Конспект по матанализу
III семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

5 сентября 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: † 2 Sept

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \to f$), если

$$\forall x \in E\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0, 1)$. Так как $\forall x \in (0,1)\colon x^n \to_{n\to\infty} 0$, $f_n \to f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. *$f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что*

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \to f \Longrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Longleftrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется равномерно ограниченной на E, если существует такое M, что
$$\forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leqslant M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. *Из равномерной сходимости следует поточечная*

1. *Если для всех $x \in E$ выполнено*
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$
где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E.

2. *Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что*
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$
то f_n не сходится равномерно к f на E.

3. *Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$.*

   Доказательство.
$$\sup_{x \in E}|f_n(x)g_n(x)| \leqslant M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x \in E}|f_n(x)|}_{\to 0} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
□

4. **Критерий Коши**. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E, согда*[1] *для любого положительного ε существует N, что*
$$\forall n, m > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

   Доказательство.

   $\boxed{1 \implies 2}$ Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Тогда для любых $n, m > N$
$$\begin{aligned}|f_m(x) - f(x)_n| \leqslant& \\ &\leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

   $\boxed{2 \implies 1}$ Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаметальна. Следовательно, существует предел $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   Устремим $m \to \infty$. Тогда
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
   По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

[1] С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

□

5. *Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f тоже непрерывна в точке a.*

Доказательство. Проверим, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как f_n непрерывна в точке a, можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем два полученых неравенства:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| \leqslant& \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| + \\ &+ |f_n(a) - f_n(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon\end{aligned}$$

□

6. **Теорема Стокса-Зайделя**. *Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна на E.*

Доказательство. Следствие из 5[прошлого свойства]. □

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функционоальный ряд

Рассмотрим функции $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — функциональный ряд,}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — частичная сумма ряда.}$$

Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.

$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \to 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K.

Свойства.

1. *$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ равномерно сходится на E, когда $r_n \rightrightarrows 0$ на E.*

2. **Критерий Коши**. *$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ равномерно сходится на E, когда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N, что*
$$\forall m > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\colon \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x)\right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. **Необходимое условие равномерной сходимости ряда**. *Если $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно на E, то u_n равномерно сходится к 0.*

   Доказательство. По критерию Коши для $p = 1$. □

4. **Признак сравнения**. *Пусть $u_n, v_n\colon E \to \mathbb{R}$ [2] и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ Если $\sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ сходится равномерно на E, то $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ тоже сходится равномерно на E.*

   Доказательство. Обозначим частичные суммы
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x).$$
   Заметим, что
$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \leqslant |C_m(x) - C_n(x)|.$$
   Так как $\sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше ε при $m, n > N$ и $x \in E$. Тогда можем применить критерий Коши для $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$. □

5. **Признак Вейерштрасса**. *Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно.*

   Доказательство. Применить признак Коши. □

6. *Если $\sum_{n=1}^\infty |u_n(x)|$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно.*

7. **Признак Дирихле**. *Пусть $u_n, v_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, обозначим $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:*

   (a) *ряд U_n равномерно ограничен на E, то есть $\exists M : \forall x \in E\ \forall n \quad |U_n(x)| \leqslant M$;*
   (b) *ряд v_n равномерно сходится к нулю ($v_n \rightrightarrows 0$);*
   (c) *для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.*

   Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)v_k(x) = U_n(x)v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$

[2] Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае $\mathbb{C}$ не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

Так как $U_n(x)$ равномерно ограничено, а $v_n(x)$ равномерно сходится к нулю, $U_n(x)v_n(x)$ тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1})|.$$

Оценим частичную сумму[3]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = \\ &= M \cdot |v_1(x) - v_n(x)|\end{aligned}$$

Так как $v_n \rightrightarrows 0$, $|v_1(x) - v_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |v_1(x)|$. Значит, частичная сумма ряда стремится к $M \cdot |v_1(x)|$, следовательно[4], второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится. ☐

8. **Признак Лейбница**. *Если выполнены следующие условия, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x)$ равномерно сходится:*

   (a) $v_n \rightrightarrows 0$ на E;
   (b) для любого $x \in E$, ряд $\{v_n(x)\}$ монотонный.

Доказательство. Обозначим за $u_n(x) \coloneqq (-1)^n$. Заметим, что ряд $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ ограничен, тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ равномерно сходится. ☐

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$. Обозначим $u_n(x) = \sin(nx)$ и $v_n(x) = \frac{1}{n}$. Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$\begin{aligned}U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} \cdot \left(e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} - e^{-ix\cdot\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right) = \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ixn}{2}}\right) \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

[3] В последнем переходе мы используем монотонность $v_k(x)$

[4] Например, по признаку сравнения

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ при $x \in (0,1)$. Обозначим $v_n(x) = \frac{x^n}{n}$. $v_n(x)$ монотонна для всех $x \in (0,1)$, так же $|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, поэтому v_n равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. **Признак Абеля**. *Пусть $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:*

(a) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E;
(b) ряд v_n равномерно ограничен;
(c) для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.

Доказательство. Проверим критерий Коши, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать число N такое, что

$$\forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \colon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля[5]:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) =$$
$$= \big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big) \cdot \big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)\big)$$

Так как v_n равномерно ограничено, а u_n равномерно сходится[6]:

$$\big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) \leqslant |U_{n+p}(x) - U_n(x)| \cdot M < \varepsilon \cdot M.$$

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для u_n и монотонность v_n:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big) \cdot \big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \big|U_{n+k}(x) - U_n(x)\big| \cdot \big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon \cdot 2M$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через ε, поэтому можем им воспользоваться. □

1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

Пусть $f_n, f \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E, f_n равномерно сходится к f на E и существует предел $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$. Тогда пределы $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существуют и равны.

То есть

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

[5] Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.
[6] Поэтому можем использовать критерий Коши

Доказательство.

1. Проверим, что у b_n есть предел. Из критерия Коши для f_n следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N, что
$$\forall n, m > N \ \forall x \in E \colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$
Устремим $x \to a$. Тогда $f_n(x) \to b_n$ и $f_m(x) \to b_m$. Из того, что
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \colon \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon,$$
следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Поэтому предел b_n существует и $b \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n$.

2. Определим функции
$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$
Эти функции непрерывны в точке a. Кроме этого $g_n \rightrightarrows g$ на $E \cup \{a\}$, так как можно выбрать N из прошлого пункта.

3. Используем свойство равномерной сходимости
$$b = lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

$\square$