображения

$$S = \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y \in f(x)\}$$

—  $n$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

- $F: U \rightarrow S$ ,  $F(x) = (x, f(x))$  — параметризация поверхности.
- Касательное пространство  $n$ -мерно и состоит из касательных векторов.
- Пространство нормалей  $m$ -мерное.

## 2.13 Теорема о неявном отображении (функции)

### 2.13.1 Мотивация

- Рассмотрим множество  $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$  — окружность на плоскости. Это не график функции  $y = f(x)$ , но почти для всех точек можем взять окрестность, которая будет графиком.
- Можно честно решить относительно  $y$  уравнение  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

TODO: Дописать  $\circlearrowright$

### 2.13.2 Подстановка

- Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}.$$

- Хотим разрешить относительно  $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

- Тем самым, получить задание  $m$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

## 2.14 Теорема о неявном отображении

**Theorem 2.14.1** (О неявном отображении).

- Пусть  $X, Y, Z$  — нормированные пространства,  $Y$  — полное,  $(x_0, y_0) \in W \subset X \times Y$ .
- Отображение непрерывно  $F: W \rightarrow Z$  в точке  $(x_0, y_0)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$
- В  $W$  существует частный дифференциал  $F$  по  $y$  ( $\exists \partial_y F: W \rightarrow L(Y, Z)$ ) и непрерывно в точке  $(x_0, y_0)$ .
- Оператор обратим  $(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$

Тогда существуют  $U \subset X$  — окрестность точки  $x_0$ ,  $V \subset Y$  — окрестность точки  $y_0$ ,  $f: U \rightarrow V$  такие, что  $U \times V \subset W$  и

$$\{F(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

1. Пусть  $g_x(y) = y - (\partial_y F(0, 0))^{-1} F(x, y)$ ,  $g_x: Y \rightarrow Y$ .

$$F(x, y) = 0 \iff y - \text{неподвижная точка } g_x.$$

Докажем это. Нужно выделить подмножество  $Y$ , где отображение действует.

$$dg_x(y) = I_Y - (\partial_y F(0, 0))^{-1} \partial_y F(x, y).$$

Если  $(x, y)$  стремиться к  $(0, 0)$ , то последнее слагаемое будет стремиться к тождественному отображению  $I_Y$ , то есть правая часть равенства стремиться к 0.

$$\exists \Delta > 0: \|x\| < \Delta, \|y\| < \Delta \implies \|dg_x(y)\| < \frac{1}{2}.$$

Возьмем  $\Delta > \varepsilon > 0$ .  $g_0(0) = 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x, \|x\| < \delta: \|g_x(0)\| \leq \varepsilon/2.$$

2. **Ключевой момент:** так как производные меньше  $\frac{1}{2}$ , и  $\|g_x(0)\| \leq \varepsilon/2$

$$g_x(\{\|y\| \leq \varepsilon\}) \subset \{\|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Применим теорему о сжимающем отображении

$$y: \|y\| \leq \varepsilon, \quad \|g_x(y) - g_y(x)\| \leq \sup_{0 < \Theta < 1} \|dg_x(\Theta)\| \cdot \|y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $Y$  полное, шар  $M$ , где действует  $g$ , является метрическим, отображение  $g_x$  сжимающее. Следовательно, существует единственная неподвижная точка

$$\exists! y: \|y\| \leq \varepsilon, g_x(y) = y.$$

Рассмотрим  $U = B_\delta(0)$ . Оно подойдет.

□

*Note.* Отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ .

*Note.* Если случай конечномерный, то достаточно требовать только обратимость (без непрерывности)

*Note.*  $\begin{pmatrix} \partial f_k \\ \partial y_j \end{pmatrix}$  — обратимая матрица, то есть ее определитель не 0.

**Theorem 2.14.2.** Если в условиях прошлой теоремы отображения  $F$ ,  $\partial_y F$  непрерывны не только в точке  $(x_0, y_0)$ , но в целой окрестности, то  $f$  непрерывно в окрестности точки  $x_0$

*Доказательство.* Хотим проверить, что  $\exists (d_y D(x, y))^{-1} \in L(Z, Y)$ , при  $(x, y)$  близких к  $(x_0, y_0)$ . Уже знаем, что  $\exists (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$ .

**Lemma 1** (об обратимости оператора близкого к тождественному).  $Y$  — полное,  $B \in L(Y, Y)$ ,  $\|B\| \leq 1$ . Тогда  $\exists (I - B)^{-1} \in L(Y, Y)$ .

*Доказательство.* Докажем, что

$$\forall v \in Y \exists! u \in Y: (I - B)u = v.$$

Последнее утверждение равносильно тому, что

$$u = c + Bu \quad g_v(u) = v + Bu.$$

Это сжимающее отображение так как

$$\|g_v(u_1) - g_v(u_2)\| = \|Bu_1 - Bu_2\| \leq \|B\| \cdot \|u_1 - u_2\|.$$

Тогда по теореме о сжимающем отображении существует неподвижная точка.

$$v_n \rightarrow v_0 \implies u_n \rightarrow u, \quad u_n = v_n + Bu_n \wedge u_0 = v_0 + Bu_0.$$

$$u_n - u_0 = v_n - v_0 + B(u_n - u_0)$$

$$\|u_n - u_0\| \leq \|v_n - v_0\| + \|B\| \cdot \|u_n - u_0\|.$$

$$\|u_n - u_0\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|v_n - v_0\| \rightarrow 0.$$

□

**Lemma 2** (об обратимости оператора близкого к обратимому).  $Y$  — полное пространство.  $A, A_0 \in L(Y, Z)$ ,  $\exists A_0^{-1} \in L(Z, Y)$ . Если  $\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ , то  $A^{-1} \in L(Z, Y)$

*Доказательство.* Применяем лемму ??

$$\underbrace{A}_{L(Y,Z)} = A_0 + A - A_0 = \underbrace{A_0}_{\text{обратимо и } L(Y,Z)} \underbrace{(I_Y + A_0^{-1}(A - A_0))}_{\text{обратимо и } L(Y,Y)}, \quad \|B\| \leq \|A - A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1.$$

□

По лемме ?? получаем утверждение теоремы.

□

**Theorem 2.14.3.** Если в условиях теоремы 1 отображения  $F$  дифференцируемо в точке  $(x_0, y_0)$ , то и  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$df(x_0) = -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \partial_x F(x_0, y_0).$$

*Доказательство.* Пусть  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

$$F(x, y) = F(0, 0) + \partial_x F(0, 0)x + \partial_y F(0, 0)y + \underbrace{o(\|x\| + \|y\|)}_{\alpha(x, y)}.$$

Знаем, что  $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$ .

$$0 = \partial_x F(0, 0)x + \partial_y F(0, 0)f(x) + \alpha(x, y).$$

$$f(x) = -(\partial_y F(0, 0))^{-1} \partial_x F(0, 0)x - (\partial_y F(0, 0))^{-1} \underbrace{\alpha(x, f(x))}_{=?o(\|x\|)}.$$

Если  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ .

$$\exists \delta > 0: \|x\| < \delta \implies \frac{\|\alpha(x, f(x))\|}{\|x\| + \|f(x)\|} \leq \frac{1}{\|\partial_y F(0, 0)^{-1}\| \cdot \frac{1}{2}}.$$

$$\|\partial_y F(0, 0)^{-1} \alpha(x, f(x))\| \leq \frac{1}{2} (\|x\| + \|f(x)\|).$$

$$\|f(x)\| \leq C\|x\| + \frac{1}{2} (\|x\| + \|f(x)\|).$$

$$\frac{1}{2} \|f(x)\| \leq C\|x\| + \frac{1}{2} \|x\| \implies \|f(x)\| \leq \tilde{c}\|x\| \implies o(\|x\| + \|f(x)\|) = o(\|x\|).$$

□

*Note.* Можно попросить большую дифференцируемость  $F$  и получить большую дифференцируемость  $f$ . Аналогично можно попросить дифференцируемость в окрестности и получить дифференцируемость в окрестности.

**Theorem 2.14.4** (об обратном отображении). Пусть  $F: W \subset Y \rightarrow X$ ,  $Y$  — полно,  $F(y_0) = x_0$ ,  $F$  дифференцируемо в  $W$ ,  $dF$  непрерывна в точке  $y_0$ , и существует  $(dF(y_0))^{-1} \in L(X, Y)$ . Тогда существуют окрестности  $U \subset W$  точки  $x_0$  и  $V$  точка  $y_0$  такие, что  $F: V \rightarrow U$  — биекция, то есть существует  $F^{-1}: U \rightarrow V$ ,  $F^{-1}$  — дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$dF^{-1}(x_0) = (dF(y_0))^{-1}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $G(x, y) = X - F(y)$ ,  $F: X \times Y \rightarrow X$ . Заметим, что  $G(x, y) = 0 \iff x = F(y)$ .  $G(x_0, y_0) = 0$ .

$$\partial_y G(x_0, y_0) = -dF(y_0) \text{ — обратимо.}$$

$$\exists (\partial_y G(x_0, y_0))^{-1} \in L(Y, X).$$

По теореме о неявной функции получаем, что существует

$$f: U \rightarrow V \quad G(x, f(x)) = 0 \iff x - F(f(x)) = 0.$$

И  $f = F^{-1}$  на  $U$ .

$$dF^{-1}(y_0) = df(y_0) = \dots = dF(y_0)^{-1}.$$

□

*Note.* Можно попросить большую дифференцируемость  $F$  и получить большую дифференцируемость  $f$ .