[section]

1 Определения

1.1 Машины Тьюринга

Def. 1. Алфавит Σ - конечное множество символов. Строка над Σ - конечная последовательность символов из Σ. Множество строк $\bigcup_{n\geq 0}\Sigma^n = \Sigma^*$, ε - пустая строка.

Def. 2. Машина Тьюринга - семерка $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, \delta, q_{acc}, q_{rej})$, где: Σ - входной алфавит, $\Gamma \supset \Sigma$ - рабочий алфавит (содержит особый символ пробела, Q - множество всех состояний, $q_0 \in Q$ - начальное состояние, $\delta : (Q \backslash q_{acc}; q_{rej}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times -1, +1$ - функция переходов.

Def. 3. Конфигурация МТ - строка вида $\alpha q_a \beta, \quad \alpha, \beta in \Gamma^*, q \in Q$ - машина в состоянии q, головка указывает на символ a между α, β, окруженные бесконечным числом пробелов. Начальная конфигурация $q_0\omega$ - состояние q_0, головка в позиции 0, с одной стороны пробелы, с другой - ω.
Функция переходов - $\delta(q, a) = (q', a', \pm 1)$

Def. 4. Проблема остановки - для любой машины Тьюринга с входным алфавитом $\{0, 1\}$ можно дать на вход описание $\sigma(M)$:

$$\begin{array}{l} L_1 = \{\sigma(M) \mid \sigma(M) \in L(M)\} \text{ - МТ, принимающая свое описание} \\ L_0 = \{\sigma(M) \mid \sigma(M) \notin L(M)\} \text{ - МТ, не принимающая свое описание} \end{array}.$$

1.2 Булевы функции

Def. 5. Булева функция - функция вида $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$

Def. 6. Базис $\mathcal{F}$ - некоторое подмножество булевых функций.
База: любая функция $f \in \mathcal{F}$ является функцией над $\mathcal{F}$. Индукционный переход: Если $f(x_1, \dots x_n)$ - формула над базисом $\mathcal{F}$, а $F_1, \dots F_n$ - формулы, то $f(F_1, \dots F_n)$ - формула над базисом $\mathcal{F}$.

Def. 7. Простая конъюнкция - конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причем все переменные встречаются не более одного раза.

Def. 8. Дизъюнктивная нормальная форма - преставление булевой функции в виде дизъюнкции простых конъюнкций. $(x \wedge \neg y) \vee z$

Def. 9. Совершенная ДНФ - ДНФ, в любой конъюнкции которой участвуют все переменные.

Def. 10. Простая дизъюнкция - дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причем все переменные встречаются не более одного раза.

Def. 11. Конъюктивная нормальная форма - представление булевой функции в виде простых дизъюнкций. $(x \vee \neg y) \wedge z$

Def. 12. Совершенная КНФ - КНФ, в любой конъюнкции которой участвуют все переменные.

Def. 13. Многочлен Жегалкина - сумма по модулю два конъюнкций переменных (допускается слагаемое единица) без повторения слагаемых, а также константа ноль.

Def. 14. Замыкание [$\mathcal{F}$ - множество булевых функций] относительно суперпозиции - множество всех булевых функций, представимых формулой над $\mathcal{F}$.

Def. 15. Замкнутый класс - класс БФ, равный своему замыканию.

Def. 16. T_0 - класс функций, сохраняющих ноль:

$$T_0 = \{f \mid f(0, \ldots 0) = 0\}.$$

Def. 17. T_1 - класс функций, сохраняющих единицу:

$$T_1 = \{f \mid f(1, \ldots 1) = 1\}.$$

Def. 18. Двойственная функция к f - $f^*(x_1, \ldots x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots \neg x_n)$.

Def. 19. Самодвойственная функция - равная двойственной к себе.

Def. 20. Монотонная функция - функция f, такая что $f(\alpha) \leq f(\beta)$, $\forall \alpha \leq \beta$.

Def. 21. Линейная функция - функция, многочлен Жегалкина, которой не использует конъюнкций, а также константа ноль.

Def. 22. Множество булевых функций $\mathcal{F}$ называется полной системой, если все булевы функции выразимы формулами над этим базисом.

1.3 Комбинаторика

Def. 23. Выборки:

1. Упорядоченная с повторами: n^k
2. Упорядоченная без повторов: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
3. Неупорядоченная без повторов: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
4. Неупорядоченная с повторами: $\widehat{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Def. 24. Формула Стирлинга - $n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Def. 25. Правильная скобочная последовательность - пустая строка, объединение двух ПСП и ПСП в скобках.

Def. 26. Язык Дика - множество всех правильных скобочных последовательностей.

Def. 27. Числа Каталана - количество последовательностей длины $2n$ в языке Дика.

$$\begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1} \end{array}.$$

$$c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

$$c_n = (1 + o(1)) \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

1.4 Графы

Def. 28. Граф - пара $G = (V, E)$, где V - конечное множество вершин, $E \subseteq V \times V$ - множество ребер.

Def. 29. Матрица смежности - матрица A размером $|V| \times |V|$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & else \end{cases}$$

Def. 30. Неориентированный граф - если $((u, v) \in E \to (v, u) \in E)$

Def. 31. Ориентированный граф - не неориентированный.

Def. 32. Мультиграф - допустимы кратные ребра.

Def. 33. Смежные вершины $u, v := (u, v) \in E$

Def. 34. Петля - $(v, v) \in E$

Def. 35. Путь в графе - последовательность ребер и вершин $v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \ldots v_n$, такая что $e_i = (v_{i-1}, v_i)$

Def. 36. Простой путь - все вершины которого различны.

Def. 37. Реберно-простой путь - все ребра которого различны.

Def. 38. Цикл - путь, первая и последняя вершина которого совпадают.

Def. 39. Простой цикл - все вершины которого различны.

Def. 40. Реберно-простой цикл - все ребра которого различны.

Def. 41. Две вершины связны, если они совпадают или соединены некоторым путем.

Def. 42. Связный граф - имеющий ровно одну компоненту связности.

Def. 43. Эйлеров путь - реберно-простой путь, проходящий по всем ребрам.

Def. 44. Эйлеров цикл - эйлеров путь, возвращающийся в первую вершину.

Def. 45. Строка де Брейна порядка n для k-символьного алфавита Σ:

- множество вершин $V = \Sigma^n$
- k - исходящих дуг у каждой вершины $w_1, \dots w_n \in \Sigma^n : \forall b \in \Sigma$ дуга из $w_1, \dots w_n$ в $w_2, \dots w_n b$

Def. 46. Гамильтонов путь - простой путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

Def. 47. Гамильтонов цикл - простой цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

Def. 48. Лес - граф без циклов.

Def. 49. Дерево - связный граф без циклов.

Def. 50. Ориентированное дерево - ориентированный граф без циклов, где только одна вершина имеет степень входа ноль, а остальные - один.

Def. 51. Мост - ребро, удаление которого увеличивает количество компонент связности.

Def. 52. Остовный подграф H в графе G - $V(H) = V(G)$

Def. 53. Остовное дерево - остовный подграф, являющийся деревом.

Def. 54. Графы $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ изоморфны, если существует биекция $f : V_1 \to V_2$, такая что $\forall u, v \in V_1, (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$

Def. 55. Плоский граф - граф, который можно изобразить в виде геометрической фигуры на плоскости без пересечения ребер.

Def. 56. Планарный граф - изоморфный плоскому.

Def. 57. Двойственный граф - граф, где каждая грань становится вершиной, а каждое ребро, служившее границей, - ребро, соединяющее соответствующие вершины.

Def. 58. Операция разбиения ребра - добавить вершину w и заменить ребро (v, u) на $(v, w), (w, u)$.

Def. 59. Графы гомеоморфны, если, применяя к каждому операции разбиения можно получить два изоморфных.

Def. 60. Раскраска графа - функция $c : V \to C$, где C - множество цветов.

Def. 61. Правильная раскраска - такая раскраска, что $\forall v, u, (u, v) \in E : c(u) \neq c(v)$

Def. 62. Хроматическое число $\chi(G)$ - наименьшее число цветов, в которое можно правильно раскрасить вершины графа G.

Def. 63. Паросочетание - подмножество ребер, где никакие два ребра не имеют общих концов.

Def. 64. Совершенное паросочетание - паросочетание, в котором участвуют все вершины.

Def. 65. Множество $X \subseteq V(G)$ - (V_1, V_2) - разделяющее, если в графе $G \backslash X$ нет путей из V_1 в V_2.

Def. 66. Реберная раскраска - функция $c : E \to C$.

Def. 67. Правильная раскраска - такая раскраска, что $\forall (e, e_1) \in V : c(e) \neq c(e_1)$.

Def. 68. Устойчивое паросочетание $M : \nexists (v_1, v_2) \in E \backslash M$:

- (v_1, v_2) у v_1 выше в списке предпочтений, чем текущая пара $(v_1, v_2\prime) \in M$, либо v_1 не в паре.
- (v_1, v_2) у v_2 выше в списке предпочтений, чем текущая пара $(v_1\prime, v_2)$, либо v_2 не в паре.

1.5 Теория Рамсея

Def. 69. $n \in \mathbb{N}$ обладает свойством Рамсея $\mathcal{R}(k; m_1, \dots m_d)$, если для любой покраски всех k-элементных подмножеств в M $(|M| = N\ )$ в d цветов $\{1, \dots d\}$ существует номер i и подмножество $A \subseteq M, |A| = m_i$ такой, что все k-элементные подмножества A покрашены в цвет i. Число Рамсея $R(k, m_1, \dots m_d)$ - наименьшее из $\mathbb{N}$, удовлетворяющих $\mathcal{R}(k; m_1, \dots m_d)$.