# Теоремы, утверждения, следствия

Лекция 1

Парадокс Рассела связан с неограниченным применением принципа выделения. Однако имеется немало подобных парадоксов, которые вовсе не связаны с понятием множества. Примером является

**Парадокс Берри**

Пусть $n$ — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем 11 словами. Тогда $n$ описывается 10 словами.

Грубо говоря, ответственность за данный парадокс несёт туманное выражение «нельзя описать». Поэтому, прежде чем приступить к изложению аксиом теории множеств, по всей видимости, нужно пояснить смысл выражения «условие на объекты».

## Аксиома экстенсиональности

Нередко можно услышать следующее: "Множество определяется своими элементами". В нашей системе эта идея превращается в аксиому экстенсиональности:

$$\forall X\,\forall Y\,(\forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y). \qquad \text{(Ext)}$$

Отметим, что «обратное» утверждение, а именно

$$\forall X\,\forall Y\,(X = Y \to \forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y)),$$

выглядит интуитивно очевидным, если понимать равенство двух объектов как их совпадение.

## Аксиома пустого множества

Нет ничего проще, чем совокупность без единого элемента, существование которой нам гарантирует аксиома пустого множества:

$$\exists X\,\forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \neq u). \qquad \text{(Empty)}$$

Разумеется, такое $X$ будет единственно в силу Ext. Его обозначают через $\varnothing$ и называют пустым множеством.

## Аксиома пары

Далее, наша система включает ряд аксиом, позволяющих получать новые множества из уже имеющихся. Простейшей из них является, пожалуй, аксиома пары:

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, \forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \qquad \text{(Pair)}$$

Таким образом, если имеются $X$ и $Y$, то можно получить $Z$, содержащее в точности $X$ и $Y$. Полученное $Z$ обозначают через $\{X, Y\}$ и называют неупорядоченной парой $X$ и $Y$.

## Схема аксиом выделения

Группы однородных аксиом обычно называют схемами. Так, для каждого условия $\Phi(x)$ имеется своя аксиома выделения:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u))). \qquad \text{(Sep)}$$

По сути, она утверждает, что для всякого $X$ мы можем образовать множество $Y$ всех тех $u \in X$, которые удовлетворяют $\Phi(u)$; такое $Y$ будет обозначаться через $\{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

## Аксиома объединения

Соединять множества в одно целое позволяет аксиома объединения:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow \exists v \, (v \in X \wedge u \in v)). \qquad \text{(Union)}$$

Стало быть, выражение

$$\bigcup X \ := \ \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое традиционно называют объединением $X$. В частности, для произвольных $X$ и $Y$ мы можем определить

$$X \cup Y \ := \ \bigcup \{X, Y\} \ = \ \{u \mid u \in X \vee u \in Y\},$$

называемое объединением $X$ и $Y$.

## Аксиома степени

Для того, чтобы сформулировать нашу следующую аксиому, удобно ввести сокращение

$$x \subseteq y \ := \ \forall v\,(v \in x \to v \in y).$$

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что $X$ является подмножеством $Y$, или $Y$ включает $X$. Аксиома степени гласит:

$$\forall X\,\exists Y\,\forall u\,(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{Power}$$

## Аксиома бесконечности

Рассмотрим условие

$$\mathrm{Ind}\,(x) \ := \ \varnothing \in x \wedge \forall u\,(u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Будем называть $X$ индуктивным, если верно $\mathrm{Ind}\,(X)$. Интуитивно каждое индуктивное множество бесконечно. Поэтому сформулируем аксиому бесконечности так:

$$\exists X\,\mathrm{Ind}\,(X). \tag{Inf}$$

Значит, Inf гарантирует существование некоторого индуктивного множества.

## Схема аксиом подстановки

В нашей системе для каждого условия $\Phi\,(x, y)$ имеется своя аксиома подстановки:

$$\begin{aligned}\forall x\,\forall y_1\,\forall y_2\,((\Phi\,(x, y_1) \wedge \Phi\,(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\ \forall X\,\exists Y\,\forall y\,(y \in Y \leftrightarrow \exists x\,(x \in X \wedge \Phi\,(x, y))).\end{aligned} \tag{Repl}$$

Таким образом, в случае, когда $\Phi\,(x, y)$ удовлетворяет посылке Repl, т.е. в определенном смысле является «функциональным», для произвольного $X$ выражение

$$\{y \mid \exists x\,(x \in X \wedge \Phi\,(x, y))\}$$

задаёт множество, своего рода «полный образ $X$ относительно $\Phi$».

## Аксиома регулярности

Значительное влияние на структуру универса всех множеств оказывает аксиома регулярности:

$$\forall X\,(X \neq \varnothing \to \exists u\,(u \in X \wedge X \cap u = \varnothing)). \qquad \text{(Reg)}$$

(Нет необходимости воспринимать эту аксиому слишком серьёзно.)

Лекция 2

## Аксиома выбора

Особое место в нашей системе занимает аксиома выбора:

$$\forall X\left(\varnothing \notin X \to \exists f\left(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X\,(f\,(u) \in u)\right)\right). \qquad \text{(C)}$$

Несмотря на довольно неоднозначную историю этой аксиомы, ныне она считается стандартной.

Вывести Nat из Inf можно с помощью Sep. Действительно, зафиксируем какое-нибудь индуктивное множество $X_0$. Возьмём

$$\mathbb{N} \;:=\; \{x \in X_0 \mid \forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to x \in X)\}.$$

По построению $\forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to \mathbb{N} \subseteq X)$. Кроме того, легко проверить, что $\mathrm{Ind}\,(\mathbb{N})$.

**Теорема (принцип индукции)**

*Пусть $X$ удовлетворяет условию*

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}\,(n \in X \to n+1 \in X).$$

*Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\; n \in X$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$.* □

**Следствие**

*Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $n \subseteq \mathbb{N}$, т.е. $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.*

**Следствие**

*Для всех $n, m, k \in \mathbb{N}$ верно следующее:*

i. $(m < k \wedge k < n) \to m < n$;

ii. $\neg n < n$. %без применения Reg

**Следствие**

*Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:*

i. $0 < n \vee 0 = n$;

ii. $m < n \leftrightarrow (m + 1 < n \vee m + 1 = n)$;

iii. $n < m \vee n = m \vee m < n$.

*(При этом в (iii) дизъюнкты взаимно исключают друг друга.)*

**Теорема (принцип возвратной индукции)**

*Пусть $X$ удовлетворяет условию*

$$\forall n \in \mathbb{N} \, (\forall m < n \, m \in X \to n \in X).$$

*Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \, n \in X$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Для произвольного $X$ обозначим

$$\mathrm{Min}\,(X) \;:=\; \{x \in X \mid \neg \exists u \in X \, u \in x\}.$$

Элементы $\mathrm{Min}\,(X)$ мы будем называть $\in$-минимальными в $X$.

**Теорема (принцип минимального элемента)**

*Если $X \subseteq \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}\,(X) \neq \varnothing$.*

**Теорема (о рекурсии)**

*Пусть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,*

$$f\,(n) \;=\; \begin{cases} y_0 & \text{если } \; n = 0, \\ h\,(m, f\,(m)) & \text{если } \; n = m + 1. \end{cases} \qquad (\star)$$

**Теорема (о рекурсии, параметризованная)**

*Пусть* $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x,n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, m, f(x,m)) & \text{если } n = m+1. \end{cases}$$

Лекция 3

**Теорема (о рекурсии, частичной)**

*Пусть* $y_0 \in Y$ *и* $h : \subseteq \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : \subseteq \mathbb{N} \to Y$ *такая, что:*

a. *для любого* $n \in \operatorname{dom}(f)$,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m+1; \end{cases}$$

b. *либо* $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{N}$, *либо* $\operatorname{dom}(f) = k+1$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$, *причём* $(k, f(k)) \notin \operatorname{dom}(h)$.

**Теорема (о возвратной рекурсии)**

*Пусть* $h : \mathbb{N} \times Y^* \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = h(n, f\restriction_n).$$

**Теорема (о возвратной «классовой рекурсии»)**

*Пусть* $\Phi(x,y)$ *— тотальное функциональное условие. Тогда сущ–ет и единственная функция* $f$ *с* $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{N}$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = [\![\Phi]\!](n, f\restriction_n).$$

**Теорема**

*Для всех $X$, $Y$ и $Z$ верно следующее:*

a. $X \sim X$;

b. *если* $X \sim Y$, *то* $Y \sim X$;

c. *если* $X \sim Y$ *и* $Y \sim Z$, *то* $X \sim Z$. $\square$

**Теорема**

*Для всех $X$, $Y$ и $Z$ верно следующее:*

a. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $X \sim Z$, *то* $Z \preccurlyeq Y$;

b. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \sim Z$, *то* $X \preccurlyeq Z$;

c. $X \preccurlyeq X$;

d. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \preccurlyeq Z$, *то* $X \preccurlyeq Z$. $\square$

**Теорема (Кантора, обобщённая)**

*Для любого $X$ верно* $X \prec \mathcal{P}(X)$.

**Теорема (Кантора–Шрёдера–Бернштейна)**

*Если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \preccurlyeq X$, *то* $X \sim Y$.

**Лемма**

*Если* $X \supseteq Y \supseteq X'$ *и* $X \sim X'$, *то* $X \sim Y \sim X'$.

**Предложение**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда $|X| > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

**Предложение**

*Пусть $X$ конечно и $|Y| \leqslant |X|$. Тогда $Y$ конечно.*

**Предложение**

*Пусть $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, причём $X$ конечно. Тогда $|Y| \leqslant |X|$.*

**Предложение**

*Пусть $X$ и $Y$ конечны. Тогда $X \cup Y$, $X \times Y$ и $X^Y$ конечны, причём*

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X|,$$
$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| \quad \text{и} \quad |X^Y| = |X|^{|Y|}.$$

**Предложение (в ZFC)**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда существует счётное $Y \subseteq X$.*

**Следствие (в ZFC)**

$|X| > \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда $X$ бесконечно и несчётно.* □

**Предложение**

$|X| \leqslant \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда $X$ конечно или счётно.*

**Следствие (в ZFC)**

$|X| \not> \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant \aleph_0$.* □

**Предложение**

*Пусть $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, причём $X$ не более чем счётно. Тогда $Y$ не более чем счётно.*

**Следствие**

*Непустое $X$ не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюрьекция из $\mathbb{N}$ на $X$.* □

**Следствие**

*Пусть $R$ — отношение эквивалентности на $X$, причём $X$ не более чем счётно. Тогда $X_{/R}$ не более чем счётно.* $\square$

**Предложение**

*Пусть $X$ и $Y$ не более чем счётны. Тогда $X \times Y$ не более чем счётно.*

**Следствие**

*Пусть $X$ и $Y$ не более чем счётны. Тогда $X \cup Y$ не более чем счётно.*

**Следствие**

*Пусть $X$ конечно, причём его элементы не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

**Теорема**

*Пусть $f$ — бесконечная последовательность бесконечных последовательностей. Тогда $\bigcup \{\mathrm{range}\,(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ не более чем счётно.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $X$ не более чем счётно, причём его элементы также не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

**Теорема**

*Пусть $X$ не более чем счётно и непусто. Тогда $X^*$ счётно.*

**Следствие**

*Пусть $X$ счётно. Тогда $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}\,(X)$ счётно.*

**Теорема (в ZFC)**

*Пусть $X$ бесконечно, а $Y$ не более чем счётно. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $X$ более чем сч., а $Y$ не более чем сч. Тогда $|X \setminus Y| = |X|$.*

**Предложение**

*Пусть $\mathfrak{A}$ — ч.у.м. Тогда:*

i. *существует не более одного наибольшего в $\mathfrak{A}$ элемента;*

ii. *всякий наибольший в $\mathfrak{A}$ элемент является максимальным в $\mathfrak{A}$;*

iii. *любые два различных максимальных в $\mathfrak{A}$ элемента несравнимы.*

*Аналогично для наименьших и минимальных элементов.* □

**Предложение**

*Пусть $\mathfrak{A}$ — л.у.м. Тогда всякий максимальный в $\mathfrak{A}$ элемент является наибольшим в $\mathfrak{A}$ (и наоборот). Аналогично для минимальных и наименьших элементов.* □

**Предложение**

*Пусть даны л.у.м. $\mathfrak{A}$ и ч.у.м. $\mathfrak{B}$. Тогда всякий инъективный гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.* □

**Предложение**

*Для всех ч.у.м. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ верно следующее:*

a. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$;

b. *если* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$;

c. *если* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$, *то* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$. □

I. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и $S \subseteq A$. Возьмём

$$\leqslant_S \; := \; \leqslant \cap \, S \times S.$$

Тогда $\langle S, \leqslant_S \rangle$ — ч.у.м., которое называют индуцированным в $\mathfrak{A}$ по $S$. При этом из л.у.м. всегда получится л.у.м.

II. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$, причём $A$ и $B$ не пересекаются. Возьмём

$$\leqslant \; := \; \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup \, A \times B.$$

Тогда $\langle A \cup B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., которое будет обозначаться $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. При этом из двух л.у.м. всегда получится л.у.м.

III. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Определим $\leqslant$ на $A \times B$ по правилу

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad a_1 \leqslant_A a_2 \text{ и } b_1 \leqslant_B b_2.$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., где $\leqslant$ традиционно называют покоординатным порядком. Разумеется, даже в случае, когда $\leqslant_A$ и $\leqslant_B$ были линейными, $\leqslant$ может оказаться нелинейным.

IV. Модифицируем предыдущую конструкцию, сделав одну из координат главной. Например, вторую:

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad b_1 <_B b_2 \text{ или } (b_1 = b_2 \text{ и } a_1 \leqslant_A a_2).$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., которое мы будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. При этом из двух л.у.м. всегда получится л.у.м.

**Теорема**

*Для ч.у.м. $\mathfrak{A}$ верен принцип трансфинитной индукции тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ фундировано.*

Нетрудно проверить следующее.

I. Пусть даны фундированные ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, причём $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ будет фундированным ч.у.м.

II. Пусть даны фундированные ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ будет фундированным ч.у.м.

**Предложение**

*Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м., а $S$ — начальный сегмент $\mathfrak{A}$, отличный от $A$. Тогда существует и единственный $a \in A$ такой, что $S = [0, a)$.* □

**Предложение**

*Для каждого в.у.м. $\mathfrak{A}$ верно $\mathfrak{A} \simeq \langle \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$.*

**Предложение**

*Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м., а $f$ — вложение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ (или «строго возрастающая функция из $A$ в $A$»). Тогда $f(a) \geqslant a$ для всех $a \in A$.*

**Следствие**

*Для каждого в.у.м. $\mathfrak{A}$ единственным автоморфизмом $\mathfrak{A}$ является $\mathrm{id}_A$.*

**Следствие**

*Для любых в.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеется не более одного изом-ма из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.*

**Лемма**

*Никакой собств. нач. сегмент в.у.м. $\mathfrak{A}$ не может быть изоморфен $\mathfrak{A}$.*

**Теорема (о сравнении в.у.м.)**

*Для любых в.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеет место ровно один из трёх случаев:*

i. *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны;*

ii. *$\mathfrak{A}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{B}$;*

iii. *$\mathfrak{B}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{A}$.*

*При этом в (ii–iii) соответствующие собственные начальные сегменты определяются однозначно.*

**Предложение**

*Пусть $\alpha$ — ординал и $X \in \alpha$. Тогда $X$ — ординал.*

**Предложение**

*Пусть $\alpha$ — ординал и $\beta \in \alpha$. Тогда $\beta = [0, \beta)$.* $\square$

**Предложение**

*Для любых ординалов $\alpha$ и $\beta$,*

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta.$$

**Теорема**

*Для любых ординалов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ верно следующее:*

i. $\alpha \not< \alpha$;

ii. *если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$;*

iii. *либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$;*

iv. *для всякого непустого множества ординалов $X$ верно $\bigcap X \in X$, причём $\bigcap X$ является наименьшим в $\langle X, \in_X \rangle$.*

**Следствие**

*Пусть $X$ — транзитивное множество ординалов. Тогда $X$ — ординал.*

**Теорема**

*Пусть $X$ — множество ординалов. Тогда $\bigcup X$ — ординал, причём $\bigcup X$ является «супремумом $X$» в классе всех ординалов относительно $\in$.*

**Теорема (о связи ординалов и в.у.м.)**

*Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м. Тогда существует и единственный ординал $\alpha$ такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.*

**Теорема (о трансфинитной рекурсии)**

*Фиксируем некоторый ординал $\alpha$. Пусть $h : X^{<\alpha} \to X$. Тогда существует и единственная $f : \alpha \to X$ такая, что для любого $\beta \in \alpha$,*

$$f(\beta) = h(f\restriction_\beta). \qquad (\star)$$

**Теорема (о трансфинитной рекурсии, частичной)**

*Фиксируем некоторый ординал $\alpha$. Пусть $h : \subseteq X^{<\alpha} \to X$. Тогда сущ. и единственная $f : \subseteq \alpha \to X$ такая, что:*

a. *для любого $\beta \in \mathrm{dom}(f)$,*

$$f(\beta) = h(f\restriction_\beta);$$

b. *либо $\mathrm{dom}(f) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}(f) = \gamma$ для некоторого $\gamma < \alpha$, причём $f \notin \mathrm{dom}(h)$.*

**Теорема (о трансфинитной «классовой рекурсии»)**

*Фиксируем некоторый ординал $\alpha$. Пусть $\Phi(x, y)$ — тотальное функциональное условие. Тогда существует и единственная функция $f$ с $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ такая, что для любого $\beta \in \alpha$,*

$$f(\beta) = [\![\Phi]\!](f\restriction_\beta).$$

**Теорема (Цермело о полном упорядочении; ZFC)**

*Для любого $A$ существует $\leqslant_A$ такое, что $\langle A, \leqslant_A\rangle$ — в.у.м.*

**Теорема (о сравнимости по мощности; в ZFC)**

*Для любых $X$ и $Y$ верно $X \preccurlyeq Y$ или $Y \preccurlyeq X$.* $\square$

**Предложение**

*Для любых кардиналов $\kappa$ и $\mu$,*

$$\kappa \preccurlyeq \mu \iff \kappa \leqslant \mu.$$

**Теорема (в ZFC)**

*Для каждого $X$ имеется единственный кардинал, равномощный $X$.*

**Предложение (в ZFC)**

*Для любых $X$ и $Y$ верно следующее:*

i. $\mathrm{card}\,(X) = \mathrm{card}\,(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $X \sim Y$;

ii. $\mathrm{card}\,(X) \leqslant \mathrm{card}\,(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $X \preccurlyeq Y$. □

**Теорема (Гёдель, 1940)**

*Можно доказать, что* $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC. %интересно

**Теорема (Коэн, 1963)**

*Можно доказать, что* CH *нельзя доказать в* ZFC. %ещё интереснее

## Лекция 8

**Теорема (Лемма Цорна; в ZFC)**

*Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ — ч.у.м. с непустым носителем, в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда в $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ — ч.у.м., в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого $a \in A$ в $\mathfrak{A}$ есть макс. элемент $a' \geqslant_A a$.*

**Теорема (в ZFC)**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда $|X \times X| = |X|$.*

**Следствие (в ZFC)**

*Если $0 < |X| \leqslant |Y|$ и $Y$ бесконечно, то $|X \times Y| = |Y|$.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $|X| \leqslant |Y|$ и $Y$ бесконечно. Тогда $|X \cup Y| = |Y|$.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $|X| < |Y|$ и $Y$ бесконечно. Тогда $|Y \setminus X| = |Y|$.*

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда $|X^*| = |X|$.*