

Конспект по алгебре за I семестр бакалавриата  
Чебышёва СПбГУ (лекции Степанова Алексея  
Владимировича)

November 18, 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Введение в топологию</b>	<b>2</b>
1.1	Произведение топологических пространств . . . . .	2
1.1.1	Произведение параметризуемых метрических пространств . . . . .	3
1.1.2	Непрерывность . . . . .	4

# Chapter 1

## Введение в топологию

### 1.1 Произведение топологических пространств

**Определение 1.**  $X, Y$  - топологические пространства.

Топология произведения на  $X \times Y$ , база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$  с такой топологией – произведение  $X$  и  $Y$ .

**Теорема 1.1.1.** *Определение 1 корректно.*

*Доказательство.* 1. Все пространства открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в  $X$  и в  $Y$ , а значит принадлежит базе.

□

**Теорема 1.1.2.**  $A \subset X$  – замкнуто,  $B \subset Y$  – замкнуто. Тогда  $A \times B$  – замкнуто в  $X \times Y$ .

*Доказательство.* Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

□

*Упражнение.* Для любых  $A \subset X, B \subset Y$  :

1.  $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$

2.  $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$

3.  $A \times B$  как произведение подпространств равно  $A \times B$  как подпространство произведения.

### 1.1.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой.  $d_X, d_Y$  - метрики.

**Теорема 1.1.3.**

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

$d$  - метрика на  $X \times Y$ . Произведение метризуемых пространств метризуемо.

*Доказательство.* 1. Проверим, что  $d$  - метрика.

$$d(p, p') + d(p', p'') \geq d(p, p'') = d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x, x'') \geq d_X(x, x'').$$

2.  $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

$A$  это базовое множество.

3.  $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$  Рассмотрим  $W \in \Omega_{X \times Y}$ . картинка

$$\exists A \subset X, B \subset Y \text{ - открытые, } (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset A.$$

Теперь возьмем  $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

**Утверждение** (Согласование метрик).

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

*Доказательство.* Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} = d_2((x, y), (x'', y'')) \leq d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) = \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}.$$

□

**Определение 2.** Бесконечное произведение пространств

$\{X_i\}_{i \in I}$  - семейство топологических пространств.  $\Omega_i$  - топология.

Множество  $\prod_{i \in I} X_i = \{\{x_i\}_{i \in I} \mid \forall i, x_i \in X_i\}$ .

Тогда рассмотрим отображение  $p_i : X \mapsto X_i$  - проекция.

Тихоновская топология на  $X$  - топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U)\}_{i \in I, U \in \Omega_i}.$$

**Tasks.** 1. Счетное произведение метризуемых - метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком  $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$ .

2. Канторовское множество  $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

### 1.1.2 Непрерывность

$X, Y$  - топологические пространства,  $\Omega_1, \Omega_2$  - топологии,  $f : X \rightarrow Y$ .

**Определение 3.**  $f$  - непрерывна, если  $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \subset \Omega_X$ .

*Замечание.*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

**Примеры.** 1. Тожественное отображение непрерывно.  $id_X : X \rightarrow X$

2. Константа тоже непрерывна.  $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$

3. Если  $X$  - дискретно,  $\forall f : X \rightarrow Y$  - непрерывно.

4. Если  $Y$  - антидискретно,  $\forall f : X \rightarrow Y$  - непрерывно.

**Определение 4.**  $f : X \rightarrow Y, x_0 \in Y$   $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

**Теорема 1.1.4.**  $f$  - непрерывна тогда и только тогда, когда  $\forall x_0 \in X : f$  - непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ )

$y_0 \in U$ .

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$ )

$U \subset Y$  - открыто, хотим доказать  $f^{-1}(U)$  - открыто. Достаточно доказать, что  $\forall x \in f^{-1}(U)$  - внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда  $x$  - внутренняя точка  $f^{-1}(U)$ . □