Конспект по матанализу
II семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

26 февраля 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle),\ x, x_0 \in (a, b)$. *Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде*

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Переход: $n - 1 \to n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x-t)^{n-1}dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

∎

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 2 (Хитрая теорема о среднем)**.** $f, g \in C[a,b],\ \ g \geqslant 0$. *Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary. Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 3. *Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.*

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\cdot\left(-\frac{((x-t)^n)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^x.$$

□

1.2 2

Лекция 2

1.2.1 Свойства

Property.

1 *$c \in (a,b)$:*

$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b}.$$

2 $\int_a^{\to b} f dx$ *— сходится* $\Longrightarrow \lim_{A\to b} \int_A^{\to b} f = 0$

2' *Если* $\int_A^{\to b} f \not\to_{A\to b-} \Longrightarrow \int_a^{\to b}$ *расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).*

линейность *f, g — функции на $[a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^{\to b}, \int_a^{\to b} g \text{ сходятся } \Longrightarrow \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} + \beta \int_a^{\to b} g.$$

монотонность *$f \leqslant g, \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$ сходятся.*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

Definition 1: Абсолютная сходимость

Говорят, что $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, *если сходится* $\int_a^{\to b} |f|$.

Если $\int_a^{\to b} f$ *сходится абсолютно, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится и верно неравенство*

$$\left| \int_a^{\to b} f \right| \leqslant \int_a^{\to b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ сходится } \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \Longrightarrow \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left| \int_a^B \right| \leqslant \int_a^B |f| dx.$$

Definition 2: Условная сходимость

$\int_a^{\to b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} |f|$ расходится.

интегрирование по частям $f, g \in C^1[a,b)$

$$\int_a^{\to b} f g' = f g \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f' g, \quad f g \Big|_a^{\to b} = \lim_{x \to b-} f(x) g(x) - f(a) g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. ☐

замена переменной *$\varphi : [\alpha, \beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta), f \in C[a,b)$. Если существует предел, обозначим его так: $\exists \lim_{x\to\beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.*

$$\int_\alpha^{\to beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

Доказательство. $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y)dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \to \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_\alpha^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} \to \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\exists \int_\alpha^{\to\beta} (f \circ g)\varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.
2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b),\ c_n \to b-\ \ \exists \gamma_{n \in [\alpha,\beta)} : \varphi(\gamma_n) = c_n$.
   Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β, либо к числу меньшему β.
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \beta$
     $$\int_\alpha^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k} = c_{n_k}}.$$
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \tilde{\beta} < \beta$
     $$\varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$

     Но должно быть равно b. Противоречие.

   Значит $\gamma_n \to b$.
   $$\int_{alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{phi(alpha)}^{phi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

Theorem 4 (Признаки сравнения). *Пусть* $0 \leqslant f \leqslant g,\ \ f, g \in C[a, b)$. *Тогда*

1. *если* $\int_a^{\to b} g$ *сходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,*
2. *если* $\int_a^{\to b} g$ *расходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *расходится.*

Доказательство.

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) :\ \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Longrightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

Theorem 5 (Признаки Абеля и Дирихле)**.** *$f \in C[a,b)$, $g \in C^1[a,b)$, g монотонна.*

Признак Дирихле *Если f имеет ограниченную первообразную на $[a,b), g \to 0$, то $\int^{tb} fg$ сходится.*

Признак Абеля *Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, g ограничена, то $\int_a^{\to b} fg$ сходится.*

Доказательство. F — первообразная f. $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\to b} fgdx = \int_a^{\to b} gdF == Fg \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} Fg'dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B \to b-} F(B)g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\to b} Fg'dx \leqslant M \cdot \int_a^{\to b} |g|dx = M \cdot \left| \int_a^{\to b} g'dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|\,.$$

□

Example 1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \leqslant Cx^{\alpha - \varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon}dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \ \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^b = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\to\infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon}dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln\frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходтся.

Example 2.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{s^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leqslant 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ – ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ – убывает.

   Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

Example 3 (Более общий вид)**.**

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$, f монотонна.

Если при $x \to +\infty$ $f \to 0$, то интегралы сходятся,
Если при $x \to +\infty$ $f \not\to 0$, то интегралы расходятся.

Remark.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \to 0, \text{ при } x \to +\infty.$$

Practice.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 \, dx \text{ сходится?}$$

1.3 Вычисление площадей и объемов

1.3.1 Площади

1. $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0,\ P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x) dx$

2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b],\ f \geqslant g,\ T_{f,g} = \{(x, y) \mid xin[a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

   Corollary (Принцип Кавальери)**.** Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

   Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \geqslant 0$, g непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [a, b],\ r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть τ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n$, $\quad \alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}}$, $m_j =$

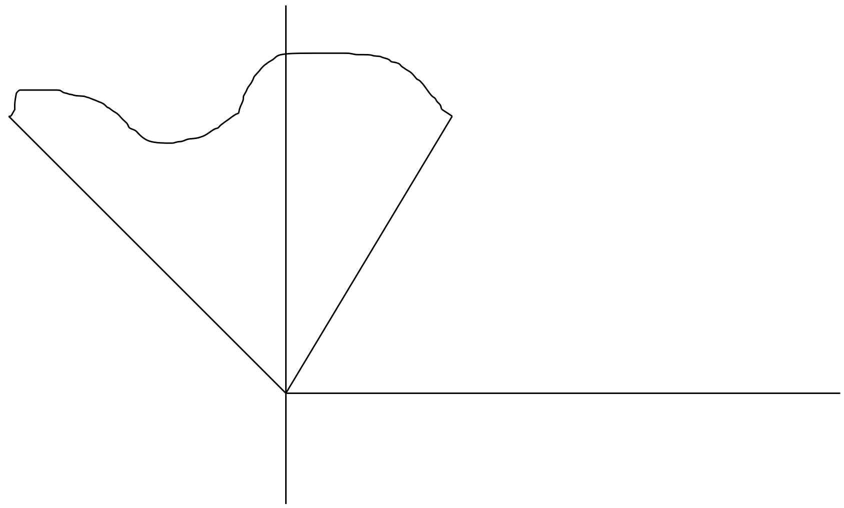


Рис. 1.1: sector

$\min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$.

$$\sum \frac{m_j^2}{2}(\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leqslant S(\tilde{P}_f) \leqslant \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$. Значит

$$S(\tilde{P}_f)\frac{1}{2}\int_a^b fst(\varphi)d\varphi.$$

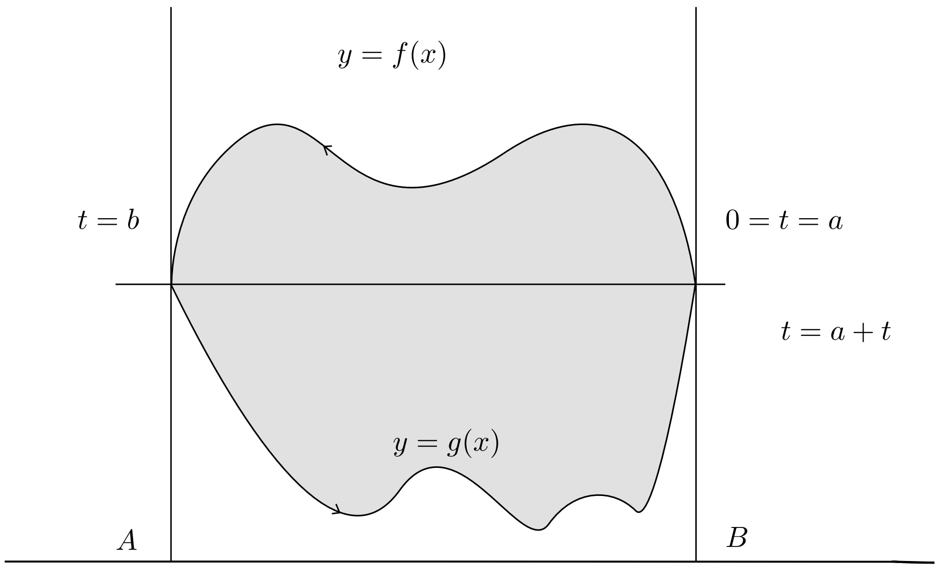
4. Площадь фигуры, ограниченной праметрически заданной кривой. $x, y : \mathbb{R} to \mathbb{R}$. $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(T)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx.$$

$$\int_A^B g(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[b,a+T]\\ dx=x'(t)dt\\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t)dt$$

$$\int_A^B f(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[a,b]}}{=} -\int_b^a y(t)x'(t)dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx = -\int_a^{a+T} y(t)x'(t)dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t)dt.$$



1.3.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.

2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3,\ T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

   Definition 3

   Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

   $\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение не T:

$$\forall \Delta \subset [a, b]\ \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta\ T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

Example 4. T — тело вращения, $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x)\}.$$

Доказательство формулы. Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело T и τ дробление отрезка $[a, b]$. Поместим его между двумя цилиндрами.

$$\sum (x_j - x_{j-1})S(T(x_*\Delta_j)) \leqslant V \leqslant (x_j - x_{j-1})S(T(x^*\Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы. □

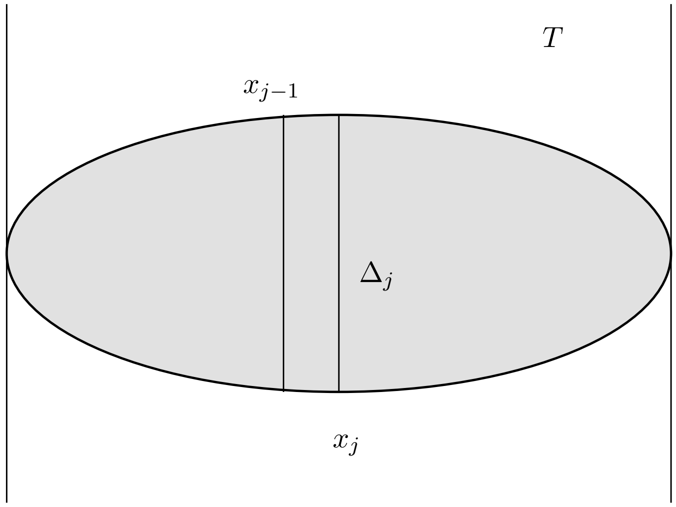


Рис. 1.2: cilinder

Example 5 (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$T = \{0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+y^2)}\}$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} = I e^{-x^2}.$$

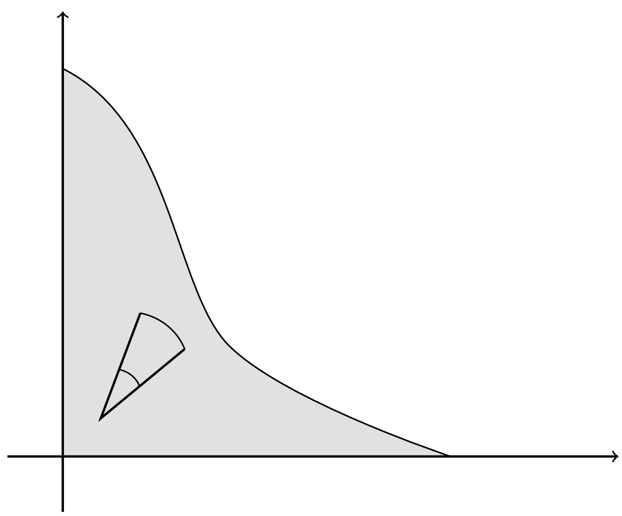


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона