Конспект по топологии за I семестр бакалавриата Чебышёва СПбГУ (лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

December 14, 2019

Contents

Chapter 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 1.7.1. *Определение 1 корректно.*

Proof. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

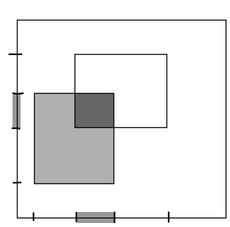

Figure 1.1: Пересечение

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 1.7.2. *$A \cap X$ – замкнуто, $B \cap Y$ – замкнуто. Тогда $A \times B$ – замкнуто в $X \times Y$.*

Proof. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X,\ B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 1.7.3.

$$d((x,y),(x',y')) = max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Proof. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x,y),(x',y')) = 0 \iff d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p,p') + d(p',p'') \overset{?}{\geq} d(p,p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x,x'').$$
$$d_X(x,x') + d_X(x',x'') \geq d_X(x,x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x,y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.

$$\exists A \subset X,\ B \subset Y\text{- открытые}, (x,y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x,y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

St (Согласование метрик)**.**

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$
$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

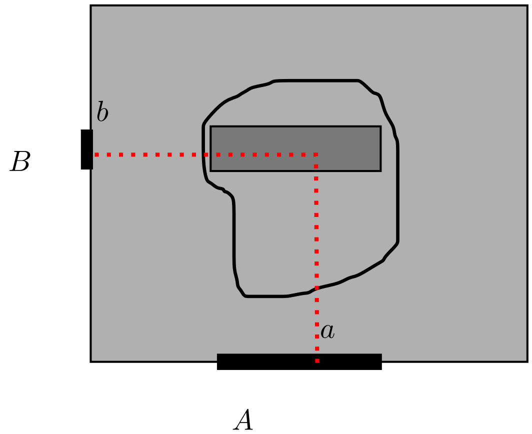

Figure 1.2: Произведение метрических пространств

Proof. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leq} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leq & \sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

□

Def 2. Бесконечное произведение пространств
$\{X_i\}_{i\in I}$ - семейство топологических пространств. Ω_i - топология.
Множество $\prod_{i\in I} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} \mid \forall i, x_i \in X_i\}$.
Тогда рассмотрим отображение $p_i : X \mapsto X_i$ - проекция.
Тихоновская топология на X – топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U)\right\}_{i\in I,\ U\in\Omega}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

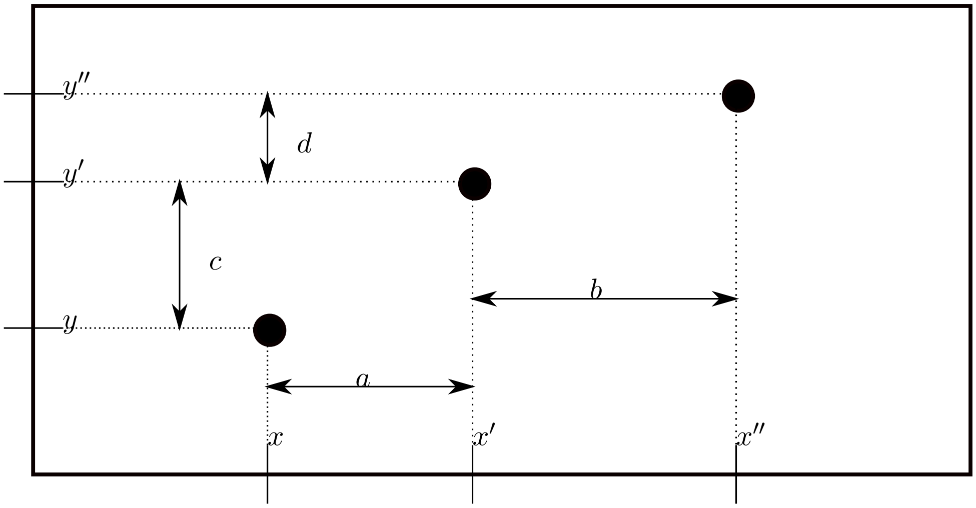

Figure 1.3: Неравенство треугольника

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs. 1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$

2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$

3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y\ f$ непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

Theorem 1.8.1. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Proof. $\Rightarrow$)
$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$)
$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$-внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

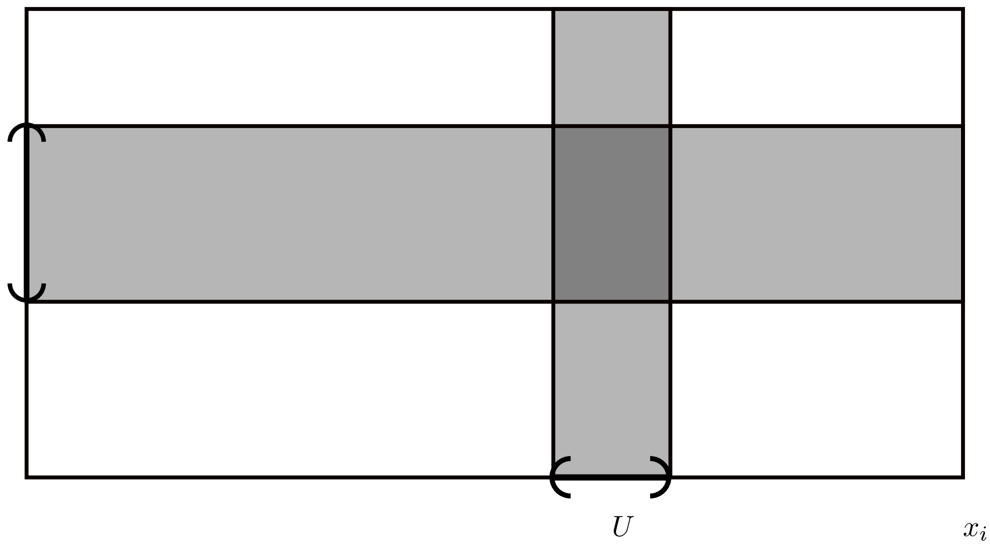

Figure 1.4: Тихоновская топология

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 1.8.2. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.*

Тогда f – непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < d \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Proof. $\Rightarrow$) Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\Leftarrow$) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.

$f : X \to Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Proof. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = dist(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 1.8.3. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

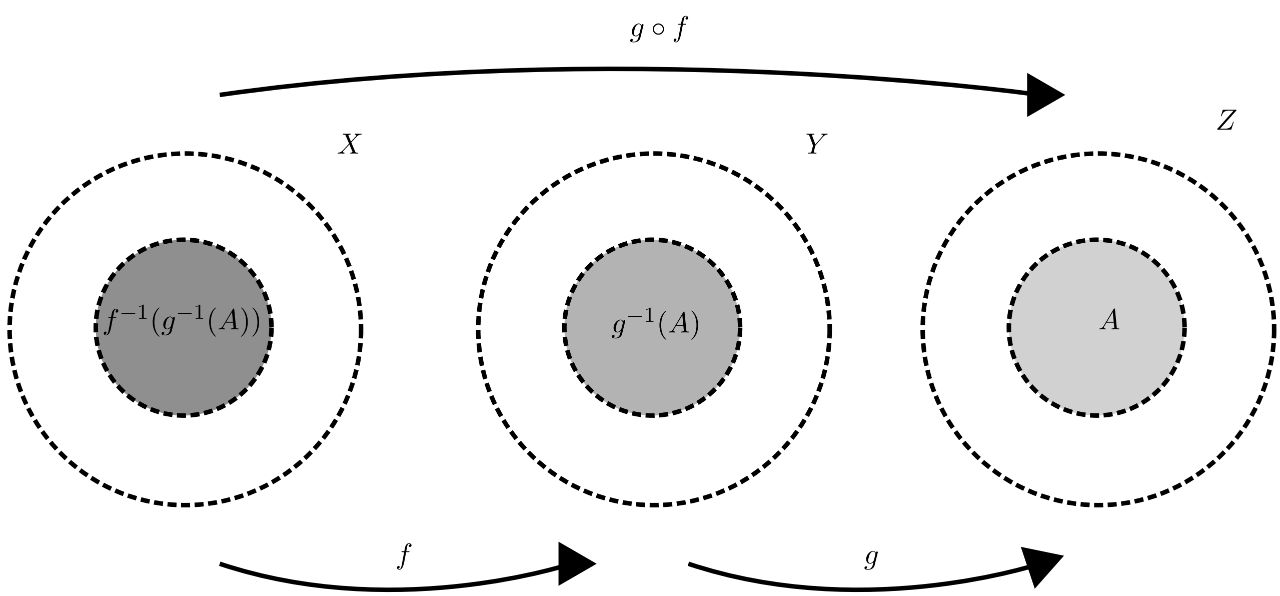

Figure 1.5: compose

1.9 Аксиомы

1.9.1 Аксиомы счетности

Def 6. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \not\ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Name. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 7. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сетности (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 8. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 1.9.1. *2АС $\Rightarrow$ 1АС*

Proof. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... $\square$

Theorem 1.9.2. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

St. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 1.9.3. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 1.9.4. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1АС тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 9. Топологические свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1АС, 2АС – наследственные свойства.

Theorem 1.9.5. *Линделёф Если X удовлетворяет 2АС, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Proof. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in A$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. $\square$

1.9.2 Сеперабельность

Def 10. Всюду плотное множество – множество, замыканние которого есть все пространство.

Def 11. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 12. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Prop. *X, Y – сепарабельны $\Longrightarrow X \times Y$ тоже.*

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 1.9.6.

- *Счетная база $\Longrightarrow$ сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность $\Longrightarrow$ счетная база*

1.10 Аксиомы отделимости

Def 13. X обладает свойтсвом T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 1.10.1. $T_1 \iff$ *любая точка является замкнутым множеством.*

Def 14. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y : \ U \cap V = \varnothing$.

Def 15. X хаусдорфово $\iff$ Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 16. X – регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X$ $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \varnothing$
  Другое название T_3-пространство

Def 17. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X(A \cap B = \varnothing)$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \varnothing$

Другое название T_4-пространство

St. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.
Нормальность не наследственная.

Def 18. Все метрические пространства нормальны.

Proof. Хороший метод.
$f : X \to Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. □

Lemma (Урысон)**.** *X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует непрерывна функция $f : X \to [0, 1] : \ f \restriction_A = 0 \wedge f \restriction_B = 1$*