

Конспект по матанализу
III семестр
Современное программирование, факультет математики и
компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

25 сентября 2020 г.

Оглавление

1	Функциональные последовательности и ряды	2
1.1	Равномерная и поточечная сходимости	2
1.2	Равномерные и поточечные сходимости рядов	4
1.3	Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	7
1.4	Степенные ряды	9
1.5	Разложение элементарных функций в ряды Тейлора	14
2	Теория меры и интегрирования	16
2.1	Системы множеств	16
2.2	Объем	18
2.3	Мера и ее свойства	20
2.4	Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.	22
2.5	Продолжение меры. Построение внешней меры.	25
2.5.1	Теорема о продолжении меры	26
2.6	Единственность стандартного построения	27
2.7	Определения и простейшие свойства меры Лебега в \mathbb{R}^n	28
2.8	Регулярность меры Лебега	29

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: †

2 Sept

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \rightarrow f$), если

$$\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество \mathbb{R}^n .

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N \forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0, 1)$. Так как $\forall x \in (0, 1): x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n \rightarrow f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. $f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \rightarrow f \implies \|f_n - f\| \rightarrow 0 \iff f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется **равномерно ограниченной** на E , если существует такое M , что

$$\forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}: |f_n(x)| \leq M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. Из равномерной сходимости следует поточечная

1. Если для всех $x \in E$ выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E .

2. Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

то f_n не сходится равномерно к f на E .

3. Пусть $\{f_n\} \Rightarrow f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E . Тогда $f_n g_n \Rightarrow 0$.

Доказательство.

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) g_n(x)| \leq M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x \in E} |f_n(x)|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

4. **Критерий Коши.** Пусть $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E , тогда¹ для любого положительного ε существует N , что

$$\forall n, m > N \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n, m > N$

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &\leq \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2 \Rightarrow 1 Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаментальна.

Следовательно, существует предел $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Устремим $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \Rightarrow f$ на E .

¹С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

□

5. Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \Rightarrow f$ на E , то f тоже непрерывна в точке a .

Доказательство. Проверим, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как f_n непрерывна в точке a , можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:

$$\exists \delta > 0: \forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем два полученных неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| + \\ &+ |f_n(a) - f(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon \end{aligned}$$

□

6. **Теорема Стокса-Зайделя.** Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \Rightarrow f$, то f непрерывна на E .

Доказательство. Следствие из 5 [прошлого свойства].

□

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функциональный ряд

Рассмотрим функции $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) &\text{ — функциональный ряд,} \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) &\text{ — частичная сумма ряда.} \end{aligned}$$

Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.

$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \rightarrow 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K .

Свойства.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , тогда $r_n \Rightarrow 0$ на E .
2. **Критерий Коши.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N , что

$$\forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E: \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x) \right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. **Необходимое условие равномерной сходимости ряда.** Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E , то u_n равномерно сходится к 0.

Доказательство. По критерию Коши для $p = 1$. □

4. **Признак сравнения.** Пусть $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leq v_n(x)$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на E , то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно на E .

Доказательство. Обозначим частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x).$$

Заметим, что

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \leq |C_m(x) - C_n(x)|.$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше ε при $m, n > N$ и $x \in E$. Тогда можем применить критерий Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. □

5. **Признак Вейерштрасса.** Пусть $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. Применить признак Коши. □

6. Если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.
7. **Признак Дирихле.** Пусть $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, обозначим $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:

- (a) ряд U_n равномерно ограничен на E , то есть $\exists M: \forall x \in E \quad \forall n \quad |U_n(x)| \leq M$;
- (b) ряд v_n равномерно сходится к нулю ($v_n \Rightarrow 0$);
- (c) для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)v_k(x) = U_n(x)v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$

²Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае \mathbb{C} не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

Так как $U_n(x)$ равномерно ограничено, а $v_n(x)$ равномерно сходится к нулю, $U_n(x)v_n(x)$ тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))|.$$

Оценим частичную сумму³

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq \\ &\leq M \cdot \sum_{k=1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = \\ &= M \cdot |v_1(x) - v_n(x)| \end{aligned}$$

Так как $v_n \Rightarrow 0$, $|v_1(x) - v_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |v_1(x)|$. Значит, частичная сумма ряда стремится к $M \cdot |v_1(x)|$, следовательно⁴, второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится. \square

8. Признак Лейбница. Если выполнены следующие условия, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x)$ равномерно сходится:

- (a) $v_n \Rightarrow 0$ на E ;
- (b) для любого $x \in E$, ряд $\{v_n(x)\}$ монотонный.

Доказательство. Обозначим за $u_n(x) := (-1)^n$. Заметим, что ряд $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ ограничен, тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ равномерно сходится. \square

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$. Обозначим $u_n(x) = \sin(nx)$ и $v_n(x) = \frac{1}{n}$. Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix \cdot \frac{n+1}{2}} \cdot \left(e^{ix \cdot \frac{n+1}{2}} - e^{-ix \cdot \frac{n+1}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{\frac{ixn}{2}} \right) \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

³В последнем переходе мы используем монотонность $v_k(x)$

⁴Например, по признаку сравнения

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ при $x \in (0, 1)$. Обозначим $v_n(x) = \frac{x^n}{n}$. $v_n(x)$ монотонна для всех $x \in (0, 1)$, так же $|v_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, поэтому v_n равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. Признак Абеля. Пусть $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:

- (a) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E ;
- (b) ряд v_n равномерно ограничен;
- (c) для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.

Доказательство. Проверим критерий Коши, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать число N такое, что

$$\forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля⁵:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) &= \sum_{k=1}^p u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) = \\ &= (U_{n+p}(x) - U_n(x)) \cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (U_{n+k}(x) - U_n(x)) \cdot (v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)) \end{aligned}$$

Так как v_n равномерно ограничено, а u_n равномерно сходится⁶:

$$(U_{n+p}(x) - U_n(x)) \cdot v_{n+p}(x) \leq |U_{n+p}(x) - U_n(x)| \cdot M < \varepsilon \cdot M.$$

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для u_n и монотонность v_n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} (U_{n+k}(x) - U_n(x)) \cdot (v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |U_{n+k}(x) - U_n(x)| \cdot |v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p-1} |v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| \leq \varepsilon \cdot 2M \end{aligned}$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через ε , поэтому можем им воспользоваться. □

1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

1. Пусть $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E , f_n равномерно сходится к f на E и существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$. Тогда пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существуют и равны.

То есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

⁵Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.

⁶Поэтому можем использовать критерий Коши

Доказательство.

- (а) Проверим, что у b_n есть предел. Из критерия Коши для f_n следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N , что

$$\forall n, m > N \quad \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $x \rightarrow a$. Тогда $f_n(x) \rightarrow b_n$ и $f_m(x) \rightarrow b_m$. Из того, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon,$$

следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Поэтому предел b_n существует и $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- (b) Определим функции

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Эти функции непрерывны в точке a . Кроме этого $g_n \rightrightarrows g$ на $E \cup \{a\}$, так как можно выбрать N из прошлого пункта.

- (c) Используем свойство равномерной сходимости

$$b = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

□

Следствие 1. Если $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b) и f_n непрерывна, то $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

Лекция 2: †

9 Sept

2. Пусть $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E и $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = b_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Доказательство. Обозначим частные суммы за

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = B_n$ и $S_n \rightrightarrows S$ на E . $S_n(x)$ — функции, поэтому можно применить свойство 1 и получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} S_n = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

□

3. Пусть $f_n \in C[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ ⁷. Рассмотрим произвольную точку $c \in [a, b]$ и первообразную $\int_c^x f_n(t) dt$. Тогда

$$\int_c^x f_n(t) dt \rightrightarrows \int_c^x f(t) dt \text{ на } [a, b].$$

⁷Из этих двух условий автоматически следует, что f непрерывна

В частности,

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(t)dt &\rightarrow \int_a^b f(t)dt, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dt &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)dt.\end{aligned}$$

Доказательство. Посмотрим на разность

$$\left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^x f_n(t)dt \right| \leq |c - x| \cdot \max_{t \in [c, x]} |f(t) - f_n(t)| \quad (1.3.1)$$

Расширив отрезок $[c, x]$ до $[a, b]$, получаем следующую оценку на 1.3.1

$$1.3.1 \leq (b - a) \cdot \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.3.2)$$

Выражение в 1.3.2 не зависит от x , откуда и следует равномерная сходимость. \square

4. **Перестановка дифференцирования и предельного перехода.** Пусть $f_n \in C[a, b]$, $f'_n \rightrightarrows g$, $c \in [a, b]$ и $f_n(c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$. Тогда f_n равномерно сходится к f на $[a, b]$ и $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Доказательство. Так как $f'_n \rightrightarrows g$, по прошлому свойству

$$\int_c^x f'_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt.$$

Заметим, что

$$\int_c^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(c).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(c)}_{\rightarrow A} + \underbrace{\int_c^x f'_n(t)dt}_{\rightrightarrows \int_c^x g(t)dt} \rightrightarrows A + \int_c^x g(t)dt.$$

\square

Следствие 2 (дифференцирование равномерно сходящегося ряда). Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $c \in [a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

1.4 Степенные ряды

Определение 5: Степенной ряд

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, называется степенным с центром в точке z_0 .

Замечание. С помощью переносов любой степенной ряд сводится к ряду с центром в нуле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.⁸

⁸Далее в утверждениях будет обычно фигурировать ряд с центром в нуле для упрощения рассуждений.

Теорема 1.4.1

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при всех z , что $|z| < |z_0|$.^a

^aТо есть для всех z внутри шара с центром в нуле и радиусом z_0 .

Доказательство. Так как ряд сходится в точке z_0 , $a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то есть $|a_n z_0^n| \leq M$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

А такой ряд сходится, так как $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$. □

Следствие 3. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ расходится, то для всех z , что $|z| > |z_0|$, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.

Определение 6: Радиус сходимости

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — такое число, что для всех z : $|z| < R$ ряд сходится, а для всех z : $|z| > R$ ряд расходится.

Замечание. R может быть равным нулю или бесконечности.

Теорема 1.4.2: Формула Коши-Адамара

Радиус сходимости существует и равен

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Доказательство. Зафиксируем z .

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $|z| < R_{\text{сх}}$, то $q < 1$, тогда по признаку Коши ряд сходится.

Если $|z| > R_{\text{сх}}$, то $q > 1$, аналогично по признаку Коши ряд расходится.

Если $|z| = R_{\text{сх}}$, то $q = 1$, и в этом случае ничего сказать нельзя. □

Упражнение. Придумать формулировку в стиле признака Даламбера, то есть

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Здесь, в отличие от верхнего предела в формуле Коши-Адамара, еще нужно доказать, что предел существует.

Пример 1.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $n! \sim e^n$, поэтому $R_{\text{сх}} = \infty$.

Пример 1.4.2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$, $R_{\text{сх}} = 0$.

Пример 1.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $R_{\text{сх}} = 1$.

Теорема 1.4.3

Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим $0 < r < R$. Тогда в $\overline{B(0, r)}$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Возьмем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Это сходящийся числовой ряд. Если взять ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с произвольным z , то

$$\max_{\overline{B(0, r)}} |a_n z^n| = |a_n| r^n.$$

Получили что, ряд максимумов сходится, из чего по признаку Вейерштрасса следует, что ряд сходится. \square

Следствие 4. Сумма степенного ряда непрерывна в шаре $B(0, R_{\text{сх}})$, так как частичные суммы будут непрерывными функциями, которые равномерно сходятся, следовательно, сходятся к непрерывной функции.

Теорема 1.4.4: Теорема Абеля

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, радиус сходимости равен R . Предположим, что в точке z есть сходимость. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $[0, R]$ равномерно. В частности,

$$\exists \lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Доказательство. Докажем, что ряд сходится равномерно. Запишем следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

По условию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (не зависит от x), а $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ — монотонна и ограничена. Тогда по признаку Абеля ряд равномерно сходится на $[0, R]$ \square

Пример 1.4.4. Разложим в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{при } |x| < 1.$$

По признаку Абеля при $|x| = 1$ ряд тоже сходится. Поэтому $R_{\text{сх}} = 1$, причем на самом радиусе ряд тоже сходится.

Лемма 1. Следующие ряды имеют одинаковые радиусы сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}.$$

Доказательство. Заметим, что если x_n сходится, то⁹

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

⁹По определению верхнего предела это супремум частичных пределов последовательности, выберем такую $\{x_{k_i}, y_{k_i}\}$. Мы знаем, что $x_{k_i} \rightarrow x$, поэтому $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} y_{k_i} = x \lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i}$.

Теперь воспользуемся формулой Коши-Адамара. Обозначим за R_1, R_2, R_3 радиусы сходимости рядов из условия.

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\left| a_n \cdot \frac{1}{n+1} \right|}} = \frac{1}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}} \right) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|}} = \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1 \\ R_3 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|a_n \cdot n|}} = \frac{1}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n} \right) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|a_n|}} = \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1 \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4.5

Пусть есть вещественный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, его радиус сходимости равен R . Тогда его можно проинтегрировать почленно для всех x , что $|x - x_0| < R$:

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $r = |x - x_0| < R$. В $\overline{B(x_0, r)}$ ряд равномерно сходится. Рассмотрим его частные суммы $S_n(x)$. Так как $S_n(x) \Rightarrow S$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt &= \int_{x_0}^x S(t) dt = \\ &= \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S_n(t) dt \end{aligned}$$

□

Определение 7: Производная комплекснозначной функции

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, a — внутренняя точка E , $f: E \rightarrow \mathbb{C}$. Производную в точке a можно определить двумя способами:

1. это такая функция

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

2. f дифференцируема в точке a , если существует такое $k \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(a) + k(z - a) + o_{z \rightarrow a}(z - a).$$

Замечание. Существование $f'(a)$ равносильно тому, что f дифференцируема в точке a , и в этом случае $k = f'(a)$.

Теорема 1.4.6

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, его радиус сходимости равен R , $f(z)$ — сумма ряда внутри шара

$B(z_0, R)$. Тогда при $z: |z - z_0| < R$ функция f дифференцируема сколько угодно раз, при этом

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!} (z - z_0)^{n-m}.$$

Доказательство. Опять скажем, что $z_0 = 0$. Достаточно доказать для $m = 1$, а далее по индукции. Пусть $|z| < r < R$. Запишем определение

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^n - z^n)}{w - z} \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n \underbrace{(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})}_{\text{все стремятся к } z^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} \end{aligned}$$

Осталось доказать один переход. Если докажем равномерную сходимость ряда в $\overline{B(0, r)}$, то он будет верен. Обозначим

$$u_n(w) = a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}).$$

Заметим, что

$$|u_n(w)| \leq |a_n| \cdot (|w^{n-1}| + |w^{n-2}z| + \dots + |z^{n-1}|) \leq |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Так как $r^{n-1} \in \overline{B(0, R)}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)$ сходится, следовательно можем переставить предел и суммирование. \square

Теорема 1.4.7: О единственности разложения в степенной ряд

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ и сходится в круге $B(z_0, R)$, то коэффициенты задаются однозначно:

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

Доказательство. По теореме 1.4.6 можем записать следующую формулу:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (z - z_0)^{n-k}.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = a_m m! \implies a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

\square

Определение 8

Для бесконечно дифференцируемого в точке z_0 степенного ряда f имеет место формула Тейлора с центром в точке z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

1.5 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Запишем разложения, которые нам уже известны

1. e^x

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. $\sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $\cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Определение 9

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Определим $\exp z, \sin z, \cos z$ для комплексного числа как ряды из формул выше.

Упражнение.

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\ (e^z)' &= e^z \\ (\sin z)' &= \cos z \\ (\cos z)' &= -\sin z \end{aligned}$$

Теорема 1.5.1: Формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Доказательство. Честная подстановка. Можно перегруппировывать слагаемые в рядах, так как они абсолютно сходятся. \square

4. $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad |x| < 1.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Так как $1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ — равномерно сходящийся ряд при $|t| < 1$, можем интегрировать его почленно. Аналогично мы можем определить $\ln(1+z)$ для $z \in \mathbb{C}$, если $|z| < 1$. \square

5. $\operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Формула верна внутри круга $|t| < 1$ для равномерной сходимости. \square

6. $(1+x)^p$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n.$$

Докажем, что радиус сходимости равен 1. Обозначим

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{n!}x^n, \quad f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^p}, \quad x \in (-1, 1).$$

Поступим хитро: докажем, что $f(x) \equiv 1$. Заметим, что $f(0) = 1$. Тогда достаточно проверить, что $f'(x) = 0$ для всех $x: |x| < 1$.

$$\begin{aligned}f(x) &= S(x)(1+x)^{-p} \\ f'(x) &= S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = \\ &= (1+x)^{-p-1} (S'(x)(1+x) - pS(x))\end{aligned}$$

Проверим, что $(S'(x)(1+x) - pS(x)) = 0$.

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{p} \cdot S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{n!}x^n \cdot \textcolor{red}{p} \\ \textcolor{red}{(1+x)} \cdot S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \cdot \textcolor{red}{(1+x)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{(n-1)!}(x^{n-1} + x^n)\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$p \cdot \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{n!} = \frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{(n+1)!} + \frac{p(p-1)\dots(n-p)}{n!}.$$

Поэтому коэффициенты при x^k будут одинаковыми, следовательно, разность равна нулю.

7. Частный случай для $p = -\frac{1}{2}$

$$\frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \dots \cdot (-\frac{2n-1}{2})}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

8. $\arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Глава 2

Теория меры и интегрирования

Лекция 3: †

16 Sept

2.1 Системы множеств

Определение 10: Алгебра подмножеств

Пусть T — произвольное множество, 2^T — система подмножеств. $\mathfrak{A} \subset 2^T$ — алгебра подмножеств, если

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- (ii) $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- (iii) $A \in \mathfrak{A} \implies T \setminus A \in \mathfrak{A}$

Свойства.

- 1. $T \in \mathfrak{A}$
- 2. $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B = A \cap (T \setminus B) \in \mathfrak{A}$
- 3. $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B = T \setminus ((T \setminus A) \cap (T \setminus B)) \in \mathfrak{A}$
- 4. $A_j \in \mathfrak{A}, j = 1, \dots, n \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}, \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}$

Определение 11: σ -алгебра

$\mathfrak{A} \subset 2^T$ — σ -алгебра, если \mathfrak{A} — алгебра и

$$(ii) \sigma) \forall A_j \in \mathfrak{A}, j \in \mathbb{N}: \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$$

Замечание. $\forall A_j \in \mathfrak{A}, j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Пример 2.1.1.

- 1. $2^T = \mathfrak{A}$
- 2. $\{\emptyset, T\} = \mathfrak{A}$

Теорема 2.1.1

Пусть T произвольное множество и $\mathcal{E} \subset 2^T$ — какая-то система подмножеств. Тогда существует минимальная по включению σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} .

Доказательство. Возьмем пересечение всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{E} .

□

Определение 12: Борелевская оболочка

σ -алгебра из прошлой теоремы называется борелевской оболочкой. Обозначается $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$

Определение 13

Рассмотрим топологическое пространство (T, τ) (τ — система открытых множеств). Тогда $\mathfrak{B}(\tau)$ — борелевская σ -алгебра в T . Обозначается $\mathfrak{B}(T)$.

Определение 14: Полукольцо

Набор подмножеств $\mathcal{P} \subset 2^T$ называется полукольцом, если выполнены следующие аксиомы:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{P}$
- (ii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$
- (iii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнкты.

Пример 2.1.2. $T = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{[a, b)\}$

Теорема 2.1.2: о свойствах полукольца

Пусть \mathcal{P} — полукольцо, $P, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{j=1}^n P_j = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнкты;
2. $\bigcup_{j=1}^n P_j = \bigcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, где $Q_{k_j} \in \mathcal{P}$, Q_{k_j} дизъюнкты и $\forall j: Q_{k_j} \subset P_k$;
3. в предыдущем пункте можно заменить n на ∞ .

Доказательство. 1. Очевидно

2. Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^n P_j = \underbrace{P_1}_{\in \mathcal{P}} \cup \overbrace{(P_2 \setminus P_1)}^{\bigsqcup Q_j} \cup \overbrace{(P_3 \setminus (P_1 \cup P_2))}^{\bigsqcup Q_j} \cup \dots$$

При этом все полученные множества дизъюнкты.

3. В предыдущем пункте мы не пользовались конечностью объединения.

□

Пример 2.1.3 (Важный пример: полукольцо ячеек в \mathbb{R}^n и полукольцо биодических ячеек в \mathbb{R}^n). Первое обозначается \mathcal{P}^n , второе — \mathcal{P}_d^n .

Рассмотрим два вектора

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, \dots, b_n), \quad \forall i: b_i \geq a_i \end{aligned}$$

Тогда $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j: a_j \leq x_j < b_j\} = \prod [a_j, b_j)$ — ячейка.

Ячейка называется **кубической**, если $\forall j, k: |a_j - b_j| = |a_k - b_k|$.

Возьмем $e = (1, \dots, 1)$ и $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}^n$. $[\bar{k}, \bar{k} + e)$ — кубик с целочисленными координатами. Такие ячейки назовем **ячейками ранга 1**. Они покрывают все \mathbb{R}^n и дизъюнкты.

Такие ячейки можно разбить на 2^n меньших ячеек второго ранга: $\left[\frac{\bar{k}}{2}, \frac{\bar{k}+e}{2}\right)$. Аналогично можно продолжить до ранга $S + 1$: $\left[\frac{\bar{k}}{2^S}, \frac{\bar{k}+e}{2^S}\right)$.

Свойства.

- внутри ранга ячейки не пересекаются
- ячейки разных рангов либо не пересекаются, либо одна содержится в другой
- если Q — ячейка ранга k , Q' — ячейка ранга $k + 1$, то $Q \setminus Q'$ — объединение ячеек ранга $k + 1$

\mathcal{P}'_d — множество всех ячеек $\left[\frac{\bar{k}}{2^S}, \frac{\bar{k}+e}{2^S}\right)$, для $s = 0, 1, \dots, d$ и $\bar{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Теорема 2.1.3

\mathcal{P}^n и \mathcal{P}_d^n — полукольца.

Теорема 2.1.4

Для любого открытого непустого $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$ существует счетный набор $P_k \in \mathcal{P}_d^{n,a}$ такой, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G.$$

^aМожно считать, что P_k не пересекаются

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in G$ и шар $B(x, r) \subset G$. Тогда существует такая ячейка S , что существует P_x ранга S , что $x \in P_x \subset B(x, r)$ (просто берем диаметр ячейки менее x).

Всего ячеек счетное число, поэтому в покрытии тоже будет счетное, при этом $\bigcup_{x \in G} P_x = G$. \square

2.2 Объем

Определение 15: Объем

Рассмотрим множество T , полукольцо $\mathcal{P} \subset 2^T$. Тогда $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — **объем**, если

- (i) $\mu \geq 0$
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$
- (iii) μ конечноаддитивна:

$$P, P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}, \bigcup_{j=1}^k P_j = P \implies \mu(P) = \sum_{j=1}^k \mu(P_j).$$

Пример 2.2.1. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 = \{[a, b)\}$, $\mu([a, b)) = b - a$.

Пример 2.2.2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g монотонно возрастает. Тогда $\nu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$ — тоже объем.

Пример 2.2.3. \mathcal{P} — множества на плоскости, которые либо ограничены, либо дополнение ограничено.

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1 & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}, \quad \mu_2(A) = \begin{cases} +\infty & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}$$

Пример 2.2.4 (классический объем в \mathbb{R}^n). Рассмотрим \mathcal{P}^n , $P = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k)$, где $\lambda_n(P) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.

Упражнение. Проверить, что это объем.

Теорема 2.2.1: о свойствах объема

Рассмотрим полукольцо \mathcal{P} , μ — объем на \mathcal{P} . $P, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$.

1. (монотонность) $P' \subset P \implies \mu(P') \leq \mu(P)$
2. (усиленная монотонность) P_k — дизъюнкты,

$$\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu(P_k) \leq \mu(P).$$

3. (конечная полуаддитивность)^a

$$P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \implies \mu(P) \leq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

^aЗдесь не предполагается, что $\bigcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$

Доказательство.

1. Если $P \subset P'$, то $P \setminus P' = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$ и Q_k дизъюнкты.

Тогда $P = P' \cup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

$$\mu(P) = \mu(P') + \sum_{k=1}^n \mu(Q_k) \geq \mu(P').$$

2. $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнкты.

Тогда $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \cup \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^n \mu(P_k) + \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) \geq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

3. Пусть $P \cap P_k = P'_k \in \mathcal{P}$. Тогда $P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigcup_{k=1}^n \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\subset P'_k}$ — дизъюнкты.

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \stackrel{\text{по 2}}{\leq} \sum_{k=1}^n \mu(P'_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

□

Замечание. Если \mathcal{P} — алгебра, то по аксиоме (iii) можно проверять только для двух множеств, а далее по индукции.

Замечание. Если \mathcal{P} — алгебра, $A, B \in \mathcal{P}$, $B \subset A$, то

$$\mu(B) < +\infty \implies \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

2.3 Мера и ее свойства

Определение 16: Мера

Пусть \mathcal{P} — подкольцо, μ — объем на \mathcal{P} . μ называется **мерой**, если μ счетно-аддитивен:

$$P, P_k \in \mathcal{P}, P_k \text{ — дизъюнкты, } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \implies \mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

^a

^aСумма в этом ряду не зависит от порядка, так как он положительный.

Пример 2.3.1.

- Классический объем λ_n в \mathbb{R}^n (докажем позже)
- $\left. \begin{array}{l} \nu_g([a, b)) = g(b) - g(a) \\ g \nearrow \text{ и непрерывна слева} \end{array} \right\} \implies \nu_g \text{ — мера (Упражнение)}$

Теорема 2.3.1: о счетной полуаддитивности меры

Пусть \mathcal{P} — полукольцо, μ — объем на \mathcal{P} . Тогда μ — мера, тогда для любых $P, P_k \in \mathcal{P}$

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

Доказательство.

$$\boxed{1 \implies 2} \quad P'_k = P_k \cap P, P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P'_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}, \text{ где } Q_{kj} \text{ — дизъюнкты. Тогда}$$

$$\mu(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \underbrace{\mu(Q_{kj})}_{\leq \mu(P'_k) \leq \mu(P_k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

$$\boxed{2 \implies 1} \quad \text{Пусть } Q, Q_j \in \mathcal{P}, Q_j \text{ — дизъюнкты и } Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Из полуаддитивности следует, что $\mu(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$. Теперь заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^n Q_j \subset Q \implies \sum_{j=1}^n \mu(Q_j) \leq \mu(Q).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \leq \mu(Q).$$

□

Теорема 2.3.2: о непрерывности меры снизу

Пусть \mathfrak{A} — алгебра, μ — объем на \mathfrak{A} . μ — мера, тогда для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ таких, что $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ верно следующее свойство^a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

^aЭто свойство называется «непрерывностью меры снизу»

Доказательство.

1 \implies 2 Рассмотрим новую систему дизъюнктивных множеств из \mathfrak{A} :

$$A'_1 = A_1, \quad A'_2 = A_2 \setminus A_1, \quad A'_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$$

Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A, \quad A_n = \bigcup_{j=1}^n A'_j.$$

Так как A'_j дизъюнктивны,

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A'_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

2 \implies 1 Пусть $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнктивны. Рассмотрим такие $A_k = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Так как $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$,

$$\mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

Из конечной аддитивности объема следует, что

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A).$$

Значит, μ — мера.

□

Определение 17: Конечный объем

Рассмотрим множество T , полукольцо \mathcal{P} и объем μ на \mathcal{P} . Тогда μ называется **конечным объемом**, если $\mu(T) < \infty$.

Теорема 2.3.3: о непрерывности меры сверху

Пусть \mathfrak{A} — алгебра, μ — конечный объем на \mathfrak{A} . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) μ — мера
- (ii) для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено^a

$$A_{k+1} \subset A_k, \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A} \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

- (iii) для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено

$$A_{k+1} \subset A_k, \quad \emptyset = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

^aЭто и называется непрерывностью меры сверху

Доказательство.

(i) \implies (ii) Пусть $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$, тогда $A_1 = A \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ и B_j дизъюнкты. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &= \mu(A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)}_{\mu(A_1) - \mu(A_{n+1})} \\ \underbrace{\mu(A_1)}_{\text{конечно}} &= \mu(A) + \underbrace{\mu(A_1)}_{\text{конечно}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n+1}) \\ \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n+1})\end{aligned}$$

(ii) \implies (iii) Очевидно

(iii) \implies (i) Пусть $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнкты и $B_j, A \in \mathfrak{A}$. Проверим счетную аддитивность. Рассмотрим

$$A_k = B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \dots = A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \dots \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&= \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &= \mu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j\right) = \mu(A) - \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)\end{aligned}$$

Получили, что $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$, значит, μ — мера.

□

2.4 Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.

Определение 18: Внешняя мера

T — произвольное множество, $\tau: 2^T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. τ — внешняя мера, если

- (i) $\tau \geq 0$
- (ii) $\tau(\emptyset) = 0$
- (iii) (счетная полуаддитивность)

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies \tau(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k).$$

Замечание. τ конечно полуаддитивна.

Замечание. τ монотонна: $E_1 \subset E_2 \implies \tau(E_1) \leq \tau(E_2)$

Определение 19: τ -измеримо

Пусть τ — внешняя мера на T . Множество A — τ -измеримо, если для любого $E \subset T^a$

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \quad (2.4.1)$$

^aВ этом неравенстве знак \leq есть всегда

Теорема 2.4.1

Пусть τ — внешняя мера, \mathfrak{A}_τ — система τ -измеримых множеств. Тогда \mathfrak{A}_τ — σ -алгебра и $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — мера.

Доказательство.

0. $\emptyset \in \mathfrak{A}_\tau$

1. Докажем, что $A \in \mathfrak{A}_\tau \implies T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$. Заметим, что

$$E \setminus A = E \cap (T \setminus A) \quad E \setminus (T \setminus A) = E \cap A.$$

По определению τ -измеримости 2.4.1 для всех $E \subset T$

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \setminus (T \setminus A)) + \tau(E \cap (T \setminus A)).$$

Следовательно, $T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$.

2. Докажем, что $A, B \in \mathfrak{A}_\tau \implies A \cup B \in \mathfrak{A}_\tau$. Рассмотрим произвольное множество $E \subset T$. Запишем для него условие 2.4.1 для A

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \\ &= \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B) = \\ &= (\tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B)) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \geq \\ &\geq \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \end{aligned}$$

Так как неравенство в обратную сторону верно всегда, $A \cap B \in \mathfrak{A}_\tau$.

3. Проверим конечную аддитивность τ на \mathfrak{A}_τ . Хотим доказать, что для дизъюнктивных $A, B \in \mathfrak{A}_\tau$ выполнено

$$\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cup B).$$

Заметим, что для всех E

$$\begin{aligned} (E \cap (A \cup B)) \cap A &= E \cap A \\ (E \cap (A \cup B)) \setminus A &= E \cap B \end{aligned}$$

Подставим в условие τ -измеримости 2.4.1

$$\tau(E \cap (A \cup B)) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B).$$

Теперь подставим в качестве $E = T$

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B).$$

4. Проверим, что \mathfrak{A}_τ — σ -алгебра. Для этого осталось доказать, что

$$\forall A_j \in \mathfrak{A}_\tau: \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}_\tau.$$

Обозначим $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

(a) Пусть все A_j дизъюнкты. Для всех E верно

$$\tau(E) = \tau\left(E \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) + \tau\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) =$$

Воспользуемся конечной аддитивностью и тем, что $E \setminus A \subseteq E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$:

$$= \sum_{j=1}^n \tau(E \cap A_j) + \tau\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A).$$

Устремим $n \rightarrow \infty$ и воспользуемся счетной аддитивностью для дизъюнктивных множеств:

$$\begin{aligned} \tau(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A) \geq \\ &\geq \tau\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\right) + \tau(E \setminus A) \geq \\ &\geq \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E) \end{aligned}$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{A}_\tau$.

(b) Если A_j не дизъюнкты, рассмотрим новые A'_j :

$$A'_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k.$$

A'_j дизъюнкты и измеримы, при этом их объединение равно A . Тогда по первому пункту A измеримо.

$\mu = \tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$, при этом известно, что $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — объем и τ полуаддитивна. По теореме о счетной полуаддитивности, τ — мера.

□

Лекция 4: †

23 Sept

Определение 20: Полная мера

Пусть μ — мера на полукольце \mathcal{P} . Мера называется **полной**, если

$$e \in \mathcal{P}, \mu(e) = 0 \implies \forall e' \subset e: e' \in \mathcal{P}.$$

Следствие 5 (Ключевое свойство построения меры). $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — полная мера.

Доказательство. Рассмотрим $e \in \mathfrak{A}_\tau$ и $e' \subset e$, причем $\tau(e) = 0$. Хотим доказать, что $e' \in \mathfrak{A}_\tau$. Хотим проверить такое равенство для всех $E \in T$:

$$\tau(E) = \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

По монотонности меры, $\tau(E) \geq \tau(E \setminus e')$. Так как $E \cap e' \subset E \cap e \subset e$,

$$0 \leq \tau(E \cap e') \leq \tau(e) = 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\tau(E) \geq \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

А в другую сторону это неравенство верно всегда в силу полуаддитивности внешней меры.

□

2.5 Продолжение меры. Построение внешней меры.

Обозначение. Рассмотрим полукольцо \mathcal{P} и μ_0 — меру на нем. Пусть

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, P_j \in \mathcal{P} \right\}.$$

Если E нельзя покрыть счетным набором P_j , будем считать $\mu^*(E) = +\infty$.

Теорема 2.5.1

μ^* — внешняя мера и $\mu^*(E) = +\infty$.

Доказательство.

1. $E \in \mathcal{P} \xRightarrow{?} \mu^*(E) = \mu_0(E)$. Нужно проверить неравенство в две стороны.

\leq Возьмем покрытие $\{E, \emptyset, \emptyset, \dots\}$. Тогда $\mu^*(E) \leq \mu_0(E) + 0$.

\geq По теореме о счетной полуаддитивности меры, если $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_j \in \mathcal{P}$, то $\mu_0(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \leq \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$.

В частности, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. Проверим счетную полуаддитивность μ^* , то есть докажем, что

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n \implies \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Каждое множество нужно оценить с некоторой точностью разбиения, а потом устремить разницу к нулю.

Если сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = +\infty$, то неравенство автоматически выполнено. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ конечно.

Тогда существует такое покрытие $\{P_j^{(n)}\}$, что ошибка не большая для фиксированного $\varepsilon > 0$:

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Далее запишем для E

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}.$$

Так как μ^* — это инфимум, можно перейти к следующему неравенству

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Теперь устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

□

2.5.1 Теорема о продолжении меры

Теорема 2.5.2: Теорема о продолжении меры

Пусть μ_0 — мера на полукольце \mathcal{P} , μ^* — внешняя мера, построенная ранее. По ней построена σ -алгебра \mathfrak{A}_{μ^*} измеримых по μ^* множеств.

Тогда $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$ ^a и $\mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — продолжение меры μ_0 .

^aЭто содержательная часть

Доказательство. Хотим проверить, что если $P \in \mathcal{P}$, то $P \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$, то есть

$$\forall E \in T: \mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Так как \leq верно всегда, остается доказать неравенство в обратную сторону. Разберем два случая:

$E \in \mathcal{P}$ Воспользуемся главной аксиомой полукольца: $E \setminus P = \bigcup_{j=1}^N Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и дизъюнкты. Тогда $E =$

$\underbrace{(P \setminus E)}_{\in \mathcal{P}} \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^N Q_j}_{\in \mathcal{P}}$, причем это объединение дизъюнктное. Теперь заметим, что для μ_0 есть конечная аддитивность, а μ^* совпадает с μ на элементах кольца, и поэтому

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu_0(E) = \mu_0(P \cap E) + \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j\right) = \\ &= \mu^*(P \cap E) + \sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \end{aligned}$$

Так как μ^* полуаддитивна, $\sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j\right) = \mu^*(E \setminus P)$. Тогда

$$\mu^*(E) = \mu^*(P \cap E) + \mu^*(E \setminus P).$$

E произвольное Если $\mu^*(E) = +\infty$, то неравенство сразу верно, поэтому будем считать, что $\mu^*(E) < +\infty$.

Воспользуемся этим и приблизим с точностью до любого ε к объединению элементов полукольца.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим такие $P_j \in \mathcal{P}$, что $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, при этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Так как $P_j \in \mathcal{P}$:

$$\mu_0(P_j) = \mu^*(P_j) \geq \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \setminus P) \geq \\ &\geq \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \cap P\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \setminus P\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &\geq \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \end{aligned}$$

□

Определение 21: Стандартное продолжение (продолжение Каратеодори)

$\mu = \mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — стандартное продолжение или продолжение Каратеодори меры μ_0 с полукольца \mathcal{P} .

Замечание.

1. μ — полная мера, так как сужение — тоже полная мера.
2. Повторное продолжение бессмысленно.

Упражнение. Проверить, что внешняя мера получится такой же.

$$3. \mu(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, P_j \in \mathcal{P} \right\}$$

2.6 Единственность стандартного построения**Определение 22: σ -конечность объема и меры**

Пусть \mathcal{P} — полукольцо на 2^T , μ — объем или мера. Тогда μ называется σ -конечным(ой), если существуют такие $P_j \in \mathcal{P}$, $\mu(P_j) < +\infty$, что

$$T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j.$$

Теорема 2.6.1

Пусть μ — стандартное продолжение μ_0 с \mathcal{P} на \mathfrak{A} , а ν — какое-то продолжение μ_0 с \mathcal{P} на \mathfrak{A}' . Тогда

1. для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$: $\nu(A) \leq \mu(A)$, более того, если $\mu(A) < +\infty$, то $\nu(A) = \mu(A)$
2. если μ_0 — σ -конечная мера, то $\mu = \nu$ на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$

В частности, σ -конечная мера единственным образом продолжается на $\mathfrak{B}(\mathcal{P})^a$.

^aЭто борелевская оболочка

Доказательство.

1. [1] Проверим неравенство. Известно, что $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_j \in \mathcal{P}$, следовательно,

$$\nu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) \underset{\nu - \text{продолжение } \mu_0}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j).$$

Перейдем к \inf :

$$\nu(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A).$$

2. [2] Пусть $P \in \mathcal{P}$ и $\mu(P) = \nu(P) < \infty$. Докажем, что $\nu(P \cap A) = \mu(P \cap A)$. Предположим, что $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$.

$$\begin{aligned} \mu(P) = \nu(P) &= \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \\ &< \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P) \end{aligned}$$

Противоречие.

3. [3] Пусть $\mu(A) < \infty$, тогда существуют такие $P_j \in \mathcal{P}$, что $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ ¹, где $\mu(P_j) = \mu_0(P_j) < \infty$.

Тогда из счетной аддитивности ν

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j \cap A) \underset{\text{по 2}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j \cap A) = \mu(A).$$

Доказали первый пункт.

¹Можно всегда считать объединение дизъюнктым, так как можно заменить на него по стратегии, использованной ранее

2. Пусть мера σ -конечна. Тогда все пространство можно представить в виде объединения конечных объемов и применить подпункт 3 из пункта 1 доказательства.

$$\mu_0 - \sigma\text{-конечна} \implies T = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, \quad P_j \text{ дизъюнкты, } \mu(P_j) < \infty.$$

□

2.7 Определения и простейшие свойства меры Лебега в \mathbb{R}^n

На полукольце ячеек \mathcal{P}^n и диодическом полукольце ячеек \mathcal{P}_d^n мы определили классический объем $\lambda_n = \lambda$.

Теорема 2.7.1

Классический объем λ — σ -конечная мера на \mathcal{P}^n .

Доказательство. σ -конечность очевидна — подойдет покрытие единичными кубами.

Докажем, что это мера. Для этого можно доказать счетную полуаддитивность, то есть

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \implies \lambda(P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j).$$

Пусть $P = [a, b)$ и $P_j = [a_j, b_j)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, расширим один отрезок, а второй наоборот сузим.

Пусть $b' \in [a, b)$, $P' = [a, b') \subset P$: $\lambda([a, b)) - \lambda([a, b')) < \varepsilon$.

Еще возьмем $a'_j < a_j$, $P_j \subset (a'_j, b_j)$: $\lambda((a'_j, b_j)) - \lambda([a_j, b_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Заметим, что

$$P' \subset P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j.$$

Так как P'_j открытые, а P' компактно, существует конечное подпокрытие

$$\exists j_k: P' = [a, b') \subset \bigcup_{k=1}^N P'_{j_k} \subset \bigcup_{k=1}^N [a_{j_k}, b_{j_k}).$$

Так как μ конечно полуаддитивна,

$$\sum_{k=1}^N \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \geq \lambda([a, b')) \geq \lambda([a, b)) - \varepsilon.$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a'_j, b_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a_j, b_j)) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Итого,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \varepsilon \geq \lambda(P) - \varepsilon.$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим требуемое неравенство.

□

Определение 23: Мера Лебега

Мера Лебега — стандартное продолжение классического объема. \mathfrak{A}^n — получающаяся σ -алгебра — множества измеримые по Лебегу.

Упражнение. Продолжения с \mathcal{P}^n и \mathcal{P}_d^n совпадают.

Свойства.

- 1] Все открытые множества измеримы. Более того, если G открыто и $G \neq \emptyset$, то $\lambda(G) > 0$.
- 2] Все замкнутые множества измеримы (дополнение к открытому). $\lambda(\{a\}) = 0$.
- 3] Если A измеримо и ограничено, то $\lambda(A) < \infty$ (можно ограничить параллелепипедом).
- 4] Если E_k измеримо и $\lambda(E_k) = 0$, то $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$.
- 5] Если E — счетное множество, то $\lambda(E) = 0$.
- 6] Если E — множество и для всех $\varepsilon > 0 \exists E \subset E_\varepsilon$ измеримое и $\lambda(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то E измеримо и $\lambda(E) = 0$.

Доказательство. Построим последовательность $E_n: \lambda(E_n) < \frac{1}{n}$. Можно считать, что $E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$. Тогда $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. По непрерывности сверху

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n).$$

Так как λ полная, предел равен нулю, E измеримо и $\lambda(E) = 0$. □

- 7] Рассмотрим \mathbb{R}^n и гиперплоскость $H_k = \{x_k = 0\}$. $\lambda(H_k) = 0$.

Доказательство.

$$H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0, |x_l| < j \text{ при } k \neq l\}.$$

Запишем в маленький параллелепипед:

$$P_\varepsilon = [-j, j] \times \dots \times \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon]}_k \times \dots \times [-j, j].$$

$$\lambda(P_k) = (2j)^{n-1} \cdot 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

- 8] В \mathbb{R} континуальное множество меры 0 — канторово множество.
- 9] Упражнение. Существует неизмеримое множество.

2.8 Регулярность меры Лебега

Определение 24: Регулярная мера

Рассмотрим топологическое пространство T , $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(T)$, μ — мера на \mathfrak{A} . μ называется **регулярной**, если

- (i) $\forall A \in \mathfrak{A}: \quad \mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ открыто, } A \subset G\}$
- (ii) $\forall A \in \mathfrak{A}: \quad \mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ замкнуто, } A \supset F\}$

Упражнение. Если $\mu(T) \leq \infty$, то из (i) следует (ii).

Лемма 2. Для регулярности меры достаточно выполнения одного из двух свойств:

- (а) $\forall \varepsilon > 0 \forall A \in \mathfrak{A} \exists \text{ открытое } G: A \subset G, \mu(G \setminus A) < \varepsilon$
 (б) $\forall \varepsilon > 0 \forall A \in \mathfrak{A} \exists \text{ замкнутое } F: A \supset F, \mu(A \setminus F) < \varepsilon$

Доказательство.

$$(a) \iff (b) \quad (a) \text{ для } A \text{ равносильно } (b) \text{ для } T \setminus A$$

$$(a) \implies (i) \quad \text{Очевидно}$$

□

Теорема 2.8.1

Мера Лебега регулярна.

Доказательство. Проверим условие (а) из прошлой леммы.

1. Пусть $\lambda(A) < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие $P_j \in \mathcal{P}^n$, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset A, \quad \lambda(P_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Немного расширим ячейки, чтобы они стали открытыми множествами. Пусть $P_j = [a_j, b_j]$, построим $P_j \subset P'_j(a'_j, b_j)$, при этом $\mu(P'_j) - \mu(P_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Теперь $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j \supset A$ и

$$\lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P'_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Если $\mu(A) = \infty$, то можем представить $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — дизъюнктные ячейки из \mathcal{P}^n . Тогда можем воспользоваться σ -конечностью: представим A так

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(Q_j \cap A)}_{\text{все конечны по мере}}.$$

Каждое из $(Q_j \cap A)$ можем приблизить каким-то открытым множеством $G_j: G_j \cap A \subset G_j$ и $\lambda(G_j \setminus (Q_j \cap A)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Тогда возьмем $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A$, поэтому $\lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$.

□

Следствие 6. Если E измеримо по Лебегу, то существуют компактные множество K_j такие, что

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \quad \lambda(e) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутые $F_j \subset E$, что $\lambda(E \setminus F_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ и $F_j \subset F_{j+1} \subset \dots$

Построим из F_j компакты: $K_j = F_j \cap \overline{B(0, j)}$.

Рассмотрим e :

$$e = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Тогда

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e.$$

Проверим, что $\lambda(e) = 0$.

$$\lambda(e) \leq \lambda(E \setminus F_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Значит, e измеримо и $\lambda(e) = 0$. □

Следствие 7. Если E измеримо, то существуют открытые G_j и измеримое e' , что $\lambda(e') = 0$ и

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \setminus e'.$$

Теорема 2.8.2: Ключевой момент. Почему интеграл Лебега удобнее Римана

Пусть G — открытое в \mathbb{R}^n , $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируема в G .

1. Если $E \subset G$, то $f(E)$ измеримо.
2. Если $\lambda(E) = 0$, то $\lambda(f(E)) = 0$.