Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y)dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi(y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

0.1 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади

Definition 1: Путь

Путь в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C[a,b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)),\ \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути — $\gamma(a)$, конец пути — $\gamma(b)$.
Носители пути — $\gamma([a,b])$.
γ замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.
$\gamma \in C^n[a,b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a,b] \iff \gamma$ — r-гладкий путь.
γ^{-1} — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a-b-t),\ \forall t \in [a,b]$.

Note. Разные пути могут иметь один общий носитель.

Definition 2

Два пути $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если существует строго возрастающая сюрьекция

$$\varphi : [a,b] \to [c,d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Statement. *Это отношение эквивалентности.*

Definition 3: Кривая

Кривая в $\mathbb{R}^n$ — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

Example 1.

$$\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t_0).$$

$$\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}).$$

Можно определить:

начало кривой

- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривя r-гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

0.1.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \; c \in (a,b).$

$$\gamma = \gamma \mid_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma \mid_{[c,b]} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geqslant |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geqslant \sum_1^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$, где $\forall$ дробления $[a,b]$ $\tau = \{x_j\}$

Definition 4: Длина пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_\tau l_\tau$, где

$$l_\tau = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \; \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

Practice. Придумать пример бесконечно длинного пути.

Definition 5

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

Definition 6

Длина крвивой — длина любой из ее параметризаций.

Property.

$\boxed{1.}$ $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

$\boxed{2.}$ *Аддитивность*

$$\gamma : [a,b], c \in (ab) \qquad \gamma = \gamma \Big|_{[a,c]}, \; \gamma\gamma \Big|_{[c,b]}.$$

Тогда $l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma)$.

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ τ — дробление $[a,b]$.

$$\tau^l\left(\tau \cap [a,c] \cup \{c\}\right)$$
$$\tau^r = \left(\tau \cap [c,b] \cup \{c\}\right)$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1}| \leqslant l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{tau^r}(\gamma^r) \leqslant l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ τ^l — дробление $[a,b]$, τ^r — дробление $[c,d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$l(\gamma) \leqslant l_\tau(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r)$$
$$\sup_{\tau^l} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^l$$
$$\sup_{\tau^r} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^r$$

□

Theorem 1 (Длина гладкого пути)**.** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *— гладкий путь. Тогда* γ *обязательно спр и*

$$l(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt.$$
$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \dots \gamma_n'(\tau)\right).$$
$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma_1'(t)^2 + \dots \gamma_n'(t)^2|}.$$

Доказательство. 1. $\Delta \subset [a,b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(m_j(\Delta))^2}, \qquad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a,b]$ чему равно $l(\gamma \big|_\Delta)$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{m}$. Тогда

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1}|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\gamma_k'(\dots)\right|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\gamma_k'(\dots)\right|^2}$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant l(\gamma \big|_\Delta \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

2.
$$\int_\Delta \left|\gamma_k'(t)\right| dt = \int_\Delta \sqrt{|\gamma_1'(t)|\, sr + \ldots |\gamma_n'(t)|} dt.$$
$$m(\Delta) \leqslant \max \sqrt{\ldots} \leqslant M(\Delta).$$
$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant \int_\Delta \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

3.
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : s, t \in [a,b],\ |s-t| < \delta \quad \forall j \in [1,k] : \left|\gamma_j'(s) - \gamma_j'(t)\right| < \varepsilon.$$
$$|\Delta| < \delta \Longrightarrow M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leqslant \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta) \leqslant \varepsilon n|$$

4. Теперь возьмем дробление $[a,b]$ на кусочки длиной меньше δ.
$$[a,b] = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$
Запишем два неравенства
$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant l(\gamma \left|_{\Delta_j} \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.\right.$$
$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant \int_{\Delta_j} \left|\gamma'\right| \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$
$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \int_a^b \left|\gamma'\right| \leqslant \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j)\,|\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_i| = \varepsilon n(b-a).$$

□

Example 2. Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда
$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$$

0.1.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в $\mathbb{R}^3$.
$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2| + |y'(t)^2| + |z'(t)^2|}.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a,b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a,b]\}$.
$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha h}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Remark. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок.

$$l(\gamma\,\big|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{\left|\gamma'(t)\right| dt}_{\text{Дифференциал дуги}}.$$

Если f задана на носителе пути γ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t)\left|\gamma'(t)\right| dt$

Глава 1

Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

1.1 Нормированные пространства

Example 3. $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$.

$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

Если $p = +\infty$, $|x|_{+\infty} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m}$.

Note. Все нормы в $\mathbb{R}^m$ эквивалентны.

Example 4. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — непрервна$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$|f|_\infty = |f|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2. $C(K)$— *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундментальную последовательность функций $|f_n| \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальны, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall k, n > N : |f_k - f_n| < \varepsilon \ \forall x \in K \ \ |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \to \infty$. $f_k(x) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. f_{n_0} — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| \, |f_{n_0}(x_1 - f(x_2)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K\ \ |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon}_{\max_{x\in K}|f-f_n|\leqslant\varepsilon}.$$

□

Example 5. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — ограничена$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$|f|_\infty == \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Theorem 3. $l_\infty(X)$ *— полно.*

Доказательство. Аналогично. □

Note. $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

Note. Замкнутое подпространство полного пространства полно.

Example 6. $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a, b] = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\right\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Theorem 4. $(C^1[a, b], \varphi_3)$ *полно.*

Доказательство. $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \to_{n,kro\infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \to 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \to 0$. Тогда $|f_n - f_k| \to 0$ и $|f_n' - f_k'| \to 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f_n'\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, тое есть $\exists g = f'$.
2. $f_3(f_n - f) \to 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \to 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max \left|f_n' - g\right| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$= \left|f_n(x) - \left(\int_a^x f_n'(t)dt + f(a)\right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x \left(g(t) - f_n'(t)\right) dt - (f_n(a) - f(a))\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x \left|g(x) - f_n'(t)\right| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2)$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \to f \wedge f_n' \to g$. □

Remark. $|f_n - f| \to 0, \quad f_n \in C(K) \Longrightarrow f \in C(k).$

$$x_k \to x_0 \Longrightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (x_k) = f(n).$$

Remark. Из того, что $|f_n - f|_\infty \to 0$ и $|f_n' - g|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Practice. $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$