

Конспект по матанализу в формате вопросов
коллоквиума
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 8, 2019

Contents

1	Введение	4
1.1	Простейшие свойства вещественных чисел	4
1.2	Множества в \mathbb{R}	5
1.3	Натуральные числа	5
1.3.1	Аксиома Архимеда	5
1.3.2	Аксиома индукции	6
1.3.3	Неравенство Бернулли	6
1.3.4	Аксиома Кантора-Дедекинда	6
1.3.5	Иррациональность корня из двух	7
1.3.6	Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке	8
1.3.7	Число e	8
1.4	Свойства подмножеств \mathbb{R}	9
1.4.1	Грани	9
1.4.2	Связность отрезка	10
1.4.3	Предельные и изолированные точки	10
1.4.4	Теорема о вложенных отрезках	11
1.4.5	Теорема о компактности	11
1.4.6	Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках	12
1.4.7	Десятичное разложение вещественного числа	12
2	Пределы	14
2.1	Основные свойства пределов функций	14
2.1.1	Определение предела	14
2.1.2	Единственность предела	14
2.1.3	Теорема о пределе сужения	15
2.1.4	Предел постоянной функции и предел тождественного отображения	15
2.1.5	Предельный переход в неравенстве	15
2.1.6	Принцип двух полицейских	15
2.1.7	Предел линейной комбинации	16
2.1.8	Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций	16
2.1.9	Предел произведения имеющих предел функций	17
2.1.10	Предел частного	17

2.1.11	Сумма геометрической прогрессии	18
2.1.12	Предел монотонной функции	19
2.1.13	Предел композиции	19
2.2	Критерий Коши	20
2.2.1	Критерий Коши	20
2.3	Ряды	21
2.3.1	Понятие ряда. Теорема Лейбница	21
2.4	Верхние и нижние пределы	22
2.4.1	Определение и свойства	22
2.4.2	Теорема об описании верхнего и нижнего предела	23
2.5	Последовательности	24
2.5.1	Сходящиеся последовательности и их пределы	24
2.5.2	Вторая форма теоремы о компактности	25
2.5.3	Предел функции в терминах последовательности	26
2.6	Бесконечные пределы	26
2.6.1	Бесконечные пределы	26
2.7	Бесконечно большие и бесконечно малые	27
2.7.1	О и о. Соотношения транзитивности	27
2.7.2	Эквивалентные функции	28
2.7.3	Отношение эквивалентности и вычисление пределов	28

[section]

Chapter 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

(а) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

- i. $a + b = b + a$ (коммутативность)
- ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)
- iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

(б) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

- i. $xy = yx$ (коммутативность)
- ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)
- iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)
- v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на \mathbb{R}

Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

$$(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \text{ (антисимметричность)} \\ a < b \end{cases}$$

(b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

(c) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в \mathbb{R}

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты). $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ (замкнутый отрезок)}$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (открытый слева отрезок)}$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (открытый справа отрезок)}$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (открытый отрезок)}$$

Def 5 (Лучи). $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A .

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A .

// $\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Аксиома (Архимед). Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Proof. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. \square

1.3.2 Аксиома индукции

Аксиома (индукции). Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Statement (Обоснование метода математической индукции). Пусть P_1, P_2, \dots - последовательность суждений. Предположим, что

1. P_1 - верно

2. Для любого $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$

Тогда все условия P_i верны.

Proof. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \emptyset$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1$, $l - 1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. \square

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1.3.1 (Неравенство Бернулли). Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geq 1 + n(a - 1)$, $n \in \mathbb{N}$

Proof. Индукция:

База: $n = 1 : a \geq 1 + (a - 1)$

Переход: $n \rightarrow n + 1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a - 1)a = (a - 1) + 1 + n(a - 1)a = \\ &1 + (a - 1)(1 + na) \geq 1 + (a - 1)(1 + n) \end{aligned}$$

\square

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Proof. Пусть $a^n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a - 1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$. Противоречие \square

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B) , где $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, такая что всякое число из A не более любого из B .

Def 8. Число c лежит в щели (A, B) , если $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Аксиома (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

Statement. *Квадратный корень из 2 существует и единственный.*

Proof.

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, \quad B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \leq v \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

Lemma. *В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.*

Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

2. Единственность

Возьмем $c \geq 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c , для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 1.3.2. *Квадратный корень из двух иррационален.*

Proof. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q^2$$

□

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v \rangle$ - любой отрезок с концами в u, v ($u \leq v$). Его длина $|\langle u, v \rangle| := v - u$

Theorem 1.3.3. Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$ существует точка вида rc , где $r \in \mathbb{Q}$.

Proof. Заменим $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leq r \leq b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$. Среди таких p существует наименьший p_0 .

Возьмем $\frac{p_0-1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$ □

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 1.3.4. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует иррациональное число.

Proof. По следствию из теоремы 1.3.3 $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$. □

1.3.7 Число e

Def 12. Рассмотрим последовательность $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Число e - предел $\{a_n\}$.

Statement. $\{a_n\}$ - сходится.

Proof.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333 \end{aligned}$$

□

Theorem 1.3.5. e - иррационально.

Proof. $2 < e < 3$

Пусть $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $q > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right). \\ q!p &= S + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \right) = S + a. \end{aligned}$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$. Обозначим предел за a . Докажем, что $a \notin \mathbb{Z}$.

Statement. $0 < a < 1$

Proof.

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}.$$
$$0 < a \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1.$$

□

□

1.4 Свойства подмножеств \mathbb{R}

1.4.1 Грани

Def 13 (supremum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 14 (infimum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.

Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его нижних границ.

Theorem 1.4.1 (об описании точной верхней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \sup A$
2. x – верхняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Proof.

1 \Rightarrow 2

$x = \sup A \Rightarrow x$ – верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$. Тогда $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x . Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

2 \Rightarrow 1

x – верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x – наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ – верхняя граница A . Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x – не верхняя граница. □

Theorem 1.4.2 (об описании точной нижней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \inf A$
2. x – нижняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 15. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 1.4.3 (о связности отрезка). *Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Для любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$ – замкнуты $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$, то $E \cap F \neq \emptyset$.

Proof. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \emptyset$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x – предельная точка для E , с другой стороны, предельная точка для F . Так как E, F – замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \emptyset$. Противоречие. \square

1.4.3 Предельные и изолированные точки

Def 16. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 17. Проколота окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

Def 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

u называется предельной точкой для A , если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

Examples.

1. \mathbb{Z}, \mathbb{N} не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.
3. Для \mathbb{Q} все предельные точки – \mathbb{R} .

Def 19. Все точки множества A , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A \text{ – изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

Examples.

1. $[1, 2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1, 2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ ($y = \inf A$).

$$\left[\begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y \text{ – предельная точка } A \\ y \in A \end{array} \right.$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 1.4.4 (о вложенных отрезках). $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$.

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - последовательность замкнутых отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

Proof. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Proof. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geq k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.

В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 1.4.5 (о компактности). Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.

Proof. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$.

Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] \text{ - бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] \text{ - бесконечно} \end{cases}$

Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A .

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. □

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 1.4.6 (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

Proof. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. \square

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем

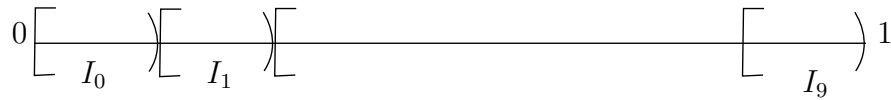


Figure 1.1: Decimal decomposition

собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей
3. И так далее

Получим $0.i_1i_2i_3\dots$ — десятичную запись числа x .

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 1.4.7. Пусть (j_1, j_2, \dots) - цифры от нуля до девяти. $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$. Тогда $\exists! x \in [0, 1)$ для которого $0.j_1j_2\dots$ - десятичное представление.

Proof. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме 1.4.6 существует непустое пересечение, равное одной точке - и есть наше число. \square

Chapter 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 20. b – предел функции f в точке x_0 , если для любой окрестности U в точке b существует такая проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 : $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 21. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 22. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 2.1.1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x - предельная точка для A .

Если a, b - предельные для f в точке x_0 , то $a = b$.

Proof. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Противоречие. \square

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 23. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 2.1.2 (о пределе сужения). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$

Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. Тогда $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$.

Proof. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. □

Theorem 2.1.3 (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$, то $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Proof. $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.

$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0 . □

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 2.1.4 (Предельный переход в неравенстве). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$. Предположим, что существуют пределы у f, g в точке x_0 равные соответственно a, b . Пусть $a < b$.

Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Proof. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned} .$$

Возьмем $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. □

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 2.1.5 (Принцип двух полицейских). $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$

Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x_0} g = b$.

Proof. Рассмотрим $\overset{\circ}{U}(b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2 : \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

□

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 2.1.6 (Предел линейной комбинации). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \alpha a + \beta b$

Proof.

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ = |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| &\leq \\ \leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ &\exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned}.$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$:

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ и $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Proof. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

□

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$.

Proof.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$ в некоторой проколотой окрестности x_0 , а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0 . Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$, $b \neq 0$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Proof.

Lemma. В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$. То есть $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

Proof. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \quad . \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a)||g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \in \mathbb{R}$.

Statement. Если $|q| < 1$, то $f(n)$ имеет предел, иначе не имеет предела.

Proof.

$$|q| < 1$$

Lemma.

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Proof.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0 \ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$. \square

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

2. $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \text{ нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5. $q < 1$

$$|f(n)| = \left|\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right| \geq \frac{1}{|q-1|}(|q|^{n+1}-1).$$

Эта функция тоже не имеет предела. \square

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 24. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$

f – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ (f(x_1) < f(x_2)).$$

f – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

f – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 2.1.7 (о пределе монотонной функции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на $A, x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Proof. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leq M \ \forall x \in A$.

$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

Note. Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

2.1.13 Предел композиции

Def 25. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subset B$. Тогда задана функция композиции $h = g \circ f$.

Theorem 2.1.8. Пусть $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y \rightarrow b} g(y) = d$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = d$, если хотя бы одно условие выполнено:

1. $f(x) \neq b, \quad x \neq x_0$
2. $b \in B, g$ - непрерывна в точке $b : d = g(b)$

Proof. Пусть U окрестность точки d ; $\exists V(b)$:

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W}(x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \rightarrow f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) \in U$. Пусть выполнено второе условие. Либо $f(x) \neq b$, тогда $g(f(x)) \in U$, либо $f(x) = b$, тогда $g(f(x)) = d \in U$ □

2.2 Критерий Коши

2.2.1 Критерий Коши

Theorem 2.2.1 (Критерий Коши). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A'$. x - либо число, либо $\pm\infty$.

Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Proof. $1 \Rightarrow 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$.

Lemma. Если выполнено условие Коши, то f ограничено вблизи x_0 .

Proof. Применим условие : зафиксируем какую-то точку y из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности x_0 выполнено $f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$, то есть $f(x)$ ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности, f - ограничена.

Def 26. Пусть $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на $B, E \subset B$. Колебание f на E - это $\sup_{x \in E} g(x) - \inf_{x \in E} g(x) = \text{osc}_E(g)$

Если $\forall x, y \in E |g(x) - g(y)| \leq \rho \Rightarrow \text{osc}_E(g) \leq \rho$: $\forall x, y \in E - \rho < g(x) - g(y) \leq g \Rightarrow g(x) \leq g(y) + \rho \Rightarrow \sup_E g \leq g(y) + \rho, \sup_E g - \rho \leq g(y) \forall y \in E \Rightarrow \sup_E g - \rho$ - нижняя граница, $\inf_E g \geq \sup_E g - \rho$.

$$/ \sup - \inf \leq \sup - (\sup - \rho) = \rho$$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$\text{osc}_B(f) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что $|f(x) - f(y)| \leq \rho \forall x, y \in B \Rightarrow \text{osc}_B(f) \leq \rho$. Пусть $d = \text{osc}_B(f); x, y \in B$

$$m = \inf_{z \in B} f(z) \leq f(x) \leq \sup_{z \in B} f(z) = M$$

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq f(y) \leq \sup_{z \in B} f(z)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = \text{osc}_B(f) = d$$

d - верхняя граница для множества чисел $|f(x) - f(y)|$, доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо. \square

f удовлетворяет условию Коши в x_0 : $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A$. По лемме f ограничена.

Заведём вспомогательную функцию $g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$ - предельная точка для g , g ограничена на A . $\mathring{V}(x_0); m = m_{\mathring{V}} = m_{\mathring{V},g} = \inf_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x); M = \sup_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x)$. Всегда $m \leq M$, заведём ещё $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\mathring{V}}$ - множество \inf по всем проколотым окрестностям, аналогично заведём множество \sup .

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$ образует щель. Если $\mathring{W} \subset \mathring{V} \Rightarrow m_{\mathring{W}} \geq m_{\mathring{V}}; M_{\mathring{W}} \leq M_{\mathring{V}}$. Пусть $a \in \Gamma, b \in \Delta, \exists \mathring{V}, \mathring{W} : a = m_{\mathring{V}}, b = M_{\mathring{W}}$. Пусть $\mathring{V} \subset \mathring{W}; a \leq M_{\mathring{V}} \leq b$. Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей f это щель. $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$ узкая щель. $\varepsilon > 0; \exists \mathring{V} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow M_{\mathring{V},f} - m_{\mathring{V},f} \leq \varepsilon$, то есть там только одно число c .

$\forall \mathring{V}(x_0) m_{\mathring{V},f} \leq c \leq M_{\mathring{V},f}. x \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow m_{\mathring{V},f} \leq f(x) \leq M_{\mathring{V},f} \Rightarrow |f(x) - c| \leq M - m \leq \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : osc_{\mathring{V} \cap A}(f - c) \leq \varepsilon$. □

2.3 Ряды

2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

Def 27. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ряд - символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда - последовательность $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}, S_k = \sum_{n=1}^k a_n$.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} - \text{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 2.3.1 (Лейбниц). Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательность $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

Proof.

\Rightarrow

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

Заменяем в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

$\stackrel{\leftarrow}{\sum}_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□

Theorem 2.3.2. Пусть $s > 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$.

2.4 Верхние и нижние пределы

2.4.1 Определение и свойства

Def 28. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x)$$

$$b = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x).$$

Число a называется верхним пределом f в точке x_0 .

Число a называется нижним пределом f в точке x_0 .

Property. 1. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. Сумма двух функций $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq \overline{\lim}_{x_0} f + \overline{\lim}_{x_0} g.$$

Рассмотрим $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$.

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g). \end{aligned}$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim}_{x_0}(f, g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

Theorem 2.4.1 (Теорема об описании верхнего предела). Пусть f - ограниченная функция на множестве A . $x_0 \in A$. Число a является верхним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

Proof. Пусть 1 и 2 выполнены. $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и найдем для него $\overset{\circ}{V}$.

$$\overline{\lim}_{x_0} f \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq a + \varepsilon.$$

Тогда $\overline{\lim}_{x_0} f \leq a$.

$$\forall \overset{\circ}{U} : M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{x_0} f \geq a + \varepsilon.$$

Так как ε любое, $\overline{\lim}_{x_0} f \geq a$

Теперь в обратную сторону. Пусть $a = \overline{\lim}_{x_0} f$.

$$a = \overline{\lim}_{x_0} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} : a \leq M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Рассмотрим произвольную проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 .

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

□

Theorem 2.4.2 (Теорема об описании нижнего предела). Пусть f - ограниченная функция на множестве A . $x_0 \in A$. Число b является нижним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

Proof. Аналогично

□

2.5 Последовательности

2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Def 29. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Statement. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, $b \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N} - \text{конечное} : \forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$$

Proof. Запишем определение того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad (2.1)$$

$1 \Rightarrow 2$. Пусть 2.1 верно. Возьмем $A = \{1, \dots, N\}$ - конечно. Следовательно, верно 2.

$2 \Rightarrow 1$. Возьмем $N = \max\{A\}$, получим 1.

□

Def 30. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция. $y_n = x_{\varphi(n)}$ - перестановка $\{x_n\}$.

Corollary. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

Def 31. Пусть $\{n_k\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. $\{y_k\} : y_k = x_{n_k}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$

Statement. Если $\{x_n\}$ сходится к b , то любая подпоследовательность тоже сходится к b .

Proof. Аналогично 2.1.3.

□

2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

Lemma. $x \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

1. x_0 - предельная точка для X .
2. $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in X, x_n \neq x_0$. Более того $\{x_n\}$ можно выбрать так, что $x_k \neq x_j, i \neq j$.

Proof. $2 \Rightarrow 1$. Возьмем любую проколотую окрестность точки x_0 . Хотим: $\overset{\circ}{V} \cap X \neq \emptyset$.

$$\overset{\circ}{V} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$. Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. По принципу двух полицейских $|x_n - x_0| \rightarrow 0$. Теперь сделаем все неравными: $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$, дальше возьмем $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$ и скажем, что $x_2 \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap X, x_2 \neq x_1$ и так далее, $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \dots, |x_0 - x_{n-1}|), x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$ \square

Theorem 2.5.1 (Вторая форма теоремы о компактности). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Proof. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\exists M : |x_n| \leq M, \forall n$. Разберем два случая:

1. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.

2. A - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для A . Тогда по лемме 2.5.2 существует $\{a_k\} \in A, a_k \rightarrow b, a_k \neq a_l, k \neq l$.

Тогда $\forall k \exists n_k : a_k = x_{n_k}$, где номера n_k попарно различны, но не упорядочены. То есть $\{x_{n_k}\}$ - перестановка $\{x_n\}$, а значит тоже сходится.

\square

2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

Theorem 2.5.2. Пусть $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$
2. $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow a$

Proof. $1 \Rightarrow 2$. Берем последовательность $a_n \in A, a_n \neq x_0$. Надо $f(a_n) \rightarrow a$.

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\exists N : a_n \in V \forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} (a_n \neq x_0).$$

Получаем

$$|f(a_n) - a| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$. От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\neg "a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)" : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x \in A, |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Возьмем

$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, x_n \in A.$$

Получаем, что $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. С другой стороны, по принципу двух полицейских:

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Противоречие.

Случай $x_0 = \infty$.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Возьмем $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$. □

2.6 Бесконечные пределы

2.6.1 Бесконечные пределы

Def 32. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$. Говорят, что f имеет предел $+\infty(-\infty)$ в точке x_0 , если: $\forall U(\pm\infty)$ существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

На языке неравенств: $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Def 33. Говорят, что f стремиться к бесконечности в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$. То есть $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$.

Statement. Пусть $f(x) \neq 0$ в проколотой окрестности x_0 . Следующие условия эквивалентны:

1. f - стремиться к бесконечности в точке x_0

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Proof. $1 \Rightarrow 2$ (тогда дополнительное условие 2.6.1 можно не накладывать).

$$\varepsilon > 0 M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ (здесь условие 2.6.1 необходимо). $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$. Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 :

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \iff |f(x)| > M.$$

□

2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

2.7.1 О и о. Соотношения транзитивности

Def 34. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$.

f называется бесконечно малой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

f называется бесконечно большой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

Def 35. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что g доминирует функцию f вблизи x_0 и пишут $f = O(g) (x \rightarrow x_0)$, если $\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$.

Def 36. Функции f, g называются сравнимым вблизи x_0 , если $f = O(g) \wedge g = O(f)$. Обозначение: $f \asymp g$.

Property. $f = O(g) \wedge g = O(h) \implies f = O(h)$

Proof.

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leq c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \\ \exists \overset{\circ}{V}(x_0), \exists c_2 : |g(x)| \leq c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A \end{aligned}$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$:

$$|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq c|h(x)|.$$

□

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0 , то $f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f}{g}$ - ограниченная функция.

Def 37. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что $f(x) = o(g(x))$ вблизи x_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0)$:

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0 , то $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ - ограниченная функция.

2.7.2 Эквивалентные функции

Def 38. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что f, g эквивалентны вблизи x_0 , если $f - g = o(g)$, при $x \rightarrow x_0$. Обозначение: $f \sim g$.

Note. Определение асимметрично!

Lemma. $f \sim g$, при $x \rightarrow x_0 \implies g \sim f$, при $x \rightarrow x_0$

Proof. Проверим, что $g = O(f)$ вблизи x_0 :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2} |g(x)|.$$

$$\frac{1}{2} |g(x)| \leq |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leq 2 |f(x)|.$$

□

Note. Если $g(x) \neq 0$ вблизи x_0 , $f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

Statement. Полезные преобразования для вычисления пределов:

$$1. \ p(x) = \sum_{i=1}^n a_n x^n, \quad a_n \neq 0. \text{ При } x \rightarrow +\infty : p(x) \sim a_n x^n$$

$$2. \ p(x) = (x - x_0)^l (b_0 + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0. \text{ Тогда } p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$$

$$3. \ f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \dots + 1} \sim \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$$

Theorem 2.7.1. f, g не обращаются в нуль вблизи x_0 , $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$ вблизи x_0 . Тогда fg, f_1g_1 одновременно имеют или не имеют предел в точке x_0 . Если пределы существуют, то они равны.

Note. Аналогичная теорема верна для $\frac{f}{g}$ и $\frac{f_1}{g_1}$

Proof.

$$fg = f_1g_1 \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

□