Конспект по топологии
I семестр
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

20 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

Def 1. Метрическое пространство — пара (X, d), где X — множество (точек), а $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ — расстояние, такая что $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

Note. Вместо буквы d используют $\rho(x, y)$ или $|xy|$.

Property (Неравенство многоугольника).

$$\forall x_1, \dots x_n \in X : \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \geqslant d(x_1, x_n).$$

Exs.

1. Прямая $\mathbb{R}$,
$$d(x, y) = |x - y|$$
2. Плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,
$$d\big((x, y), (u, v)\big) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$
3. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$,
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
4. Подпространство.

   Пусть $X = (X, d)$ — метрическое пространство. $Y \subset X$, $(Y, d\restriction_{Y \times Y})$ — подпространство.
5. Единичная метрика.

   X любое множество, $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

6. Нестандартные метрики на плоскости:

$$d_1\big((x,y),(u,v)\big) = |x-u| + |y-v|$$
$$d_\infty\big((x,y),(u,v)\big) = \max\{|x-u|, |y-v|\}$$

7. Расстояние в графе

Def 2. X — метрическое пространство, $x \in X, r > 0$.

Открытый шар с центром в x и радиусом r

$$B_r(x) = B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r

$$\overline{B}_r(x) = B[x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}.$$

Сфера с центром в точке x и радиусом r

$$S_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}.$$

Exs.

1. $X = \mathbb{R},\ B_r(x) = (x-r, x+r)$
2. $X = \mathbb{R}^2$
3. $X = (\mathbb{R}^2, d_1)$
4. $X = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$

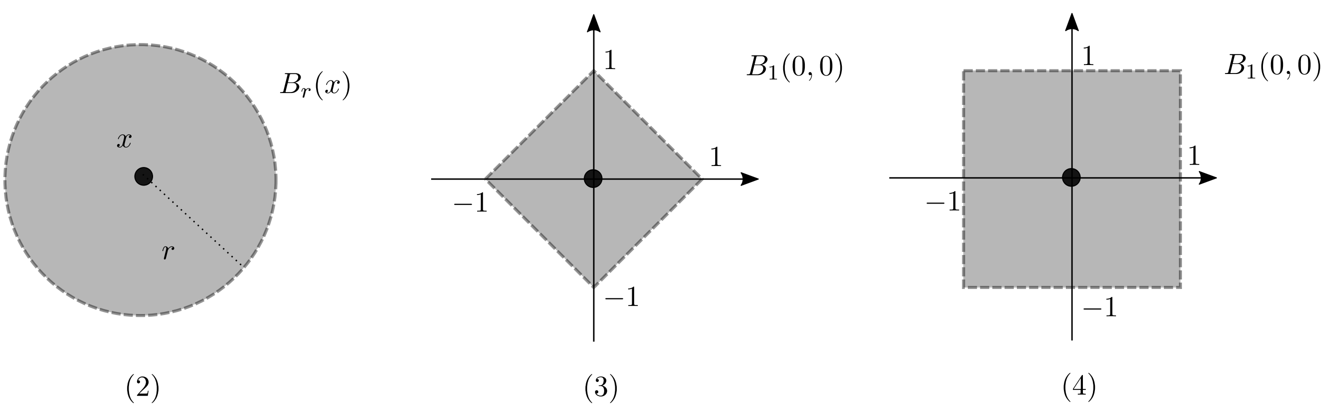


Рис. 1.1: Второй, третий и четвертый примеры

Def 3. Множество $A \subset X$ открыто, если $\forall x \in A\ \exists r > 0:\ B_r(x) \subset A$.

Exs.

1. Квадрат без границы на плоскости открыт, а квадрат с границей — нет.

2. Интервалы в $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$, (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ — открыты, остальные — нет.

3. X с единичной метрикой — все множества открыты.

4. $\varnothing$ всегда открыто

5. Все пространство тоже всегда открыто

Note. Открытость — относительное свойство, зависит от пространства.

Ex. $[0,1)$ не открыто на прямой, но открыто на $[0,+\infty)$

Theorem 1. *Открытые шары открыты.*

Theorem 2. *Объединение любого набора открытых множеств открыто.*

Доказательство. $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство открытых множеств. Рассмотрим

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Пусть $x \in A$. Тогда $\exists i \in I :\ x \in A_i$. Так как A_i открыто, $\exists r > 0 :\ B_r(x) \subset A_i \implies B_r(x) \subset A$. Следовательно, A открыто. □

Theorem 3. *Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто.*

Доказательство. Докажем для двух. Пусть A, B открыты. Рассмотрим $x \in A \cap B$.

$$\left.\begin{matrix} \exists r_1 > 0 : B_{r_1} \subset A \\ \exists r_2 > 0 : B_{r_2} \subset B \end{matrix}\right\} \implies B_{\min(r_1,r_2)} \subset A \cap B.$$

□

Practice. Открытые множества на прямой представимы в виде дизъюнктного объединения открытых интервалов, причем не более чем счетного числа.

1.2 Топологические пространства

Def 4. X — любое множество.
Топологическая структура (топология) на множестве X — множество $\Omega \subset 2^X$ такая, что:

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. Объединение любого набора множеств из Ω принадлежит Ω
$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \Omega : \bigcup_{i \in I} \{A_i\} \in \Omega$$
.
3. Пересечение конечного числа принадлежащих Ω множеств тоже принадлежит Ω:
$$\forall A_1, \dots A_n \in \Omega : \bigcap_{i \in [1,n]} \in \Omega.$$

Топологическое пространство — (X, Ω), X — множество, Ω — топологическая структура, элементы Ω — открытые множества данного топологического пространства.

Exs.

1. Метрические пространства (топология задана метрикой)
2. Дискретная топология $\Omega = 2^X$
3. Антидискретная топология $\Omega = \{\varnothing, X\}$

Def 5. Топологическое пространство (X, Ω) метризуемо, если существует метрика на X, задающая топологию Ω.

Def 6. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если $X \setminus A \in \Omega$.

Exs.

1. $X = \mathbb{R}$. $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ — замкнуты.
2. Дискретное пространство — все множества замкнуты.
3. Антидискретное пространство — замкнуты только $\varnothing$ и X.

Practice. Замкнутые шары замкнуты.

Theorem 4.

1. *$\varnothing$, X замкнуты*
2. *Пересечение любых наборов замкнутых множеств замкнуто*
3. *Конечное объединение замкнутых множеств замкнуто*

Property. (X, Ω) *— топологическое пространство, A открыто, B замкнуто.*

1. $A \setminus B$ *открыто*
2. $B \setminus A$ *замкнуто*

1.3 Внутренность, замыкание, граница

Designation. (X, Ω) — топологическое пространство, $A \subset X$.

1.3.1 Внутренность множества. Внутренние точки

Def 7. Внутренность множества A ($\mathrm{Int} A, A^\circ$) — объединение всех открытых множеств, содержащихся в A.

Property.

1. $\mathrm{Int} A$ *— наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A.*
2. *A открыто тогда и только тогда, когда* $A = \mathrm{Int} A$.

Def 8. Окрестность точки $x \in X$ — любое открытое множество, содержащее x.

Def 9. Точка $x \in A$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность $U \ni x$ такая, что $U \subset A$.

Theorem 5. *Внутренность множества — множество внутренних точек.*

Corollary. A открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.

1.3.2 Замыкание, граница, точки прикосновения

Def 10. Замыкание множества A ($\mathrm{Cl} A, \overline{A}$) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Property.

1. $\mathrm{Cl} A$ *— наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.*
2. *A замкнуто тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Cl} A = A$.
3. $\mathrm{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int} A$
$\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl} A$

Def 11. Граница множества A ($\mathrm{Fr} A,\ \partial A$) это $\mathrm{Cl} A \setminus \mathrm{Int} A$.

Property.

1. $\mathrm{Fr} A$ *замкнуто.*

2. $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$
3. *A замкнуто тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fr}A \subset A$.
4. *A открыто тогда и только тогда, когда* $A \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$.
5. $\mathrm{Cl}A = \mathrm{Int}A \sqcup \mathrm{Fr}A$

Statement. $X = \mathrm{Int}A \sqcup IntX \setminus A \sqcup \mathrm{Fr}A$

Def 12. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения, если для любой окрестности $U \ni x:\ U \cap A \neq \varnothing$.

Theorem 6. *Замыкание множества A — множество всех точек прикосновения.*

Доказательство. Перейдем к дополнениям.

$$X \setminus \mathrm{Cl}A \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid x \text{ — не точка прикосновения}\}.$$

$$\mathrm{Int}(X \setminus A) \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid \exists \text{ окрестность } U \ni x,\ U \cap A = \varnothing\}.$$

$U \cap A = \varnothing \Longleftrightarrow U \subset X \setminus A \Longleftrightarrow x$ — внутренняя точка $X \setminus A$. □

1.3.3 Изолированные и предельные точки

Def 13. Точка $x \in X$ называется внешней точкой множества A, если x — внутренняя точка $X \setminus A$. Внешность A — внутренность $X \setminus A$.

Def 14. $x \in X$ — изолированная точка множества A, если для существует окрестность $U \ni x : A \cap U = \{x\}$.

Def 15. $x \in X$ — предельная точка множества A, если для любой окрестности $U \ni x : (A \cap U) \setminus \{x\} \neq \varnothing$.

Property.

1. $\mathrm{Cl}A = \{$*изолированные точки*$\} \sqcup \{$*предельные точки*$\}$
2. *A замкнуто тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.*

Practice.

1. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$
2. $\mathrm{Int}(A \cup B)$ не всегда равно $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$
3. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$
4. $\mathrm{Cl}(A \cap B)$ не всегда равно $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

1.4 Подпространства

Designation. $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство, $Y, Z \subset X$.

Def 16. Индуцирванная (относительная) топология на Y — $\Omega_Y = \{Y \cap U \mid U \in \Omega\}$.
Y с такой топологией называется подпространством X: (Y, Ω_Y) — подпространство X.

Theorem 7. *Ω_Y — топология на Y.*

Доказательство. Просто проверяем определение. □

Theorem 8. *Определение согласовано с метрическим. Если $X = (X, d)$ — метрическое пространство, Ω — топология, заданная метрикой d, то Ω_Y — топология, заданная $d\restriction_{Y\times Y}$.*

Доказательство.

$\boxed{\subset}$ $A \in \Omega_Y \Longrightarrow A = Y \cap U,\ U \in \Omega \Longrightarrow \forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r^X(x) \subset U$.
$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y$
Тогда $\forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A \Longrightarrow A$ открыто относительно $d\restriction_{Y\times Y}$.

$\boxed{\supset}$ A открыто относительно $d\restriction_{Y\times Y} \Longrightarrow \forall x \in A\ \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A$.

$$U := \bigcup_{x\in A} B_r^X(x) \in \Omega.$$

$$Y \cap U = \bigcup_{x\in A} (Y \cap B_r^X(x)) = \bigcup_{x\in A} B_r^Y(x) = A \Longrightarrow A \in \Omega_Y$$

□

Theorem 9. *$\{B \mid B$ замкнуто относительно $\Omega_Y\} = \{A \cap Y \mid A$ замкнуто относительно $\Omega\}$*

Доказательство. $B \subset Y$ замкнуто в $Y \iff Y \setminus B \in \Omega_Y \iff \exists U \in \Omega : Y \setminus B = Y \cap U \iff \exists U \in \Omega : B = Y \cap (X \setminus U)$ — замкнуто в X. □

Property. $A \subset Y$

1. *Если A открыто в X, то A открыто в Y.*
2. *Если Y открыто в X, то*
$$A \in \Omega_Y \Longrightarrow A \in \Omega.$$
3. *Если A замкнуто в X, то A замкнуто в Y.*
4. *Если Y замкнуто в X, то*
$$A \text{ замкнуто в } Y \Longrightarrow A \text{ замкнуто в } X.$$

Practice. $A \subset Y$

1. $\mathrm{Cl}_Y A = \mathrm{Cl} A \cap Y$
2. $\mathrm{Int}_Y A$ не всегда равно $\mathrm{Int} A \cap Y$

1.5 Сравнение топологий

Designation. X — множество, $\Omega_1, \Omega_2 \subset 2^X$ — топологические структуры.

Def 17. Если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то Ω_1 слабее (грубее), чем Ω_2, а Ω_2 сильнее (тоньше), чем Ω_1.

Theorem 10. *X — множество, d_1, d_2 — метрики на X. d_1, d_2 задают топологии Ω_1, Ω_2. Тогда эквивалентны:*

- *Ω_1 сильнее Ω_2*
- *В любом шаре метрики d_2 содержится шар метрики d_1 с тем же центром.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ По определению первое утверждение равносильно тому, что $\Omega_2 \subset \Omega_2 \Longleftrightarrow \forall A \in \Omega_2 : A \in \Omega_1$.

Пусть $B(x)$ — открытый шар в метрике d_2.

$$B(x) \in \Omega_2 \Longrightarrow B(x) \in \Omega_1 \Longrightarrow x \text{ — внутренняя точка } X.$$

Следовательно, существует шар метрики d_1, содержащий $B(x)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ $A \in \Omega_2$

$$\forall x \in A : \exists B \text{ — открытый шар в метрике } d_2 \Longrightarrow \exists B' \subset B \text{ — открытый в метрике } d_1.$$

□

Corollary. d_1, d_2 — метрики на X.

$$\exists c > 0 : d_2 \leqslant cd_1 \quad \Big(\forall x, y \in X : d_2(x, y) = cd_1(x, y)\Big).$$

Тогда d_2 слабее d_1 (Ω_2 слабее Ω_1).

Доказательство. $d_2 \leqslant cd_1 \Longrightarrow B^{d_1}_{\frac{r}{c}}(x) \subset B^{d_2}_r(x)$. Выполнено второе условие теоремы **??**. Значит, d_2 слабее d_1. □

Def 18. d_1 и d_2 называются **липшицево эквивалентными**, если $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 d_2 \leqslant d_1 \leqslant c_2 d_2$.

Corollary. Липшициво эквивалентные метрики задают одинаковые топологии.

Ex. $\mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$
$$d_\infty(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

Метрики d_1, d_2, d_∞ задают одинаковые топологии так как:

$$d_\infty \leqslant d_2 \leqslant \sqrt{n} d_\infty$$
$$d_\infty \leqslant d_1 \leqslant n d_\infty$$

1.6 База топологии

Designation. X — множество, Ω — топология на X.

Def 19. $\Sigma \subset \Omega$ — база топологии Ω, если $\forall A \in \Omega$ представляется в виде объединения элементов Σ.

Ex. В метрическом пространстве базой будет множество всех открытых шаров.

Ex. На $\mathbb{R}^1$ — открытые интервалы с рациональными концами.

Statement. *Σ — база Ω тогда и только тогда, когда*

$$\forall U \in \Omega \ \forall x \in U \ \exists V \in \Sigma : x \in V \subset U.$$

Theorem 11. *X — множество, $\Sigma \subset 2^X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует такая топология, что Σ — база Ω*
2. *$\forall A, B \in \Sigma : A \cap B$ — представимы в виде объединения элементов Σ*

и X представимо в виде объединения элементов Σ.

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Очевидно.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Пусть

$$\Omega = \{\text{объединение любых наборов элементов } \Sigma\}.$$

Аксиомы из определения топологии выполняются, следовательно, Ω — топология на X.

□

Def 20. $\Lambda \subset \Omega$ — предбаза Ω, если Ω является наименьшей по включению топологией, содержащей Λ.

Theorem 12. *Для любого $\Lambda \subset 2^X$ существует топология Ω такая, что Λ — ее предбаза.*
База Ω — все возможные конечные пересечения элементов Λ и все пространство.

Def 21. $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство, $x \in X$. $\Sigma_x \subset \Omega$ — набор открытых множеств, содержащих x.
Σ_x — база окрестности x, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x : \exists \text{ окрестность } V \in \Sigma_x : x \in V \subset U.$$

Ex. Шары с центром в точке являются базой окрестности в ней.

1.7 Произведение топологических пространств

Def 22. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 13. *Определение* **??** *корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

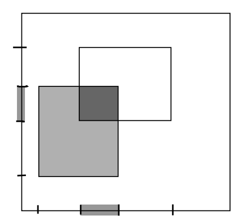


Рис. 1.2: Пересечение

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 14. *$A \cap X$ – замкнуто, $B \cap Y$ – замкнуто. Тогда $A \times B$ – замкнуто в $X \times Y$.*

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X,\ B \subset Y$:

1. $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$
2. $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 15.

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x,y),(x',y')) = 0 \iff d_X(x,x') = d_Y(y,y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p,p') + d(p',p'') \overset{?}{\geqslant} d(p,p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x,x'').$$

$$d_X(x,x') + d_X(x',x'') \geqslant d_X(x,x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X\times Y}$

$$B_r((x,y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X\times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X\times Y}$.

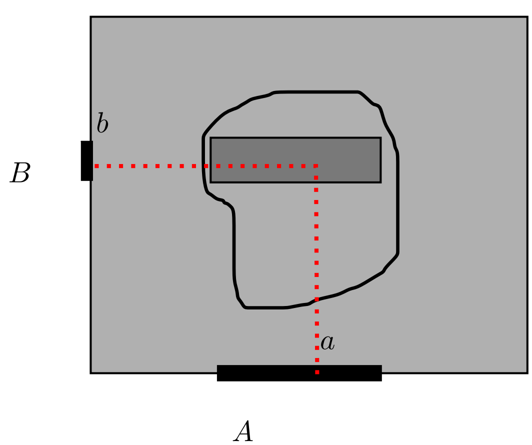


Рис. 1.3: Произведение метрических пространств

$$\exists A \subset X,\ B \subset Y\text{- открытые}, (x,y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X\times Y}((x,y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leqslant} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leqslant & \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

□

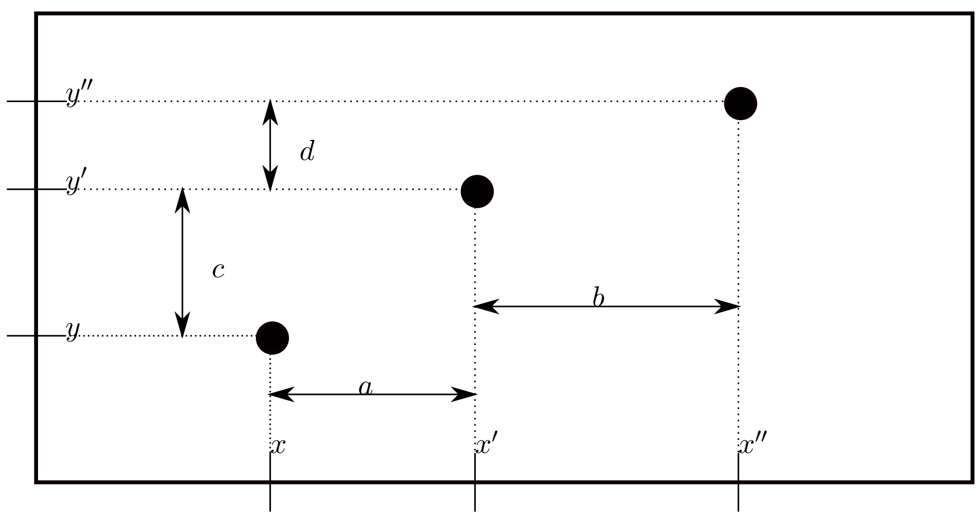


Рис. 1.4: Неравенство треугольника

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i.

Def 23 (Тихоновская топология)**.** Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \Omega_i\right\}.$$

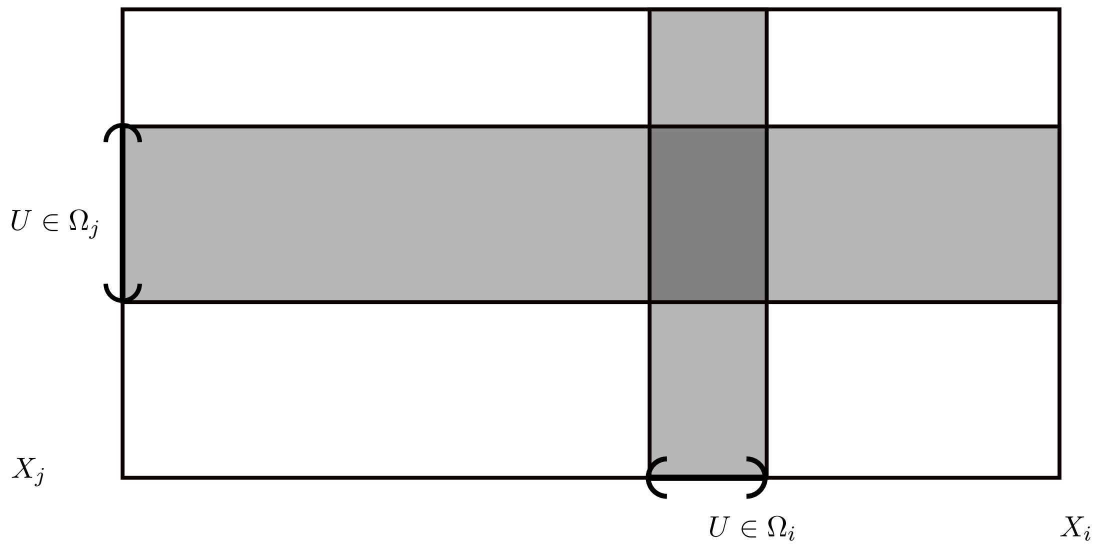


Рис. 1.5: Тихоновская топология

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0,1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 24. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 25. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0)\ \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

Theorem 16. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $U \subset Y$ открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(U)$ внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x — внутренняя точка $f^{-1}(U)$.

□

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 17. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y,\ x \in X$.*
Тогда f — непрерывна в точка x тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \big(\forall x' \in X,\ d(x, x') < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon\big).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U :$
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$.

□

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 26. X, Y – метрические пространства.
$f : X \to Y$ — липшицево, если $\exists c > 0\ \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leqslant c d_X(x, x')$.

Designation. c — константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leqslant C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leqslant d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

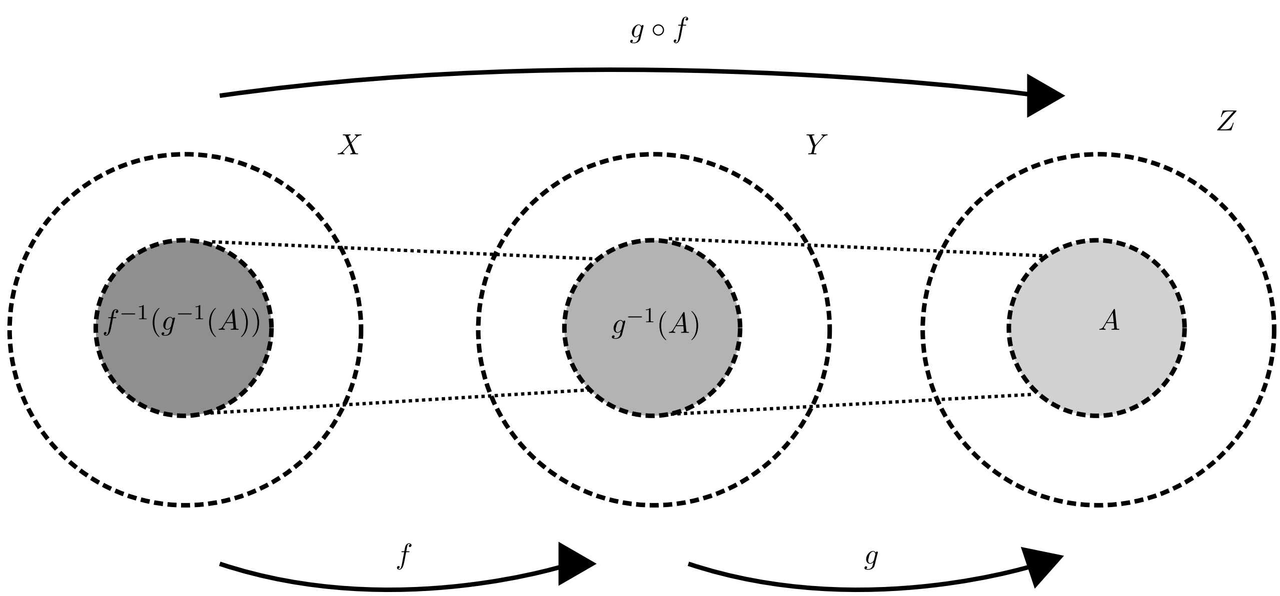


Рис. 1.6: Композиция отображений

Theorem 18. *X, Y, Z — топологические пространства. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $g \circ f : X \to Z$. f непрерывно в X, g непрерывно в $f(X)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в X.*

Note. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Несложно проверить равенство $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Доказательство. Используя то, что $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, понимаем, что если A открыто в Z, то его прообраз в Y – $g^{-1}(A)$ открыт, а прообраз $g^{-1}(A)$ в X открыт в X. □

Theorem 19. *$f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.*

Ex. $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subset X : f(\mathrm{Cl} A) \subset \mathrm{Cl} f(A),$$

что равносильно

$$\forall A \subset X : f(\mathrm{Int} A) \subset \mathrm{Int} f(A).$$

1.8.4 Предел отображения

Def 27. Предел отображения $f : X \setminus x_0 \to Y$ в точке x_0 равен $y_0 \in Y$ при $x \to x_0$, если $\hat{f} : X \to Y$, определенная равенством

$$\begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases},$$

непрерывна в точке x_0.

Ex. Непрерывность в $\pm\infty$: $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, окрестности $\pm\infty$ — лучи, окрестности остальных — как раньше.

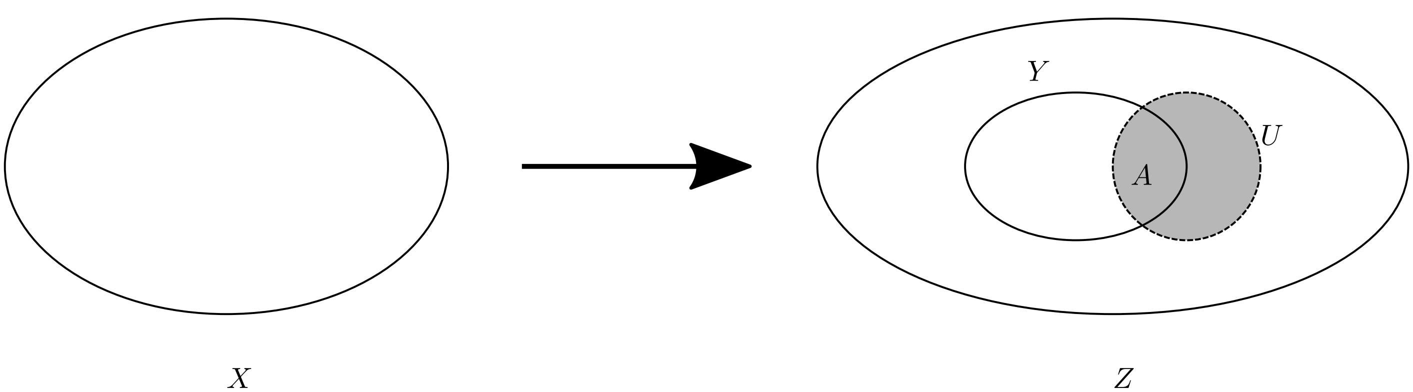
1.8.5 Непрерывность и пространства

Theorem 20. *$Y \subset X$. Включение $\mathrm{in} : Y \to X,\ \mathrm{in}(y) = y \quad \forall y \in Y$ непрерывно.*

Theorem 21. *$f : X \to Z,\ Y \subset X$. Если f непрерывно, то $f\restriction_Y$ непрерывно.*

Доказательство. $f\restriction_Y = f \circ \mathrm{in}$ — композиция непрерывных непрерывна. □

Theorem 22. *$Y \subset Z,\ f : X \to Y$. f непрерывно тогда и только тогда, когда $\hat{f} = \mathrm{in}_{Y \to Z} \circ f$ непрерывно.*



Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Композиция непрерывных непрерывна.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Рассмотрим открытое в Y множество A.

$$A = Y \cap U, \qquad \text{где } U \text{ открыто в } Z$$

$$f^{-1}(A) = \hat{f}^{-1}(A) = \hat{f}^{-1}(U).$$

$\hat{f}^{-1}(U)$ открыто в X. Следовательно, f непрерывно.

□

1.8.6 Отображения в произведение

Def 28 (Общий вид отображений в произведение)**.** Любое отображение $f : Z \to X \times Y$ имеет вид $f = (f_1, f_2) : f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \quad \forall z \in Z$. $f_1 : Z \to X$ и $f_2 : Z \to Y$ — компоненты.
В обратную сторону: любая пара f_1, f_2 задаем $f : Z \to X \times Y$.

Def 29. Пусть $f : X \to \prod_{i \in I} X_i$. Его компоненты — композиции с проекциями:

$$f_i = p_i \circ f, \ f_i : Z \to X_i \quad \forall i \in I.$$

Theorem 23. *$X = \prod X_i$ (тихоновское произведение). Z — топологическое пространство, $f : Z \to X$, $f_i = p_i \circ f$ — компоненты отображения. f непрерывно тогда и только тогда, когда f_i непрерывно для всех i.*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ $f_i = p_i \circ f$ — композиция непрерывных непрерывна.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Проверим, что все прообразы предбазы открыты (из этого будет следовать, что и прообразы всех открытых открыты). Пусть U из предбазы.

$$U = p_i^{-1}(V_i), \quad i \in I \wedge V_i \in \Omega_i.$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(V_i) = f_i^{-1}(V_i).$$

А $f_i^{-1}(V_i)$ открыто, так как f_i непрерывно.

□

1.8.7 Отображения из произведения

Designation. $f : X \times Y \to Z, \ f(x, y) \in Z \qquad \forall x \in X, y \in Y.$

Ex. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

По x, по y непрерывно, потому что просто $|f_y(x)| \leqslant 1$. Но при $x = y \neq 0$, $f(a, a) = 1$, при $x = y = 0$, $f(0, 0) = 0$, следовательно, непрерывности нет.

Theorem 24.
$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x+y \\ f(x,y) = x-y \\ f(x,y) = xy \end{array}\right\} \text{ *непрерывны из* } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ *в* } \mathbb{R}.$$

Доказательство. Снабдим $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ стандартной метрикой. Проверим непрерывность в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Сумма.
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{2} : \big((x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \Longrightarrow |x - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta\big).$$
Тогда
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |(x+y) - x_0 - y_0| \leqslant |x - x_0| + |y - y_0| < 2\delta < \varepsilon.$$

2. Разность. Аналогично.

3. Произведение.
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M+1}, 1\right\}, \quad M = \max\{|x_0|, |y_0|\}.$$
Если (x,y) лежит в шаре B_δ, то $x = x_0 + a,\ y = y_0 + b, \qquad |a|, |b| < \delta.$
$$f(x,y) = (x_0+a)(y_0+b) = x_0y_0 + ay_0 + by_0 + ab.$$
Тогда (используем, что $\delta \leqslant 1$)
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |ay_0 + bx_0 + ab| < \delta M + \delta M + \delta^2 \leqslant (2M+1)\delta \leqslant \varepsilon.$$

□

Corollary. Пусть X — топологическое пространство. Если $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны, то $f+g, f-g, fg$ тоже непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $F : X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : F(x) = (f(x), g(x))$. F непрерывно по теореме **??**. Тогда $f+g, f-g, fg$ — композиции F и суммы, разности, произведения соответственно. □

Corollary. X — топологическое пространство. Если $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R}$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна на области определения, то есть $\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$.

Доказательство. $g\restriction_{\{x\in X \mid g(x)\neq 0\}}$ непрерывна. Функция $\varphi : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{t}$ непрерывна. Тогда
$$\frac{1}{g} = \varphi \circ g\restriction_{\{g\neq 0\}} \text{ тоже непрерывно.}$$
Следовательно,
$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \text{ непрерывно.}$$

□

Corollary. Любая функция от n переменных, состоящая из элементарных операций, непрерывна на области определения.

Practice. X — топологическое пространство. $f, g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Тогда $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ тоже непрерывны.

1.9 Фундаментальные покрытия

Def 30. X — топологическое пространство. Покрытие X — Любое семейство подмножеств A_i:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

Покрытие $\{A_i\}$ называется открытым, если $\forall i \in I : A_i$ открыто.

Покрытие $\{A_i\}$ называется замкнутым, если $\forall i \in I : A_i$ замкнуто.

Покрытие $\{A_i\}$ называется конечным, если I конечно.

Покрытие $\{A_i\}$ называется локально конечным, если $\forall a \in X$ $\exists$ окрестность $U \ni x : \{i \mid U \cap A_i \neq \varnothing\}$ конечно.

Def 31. Покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$ называется фундаментальным, если

$$\forall U \subset X : \big(\forall i \in I : U \cap A_i \text{ открыто в } A_i \Longrightarrow U \text{ открыто в} X\big).$$

Theorem 25. *$\{A_i\}_{i \in I}$ — фундаментальное покрытие. $f : X \to Y$. Если $\forall i \in I : f\restriction_{A_i}$ непрерывно, то f непрерывно.*

Доказательство. Для любого отрытого $U \subset Y$ и любого $i \in I$: $(f\restriction_{A_i})^{-1}(U)$ открыто в A_i.

$$(f\restriction_{A_i})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_i.$$

Так как покрытие фундаментальное, из последнего утверждения следует, что $f^{-1}(U)$ открыто в X. □

Theorem 26. *Следующие виды покрытий фундаментальны:*

1. *открытые покрытия*
2. *конечные замкнутые покрытия*
3. *локально конечные замкнутые покрытия*

Доказательство.

1. Все A_i открыты. $U \subset X$.

$$\forall i \in I : U \cap A_i \text{ открыто в } A_i \Longrightarrow U \cap A_i \text{ открыто в } X.$$

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i) \text{ открыто в } X.$$

2. $A_1, \dots A_n$ замкнуто. $U \subset X$ Перейдем к дополнению. Докажем, что $V = X \setminus U$ замкнуто в X. $A_i \cap V$ замкнуто в A_i, следовательно, $A_i \cap V$ замкнуто в X.

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap A_i) \text{ замкнуто в } X.$$

Тогда $X \setminus V = U$ открыто в X.

3. Локально конечно $\implies V_x$ пересекаются с конечным числом A_i. Применим второй пункт, получим, что пересечение с U открыто в X. По первому пункту U открыто в X.

$\square$

1.10 Гомеоморфизм

Designation. X, Y — топологические пространства.

Def 32. Гомеоморфизм между X и Y — непрерывное биективное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f^{-1} : Y \to X$ тоже непрерывно.

Def 33. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. *Тождественное отображение — гомеоморфизм.*
2. *Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.*
3. *Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.*

Theorem 27. *Гомеоморфность — отношение эквивалентности.*

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y.
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \to S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f – биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1, f – непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке (1, 0).

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d : \ [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d : \ (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d : \ [a, b) \cong [c, d) \cong (c, d]$
- $\forall a, b : \ (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b : \ [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 28. *Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$*

Доказательство.

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \operatorname{tg} |\vec{x}| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

□

Designation.

D^n — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$
S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$

Theorem 29. $S^n \setminus \{\textit{точка}\} \cong \mathbb{R}^n$

Доказательство. Выделим последнюю координату и спроецируем точки на $\mathbb{R}^n$, где она равна нулю. □

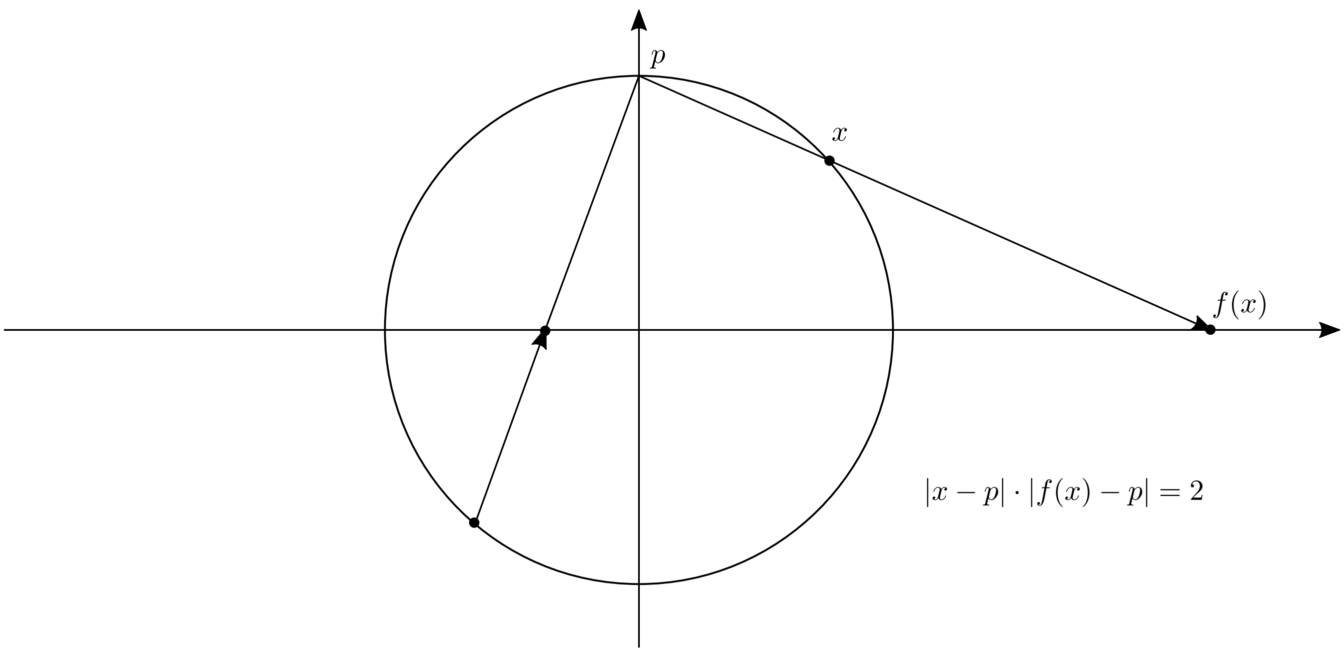


Рис. 1.7: Для $n = 1$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.11 Аксиомы

1.11.1 Аксиомы счетности

Def 34. $X = (X, \Omega)$. База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \ni x \; \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Здесь и далее под счетным множеством подразумевается не более чес счетное.

Def 35. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 36. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2AC), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 30. *2AC* $\Rightarrow$ *1AC*

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть

$$\Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\}.$$

Тогда Σ_x — база в точке. □

Statement. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 31. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 32. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 37. Топологические свойство — наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC — наследственные свойства.

Theorem 33 (Линделёф)**.** *Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in \Lambda$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.11.2 Сеперабельность

Def 38. Всюду плотное множество — множество, замыкание которого есть все пространство.

Statement. *Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно пересекается с любым непустым открытым множеством.*

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 39. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. X, Y – *сепарабельны* $\Longrightarrow X \times Y$ *тоже.*

Note. Сепарабельность — не наследственное свойство.

Theorem 34.

- *Счетная база* $\Longrightarrow$ *сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность* $\Longrightarrow$ *счетная база*

Доказательство.

- Рассмотрим множество, пересечение которого с каждым элементом базы состоит из одной точки. Оно счетно и пересекается с любым открытым, значит является всюду плотным.
- Рассмотрим всюду плотное множество $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\{B_r(x) \mid x \in A,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ — счетная база.

□

1.11.3 Аксиомы отделимости

Def 40. X обладает свойством T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Designation. Другое название: T_1-пространство.

Theorem 35. $T_1 \Longleftrightarrow$ *любая точка является замкнутым множеством.*

Def 41. X хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y :\ U \cap V = \varnothing$.

Designation. Другое название: T_2-пространство.

Designation. про такие окрестности U, V говорят, что они отделяют x и y друг от друга.

Note. Все метрические пространства хаусдорфовы.

Theorem 36. X *хаусдорфово* $\Longleftrightarrow$ *«диагональ»* $\Delta \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$ *замкнута в* $X \times X$

Def 42. X регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X$ $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U \land x \in V \land U \cap V = \varnothing$

Designation. Другое название: T_3-пространство.

Note (Переформулировка определения T_3). X регулярно тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X,\ \forall \text{ окрестности } U \ni x\ \exists \text{ окрестность } V \ni x:\ \mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Def 43. X нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \varnothing)$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \land U \cap V = \varnothing$

Designation. Другое название: T_4-пространство.

Note (Переформулировка определения T_4). X нормально тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X,\ \forall \text{ замкнутого } A \subset X \text{ и } \forall \text{ открытого } U \supset A\ \exists \text{ открытое } V:\ A \subset V \land \mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям. Нормальность не наследственна.

Theorem 37. *Все метрические пространства нормальны.*

Доказательство. (Хороший метод) $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. □

1.11.4 Лемма Урысона

Lemma (Урысон)**.** *X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$: $f\restriction_A = 0$ и $f\restriction_B = 1$*

Доказательство.

i. Построим открытые множества:

- $U_1 \coloneqq X \setminus B$
- U_0 — такое, что $A \subset U_0 \subset \mathrm{Cl}(U_0) \subset U_1$
- $U_{\frac{1}{2}}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_0) \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \mathrm{Cl}(U_{\frac{1}{2}}) \subset U_1$
- $U_{\frac{1}{4}}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_0) \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \mathrm{Cl}(U_{\frac{1}{4}}) \subset U_{\frac{1}{2}}$
- $U_{\frac{3}{4}}$ — такое, что $\mathrm{Cl}(U_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Cl}(U_{\frac{3}{4}} \subset U_1$

И так далее по индукции

- $\alpha = \frac{2k+1}{2^n}$ U_α — такое, что $\mathrm{Cl}(U_{\frac{k}{2^{n-1}}}) \subset U_\alpha \subset \mathrm{Cl}(U_\alpha) \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$

ii. Пусть S — множество двоично-рациональных чисел. В прошлом пункте построили семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in S \cap [0,1]}$ такое, что

$$\mathrm{Cl}(U_\alpha) \subset U_\beta, \qquad \forall \alpha < \beta \in S \cap [0,1] \tag{1.1}$$

Доопределим

$$\begin{cases} U_\alpha = \varnothing & \alpha < 0 \\ U_\alpha = X & a > 1 \end{cases}.$$

Теперь свойство **??** выполняется для всех $\alpha, \beta \in S$.

iii. Определим $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \inf\{\alpha \in S \mid x \in U_\alpha\}.$$

По построению $F(X) \subset [0,1]$, $f\restriction_A = 0$, $f\restriction_B = 1$.

iv. Докажем, что f непрерывна. Достаточно проверить, что $\{f < t\}$ и $\{f > t\}$ открыты для любого $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\{f < t\} \text{ открыто}}$

$$\begin{aligned} f(x) < t &\iff \inf\{\alpha \in S \mid x \in x \in U_\alpha\} < t \\ &\iff \exists \alpha \in S : \alpha < t,\ x \in U_\alpha \end{aligned}$$

Тогда $\{f < t\} = \bigcup_{\alpha < t} U_\alpha$. Это объединение открытых множеств.

$\boxed{\{f > t\} \text{ открыто}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf\{\alpha \in S \mid x \in U_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \notin U_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \notin \mathrm{Cl}(U_\alpha)\} && (\text{из } \mathbf{??}) \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \in V_\alpha\}, && \text{где } V_\alpha = X \setminus \mathrm{Cl}(U_\alpha) \end{aligned}$$

Аналогично прошлому шагу:

$$\begin{aligned} f(x) > t &\iff \sup\{\alpha \in S \mid x \in V_\alpha\} \\ &\iff \exists \alpha \in S : \alpha > t,\ x \in V_\alpha \end{aligned}$$

Значит $\{f > t\} = \bigcup_{\alpha > t} V_\alpha\}$.

□

1.12 Связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 44 (Связное топологическое пространство)**.** X связно, если:

его нельзя разбить на два непустых открытых множества;

его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;

не существует открыто-замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и X;

не существует сюрьективного непрерывного отображения $f : X \to \{0, 1\}$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- $\mathbb{Q}$ несвязно

1.12.1 Связные множества

Def 45. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связно как топологическое пространство с индуцированной топологий.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C, что $\mathrm{Cl}A \cap C = \varnothing \wedge \mathrm{Cl}C \cap B = \varnothing$.

- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V :\ U \cap V = \varnothing \wedge U \cap A \neq \varnothing \wedge V \cap A \neq \varnothing$.

- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. *Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.*

Связные множества на прямой

Statement. *Отрезок* $[0, 1]$ *связен.*

Theorem 38. *Для* $X \subset \mathbb{R}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) X *связно;*
(2) X *выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними);*
(3) X *— интервал, точка или пустое множество.*

1.12.2 Связность при отображении

Theorem 39. *X — связно, $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ связно.*

Theorem 40. *X связно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(x)$ содержит все числа между a и b.*

Доказательство. По теореме **??** $f(x)$ связно. Тогда по определению $f(X)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. □

1.12.3 Компоненты связности

Def 46. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X.

Exs.

1. $[0,1] \cup [2,3]$ две компоненты связности — $[0,1]$ и $[2,3]$.

2. Компоненты связности $\mathbb{Q}$ — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств). *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда $A \coloneqq \bigcup_{i \in I} A_i$ тоже связно.*

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V.

$$\exists i, j \in I : \ U \cap A_i \neq \varnothing \wedge V \cap A_j \neq \varnothing.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Противоречие. □

Theorem 41. *Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:*

- *каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;*
- *различные компоненты связности не пересекаются.*

Доказательство.

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
   Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x. Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме **??** полученное множество связно, значит это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются.
   Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \varnothing$. По лемме **??** $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

□

Lemma. *Замыкание связного множества связно.*

Theorem 42. *Компоненты связности замкнуты.*

Доказательство. Следует из леммы **??**. □

Note. Компоненты связности не всегда открыты. Например, в $\mathbb{Q}$.

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.13 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 47. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0,1] \to X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 48. X **линейно связно**, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ex.

$$\forall\, p, q \in \mathbb{R}^n \;\exists\; \alpha(t) = (1-t)p + tq.$$

Theorem 43. *Если X линейно связно, $f : X \to Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ и $f(y)$ в $f(X)$. □

Lemma. *Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.*

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X \;\exists\; \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \to \exists \overline{\alpha} = \alpha(1-t))$

Транзитивность: если α идет из x в y, а β из x в z, построим путь γ, идущий из x в z:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

1.13.1 Линейная связность и связность

Theorem 44. *Если X линейно связно, то оно связно.*

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ex (Связность не влечет линейную связность)**.** Рассмотрим множество

$$X = \left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \middle| x > 0 \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность
   График линейно связен, значит он связен, а $(0,0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X, следовательно, X — связно.

2. $(0,0)$ не соединяется путем с другими точками
   Пусть α — путь с началом в $(0,0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0,1] \mid \alpha(t) = (0,0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

   Докажем, что T открыто в $[0,1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \ |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \ \alpha(t_1) \neq (0,0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

   $$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = \left(\frac{1}{2\pi n}, 1\right)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

   Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связен, $T = [0,1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0,0)$.

□

1.13.2 Компоненты линейной связности

Def 49. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 50 (переформулировка)**.** Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.13.3 Локальная линейная связность

Def 51. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x : \ V \subset U$.

Ex. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связано.

Theorem 45. *В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.*

Доказательство.

1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.
2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности.

□

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 46. *Интервалы* $[0, 1]$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{R}$, S^1 *попарно негомеоморфны.*

Theorem 47. $\mathbb{R}^2$ *не гомеоморфна никакому интервалу и* S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества $\mathbb{R}^2$ связно.

□

1.14 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 52. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны
2. Все антидискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. $\mathbb{R}$ некомпактно

Def 53. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A, $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X, $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

1.14.1 Лемма Гейне-Бореля

Theorem 48 (лемма Гейне-Бореля). *Отрезок* $[0,1]$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $l_0 = [0,1], \{U_i\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}$, $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i. Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i. Обозначим ее l_1.

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \ldots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0. Она лежит в каком-то U_{i_0}. С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n. Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i. Противоречие. □

1.14.2 Компактность замкнутого подмножества компакта и произведения компактов

Theorem 49. *Если X компактно и $A \subset X$ замкнуто, то A компактно.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X, выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. □

Theorem 50. *Если X, Y компактны, то $X \times Y$ компактно.*

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$.

2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x := \{x\} \times Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x

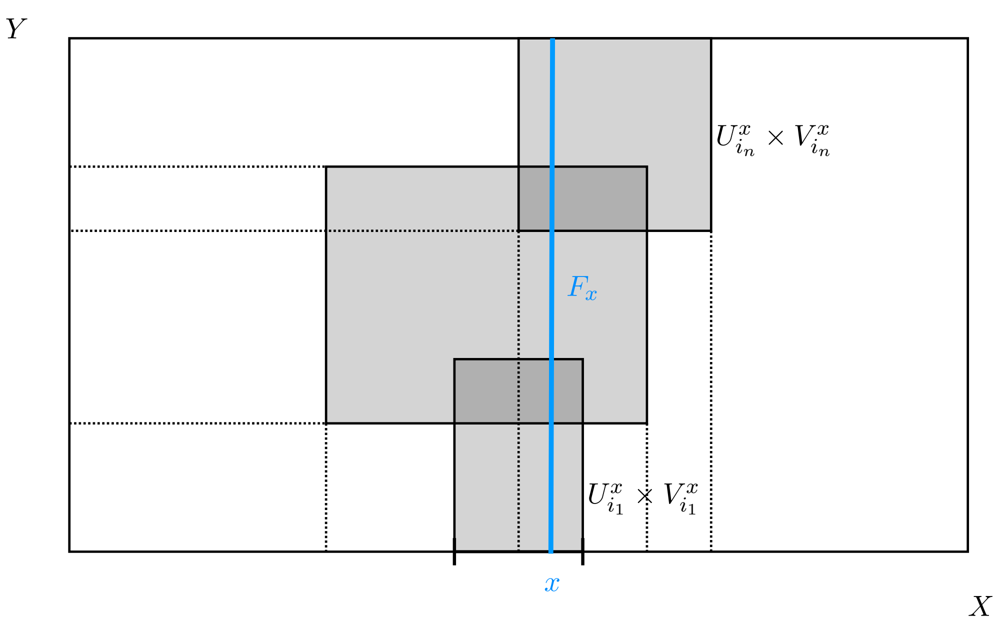


Рис. 1.8: Покрытие и гомеокопия

компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U^x_{i_1} \times V^x_{i_1}, \dots, U^x_{i_n} \times V^x_{i_n}$.

3. $U^x = U^x_{i_1} \cap \ldots \cap U^x_{i_n}$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X. $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".

4. Получили окрестности U^x для всех точке $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

□

1.14.3 Компактность в хаусдорфовых пространствах

Theorem 51. *Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X.*

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \ \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \ni x : U_a \cap V_a = \varnothing.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A: $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$. $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x, не пересекающая A. □

Theorem 52. *Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.*

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы **??**.

$$U \coloneqq \bigcup U_{a_i},\ V \coloneqq \bigcap V_{a_i}.$$

U и V — открытые множества, $U \supset A,\ V \ni x,\ U \cap V = \varnothing$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть $A,\ B$ замкнуты и $A \cap B = \varnothing$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \supset B : U_a \cap V_a.$$

Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$. Аналогично получим открытые $U \coloneqq \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V \coloneqq \bigcap V_{a_i} \supset B,\ U \cap V = \varnothing$. Доказали, что X нормально.

□

1.14.4 Компактность в $\mathbb{R}^n$

Designation. X — метрическое пространство.

Def 54. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 55. Диаметр множества A:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. *A ограничено тогда и только тогда, когда* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 53. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 54. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ По прошлому следствию **??**.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.14.5 Компактность и центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 56. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 55. *X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

  Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств $A_1, \dots A_n$. Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из $A_{1 \dots n}$, это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i \neq \varnothing$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i \in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Не умаляя общности A_0 компактно. По теореме **??** (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$ имеет непустое пересечение. □

1.14.6 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 56. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.*

Note. Теорема **??** обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots .$$

1.14.7 Непрерывные отображения компактов

Theorem 57. *Пусть X компактно, $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X. Выберем в нем конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$. Тогда $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. □

Theorem 58 (Вейерштрасс)**.** *Пусть X компактно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.*

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(X)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. □

Theorem 59. *Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная бикеция. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. f непрерывно $\iff$ прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно $\iff$ f-образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. □

1.14.8 Вложения компактов

Def 57. $f : X \to Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм меду X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.14.9 Лемма Лебега

Theorem 60 (Лемма Лебега)**.** *X — компактное метрическое пространство. $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i.*

Def 58. Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство.

$$\forall x \in X\ \exists r_x > 0,\ U_i \in \{U_i\}:\ B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что $\left\{B_{\frac{r_x}{2}}\right\}_{x \in X}$ — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X\ \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

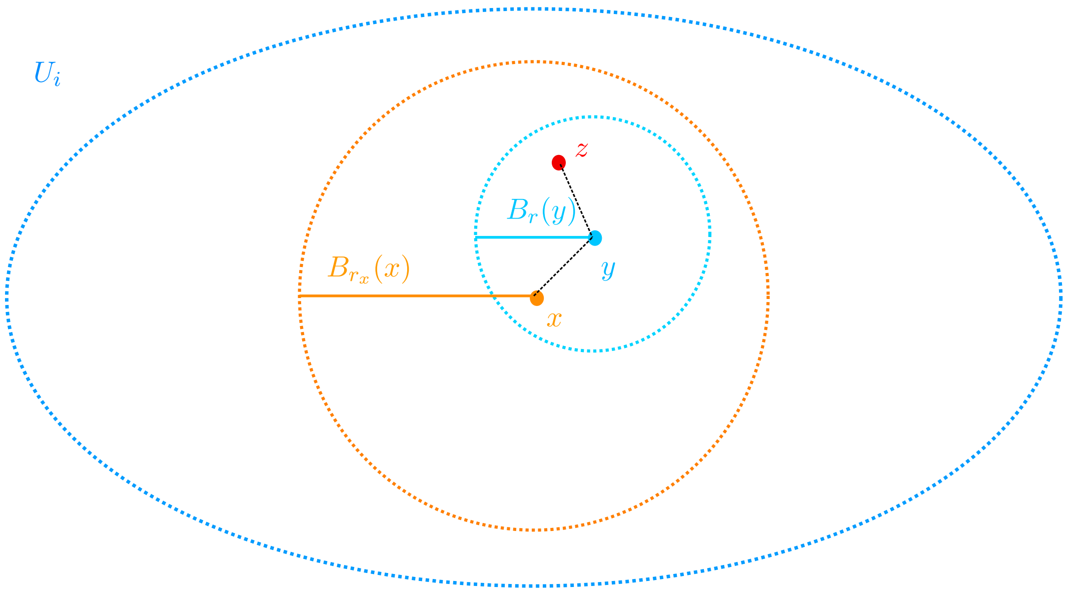


Рис. 1.9: Лемма Лебега

$$r \leqslant \frac{r_x}{2}, \quad \overline{xy} + \overline{yz} < r + \frac{r_x}{2} < r_x.$$

Следовательно, $B_r(y) \subset B_{\frac{r_x}{2}}(y) \subset B_{r_x}(x) \subset U_i$. □

Corollary. Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, $f : X \to Y$ непрерывно, $\{U_i\}$ — открытое покрытие Y. Тогда $\exists r > 0 :\ \forall x \in X\ f(B_r(x))$ содержится в одном из U_i.

Доказательство. Применим лемму Лебега к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

1.14.10 Равномерная непрерывность

Def 59. Отображение $f : X \to Y$ равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall a, x' \in X\ (d(x, x') < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Theorem 61. *Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \to Y$ равномерно непрерывно.*

Доказательство. Применим следствие **??** из леммы Лебега к f и покрытию Y шарами радиуса $\frac{\delta}{2}$ □

1.14.11 Теорема Тихонова

Theorem 62 (Тихонов, без доказательства)**.** *Пусть* $\{X_i\}$ *— произвольное семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение* $\prod_{i \in I} X_i$ *тоже компактно.*

1.14.12 Локальная компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 60. X локально компактно, если $\forall x \in X\ \exists$ окрестность $U \ni x :\ \mathrm{Cl}U$ компактно.

Ex. $\mathbb{R}^n$ локально компактно.

Practice. Если X локально компактно и хаусдорфово, то X регулярно.

1.14.13 Одноточечная компактификация

Designation. X — хаусдорфово топологическое пространство.

Def 61. Одноточечная компактификация X — топологическое пространство $\widehat{X}$:

- $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}, \qquad \infty \notin X$
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \notin U$ открыто в $\widehat{X}$ тогда и только тогда, когда U открыто в X
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \in U$ открыто в $\widehat{X}$ тогда и только тогда, когда $X \setminus U$ компактно

Statement. *Определение* **??** *корректно, то есть указанные открытые множества образуют топологию на* $X \cup \{\infty\}$.

Practice.

1. $\widehat{X}$ компактно
2. $\widehat{X}$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда X локально компактно
3. $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$
4. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$

1.15 Полные метрические пространства

1.16 Предел последовательности

Designation. X — топологическое пространство.

Def 62. Точка $x \in X$ — предел последовательности $\{x_n\} \subset X$, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x\ \exists N \in \mathbb{N}:\ x_n \in U \quad \forall n > N.$$

Синонимы: x_n стремится к x или x_n сходится к x

Designation. $x_n \to x$ и $x = \lim x_n$

Property.

1. *$x_n = x$ сходится к x*
2. *$x_n \to x \Longrightarrow$ любая подпоследовательность тоже сходится к x*
3. *Если X хаусдорфово, то предел единственный*
4. *В метрическом пространстве $X = (X, d)$,*

$$x_n \to x \Longleftrightarrow d(x, x_n) \to 0.$$

5. *Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей.*

$$\forall \text{ замкнутого } A \subset X:\ (\{x_n\} \subset A,\ x_n \to x \Longrightarrow x \in A).$$

6. *В метрическом пространстве X (или в пространстве со счетной базой) верно обратное: если $A \subset X$ содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то A замкнуто.*

1.17 Полные пространства

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 63. $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n, k > N\ d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

или

$$d(x_n, x_k) \to 0, \quad n, k \to \infty.$$

Синонимы: $\{x_n\}$ — последовательность Коши, $\{x_n\}$ сходится в себе.

Def 64. X полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Property.

1. *Если последовательность сходится, то она фундаментальна.*
2. *Фундаментальная последовательность ограничена.*
3. *Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.*

Note. Полнота — не топологическое свойство!

Exs.

1. $\mathbb{R}$ полно (критерий сходимости Коши)
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно (если $x_n \to 0,\ x_n \neq 0$, она фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
3. $[0, 1]$ полно
4. $(0, 1)$ неполно

Theorem 63. $\mathbb{R}^n$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\{x\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. Предположим, что $\{x_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall i \in [1, n] :\ \{x_k^i\}$ — тоже фундаментальна. Значит координатные последовательности имеют пределы $x^1, \dots, x^n$. Следовательно, $x_k \to x \coloneqq (x^1, \dots, x^n)$. □

Theorem 64. *Если X полно и $Y \subset X$ замкнуто, то Y полно.*

Practice. Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.

Practice. Множество в $\mathbb{R}^n$ полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

1.17.1 Теорема о вложенных шарах

Theorem 65 ("о вложенных шарах“)**.** *Пусть*

- X — *полное метрическое пространство*
- $A_1, A_2, \dots$ — *непустые замкнутые множества в* X
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
- $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$

Тогда $\bigcap A_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Для всех A_n выберем точку x_0. Так как $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел x, который принадлежит X, так как X полно.

$$\forall n \geqslant k :\ x_n \in A_k \Longrightarrow x \in A_k.$$

Тогда $x \in \bigcap A_i \Longrightarrow \bigcup A_i \neq \varnothing$. □

1.17.2 Теорема Бэра

Def 65. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ нигде не плотно, если:

$\mathrm{Int}\mathrm{Cl}A = \varnothing$

или

$X \setminus A$ содержит всюду плотное множество

или

любое открытое $U \subset X$ содержит открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \varnothing$.

Ex. $f = f(x_1, \dots x_n)$ — ненулевой многочлен степени n над $\mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в $\mathbb{R}^n$.

Ex. Канторово множество нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

Theorem 66 (Бэр). *Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным набором нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — нигде не плотные множества. Пусть $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$.

A_1 нигде не плотно, следовательно, открытый шар $B_{r_0}(x_0)$ содержит открытое множество $U_1 : U_1 \cap A_1 = \varnothing$.

U_1 содержит открытый шар, который содержит $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1),\ r_1 \leqslant 1$.

Построили замкнутый шар $B_1 \subset B_0,\ B_1 \cap A_1 = \varnothing$. Аналогично построим последовательность $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, где радиус $r_i \leqslant \frac{1}{i}$ и $B_i \cap A_i = \varnothing$.

По теореме **??** о вложенных шарах существует точка $x \in \bigcap B_i$. Тогда $x \notin \bigcup A_i \Longrightarrow \bigcup A_i \neq X$. □

Corollary. Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Theorem 67 (усиление теоремы Бэра). *Пусть X — полное метрическое пространство, A — объединение счетного набора нигде не плотных множеств. Тогда* $\mathrm{Int}A = \varnothing$.

1.17.3 Пополнение

Def 66. Пусть X — метрическое пространство. Пополнение X — такое метрическое пространство $\overline{X}$, что

- $\overline{X}$ полно
- $X \subset \overline{X}$ как подпространство, то есть $d_X = d_{\overline{X}}$
- X всюду плотно в $\overline{X}$

Theorem 68 (без доказательства). *У любого метрического пространства есть пополнение.*

1.18 Компактность метрических пространств

1.18.1 Секвенциальная компактность

Def 67. X секвенциально компактно, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Theorem 69. *X компактно, $S \subset X$ — бесконечное множество. Тогда существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность $U \ni x$ содержит бесконечно много точек S.*

Доказательство. От противного. Пусть $\forall x \in X\ \exists$ окрестность $U_x : |U_x \cap S| < \infty$. Выберем из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$.

$$S = (S \cap U_{x_1}) \cup \ldots \cup (S \cap U_{x_n}.$$

Каждое из $S \cap U_{x_i}$ конечно, следовательно, S конечно. Противоречие. □

Theorem 70. *Если X — компактное метрическое пространство, то X секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X. Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.

2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме **??** существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности. Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} :\ n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \quad k = 1, 2, \ldots$.

   Она сходится к x.

□

Theorem 71. *X — топологическое пространство. Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то X секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X. Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.

2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме **??** существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности.

   Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — счетная база в точке x. Рассмотрим такие вложенные окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$:

   $$V_k = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k.$$

   Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} :\ n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in V_k \quad k = 1, 2, \ldots$.

   Она сходится к x.

□

1.18.2 Вполне ограниченные множества

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 68. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ — ε-сеть в X, если

$$\forall x \in X\ \exists s \in S : d(x, s) < \varepsilon.$$

Def 69. X вполне ограничено, если для любого ε существует конечная ε-сеть.

Practice. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Theorem 72. *Если метрическое пространство X компактно, то оно вполне ограничено.*

Theorem 73. *Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть для $\varepsilon > 0$ нет конечной ε-сети. Построим последовательность $x_1, x_2, \ldots$:

x_1 — любая точка

x_2 — такая точка, что $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$

$\ldots$

x_n — такая точка, что $d(x_i, x_n) \geqslant \varepsilon \qquad \forall i \in [1, \ldots, n-1]$

$\ldots$

Такая $\{x_n\}$ не может быть иметь сходящейся подпоследовательности, так как все попарные расстояния не менее ε. Противоречие. □

Theorem 74. *Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. По секвенциальности у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, она тоже сходится к тому же пределу. □

Theorem 75. *Если X полно и вполне ограничено, то X компактно.*

Доказательство. Пусть существует открытое покрытие $\{U_i\}$, у которого нет конечного подпокрытия. Пусть S_1 — конечная 1-сеть. Все пространство покрыто конечным числом шаров радиуса 1 (пусть замкнутых) с центрами в S_1. Значит, хотя бы один из них не покрывается конечным числом U_i.

Пусть это A_1.

Теперь рассмотрим конечную $\frac{1}{2}$-сеть S_2 и пересечения

$$A_1 \cap \overline{B}_{\frac{1}{2}}, \quad s \in S_2.$$

Они покрывают A_1, следовательно, одно из них не покрывается конечным набором U_i. Обозначим его A_2.

Аналогично строим последовательность замкнутых множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, где A_n не покрывается конечным набором $\{U_i\}$.

$$A_n = A_{n-1} \cap \overline{B}_{\frac{1}{n}}(s), \text{ где } s \in S_n \text{ — конечная } \frac{1}{n}\text{-сеть.}$$

Тогда $\operatorname{diam} A_n \leqslant \frac{2}{n} \to 0$. По теореме о вложенных шарах $\exists x \in \bigcap A_n$.

$$\exists U_i: \ x \in U_i \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

Далее

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : A_n \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

То есть A_n покрывается одним U_i. Противоречие. □

Theorem 76 (Три определения компактности)**.** *X — метрическое пространство. Следующие свойства равносильны:*

1. *X компактно*
2. *X секвенциально компактно*
3. *X — полное и вполне ограниченное*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Уже доказано (см. теорему **??**)

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Уже доказано (см. теоремы **??** и **??**)

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Уже доказано (см. теорему **??**)

□

1.18.3 Компактность и счетная база

Theorem 77. *Если X вполне ограничено, то оно имеет счетную базу топологии.*

Доказательство. Объединим конечные ε-сети для $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Получим счетное всюду плотное множество. Тогда X сепарабельно, значит X имеет счетную базу (так как X — метрическое пространство). □

Theorem 78. *Если X метризуемо и компактно, то X имеет счетную базу топологии.*

1.18.4 Обобщение

Theorem 79. *X имеет счетную базу топологии. Тогда X компактно тогда и только тогда, когда X секвенциально компактно.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Уже доказано (см. **??**)

$\boxed{\Longleftarrow}$ Рассмотрим открытое покрытие. По теореме Линеделёфа, из него можно выбрать счетное подпокрытие: $U_1, U_2, U_3, \ldots$.

Пусть нет конечного подпокрытия. Рассмотрим конечные поднаборы $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$. Никто из них не покрывает X, следовательно,

$$\forall n \in N \ \exists x_n \in X \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_n).$$

По секвенциальной компактности можем выбрать из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_k\}$. Пусть $y_k \to y$.

Так как $\{U_i\}$ — покрытие, $\exists j: \ y \in U_j$. Но с некоторого момента $y \notin U_j$, так как в каждом U_n только конечное число членов последовательности.

Значит это не предел!

$\square$

1.19 Факторизация

Def 70. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство $X/\sim$ — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X.

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X.

1.19.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Def 71. Каноническая проекция X на $X/\sim$ или отображение факторизации — отображение

$$p : X \to X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 80. *Каноническая проекция непрерывна.*

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X.

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. *Следующие свойства наследуются факторпространством:*

- *Связность*

- *Линейная связность*
- *Компактность*
- *Сепарабельность*

1.19.2 Стягивание множества в точку

Def 72. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A, операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме **??**)

1.19.3 Несвязное объединение

Def 73. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологий: A открыто в $X \sqcup Y \Longleftrightarrow A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y.

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.19.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \to Y$ — непрерывное отображение.

Def 74. $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A: \; a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f.

Ex. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y, $A = \{x_0\}, f(x_{00} = y_0$. Результат склеивания — букет (X, x_0) и (Y, y_0).

Ex. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ex. Если склеить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, получилась лента Мебиуса.

Def 75. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X :

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство $X/\sim$ обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ex. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами.

Theorem 81. *Пусть $p : X \to X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \to Y$ переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X : \ x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \overline{f} : X/\sim \to Y : f = \overline{f} \circ p$.
2. *$\overline{f}$ непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.*

Доказательство.

- Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- $\boxed{\Longrightarrow}$ По непрерывности композиции, если $\overline{f}$ непрерывна, то f тоже.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 82 (Склеивание концов отрезка)**.** $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0, 1] \to S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$. Соответствующее $\overline{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$ — биекция. По теореме **??** $\overline{f}$ непрерывно. $[0, 1]/\{0, 1\}$ — компактно, S^t — хаусдорфово, следовательно, $\overline{f}$ — гомеоморфизм. □

Theorem 83. *X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \to Y$ – непрерывно и сюръективно. Тогда*

$$X/\sim \cong Y,$$

где $\sim$ определяется условием

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Theorem 84. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме **??** достаточно построить сюрьективный гомеоморфизм $f : B \to S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x|\right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}_{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

□

1.20 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 76. n-мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число n — размерность многообразия.

Theorem 85. *При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m.

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n-мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

Def 77. n-мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются краем M и обозначаются ∂M.

Def 78. Поверхность – двумерное многообразие.

Ex. D^n — многообразие с краем, S^{n-1} — его край.

Theorem 86. *$\mathbb{R}^n_+$ не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.*

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) — тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) — бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ($abab$) — проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

Theorem 87.

- *Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).*
- *Пусть в m-угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.*

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать из между собой.

1.20.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 88 (без доказательства). *Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда*

1. *M – компактно, без края $\Longrightarrow M \cong S^1$*
2. *M – некомпактно, без края $\Longrightarrow M \cong \mathbb{R}$*
3. *M – компактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0, 1]$*
4. *M – некомпактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0, +\infty)$*

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.20.2 Сферы

Def 79. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2, вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 80. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – $\mathbb{RP}^2$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.20.3 Классификация поверхностей

Statement. *Поверхность — связное двумерное многообразие.*

Theorem 89.

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.*

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.20.4 Эйлерова характеристика

Def 81. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенныам связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 90. *Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- χ(бутылки Клейна) $= 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- χ(сферы с n дырками) $= 2 - n, \chi$(тора с дыркой) $= -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- χ(сферы с p ручками) $= 2 - 2p$
- χ(сферы с q пленками) $= 2 - q$