

Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

20 декабря 2019 г.

Оглавление

1	Общая топология	5
1.1	Метрические пространства	5
1.2	Топологические пространства	5
1.3	Внутренность, замыкание, граница	5
1.4	Подпространства	5
1.5	Сравнение топологий	5
1.6	База топологии	5
1.7	Произведение топологических пространств	5
1.7.1	Произведение параметризуемых метрических пространств	6
1.8	Непрерывность	8
1.8.1	Непрерывность в метрических пространствах	9
1.8.2	Липшицевы отображения	9
1.8.3	Композиция непрерывных отображений	10
1.9	Аксиомы	10
1.9.1	Аксиомы счетности	10
1.9.2	Сепарабельность	11
1.10	Аксиомы отделимости	11
1.10.1	Факторизация	12
1.11	Многообразия	13
1.11.1	Классификация многообразий	14
1.11.2	Эйлерова характеристика	15

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.

Топология произведения на $X \times Y$ - топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией - произведение X и Y .

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y , а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ - замкнуто, $B \cap Y$ - замкнуто. Тогда $A \times B$ - замкнуто в $X \times Y$.

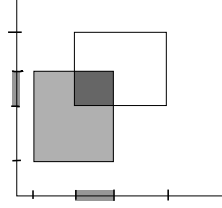


Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y , а $X \setminus A$ открыто в X . Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. \square

Practice. Для любых $A \subset X$, $B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \stackrel{?}{\geq} d(p, p'') \stackrel{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

A это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y .

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.

$$\exists A \subset X, B \subset Y \text{ - открытые, } (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

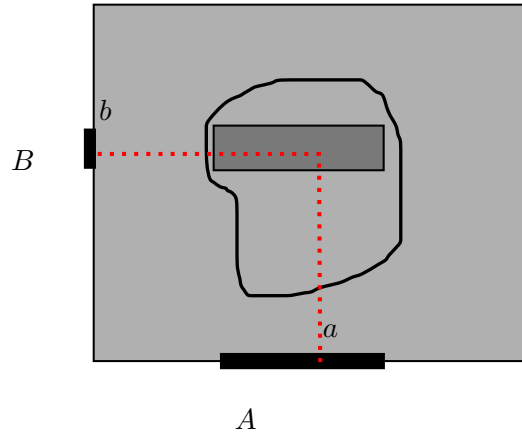


Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement (Согласование метрик).

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (x'', y'')) &\stackrel{?}{\leq} d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) \\ \stackrel{\parallel}{\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2}} &\leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \end{aligned}$$

□

Def 2. Бесконечное произведение пространств

$\{X_i\}_{i \in I}$ - семейство топологических пространств. Ω_i - топология.

Множество $\prod_{i \in I} X_i = \{\{x_i\}_{i \in I} \mid \forall i, x_i \in X_i\}$.

Тогда рассмотрим отображение $p_i : X \mapsto X_i$ - проекция.

Тихоновская топология на X - топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U)\}_{i \in I, U \in \Omega_i}.$$

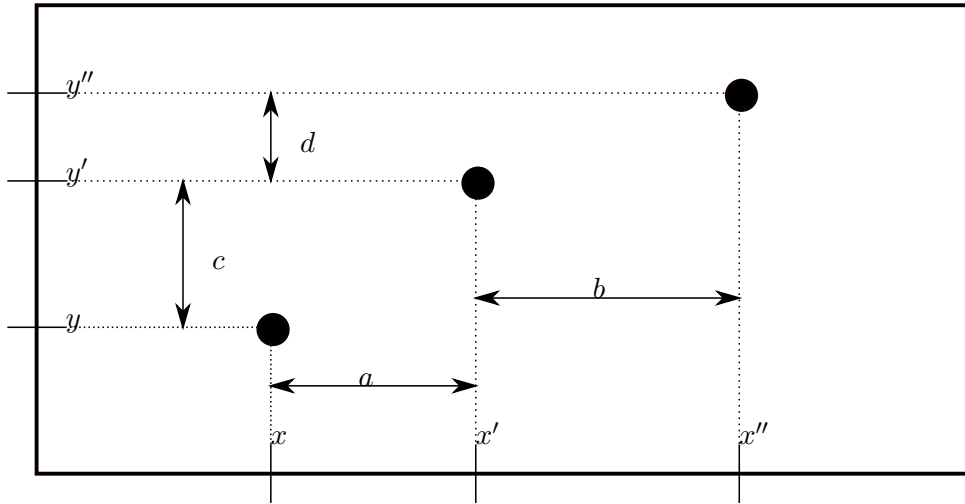


Рис. 1.3: Неравенство треугольника

- Tasks.*
1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$.
 2. Канторовское множество $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \rightarrow Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

- Exs.**
1. Тожественное отображение непрерывно. $id_X : X \rightarrow X$
 2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
 3. Если X - дискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.
 4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \rightarrow Y, x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

Theorem 4. f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. \Rightarrow)

$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

\Leftarrow)

$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$ - внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. X, Y - метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$.

Тогда f - непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. \Rightarrow) Так как f - непрерывна в точке x , существует окрестность $V \ni x : f(V) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

\Leftarrow) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
 $\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y - метрические пространства.

$f : X \rightarrow Y$ - липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C - константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C \delta = \varepsilon.$$

□

Ех. X - метрика, $x_0 \in X$. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ех. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

1.9 Аксиомы

1.9.1 Аксиомы счетности

Def 6. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 7. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сечности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 8. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 7. $2AC \Rightarrow 1AC$

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 8. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

Statement. \mathbb{R} имеет счетную базу.

Theorem 9. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 10. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. \mathbb{R}^n имеет счетную базу.

Practice. 1АС тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 9. Топологическое свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1АС, 2АС – наследственные свойства.

Theorem 11. *Линделёф Если X удовлетворяет $2AC$, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in \mathcal{A}$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.9.2 Сепарабельность

Def 10. Всюду плотное множество – множество, замыкание которого есть все пространство.

Def 11. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R}

Def 12. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. X, Y – сепарабельны $\implies X \times Y$ тоже.

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 12.

- Счетная база \implies сепарабельность.
- Для метризуемых пространств сепарабельность \implies счетная база

1.10 Аксиомы отделимости

Def 13. X обладает свойством T_1 , если для любых различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U , что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 13. $T_1 \iff$ любая точка является замкнутым множеством.

Def 14. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x, V \ni y$: $U \cap V = \emptyset$.

Def 15. X хаусдорфово \iff Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 16. X – регулярно, если

- обладает T_1
 - \forall замкнутого $A \subset X \forall x \in X \setminus A \exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$
- Другое название T_3 -пространство

Def 17. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \emptyset) \exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$

Другое название T_4 -пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.

Нормальность не наследственная.

Def 18. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.

$f : X \rightarrow Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единицу на B . □

Lemma (Урысон). X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1] : f|_A = 0 \wedge f|_B = 1$

1.10.1 Факторизация

Ех. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны \vec{AB} и \vec{DC} по аффинной биекции между ними, сохраняющей отнесенное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ех. Если склеить \vec{AB} и \vec{CD} , получи **лента Мебиуса**.

Def 19. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $Homeo(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Фактор пространство X/\sim обозначается X/F или $X \setminus F$

Theorem 14. Пусть $p : X \rightarrow X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \rightarrow Y$ переводит эквивалентные точки в равные:

$$\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : f = \bar{f} \circ p$.
2. \bar{f} непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.

Доказательство. 1. Определим $\bar{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$

2. По непрерывности композиции, если \bar{f} непрерывна, то f тоже.

3. В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 15. $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Theorem 16. X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \rightarrow Y$ – непрерывно и сюръективно. Тогда

$$X/\sim \cong Y.$$

Где \sim – эквивалентность.

Theorem 17. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме 16 достаточно построить сюръективный гомеоморфизм $f : B \rightarrow S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое

$$f(x) = \left(\frac{1}{|x|} \sin(|x|) \cos(|x|), f(0) = (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, 1) \right).$$

□

1.11 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup 0$

Def 20. n -мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки x в M есть окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n .

Число n – размерность многообразия.

Theorem 18. При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны.

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m .

Ех. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ех. Любое открытое подмножество \mathbb{R}^n или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ех. Сфера S^n – n -мерное многообразие

Ех. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$.

Def 21. n -мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо \mathbb{R}^n , либо \mathbb{R}_+^n .

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются краем M и обозначаются ∂M .

Def 22. Поверхность – двумерное многообразие.

Theorem 19.

- Пусть дан правильный $2n$ угольник D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие.
- Пусть дан m -угольник некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получается двумерное многообразие.

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать их между собой.

1.11.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 20. Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда

1. M – компактно, без края $\implies M \cong S^1$
2. M – некомпактно, без края $\implies M \cong \mathbb{R}$
3. M –

Def 23. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сфер S^2 , вырезаем p непересекающихся дырок D^2 . Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 24. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Cathf с jlyjq пленкой – $\mathbb{R}P^3$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

Statement. Поверхность – связное двумерное многообразие.

Theorem 21. Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.

- Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.
- Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

1.11.2 Эйлерова характеристика

Def 25. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 22. Эйлерова характеристика – топологический инвариант.

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n, \chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- $\chi(\text{сферы с } p \text{ ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с } q \text{ пленками}) = 2 - q$