Конспект по топологии
I семестр
СПбГУ, Факультет математики и компьютерных наук
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

30 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство.

1. Все пространство открыто
2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ *– замкнуто,* $B \cap Y$ *– замкнуто. Тогда* $A \times B$ *– замкнуто в* $X \times Y$*.*

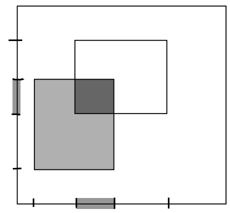

Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X,\ B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x,y),(x',y')) = max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x,y),(x',y')) = 0 \iff d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p,p') + d(p',p'') \overset{?}{\geqslant} d(p,p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x,x'').$$

$$d_X(x,x') + d_X(x',x'') \geqslant d_X(x,x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X\times Y}$

$$B_r((x,y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X\times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X\times Y}$.

$$\exists A \subset X,\ B \subset Y\text{- открытые}, (x,y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

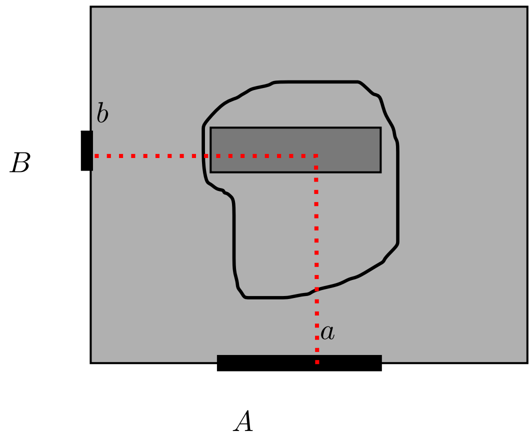

Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B^Y_{r_2}(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B^{X\times Y}_r((x,y)) = B^X_r(x) \times B^Y_r(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leqslant} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leqslant & \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

□

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i.

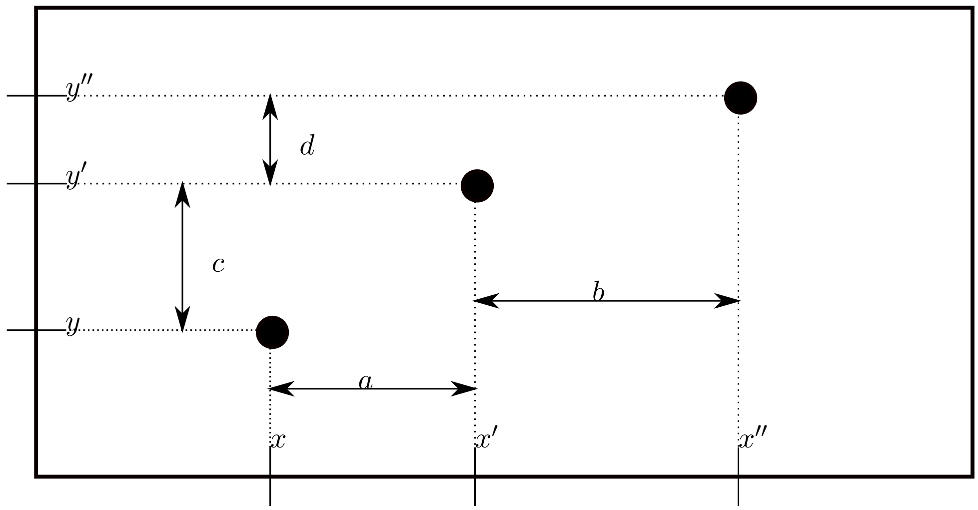

Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Def 2 (Тихоновская топология)**.** Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \Omega_i\right\}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}}[0,1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

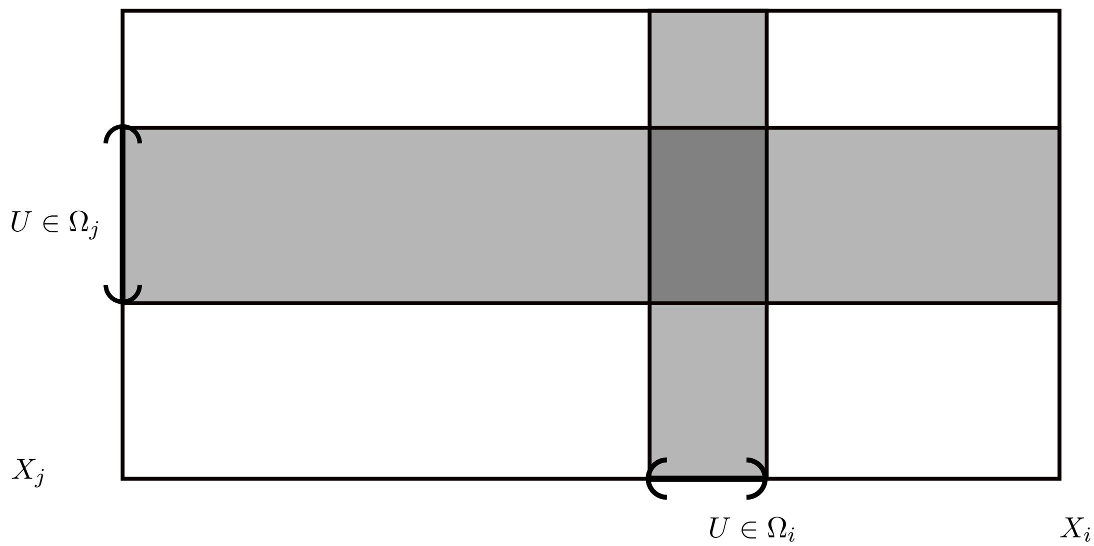

Рис. 1.4: Тихоновская топология

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

Theorem 4. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. $\Rightarrow$)
$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$)
$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$- внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y,\ x_0 \in X$.*
Тогда f – непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < d \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\Leftarrow$) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.
$f : X \to Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leqslant c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leqslant C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leqslant d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

1.9 Гомеоморфизм

Designation. X, Y — топологические пространства.

Def 6. Гомеоморфизм между X и Y — непрерывное биективное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f^{-1} : Y \to X$ тоже непрерывно.

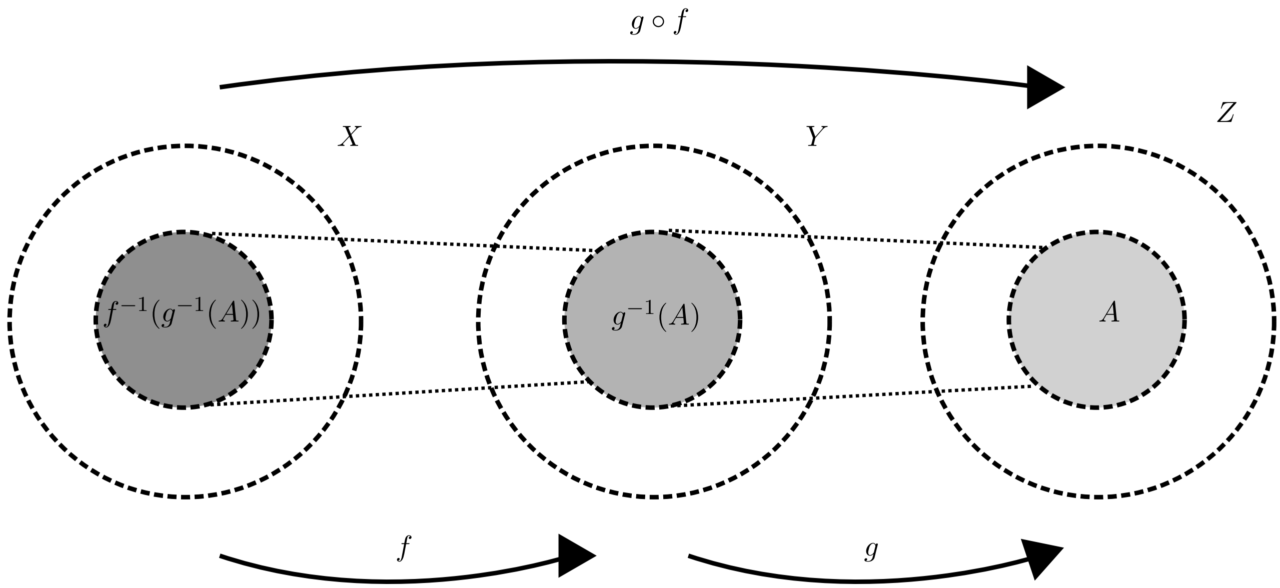

Рис. 1.5: Композиция отображений

Def 7. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. *Тождественное отображение — гомеоморфизм.*
2. *Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.*
3. *Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.*

Theorem 7. *Гомеоморфность — отношение эквивалентности.*

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y.
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \to S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f – биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1, f – непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке (1, 0).

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d: \; [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d: \; (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d: \; [a, b) \cong [c, d) \cong (c, d]$
- $\forall a, b: \; (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b: \; [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 8. *Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$*

Designation. D^n — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$

Designation. S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$

Theorem 9. $S^n \setminus \{\text{*точка*}\} \cong \mathbb{R}^n$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.10 Аксиомы

1.10.1 Аксиомы счетности

Def 8. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \not\ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 9. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сетности (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 10. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2AC), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 10. *$2AC \Rightarrow 1AC$*

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть

$$\Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\}.$$

Тогда Σ_x — база в точке. □

Theorem 11. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

Statement. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 12. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 13. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 11. Топологические свойство — наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 14. *Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in A$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.10.2 Сеперабельность

Def 12. Всюду плотное множество – множество, замыканние которого есть все пространство.

Def 13. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 14. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. *X, Y – сепарабельны $\Longrightarrow X \times Y$ тоже.*

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 15.

- *Счетная база $\Longrightarrow$ сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность $\Longrightarrow$ счетная база*

1.10.3 Аксиомы отделимости

Def 15. X обладает свойтсвом T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \land y \notin U$.

Другое название: T_1-пространство.

Theorem 16. $T_1 \Longleftrightarrow$ *любая точка является замкнутым множеством.*

Def 16. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \land V \ni y :\ U \cap V = \varnothing$.

Другое название: T_2-пространство.

Designation. про такие окрестности U, V говорят, что они отделяют x и y друг от друга.

Note. Все метрические пространства хаусдорфовы.

Theorem 17. *X хаусдорфово $\Longleftrightarrow$ "диагональ" $\Delta \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$*

Def 17. X – регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X\ \forall x \in X \setminus A\ \exists$ открытые $U, V : A \subset U \land x \in V \land U \cap V = \varnothing$

  Другое название T_3-пространство.

Note (Переформулировка определения T_3). X регулярно тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X,\ \forall \text{ окрестности } U \ni x\ \exists \text{ окрестность } V \ni x :\ \operatorname{Cl}(V) \subset U.$$

Def 18. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \varnothing)\ \exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \land U \cap V = \varnothing$

Другое название T_4-пространство.

Note (Переформулировка определения T_4). X нормально тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X,\ \forall \text{ замкнутого } A \subset X \text{ и } \forall \text{ открытого } U \supset A\ \exists \text{ открытое } V:\ A \subset V \wedge \mathrm{Cl}\,(V) \subset U.$$

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - -T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.

Нормальность не наследственная.

Def 19. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.

$f: X \to Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. □

Lemma (Урысон). *X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует непрерывна функция $f : X \to [0, 1]:\ f\restriction_A = 0 \wedge f\restriction_B = 1$*

1.11 Связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 20 (Связное топологическое пространство).
X связно, если:

его нельзя разбить на два непустых открытых множества;

его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;

не существует открыто-замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и X;

не существует сюрьективного непрерывного отображения $f : X \to 0, 1$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- $\mathbb{Q}$ несвязно

1.11.1 Связные множества

Def 21. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологий.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C, что $ClA \cap C = \varnothing \land ClC \cap B = \varnothing$.
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V:\ U \cap V = \varnothing \land U \cap A \neq \varnothing \land V \cap A \neq \varnothing$.
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. *Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.*

Связные множества на прямой

Statement. *Отрезок* $[0, 1]$ *связен.*

Theorem 18. *Для* $X \subset \mathbb{R}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. X *— связно*
2. X *— выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)*
3. X *— интервал, точка или пустое множество*

1.11.2 Связность при отображении

Theorem 19. X *— связно,* $f : X \to Y$ *непрерывно. Тогда множество* $f(x)$ *связно.*

Theorem 20. X *связно,* $f : X \to \mathbb{R}$ *непрерывно,* $a, b \in f(X)$. *Тогда* $f(x)$ *содержит все числа между* a *и* b.

Доказательство. По теореме 19 $f(x)$ связно. Тогда по определению $f(x)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. □

1.11.3 Компоненты связности

Def 22. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X.

Exs.

1. $[0, 1] \cup [2, 3]$ две компоненты связности — $[0, 1]$ и $[2, 3]$.
2. Компоненты связности $\mathbb{Q}$ — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств)**.** *Пусть* $\{A_i\}_{i \in I}$ *— семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда* $A \coloneqq \bigcup_{i \in I} A_i$ *тоже связно.*

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V.

$$\exists i, j \in I: \; U \cap A_i \neq \varnothing \wedge V \cap A_j \neq \varnothing.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Противоречие. □

Theorem 21. *Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:*

- *каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;*
- *различные компоненты связности не пересекаются.*

Доказательство.

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x. Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме 1.11.3 полученное множество связно, значит это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются.
Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \varnothing$. По лемме 1.11.3 $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

□

Lemma. *Замыкание связного множества связно.*

Theorem 22. *Компоненты связности замкнуты.*

Доказательство. Следует из леммы 1.11.3. □

Note. компоненты связности не всегда открыты. Например, в $\mathbb{Q}$.

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.12 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 23. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \to X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 24. X линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ex.

$$\forall \, p, q \in \mathbb{R}^n \; \exists \; \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

Theorem 23. *Если X линейно связно, $f : X \to Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ в $f(X)$. ☐

Lemma. *Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.*

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X \ \exists \ \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \to \exists \overline{\alpha} = \alpha(1 - t))$

Транзитивность: если α идет из x в y, а β из x в z, построим путь γ, идущий из x в z:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

☐

1.12.1 Компоненты линейной связности

Def 25. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 26 (переформулировка)**.** Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.12.2 Линейная связность и связность

Theorem 24. *Если X линейно связно, то оно связно.*

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ex (Связность не влечет линейную связность)**.** Рассмотрим множество

$$\left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность
   График линейно связен, значит он связен, а $(0, 0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X, следовательно, X — связно.

2. $(0, 0)$ не соединяется путем с другими точками
   Пусть α — путь с началом в $(0, 0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) = (0, 0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

   Докажем, что T открыто в $[0, 1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \ |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \ \alpha(t_1) \neq (0, 0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

$$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = \left(\frac{1}{2\pi n}, 1\right)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связен, $T = [0,1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0,0)$.

□

1.12.3 Локальная линейная связность

Def 27. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x: \ V \subset U$.

Ex. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связано.

Theorem 25. *В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.*

Доказательство. 1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.

2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности.

□

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 26. *Интервалы* $[0,1], \ [0,+\infty), \ \mathbb{R}, \ S^1$ *попарно негомеоморфны.*

Theorem 27. $\mathbb{R}^2$ *не гомеоморфна никакому интервалу и* S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества $\mathbb{R}^2$ связно.

□

1.13 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 28. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны

2. Все ахти дискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. $\mathbb{R}$ некомпактно

Def 29. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A, $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X, $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

Theorem 28 (лемма Гейне-Бореля)**.** *Отрезок* $[0,1]$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $l_0 = [0,1], \{U_i\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}$, $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i. Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i. Обозначим ее l_1.

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \ldots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0. Она лежит в каком-то U_{i_0}. С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n. Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i. Противоречие. □

Theorem 29. *Если* X *компактно и* $A \subset X$ *замкнуто, то* A *компактно.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X, выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. □

Theorem 30. *Если* X, Y *компактны, то* $X \times Y$ *компактно.*

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X,\ V_i \subset Y$.
2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x \coloneqq \{x\}Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U^x_{i_1} \times V^x_{i_1}, \ldots, U^x_{i_n} \times V^x_{i_n}$.
3. $U^x = U^x_{i_1} \cap \ldots \cap U^x_{i_n}$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X. $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".
4. Получили окрестности U^x для всех точке $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

□

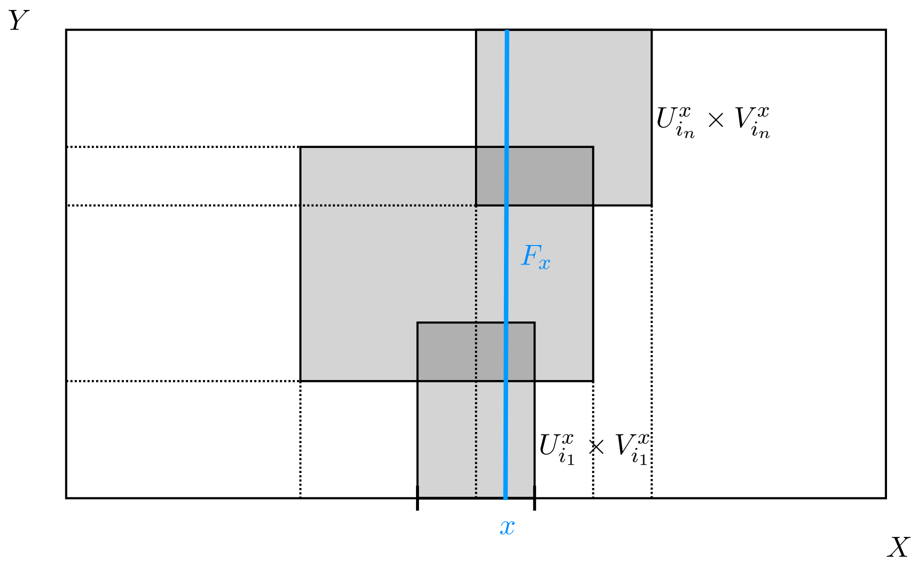

Рис. 1.6: Покрытие и гомеокопия

Theorem 31. *Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X.*

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \ \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \ni x : U_a \cap V_a = \varnothing.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A: $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$. $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x, не пересекающая A. □

Theorem 32. *Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.*

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы 31.

$$U \coloneqq \bigcup U_{a_i},\ V \coloneqq \bigcap V_{a_i}.$$

   U и V — открытые множества, $U \supset A,\ V \ni x,\ U \cap V = \varnothing$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть $A,\ B$ замкнуты и $A \cap B = \varnothing$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \supset B : U_a \cap V_a.$$

   Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$. Аналогично получим открытые $U \coloneqq \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V \coloneqq \bigcap V_{a_i} \supset B,\ U \cap V = \varnothing$. Доказали, что X нормально.

□

1.13.1 Компактность в $\mathbb{R}^n$

Designation. X — метрическое пространство.

Def 30. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 31. Диаметр множества A:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. *A ограничено тогда и только тогда, когда* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 33. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 34. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ По прошлому следствию 1.13.1.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.13.2 Центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 32. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 35. *X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i\in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств $A_1, \dots A_n$. Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из $A_{1\dots n}$, это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i\in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i\in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i\in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Не умоляя общности A_0 компактно. По теореме 35 (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i\in I}$ имеет непустое пересечение. □

Theorem 36. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.*

Note. Теорема 36 обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots.$$

1.13.3 Непрерывные отображения компактов

Theorem 37. *Пусть X компактно, $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X. Выберем в нем конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$. Тогда $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. □

Theorem 38. *Пусть X компактно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.*

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(x)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. □

Theorem 39. *Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная бикеция. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. f непрерывно $\iff$ прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно $\iff$ f-образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. □

1.13.4 Вложения компактов

Def 33. $f : X \to Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм меду X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.13.5 Лемма Лебега

Theorem 40 (Лемма Лебега)**.** *X — компактное метрическое пространство. $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i.*

Def 34. Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство.

$$\forall x \in X\ \exists r_x > 0,\ U_i \in \{U_i\}:\ B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что $\left\{B_{\frac{r_x}{2}}\right\}_{x \in X}$ — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X\ \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

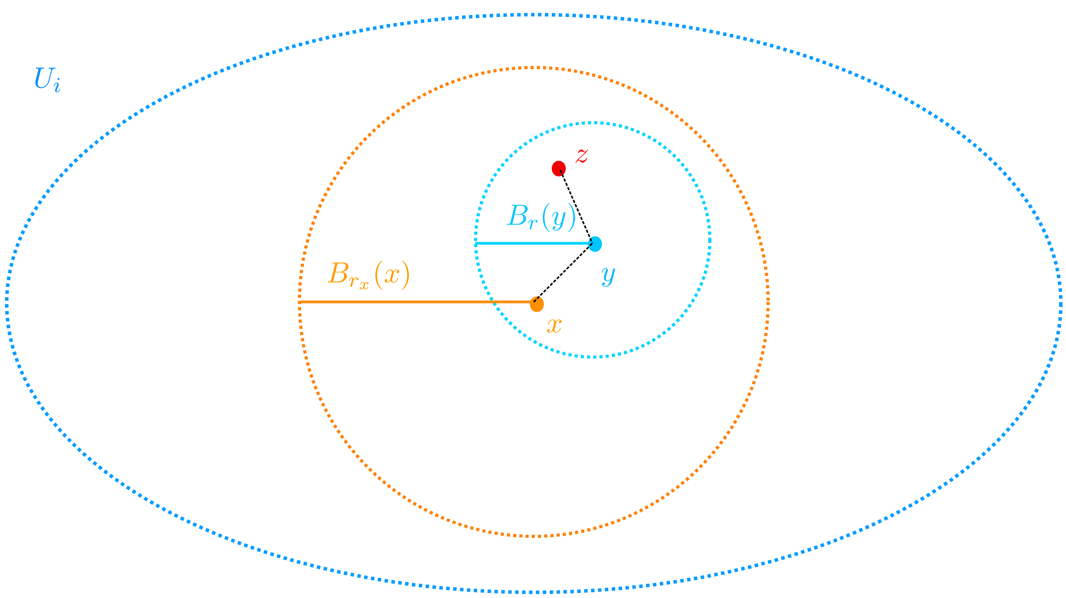

Рис. 1.7: Лемма Лебега

$$r \leqslant \frac{r_x}{2}, \quad \overline{xy} + \overline{yz} < r + \frac{r_x}{2} < r_x.$$

Следовательно, $B_r(y) \subset B_{\frac{r_x}{2}}(y) \subset B_{r_x}(x) \subset U_i$. □

Corollary. Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, $f : X \to Y$ непрерывно, $\{U_i\}$ — открытое покрытие Y. Тогда $\exists r > 0 :\ \forall x \in X\ f(B_r(x))$ содержится в одном из U_i.

Доказательство. Применим лемму Лебега к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

1.13.6 Равномерная непрерывность

Def 35. Отображение $f : X \to Y$ равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall a, x' \in X \; (d(x, x') < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Theorem 41. *Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \to Y$ равномерно непрерывно.*

Доказательство. Применим следствие 1.13.5 из леммы Лебега к f и покрытию Y шарами радиуса $\frac{\delta}{2}$ □

1.13.7 Теорема Тихонова

Theorem 42 (Тихонов, без доказательства)**.** *Пусть $\{X_i\}$ — произвольное семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение $\prod_{i\in I} X_i$ тоже компактно.*

1.13.8 Локальная компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 36. X локально компактно, если $\forall x \in X$ $\exists$ окрестность $U \ni x :$ $\mathrm{Cl}\, U$ компактно.

Ex. $\mathbb{R}^n$ локально компактно.

Practice. Если X локально компактно и хаусдорфово, то X регулярно.

1.13.9 Одноточечная компактификация

Designation. X — хаусдорфово топологическое пространство.

Def 37. Одноточечная компактификация X — топологическое пространство $\widehat{X}$:

- $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}, \qquad \infty \notin X$
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \notin U$ открыто в $\widehat{X}$ тогда и только тогда, когда U открыто в X
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \in U$ открыто в $\widehat{X}$ тогда и только тогда, когда $X \setminus U$ компактно

Statement. *Определение 37 корректно, то есть указанные открытые множества образуют топологию на $X \cup \{\infty\}$.*

Practice.

1. $\widehat{X}$ компактно
2. $\widehat{X}$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда X локально компактно
3. $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$
4. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$

1.14 Полные метрические пространства

1.15 Предел последовательности

Designation. X — топологическое пространство.

Def 38. Точка $x \in X$ — предел последовательности $\{x_n\} \subset X$, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x\ \exists N \in \mathbb{N}: \ x_n \in U \quad \forall n > N.$$

Синонимы: x_n стремится к x или x_n сходится к x

Designation. $x_n \to x$ и $x = \lim x_n$

Property.

1. *$x_n = x$ сходится к x*
2. *$x_n \to x \Longrightarrow$ любая подпоследовательность тоже сходится к x*
3. *Если X хаусдорфово, то предел единственный*
4. *В метрическом пространстве $X = (X, d)$,*
$$x_n \to x \Longleftrightarrow d(x, x_n) \to 0.$$
5. *Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей.*
$$\forall \text{ замкнутого } A \subset X: \ (\{x_n\} \subset A,\ x_n \to x \Longrightarrow x \in A).$$
6. *В метрическом пространстве X (или в пространстве со счетной базой) верно обратное: если $A \subset X$ содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то A замкнуто.*

1.16 Полные пространства

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 39. $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n, k > N\ d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

или

$$d(x_n, x_k) \to 0, \quad n, k \to \infty.$$

Синонимы: $\{x_n\}$ — последовательность Коши, $\{x_n\}$ сходится в себе.

Def 40. X полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Property.

1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*

2. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

3. *Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.*

Note. Полнота — не топологическое свойство!

Exs.

1. $\mathbb{R}$ полно (критерий сходимости Коши)

2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно (если $x_n \to 0,\ x_n \neq 0$, она фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

3. $[0, 1]$ полно

4. $(0, 1)$ неполно

Theorem 43. $\mathbb{R}^n$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\{x\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. Предположим, что $\{x_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall i \in [1, n] : \ \{x_k^i\}$ — тоже фундаментальна. Значит координатные последовательности имеют пределы $x^1, \dots, x^n$. Следовательно, $x_k \to x \coloneqq (x^1, \dots, x^n)$. □

Theorem 44. *Если X полно и $Y \subset X$ замкнуто, то Y полно.*

Practice. Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.

Practice. Множество в $\mathbb{R}^n$ полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

1.16.1 Теорема о вложенных шарах

Theorem 45 (”о вложенных шарах“)**.** *Пусть*

- X — *полное метрическое пространство*
- $A_1, A_2, \dots$ — *непустые замкнутые множества в* X
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
- $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$

Тогда $\bigcap A_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Для всех A_n выберем точку x_0. Так как $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел x, который принадлежит X, так как X полно.

$$\forall n \geqslant k : \ x_n \in A_k \Longrightarrow x \in A_k.$$

Тогда $x \in \bigcap A_i \Longrightarrow \bigcup A_i \neq \varnothing$. □

1.16.2 Теорема Бэра

Def 41. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ нигде не плотно, если:

$\text{Int Cl } A = \varnothing$

или

$X \setminus A$ содержит всюду плотное множество

или

любое открытое $U \subset X$ содержит открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \varnothing$.

Ex. $f = f(x_1, \dots x_n)$ — ненулевой многочлен степени n над $\mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$.

Ex. Канторово множество нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

Theorem 46 (Бэр)**.** *Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным набором нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — нигде не плотные множества. Пусть $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$.

A_1 нигде не плотно, следовательно, открытый шар $B_{r_0}(x_0)$ содержит открытое множество $U_1 : U_1 \cap A_1 = \varnothing$.

U_1 содержит открытый шар, который содержит $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1),\ r_1 \leqslant 1$.

Построили замкнутый шар $B_1 \subset B_0,\ B_1 \cap A_1 = \varnothing$. Аналогично построим последовательность $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, где радиус $r_i \leqslant \frac{1}{i}$ и $B_i \cap A_i = \varnothing$.

По теореме 45 о вложенных шарах существует точка $x \in \bigcap B_i$. Тогда $x \notin \bigcup A_i \Longrightarrow \bigcup A_i \neq X$. □

Corollary. Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Theorem 47 (усиление теоремы Бэра)**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, A — объединение счетного набора нигде не плотных множеств. Тогда* $\text{Int } A = \varnothing$*.*

1.16.3 Пополнение

Def 42. Пусть X — метрическое пространство. Пополнение X — такое метрическое пространство $\overline{X}$, что

- $\overline{X}$ полно
- $X \subset \overline{X}$ как подпространство, то есть $d_X = d_{\overline{X}}$
- X всюду плотно в $\overline{X}$

Theorem 48 (без доказательства)**.** *У любого метрического пространства есть пополнение.*

1.17 Компактность метрических пространств

1.17.1 Секвенциальная компактность

Def 43. X секвенциально компактно, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Theorem 49. *X компактно, $S \subset X$ — бесконечное множество. Тогда существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность $U \ni x$ содержит бесконечно много точек S.*

Доказательство. От противного. Пусть $\forall x \in X$ $\exists$ окрестность $U_x : |U_x \cap S| < \infty$. Выберем из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$.

$$S = (S \cap U_{x_1}) \cup \ldots \cup (S \cap U_{x_n}.$$

Каждое из $S \cap U_{x_i}$ конечно, следовательно, S конечно. Противоречие. □

Theorem 50. *Если X — компактное метрическое пространство, то X секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X. Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.
2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме 49 существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности. Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} :\ n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \quad k = 1, 2, \ldots$.

   Она сходится к x.

□

Theorem 51. *X — топологическое пространство. Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то X секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X. Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.
2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме 49 существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности.

   Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — счетная база в точке x. Рассмотрим такие вложенные окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \ldots :$

   $$V_k = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k.$$

   Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} :\ n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in V_k \quad k = 1, 2, \ldots$.

   Она сходится к x.

□

1.17.2 Вполне ограниченные множества

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 44. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ — ε-сеть в X, если

$$\forall x \in X \; \exists s \in S : d(x, s) < \varepsilon.$$

Def 45. X вполне ограничено, если для любого ε существует конечная ε-сеть.

Practice. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Theorem 52. *Если метрическое пространство X компактно, то оно вполне ограничено.*

Theorem 53. *Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть для $\varepsilon > 0$ нет конечной ε-сети. Построим последовательность $x_1, x_2, \ldots$:

x_1 — любая точка

x_2 — такая точка, что $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$

$\ldots$

x_n — такая точка, что $d(x_i, x_n) \geqslant \varepsilon \qquad \forall i \in [1, \ldots, n-1]$

$\ldots$

Такая $\{x_n\}$ не может быть иметь сходящейся подпоследовательности, так как все попарные расстояния не менее ε. Противоречие. $\square$

Theorem 54. *Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. По секвенциальности у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, она тоже сходится к тому же пределу. $\square$

Theorem 55. *Если X полно и вполне ограничено, то X компактно.*

Доказательство. Пусть существует открытое покрытие $\{U_i\}$, у которого нет конечного подпокрытия. Пусть S_1 — конечная 1-сеть. Все пространство покрыто конечным числом шаров радиуса 1 (пусть замкнутых) с центрами в S_1. Значит, хотя бы один из них не покрывается конечным числом U_i.

Пусть это A_1.

Теперь рассмотрим конечную $\frac{1}{2}$-сеть S_2 и пересечения

$$A_1 \cap \overline{B}_{\frac{1}{2}}, \quad s \in S_2.$$

Они покрывают A_1, следовательно, одно из них не покрывается конечным набором U_i. Обозначим его A_2.

Аналогично строим последовательность замкнутых множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, где A_n не покрывается конечным набором $\{U_i\}$.

$$A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(s), \text{ где } s \in S_n \text{ — конечная } \frac{1}{n}\text{-сеть.}$$

Тогда $\operatorname{diam} A_n \leqslant \frac{2}{n} \to 0$. По теореме о вложенных шарах $\exists x \in \bigcap A_n$.

$$\exists U_i : \ x \in U_i \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

Далее

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N : A_n \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

То есть A_n покрывается одним U_i. Противоречие. □

Theorem 56 (Три определения компактности)**.** *X — метрическое пространство. Следующие свойства равносильны:*

1. *X компактно*
2. *X секвенциально компактно*
3. *X — полное и вполне ограниченное*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Уже доказано (см. теорему 50)

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Уже доказано (см. теоремы 53 и 54)

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Уже доказано (см. теорему **??**)

□

1.17.3 Компактность и счетная база

Theorem 57. *Если X вполне ограничено, то оно имеет счетную базу топологии.*

Доказательство. Объединим конечные ε-сети для $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Получим счетное всюду плотное множество. Тогда X сепарабельно, значит X имеет счетную базу (так как X — метрическое пространство). □

Theorem 58. *Если X метризуемо и компактно, то X имеет счетную базу топологии.*

1.17.4 Обобщение

Theorem 59. *X имеет счетную базу топологии. Тогда X компактно тогда и только тогда, когда X секвенциально компактно.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Уже доказано (см. 50)

$\boxed{\Longleftarrow}$ Рассмотрим открытое покрытие. По теореме Линеделёфа, из него можно выбрать счетное подпокрытие: $U_1, U_2, U_3, \ldots$.

Пусть нет конечного подпокрытия. Рассмотрим конечные поднаборы $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$. Никто из них не покрывает X, следовательно,

$$\forall n \in N \ \exists x_n \in X \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_n).$$

По секвенциальной компактности можем выбрать из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_k\}$. Пусть $y_k \to y$.

Так как $\{U_i\}$ — покрытие, $\exists j: \ y \in U_j$. Но с некоторого момента $y \notin U_j$, так как в каждом U_n только конечное число членов последовательности.

Значит это не предел!

□

1.18 Факторизация

Def 46. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство $X/\sim$ — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X.

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X.

1.18.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Def 47. Каноническая проекция X на $X/\sim$ или отображение факторизации — отображение

$$p : X \to X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 60. *Каноническая проекция непрерывна.*

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X.

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. *Следующие свойства наследуются факторпространством:*

- *Связность*

- *Линейная связность*
- *Компактность*
- *Сепарабельность*

1.18.2 Стягивание множества в точку

Def 48. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X:

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A, операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме 60)

1.18.3 Несвязное объединение

Def 49. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологий: A открыто в $X \sqcup Y \iff A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y.

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.18.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \to Y$ — непрерывное отображение.

Def 50. $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A: \ a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f.

Ex. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y, $A = \{x_0\}, f(x_{00} = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0).

Ex. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0,1]$.

Ex. Если склеить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, получилась **лента Мебиуса**.

Def 51. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство $X/\sim$ обозначается X/Γ или $\Gamma\backslash X$

Ex. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами.

Theorem 61. *Пусть $p : X \to X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \to Y$ переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X : \ x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \overline{f} : X/\sim \to Y : f = \overline{f} \circ p$.
2. $\overline{f}$ *непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.*

Доказательство.

- Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- $\boxed{\Longrightarrow}$ По непрерывности композиции, если $\overline{f}$ непрерывна, то f тоже.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 62 (Склеивание концов отрезка)**.** $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0, 1] \to S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$. Соответствующее $\overline{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$ — биекция. По теореме 57 $\overline{f}$ непрерывно. $[0, 1]/\{0, 1\}$ — компактно, S^t — хаусдорфово, следовательно, $\overline{f}$ — гомеоморфизм. □

Theorem 63. *X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \to Y$ – непрерывно и сюрьективно. Тогда*

$$X/\sim \cong Y,$$

где $\sim$ определяется условием

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Theorem 64. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме 59 достаточно построить сюрьективный гомеоморфизм $f : B \to S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x|\right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}_{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

□

1.19 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 52. n-мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число n — размерность многообразия.

Theorem 65. *При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m.

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n-мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

Def 53. n-мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M.

Def 54. Поверхность – двумерное многообразие.

Ex. D^n — многообразие с краем, S^{n-1} — его край.

Theorem 66. *$\mathbb{R}^n_+$ не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.*

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) — тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) — бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ($abab$) — проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

Theorem 67.

- *Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).*
- *Пусть в m-угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.*

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать из между собой.

1.19.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 68 (без доказательства)**.** *Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда*

1. *M – компактно, без края $\Longrightarrow M \cong S^1$*
2. *M – некомпактно, без края $\Longrightarrow M \cong \mathbb{R}$*
3. *M – компактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0, 1]$*
4. *M – некомпактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0, +\infty)$*

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.19.2 Сферы

Def 55. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2, вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 56. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – $\mathbb{RP}^2$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.19.3 Классификация поверхностей

Statement. *Поверхность — связное двумерное многообразие.*

Theorem 69.

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.*

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.19.4 Эйлерова характеристика

Def 57. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенныам связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 70. *Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi($бутылки Клейна$) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi($сферы с n дырками$) = 2 - n, \chi($тора с дыркой$) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- $\chi($сферы с p ручками$) = 2 - 2p$
- $\chi($сферы с q пленками$) = 2 - q$