Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

2 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Непрерывные функции

1.1 Непрерывность в точке

Designation. $f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$

Def 1. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если

для любой окрестности U точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(V \cap A) \subset U$.

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \big(|x - x_0| < \delta \quad x \in A \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big). \tag{1.1}$$

Note. Если $x_0 \in A'$, то условие 1.1 эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note. Если точка x_0 является изолированной для A, то f непрерывна в x_0.

1.2 Свойства непрерывных функций

1.2.1 Теорема об алгебраических операциях

Theorem 1 (об алгебраических операциях с непрерывными функциями)**.** *Пусть* $f : A \to \mathbb{R},\ g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- *Если* f *и* g *непрерывны в точке* x_0*, то* $\alpha g + \beta f$ *непрерывна в точке* x_0*.*
- *Если* f *и* g *непрерывны в точке* x_0 *и* $g(x_0) \neq 0$*, то* $\frac{g}{f}$ *непрерывна в точке* x_0*.*

Доказательство. Если x_0 — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. □

1.2.2 Теорема о композиции

Theorem 2 (о композиции)**.** $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R},\ f(A) \subseteq,\ x_0 \in A$. *Пусть* f *непрерывна в точке* x_0, g *непрерывна в точке* $f(x_0) = y_0$. *Тогда* $g \circ f$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Обозначим $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$. Пусть U — окрестность точки z_0. Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как f непрерывна в точке x_0:

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

1.2.3 Теорема о пределе последовательности

Theorem 3. $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R},\ x_0 \in A$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. f *непрерывна в точке* x_0
2. $\forall$ *последовательности* $\{x_n\} \in A,\ x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$

Пусть W — окрестность точки $f(x_0)$. Так как f непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как $x_n \to x_0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n \in V \Longrightarrow f(x_n) \in W.$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$

Пусть f не непрерывна в точке x_0, есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Longrightarrow x_n \to x_0.$$

Из этого следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$. Противоречие.

□

1.3 Непрерывность на множестве

Def 2. Говорят, что функция f, заданная на множестве A, **непрерывна на некотором подмножестве** $A_1 \subset A$, если она непрерывна в каждой точке множества A_1.

1.3.1 Теоремы Вейерштрасса

Theorem 4 (Первая теорема Вейершрасса)**.** *Пусть f задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве A. Тогда функция f ограничена на A.*

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на A. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \to x$. Так как A замкнуто, $x \in A$. Следовательно, $f(x_n) \to f(x)$. Противоречие. □

Theorem 5 (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** $f : A \to \mathbb{R}$ — *непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве A функция. Если существуют конечные*

$$M = \sup_{x \in A} f(x), \quad m = \inf_{x \in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

Доказательство.

- Для M:
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A : M \geqslant f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$
По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \to x$. Так как A замкнуто, $x \in A$.
$$f(x_{n_j}) \to f(x) \wedge f(x_{n_j}) \to M \Longrightarrow M = f(x).$$
Значит, M достигается.

- Для m: совершенно аналогично.

□

1.3.2 Теорема о промежуточном значении

Designation. «u между r и s» $:= \begin{cases} u \in [r, s] & r \leqslant s \\ u \in [s, r] & r > s \end{cases}$

Theorem 6 (о промежуточном значении)**.** *Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle$. Пусть $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$, v находится между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует x между a и b такой, что $f(x) = v$.*

Доказательство. Если $a = b$, утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что $a < b$. Будем считать, что $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$.

Пусть нет точки $x_0 : f(x_0) = v$. Обозначим $I = [a, b]$. Пусть $\begin{matrix} X = \{x \in I \mid f(x) \leqslant v\} \\ Y = \{x \in I \mid f(x) \geqslant v\} \end{matrix}$. Докажем, что X и Y замкнуты.

1. X замкнуто:
   x_0 — предельная точка. Следовательно, $\exists x_n \in X : x_n \to x_0,\ (x_n \neq x_0)$. Тогда $f(x_n) \to f(x_0)$.
   $$f(x_n) \leqslant v \Longrightarrow f(x) \leqslant v.$$
2. Аналогично Y замкнуто.

Следовательно, $X \cap Y \neq \varnothing$. □

Theorem 7. *Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle a, b\rangle$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f — инъекция (то есть $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)*
2. *f — строго монотонная*

Доказательство.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Очевидно.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть f не строго монотонна. Тогда $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta\rangle$:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{array}\right..$$

Тогда $\exists x_1' \neq x_2'$, но $f(x_1') = f(x_2')$. Противоречие.

□

Theorem 8. *Пусть g задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда g непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).*

Statement. *Если f непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то f^{-1} тоже задана на отрезке и непрерывна.*

1.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z},\ f(x) = x^m,\ x > 0.$
$x^0 \equiv 1, \quad x > 0.$
x^m строго возрастает, если $m > 0$
x^m строго убывает, если $m < 0$
$x^m \overset{\text{def}}{\equiv} = \frac{1}{x^{-m}}$
$f(x) = x^m$ — непрерывная функция. Обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$ — корень m-й степени из $y > 0$.

Def 3. $x > 0,\ r \in \mathbb{Q},\ r = \frac{p}{q}$
$x^r = \sqrt[q]{x^p}$ — x в рациональной степени.

Note. $x \mapsto x^r$ — непрерывное отображение.

Lemma. *Результат не зависит от представления r в виде дроби.*

Property.

1. $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$
2. $\left(x^{r_1}\right)^{r_2} = x^{r_1 r_2}$
3. $x^r \cdot y^r = (xy)^r$

1.5 Равномерная непрерывность

Def 4. $A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R}$. Говорят, что f **равномерно непрерывна** на A, если

$$\big(|x - x_0| < \delta \wedge x \in A\big) \Longrightarrow |f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A : \big(|x - y| < \delta |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Ex. $f(x) = x,\ A = \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ |x - y| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \Longrightarrow f \text{ равномерно непрерывна.}$$

Ex. $f(x) = x^2,\ A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - y||x + y| C\varepsilon \Longrightarrow f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

Ex. $h(x) = \sqrt{x}$ — равномерно непрерывна.

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

1.5.1 Теорема Кантора

Theorem 9 (Кантор)**.** *Пусть A замкнутое ограниченное множество. $f : A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f равномерно непрерывна.*

Доказательство. От противного. Пусть f не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \delta > 0\ \exists x_1', x_2'' \in A : |x_1' - x_2''| < \delta \wedge |f(x_1') - f(x_2'')| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n', x_n'' \in A : |x_n' - x_n''| < \delta \wedge |f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon.$$

Получили две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$. Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности $\exists x_{n_j}' \to x_0 \in A$.

$$x_{n_j}'' = x_{n_j}' + (x_{n_j}'' - x_{n_j}') \to x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к $f(x_0)$, значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие. $\square$

Глава 2

Дифференцирование

2.1 Определения

Designation. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ x_0, x \in \langle a, b\rangle$

Def 5. Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0),$$

где $l(t) = kt,\ k \in \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x_0 (также обозначается $d_{f_{x_0}}(t)$ или $df(x_0, t)$).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0).$$

Def 6. Если f дифференцируема в точке x_0, **производная** f в точке x_0 определяется так:

$$f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Property.

1. *Если f дифференцируема в точке x_0, то k единственное.*
2. *Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.*
3. *f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k,\ df_{x_0}(t) = kt.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + f(x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x\to x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \to k.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) = f(x_0)}{x - x_0} = k \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1),\ x \to x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= k(x-x_0)+o_{x\to x_0}(1)(x-x_0) = \\ &= k(x-x_0)+o_{x\to x_0}(x-x_0) \end{aligned}$$

□

4. *f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует β, заданная в окрестности $V \ni x$:*
   (a) *β непрерывна в точке x_0*
   (b) *$f(x)-f(x_0)=\beta(x)\cdot(x-x_0) \qquad \forall x \in V$*

   Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$

$$\beta(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y\to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} & x = x_0 \end{array} \right.$$

   $\boxed{\Longleftarrow}$ $\beta(x)=\beta(x_0)+o_{x\to x_0}(1)$ Подставим

$$f(x)-\underbrace{\beta(x_0)}_{k}(x-x_0)+o_{x\to x_0}(1)(x-x_0).$$

   Получили определение.

□

2.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!
1. $f(x)=ax+b$ дифференцируема и $\forall x_0 : f'(x_0)=a$
2. Если f, g дифференцируемы в точке x_0, $f\cdot g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
3. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$
4. Если f, g дифференцируемы в x_0 и $g(x_0)\neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в x_0 и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
5. Если $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle c,d\rangle$, $x_0 \in \langle c,d\rangle$, $g(x_0)\in\langle a,b\rangle$ и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, g дифференцируема в точке x_0, то $f\circ g$ дифференцируема в точке x_0 и
$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$
6. Производная обратной функции. $f : (a,b)\to\mathbb{R}$ непрерывна и инъективна. Пусть $x_0\in(a,b)$, $\exists f'(x_0)\neq 0$, обозначим $g=f^{-1}$ — обратное отображение, $y_0=f(x_0)$. Тогда g дифференцируема в точке y_0 и
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. $m \in \mathbb{N},\ g(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Если $x_0 > 0$, то g дифференцируема в точке x_0 и
$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8. $x_0 > 0,\ \alpha = \frac{l}{k} > 0$. $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$. Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и
$$\varphi'(x) = l\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$
Аналогично для $\alpha < 0$.

9. Тайная таблице еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\ln x$

2.3 Производная возрастающей функции

Def 7. Пусть $f : I = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \in \langle a, b\rangle$. Говорят, что f **возрастает в точке** x_0, если $\exists$ окрестность $U \ni x_0$:
$$\begin{cases} f(y) \leqslant f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \leqslant x_0 \\ f(y) \geqslant f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \geqslant x_0 \end{cases}$$

Note. Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

Theorem 10. *Пусть в условии определения f возрастает в точке x_0.*

1. *Если $\exists f'(x)$, $f'(x_0) \geqslant 0$*
2. *Пусть $\exists f'(x_0) > 0$, тогда f строго возрастает в точке x_0*

Доказательство.

1. $$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geqslant 0\ \forall x \geqslant x_0} \to f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) \geqslant 0.$$
2. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \big(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\gamma(x)| \leqslant \varepsilon |x - x_0|.$$
$0 < \varepsilon < f(x_0)$. Разберем пару случаев:

(a) $x > x_0$.
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geqslant (f(x) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b) $x < x_0$.
$$f(x) - f(x_0) \leqslant f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

Def 8. $I = (\alpha, \beta),\ x \in I$. Говорят, что f имеет **монотонный максимум**, если
$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geqslant f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

Note. Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

Note. Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

Theorem 11. *$x_0 \in (\alpha, \beta)$ — точка локального экстремума для $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_0 локальный максимум. Тогда $f\restriction_{(\alpha,x_0]}$ — возрастает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \geqslant 0$. Также $f\restriction_{[x_0,\beta)}$ — убывает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \leqslant 0$.

Для других случаев полностью аналогично. □

2.4 Формулы Коши и Лагранжа

Theorem 12 (Ролль)**.** *$I = [a, b],\ a \neq b,\ f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a, b).*
Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса №2 5 $\exists x, y \in [a, b] : \begin{cases} f(x) = \min_{t\in[a,b]} f(t) \\ f(y) = \max_{t\in[a,b]} g(t) \end{cases}$ Если $x, y \in a, b$, то $f \equiv const$ и $f'(a) = 0$. Иначе либо $x \in (a, b)$, либо $y \in (a, b)$. Тогда в ней производная и равна нулю по прошлой теореме 11. □

Corollary (Формула Коши)**.** Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$:
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Corollary (Формула Лагранжа)**.** Если f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b)$:
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Note. Если h дифференцируема на (a, b) непрерывна на $[a, b]$, при этом $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f инъективна на $[a.b]$.

Corollary. В условии замечания производная h' сохраняет знак.

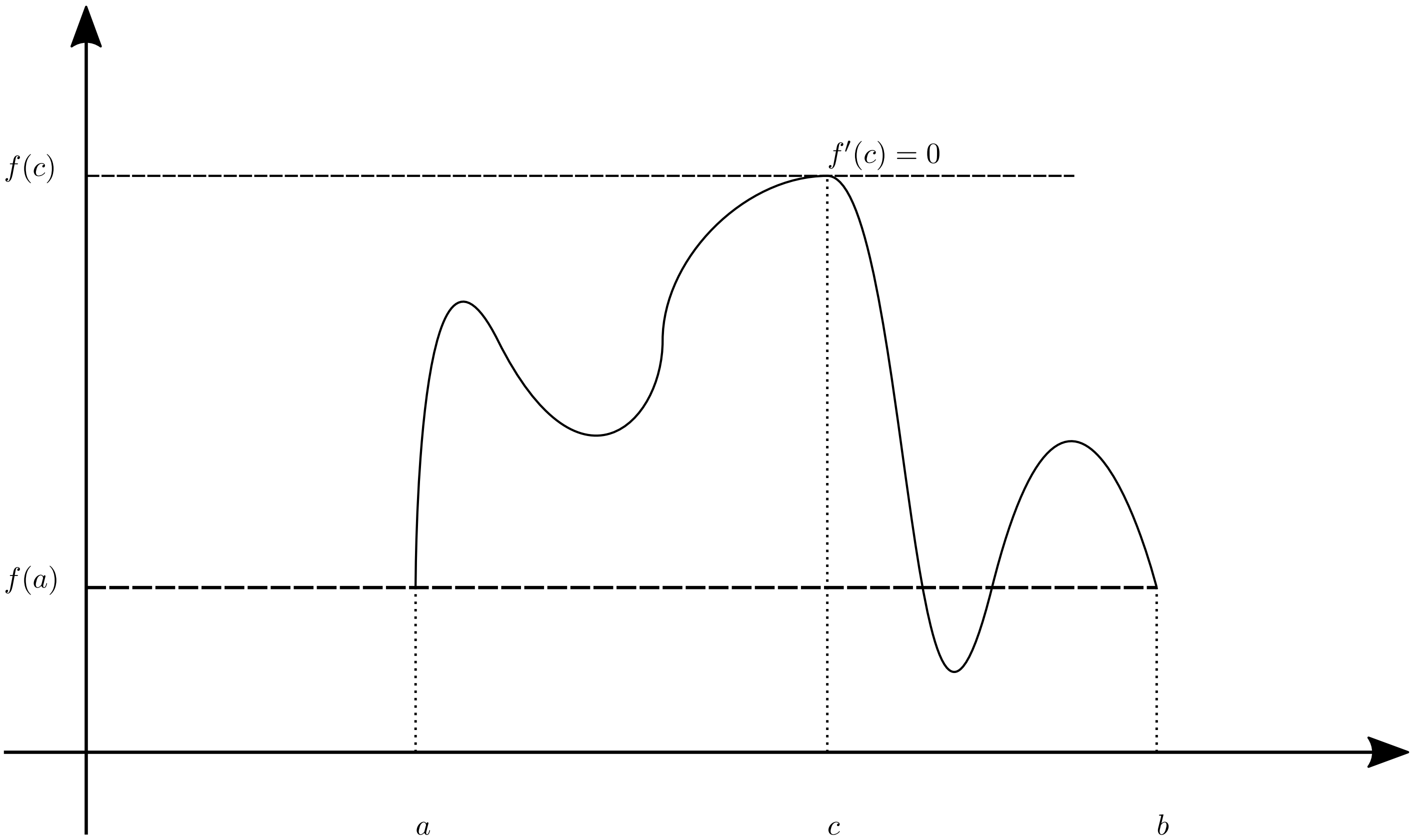

Рис. 2.1: Теорема Ролля

Следствия из формулы Лагранжа

Designation. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на (a, b)

1. $f \equiv const$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

2. Связь знака производной и монотонности.

   Theorem 13.

   (a) Если f возрастает (убывает) на $[a, b]$, то $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$.

   (b) Если $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$, то f возрастает (убывает).

   (c) Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$, то f строго возрастает (убывает).

   Statement. *Если $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f строго монотонна.*

3. $f'(x_1) = u,\ f'(x_2) = v$, w лежит между u и v. Тогда $\exists y$ между $x_1, x_2 : f'(y) = w$.

Theorem 14. *Если f дифференцируема на (a, b), непрерывна в точке a и $\exists \lim_{y \to a} f'(y) = d$, то f дифференцируема в точке a и $f'(a) = d$.*

Доказательство.
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\big(0<|y-a|<\delta\Longrightarrow|f'(y)-d|<\varepsilon\big).$$
Если $x>a$, по формуле Лагранжа
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c),\qquad c\in(a,x).$$
Пусть $|x-a|<\delta$, тогда $|c-a|<\delta$, следовательно,
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-d\right|<\varepsilon.$$
□

2.5 Правило Лопиталя

Theorem 15 (Привило Лопиталя)**.** *f,g заданы и непрерывны на $[a,b]$, $f(a)=g(a)=0$, f,g дифференцируемы на (a,b), $g'(y)\neq 0\quad\forall y\in(a,b)$, $\exists\lim_{y\to a+0}\frac{f'(y)}{g'(y)}=d$. Тогда*
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=d.$$

Доказательство. Рассмотрим $x>u>a$.
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(y)}{g'(y)}\qquad y\in(a,x).$$
$$\forall\varepsilon\ \exists\delta:\left(|y-a|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}-d\right|<\varepsilon\right).$$
Если $|x-a|<\delta$, то $|y-a|<\delta$.
$$\left|\frac{f(u)-f(x)}{g(a)-g(x)}-d\right|<\varepsilon\overset{u\to a}{\Longrightarrow}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-d\right|\leqslant\varepsilon\qquad\text{при }|x-a|<\delta.$$
□

Theorem 16 (Вариант правила Лопиталя)**.** $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$. *Если* $\exists\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=d$, *то*
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=d.$$

Доказательство. $x,u\in(a,a+\delta)$, $x\neq u$. $\exists y$ между x и u:
$$\frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(u)}=\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$
$$\frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(u)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(u)}{g(u)}}{1-\frac{g(u)}{g(x)}}\tag{2.1}$$

Зафиксируем u вблизи x : $\left|\frac{g(u)}{g(x)}\right| < 1$. Тогда модуль правой части в уравнении 2.1 не более ε. Воспользуемся тем, что $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = d$:

$$d-\varepsilon \leqslant \left|\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(u)}{g(u)}}{1-\frac{g(u)}{g(x)}}\right|.$$

Домножим на знаменатель:

$$(d-\varepsilon)(1-\frac{g(u)}{g(x)}) \leqslant \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(u)}{g(u)} \leqslant (d+\varepsilon)\left(1-\frac{g(u)}{g(u)}\right).$$

x близок к a:

$$\varlimsup_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant d+\varepsilon$$
$$\varliminf_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant d-\varepsilon$$

Statement. *Если $v(x) < w(x)$, то $\varlimsup_{x\to a+} v(x) \geqslant \varliminf_{x\to a+} w(x)$ и $\varliminf_{x\to a+} v(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a+} w(x)$.*

Применим утверждение.

$$\varlimsup_{x\to a} v(x) = \inf_{\delta>0}\sup_{|x-a|<\delta} \leqslant \lim_{x\to a} v(x).$$

$$\underline{\lim}\, x\to av(x) = \sup_{\delta>0}\inf_{|x-a|<\delta} \leqslant \lim_{x\to a} v(x).$$

Значит

$$d+\varepsilon \geqslant \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant d-\varepsilon.$$

□

2.6 Старшие производные

Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+o_{x\to a}(x-a).$$

Рассмотрим множество $A = \{x \mid f'(x) \text{ существует}\}$ Тогда можно смотреть на f' как на функцию, заданную на A.

Def 9. Если f' определена в точке $x \in A$, то $(f')'(x) = f''(x)$ — вторая производная в точке x.
$f^{(n)}(x)$ — n-я производная в функции f.

$$f^{(n+1)} \equiv (f^{(n)})', \text{ если такая существует.}$$

2.6.1 Полином с заданными производными

Def 10. $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ — полином степени не выше n.

Его можно разложить по степеням $x - x_0, x_0 \in \mathbb{R}$: $p = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$, где b_i — некоторые другие коэффициенты.

Как вычислить коэффициенты b_j, зная p? Нулевой – $p(x_0)$, дальше можно взять производную и посчитать следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(x_0) \\ b_1 &= p'(x_0) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p''(x_0) \\ b_3 &= \frac{1}{3!}p^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Ex. Отсюда можно просто вывести формулу Бинома Ньютона: $q(x) = (x-a)^n$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^j(0)}{j!}x^j.$$

Одно слагаемое будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{q^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-j+1) \cdot a^{n-j}}{j!} = \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!}(-1)^{n-j}a^{n-j} \end{aligned}.$$

2.6.2 Полином Тейлора

Def 11. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Пусть p — полином степени не выше n. Говорят, что он есть **полином Тейлора** для f порядка n в точке x_0, если

$$f(x) - p(x) \leqslant o_{x \to x_0}\Big((x - x_n)^n\Big).$$

Ex. $n = 0$.

$$f(x) - c = o_{x \to x_0}(1) \iff f(x) \overset{x \to x_0}{\to} c.$$

Существует тогда и только тогда, когда действительно есть предел в точке x_0.

Ex. $n = 1$

$$p(x) = a + b(x - x_0).$$

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x \to x_0}(x - x_0) \iff b = f'(x_0), \text{ если } f'(x_0) \text{ существует.}$$

Theorem 17. *Если полином Тейлора порядка n существует для f в точке x_0, то он единственный.*

Доказательство. Пусть p, q — два различных полинома Тейлора. Тогда $p(x) - q(x) = o_{x \to x_0}(x - x_0)^n$.

$$p(x) - p(y) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_n)^n.$$

Докажем, что $c_j = 0\ \forall j$. Пусть $k = \min\{j \mid c_j \neq 0\}$.

$$r(x) = c_k(x - x_0)^k + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o_{x \to x_0}(x - x_0)^n.$$

По определению

$$c_k(x - x_0)^k + c_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \ldots + c_n(x - x_0)^n < \varepsilon(x - x_0)^n.$$

$$c_k + c_{k+1}(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^{n-k} < \varepsilon(x - x_0)^{n-k} \qquad x \to x_0 \Longrightarrow c_k \to 0.$$

Противоречие. Значит все коэффициенты равны нулю. □

2.7 Формула Тейлора

2.8 Достаточное условие экстремума

2.9 Сходимость последовательностей

Theorem 18. $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leqslant M$
2. f *ограничена:* $|f(n)| \leqslant M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leqslant A \quad \forall n \leqslant N \forall x$

Доказательство. Очевидно □

Theorem 19. $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ *на* A. *Пусть* $\exists M : \forall x \in A\ \forall n |f_n(x)| \leqslant M$. *Тогда* $f_n g_n \rightrightarrows fg$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leqslant |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leqslant M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 20 (Критерий Коши для равномерной сходимости)**.** *Пусть f_n — последовательность функций на множестве A. Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j > N\ \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leqslant |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть **??** выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см **??**). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Ex. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс)}: f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 21 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n — функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \leqslant a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \leqslant |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \leqslant a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

□

Ex (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0, \; h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x + h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x + h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k ($\pm$), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

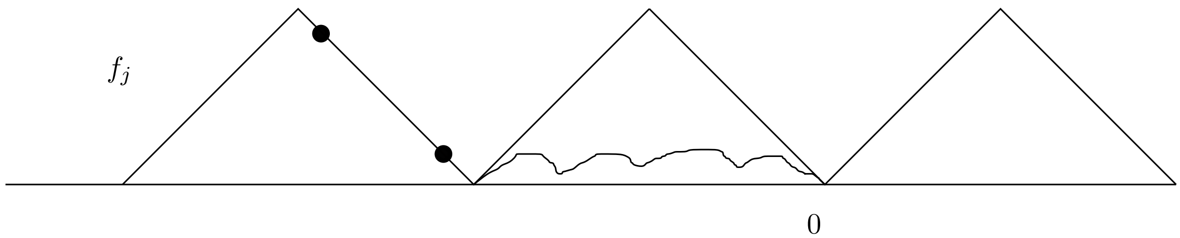

Рис. 2.2: График функции Ван дер Вардена

Designation. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x)\dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{t}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geqslant 1|.$$

Theorem 22. $f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a,b\rangle$ *и* $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right| .$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x-y} - \frac{f(x) - f(y)}{x-1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x,y \in \langle a,b\rangle.$$

Оценим разность. Зафикируем x.

$$\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \wedge x \neq y \to |\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x-y} f_k'(x)| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x:

$$|y-x| < \delta, y \neq x \to |f_k'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x-y| < \delta \to |g(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant 3\varepsilon.$$

□

2.10 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b\rangle$. $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Def 12. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle y$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 23 (Ньютон, Лейбниц)**.** *Если g непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f' = g$, то $(f+c)' = g$ для любой константы c.*

Theorem 24. *Если f_1, f_2 — первообразные для g, то $f_1 - f_2 = const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c,\ \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 13. Линейная функция — это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b\rangle$; Φ — отображение отрезка $\langle a, b\rangle$ в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b\rangle$, $\Phi(x)$ — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 14 (дифференциал)**.** f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$

$$df(u,h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ — тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$*, где* c *- некая функция на* $\langle a, b\rangle$

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdg.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos tdt = \int \cos^2(t)dt =$$
$$\int \tfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \tfrac{1}{2}\int((1 + \cos 2t)dt =$$
$$\tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{2}\int \cos td(2t)) = \tfrac{1}{2}(t + \tfrac{\sin 2t}{2})$$

Тогда $\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2\arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -fdy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log xdx = x \log x - \int xd \log x = x \log x - \int 1dx = x \log x - x + C.$$

Ex.

$$\int e^x \sin xdx = \int \sin xde^x = \sin xe^x - \int \cos xe^x dx.$$

$$= \sin xe^x - \int xosxde^x = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.11 Интеграл

Def 15. A — множество произвольной природы. $\Phi : A \to \mathbb{R}$. Φ — функционал на A.

Def 16. Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
$f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(f) \geqslant 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi)\langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. *Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число* ($f \mapsto I(\alpha)$)
2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) = I(\beta)$ *(Линейность)*
3. $f \leqslant g \Longrightarrow I(f) \leqslant I(g)$
4. $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

Def 17. Разбиение — ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle \neq \varnothing.$$

Def 18. g на $\langle a, b \rangle$ — ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разиения нашего отрезка $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.11.1 Интеграл Дарбу

Def 19. J — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^{N}$, такой что J_k $capJ_s = \varnothing$, $k \neq s$, $\bigcup_{k=1}^{N} J_k = J_i$. (ДОпускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 20. Длина интервала $\langle a, b \rangle$ — это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\varnothing| = 0$

Lemma. *Если* $\{J_k\}_{k=1}^{N}$ *— разбиение* J*, то* $|J| = \sum\limits_{k=1}^{N} |J_k|$

Def 21. e — множетсво, f — ограниченная функция на .

Колебание f на e :

$$esc_e(f) = \sup_{x,y \in e} |f(x) - f(y)| =$$

$$= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y)) \right) =$$

$$= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(x) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y).$$

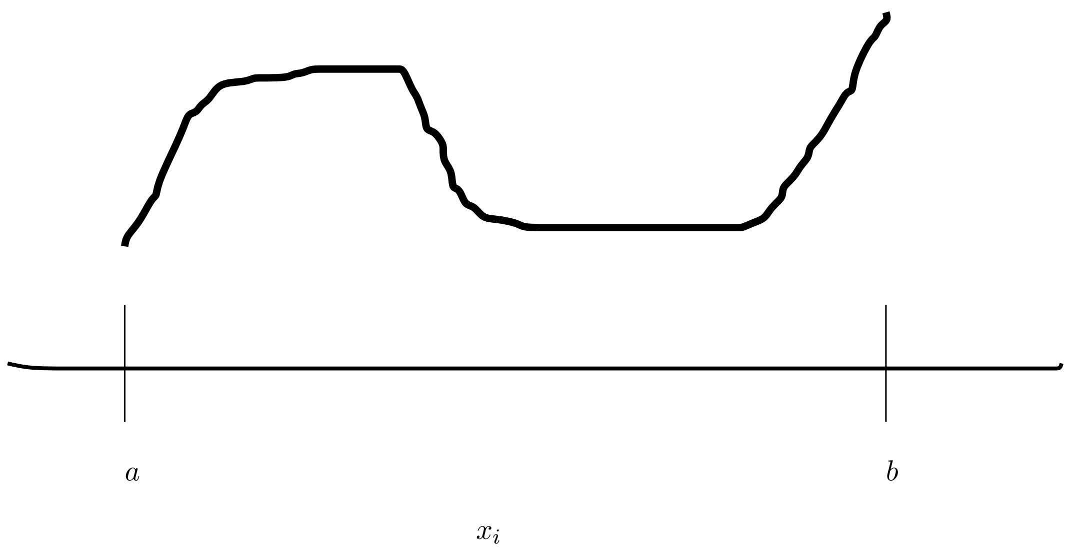

Рис. 2.3: График функции

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки $J_1, \dots J_N$ из разбиения отрезка J.

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

Designation. A — множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

B — множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. *Пусть* $\{A, B\}$ *— щель. Тогда*

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \overline{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это $[\underline{I}(f), \overline{I}(f)]$ *(верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от* f*)*

Statement. $\{A, B\}$ — *щель.*

Доказательство. ε — разбиение отрезка J_i. $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leqslant \overline{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — разбиение $J_i : \mathcal{F}$ — измельчение $\mathcal{E}$, если $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. *Если $\mathcal{F}$ — измельчение для $\mathcal{E}$, то*

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geqslant \underline{S}_{\mathcal{E}}, \quad \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}}.$$

Lemma. *Рассмотрим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения отрезка J_i. Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)*

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения. $\mathcal{F}$ — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leqslant \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leqslant \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ — щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 22. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ex.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ— ступенчатая функция на J, Существует разбиение $\underline{S}$ отрезка на J. $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\} : \varphi(x) = \sum i = 1^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i \overline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}\varphi = I(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{k} |e_i| c_i$

Theorem 25. *Если J — замкнутый отрезок ($J = [a, b]$), f — непрерывная функция на J, то f интегрируема по Риману.*

Note. Пусть J — произвольный отрезок, f — ограниченная функция на J, $\mathcal{E}$ — разбиение отрезка J на непустое отрезки $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\}$. Тогда

$$\overline{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^{k} |e_i| \inf_{e_i} f =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} |e_i| \Big(\sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \Big) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f$$

Note. f интегрируема по Риману $\iff$ щель (A, B) — узкая $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данный обозначениях измельчения можно считать, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ // возможно, здесь должно быть что-то другое

Theorem 26 (Критерий интегрируемости по Риману). *f интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение $e_1, \dots, e_k$ Отрезка J, такое что*

$$\sum_{i=1}^{k} |e_k| \mathrm{osc}_{e_k} f < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию **??** f равномерно непрерывна по теореме Кантора 9:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \Big(x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big).$$

Пусть $e_1, \dots e_k$ — столь мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\forall i : |e_i| < \delta$. Тогда $\forall i : \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^{k} |e_i| \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |e_i| = \varepsilon (b - a).$$

□

Property. 1. *f непрерывна на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ интегрируема.*

2. *Σ — разбиение,*
$$\overline{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$

3. *Если $\alpha > 0$,*
$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$
Аналогично с нижней суммой.

4. *Если f интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$*

5. *$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ ограничены. Σ разбиение.*
$$\overline{S}_\Sigma(f + g) \leqslant \overline{iS}_\Sigma(f) + \overline{S}_\Sigma(g).$$

6.
$$\underline{S}_\Sigma(f + g) \geqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$

7. *Если f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ интегрируема и*
$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$
Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. *f, g интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема и*
$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. *Монотонность. $f \geqslant 0, f$ интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geqslant 0$.*

10. *f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot g$ интегрируема.*

Доказательство.

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leqslant C, |g| \leqslant D \text{ на } \langle a, b\rangle.$$

Пусть J — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y_| = |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(x)| =$$

$$\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$

$$= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \mathrm{osc}_J f.$$

f, g интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon\ \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leqslant \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{matrix} \sum\limits_{J\in\Sigma} |J| \mathrm{osc}_J f \leqslant \varepsilon \\ \sum\limits_{J\in\Sigma} |J| \mathrm{osc}_J g \leqslant \varepsilon \end{matrix}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : \mathrm{osc}_J(fg) \leqslant C \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \mathrm{osc}_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J\in\Sigma} |J| \cdot \mathrm{osc}_J fg \leqslant C \cdot \sum_J |J| \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \mathrm{osc}_J f \leqslant (C + D)\varepsilon.$$

□

11. *f интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $J \subset \langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)*

    Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. *J_1, J_2 — два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \varnothing$. Тогда*

$$I(f\chi_{J_1\cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. *Основная оценка интеграла. f интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $|f| \leqslant M$ на $[c, d] \subset \langle a, b\rangle$*

$$\left|\int_c^d f\right| \leqslant M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \overset{def}{=} I(f\chi_{\langle c,d\rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

Statement. *f интегрируема на $\langle a, b\rangle$.*

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.11.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функция f, если F дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 27 (Ньютон-Лейбниц). *Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$ и непрерына в точке $t \in \langle a, b\rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b\rangle : F(s) = \int_{t_0}^{s} f$. Тогда F дифференцируема в точке tи $F'(t) = f(t)$.*

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left|\frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t)\right| = \left|\frac{\int_{t_0}^{x} f = \int_{t_0}^{t} f}{x - t}\right| = \left|\frac{\int_{t}^{x}}{x - t} - f(t)\right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|}\left|\int_{t}^{x} f - (x - t)f(x)\right| = \frac{1}{|x - t|}\left|\int_{t}^{x} f(s) - f(t)ds\right| \leqslant \sup_{s\in[t,x]} |f(s) = f(t)|.$$

f непрерывна в t. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta$. Если $|s - t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \Longrightarrow \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \to |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t, x]|f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x\to t} |\frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t)| = 0 \Longrightarrow F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $\forall t_0 \in [a, b] : F$ —первообразная f.

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница). f непрерывна на $[a, b]$, F —первообразная f. Тогда

$$\int_{a}^{b} f = F(b) - F(a).$$

Def 23. $f \in C^k\langle a, b\rangle, \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$, если $f, f', \dots f^{(k)}$ непрерывны.

Theorem 28. *Если $f, g \leqslant C^1(a, b)$, то*

$$\int_{b}^{a} fg' = f \cdot g \mid_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f'g,$$

где $\Phi \mid_{a}^{b} = \Phi(b) - \Phi(a)$

2.11.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g непрерывны на $[a, b]$ и f, g, f', g' непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ — первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(x)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x)\int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 29. *f_n, f — Заданы на $\langle a, b\rangle; n \in \mathbb{N}$ Пусть*

1. *все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b\rangle$*
2. *$f_n \rightrightarrows f$. Тогда f интегрируема по Риману*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. *E — множество, u, v — вещественные функции на E. $|u(x) - v(x)| \leqslant \lambda\ \forall E$. Тогда $|\mathrm{osc}_E(u) - \mathrm{osc}_E(v)| \leqslant 2\lambda$*

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

$$|\mathrm{osc}_{\langle a,b\rangle} - \mathrm{osc}_{\langle a,b\rangle(f)}| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\exists\{I_1, \dots I_N\}$ — отрезки $\langle a, b\rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j|\mathrm{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j|\mathrm{osc}_{I_j}(f) \leqslant \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a)+1).$$

Следовательно, f интегрируема.

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x) - f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0\ \exists M : \forall n \geqslant M\ \forall x \in \langle a, b\rangle : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. *Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.12 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \Longrightarrow l(0) = 0.$$

Будем искать l, заданную на $\mathbb{R}_+$.

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 24. Логарифм — строго монотонная функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. *Для $n \in \mathbb{N}$:*

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \Longrightarrow l(1) = 0.$$

Statement. *Если l — логарифм, $c \neq 0$, то cl — тоже логарифм.*

Lemma. *Если l — логарифм, то l непрерывна на всей области определения.*

Доказательство. Пусть l — логарифм. Считаем, что fстрого возрастает.

$$t = \lim_{x \to 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1 + x)^2) = 1l(1 + x).$$

При $xto1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \to 1-$, получаем тое самое. Значит l непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. □

Lemma. *Если l — логарифм, то функция l дифференцируема.*

Доказательство.

$$\Phi(x) - \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) =$$
$$x \int_x^{2x} l(x \cdot \tfrac{t}{x}) d(\tfrac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy = \quad .$$
$$\Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. □

Theorem 30 (Производная логарифма).
$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 31. *Если l логарифм, то*

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 32. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ *— логарифм.*
Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 33. *Если $C \neq 0$, то*

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x}}{)} \frac{t}{x}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \; x \overset{to}{\to} 0 \; \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Statement. *Образ функции* log *есть все вещественные числа.*

Доказательство. При $x_1 > x,\ \log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$. □

Def 25 (Обратная функция к логарифму)**.** У функции log есть обратная функция, называющаяся экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Property. *1.* exp *строго возрастает*

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Statement. *Экспонента дифференцируема:*

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)} j!^j}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Theorem 34. *Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:*

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $epx(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left|\exp x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\right| = \frac{\exp c}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leqslant R$ Применим:

$$\leqslant \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражена стремиться к нулю.

Lemma. *Пусть* $a_0, a_1, a_2 \ldots$ *— положительные числа и* $\exists N : a_j < \eta < 1\ \forall j > N$. *Тогда* $a_0 a_1 \ldots a_j \to 0 \quad j \to \infty$

Corollary. Если $a_j \geqslant 0,\ a_j \to 0$, то $a_0 \ldots a_j \to 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \ldots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. □

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n! = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leqslant (n+1)! \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad x \to \infty.$$

□

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример)**.**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j \text{ — полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geqslant 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

h — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b),\ a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{matrix} u(x) > 0 & x \in (a, b) \\ u(x) = 0 & x \notin (a, b) \end{matrix}.$$

Designation. l— логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

тТакое число называется основанием логарифма l.

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e.

Designation (общий случай)**.**

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a — ан для l.

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \land v \in \mathbb{R} :\ u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \ldots \log u}_{n}) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$

Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

1. $u^{v_1 + v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \exp u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$
2. $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$
3. $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_2 \log u) = u^{v_1 v_2}$

2.12.1 Показательная функция

Def 26. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 27. Пусть $\neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

2.12.2 Степенная функция

Def 28. Степенная функция $g(x) = x^b, \quad x \in (0, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. *Если $a > 1$, то $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x, \quad x \to \infty$*

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{blogx - xloga}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нолю при $x \to \infty$. □

Practice.
$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$
$\forall \alpha : \lim_{x \to 0} x^\alpha \log x = 0$

Statement. *Ранее доказали , что*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится при любых x. Экспонента равномерна на любом конечном отрезка.

Ряд для e^x по степеням $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0) \tag{2.3}$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leqslant 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}}{(2k)!} x^{2k} \tag{2.4}$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. *В* **??** *общий член стремиться к нулю, если* $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

2.12.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 35 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0)**.**
$f(x) = \log(1+x),\ f'(x) = (1+x)^{-1},\ f^{(2)} = -(1+x)^{-2},\ f^{(3)} = 2(1+x)^{-3}\ \ldots$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)(1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{\log^{(n)} 1}{n!} x^n + \frac{\log^{k+1}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n \to 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \to 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \to 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. *Раскладывается ли логарифм ряд Тейлора:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \tag{2.5}$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n}|x|^n \longleftarrow +\infty, \quad |x|>1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $x\in(-1,1]$.

Theorem 36. $x\in(-1,1]$. *Тогда ряд* **??** *равномерно сходится равномерно на любом* $(r,1], \quad r>-1$.

Доказательство. 1. $x\in[0,1]$.

$$\left|\log(1+x)-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right|\leqslant\frac{1}{k+1}x^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1}\leqslant\frac{1}{k+1}x^{k+1}\leqslant\frac{1}{k+1}, \quad c\in lra \tag{2.6}$$

В частности, $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$.

2. $-1<x\leqslant 0$

$$\left|\log(1+x)-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right|\leqslant\frac{1}{k+1}|x|^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1}\leqslant\frac{1}{k+1}|x|^{k+1}\leqslant\left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{k+1}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{k+1} \tag{2.7}$$

Удачным случаем **??** будет $\frac{|x|}{1-|x|}<1 \iff |x|\leqslant\frac{1}{2},\ x\in(-\frac{1}{2},0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\ldots+x^n)=1-x^{n+1}$. Подставим $x=-x$:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k dt=\int_0^t\frac{1}{1+x}-(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

$$\log(1+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k+(-1)^{n+1}\int_0^t\frac{x^n}{1+x}dx \qquad -1<t\leqslant 0, t<x\leqslant 0.$$

$$\int_0^t\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^t(\frac{|x|^n}{1-|x|}dx\leqslant\frac{1}{1-|t|}\int_t^0|x|^n dx=\frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}|t|^{n+1}.$$

Это выражение стремится к нулю при $n\to\infty,\ t>-1$, если $t\in(-1,0], |t|\leqslant r<1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\leqslant\frac{1}{1+|t|}\frac{1}{n+1}|t|^n\leqslant\frac{1}{1-r}\frac{1}{n}r^n$.

□

Note. Логарифм — аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $\left|1-\frac{x}{x_0}\right|<1$.

$$\log x-\log x_0=\log\frac{x}{x_0}=\log(1-(1-\frac{x}{x_0}))=\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}(\frac{x}{x_0}-1)^n.$$

$$\log x=\log x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\frac{1}{x_0}(x-x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

2.12.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(x)d(x-t) = f'(x)(x-t)\,|_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x-t)dx =$$

$$= f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

И так далее

Theorem 37. *f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{n!}\int_a^t f^{(n+1)}(z)(t-x)^{n+1}dx.$$

Ex. $x \rightsquigarrow u$, $x = a(1-u) + tu$
$u \in [0,1]$, $dx = (t-a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1-u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t-a) = \\ &= (t-a)(1-u) \end{aligned}$$

$$r_n(a,t) = \frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a(1-u)+tu)(t-a)^n(1-u)^n(t-a)^n du.$$

Если $a = 0$:

.

$f(x) = (1+x)^m, \qquad m \in \mathbb{R}$
$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$
$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-1}$
$\vdots$
$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k-1)(1+x)^{m-k}$

Designation.

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

$|x| < 1$

$$(1+t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.$$

Theorem 38 (Ряд Ньютона)**.** *Ряд*

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}t^k$$

сходится к $(1+t)^m$*, при* $|t|<1$

Доказательство. $R_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$. $0\leqslant t<1$.

$$|R_n(t)|\leqslant |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right|.$$

□

Theorem 39. $R_n(t)\to 0$ *при* $|t|<1$*, и сходится равномерно при* $|t|<\phi<1$.

Доказательство. Пусть $\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right|=I$

1. Сначала $0\leqslant t_0$:

$$I\leqslant\int_0^1(1-u)^n du=\frac{1}{n+1}\longleftarrow 0.$$

$$|R_n(t)|\leqslant t^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right|\frac{m}{n+1}=a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)}=\frac{n+1}{n+2}\frac{|m-n-1|}{n+2}t.$$

$t<1,\ t+\varepsilon<1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)(t)}<t+\varepsilon$

2. Следующий случай $-1<t<0$ Подынтегральное выражение:

$$\left|\frac{1-u}{1+tu}\right|^n\left|\frac{1}{1+tu}\right|^{m-1}.$$

$$1+|t|\geqslant|1+tu|\geqslant 1-|t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left|\frac{1-u}{1+tu}\right|\leqslant\frac{1-u}{1-|t|u}=\frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u}=1-\left(n\frac{1-|t|}{1-|t|u}\right).$$

Это не превосходит $1-n(1-|t|)$.

Второй множитель:

(a) $m\leqslant 1$

$$\left|\frac{1}{1+tu}\right|^{-m+1}\leqslant\left(\frac{1}{1-|t|u}\right)^{-m+1}\leqslant\left(\frac{1}{1-|t|}\right)^{-m+1}.$$

(b) $m>1$

$$|1+tu|^{m-1}\leqslant(1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку $C_m(t)$.

$$I \leqslant C_m(t)\int_0^1 (1-n(1-|t|))du = C_m(t)\left(-\frac{1}{1-|t|}\right)\frac{1}{n+1}(1-n(1-|t|))^{n+1}\mid_{n=0}^{n=1}=$$

$$= C_m(t)\frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}(1-|t|^{n+1}) \leqslant C_m(t)\frac{1}{n+1}.$$

Получили

$$R_n(t) \leqslant |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\frac{1}{n+1}\bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2}|t|\left|\frac{m-n+1}{n+2}\right| \longleftarrow |t|, \qquad n\to\infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leqslant \rho \quad \sigma_n(t) \leqslant A\rho^{n-1}, \quad |t| \leqslant \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

$x, x_0 > 0$

$$x^m = x_0^m\left(\frac{x}{x_0})\right)^m = x_0^m(1-(1-\frac{x}{x_0}))^m =$$

$$= x-^n(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(-1)^n\left(1\frac{x}{x_0}\right)^m = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(x-x_0)^m.$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

Theorem 40 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** *Если f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке с концами a, t:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \tag{2.8}$$

Statement. *Если f дифференцируема $n+1$ раз:*

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t\ : R_n(t,a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{2.9}$$

Note. Если $f \in C^{(n+1)}$, то **??** можно вывести из **??**.

Theorem 41 (о среднем)**.** *φ, ψ — функции на $[c,d]$, φ непрерывна, ψ - интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда*

$$\exists\psi \in [c,d] : \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\psi)\int_c^d \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Можно считать, что $\psi \geqslant 0$. Пусть $m = \min_{x\in[c,d]} \varphi(x), \quad M = \max_{x\in[c,d]}$.

$$m \int_c^d \varphi(x)dx \leqslant \int_c^d \varphi(x)\psi(x)x \leqslant M \int_x^d \varphi(x)dx.$$

$$m\psi(x) \leqslant \varphi(x)\psi(x) \leqslant M\psi(x).$$

Если $\int_c^d \psi(x)dx = 0$, теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leqslant \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx} \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\exists\ \zeta \in [c,d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx}.$$

□

Statement (оценка остатка)**.**

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists\zeta : R_n(t,a) = \frac{1}{n!} f(^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}\left[-(t-x)^{n+1}\Big|_{x=a}^{x=t}\right] = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}.$$

2.13 Дифференциальные уравнения

$$\Phi\big(f'(t), f(t), t\big) = 0.$$

Theorem 42. *Пусть f — непрерывная дифференцируемая функция на (a,b). Следующие условия эквивалентны:*

1. $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a,b)$
2. $\exists A : \ f(t) = Ae^{ct}$

Доказательство. $2 \Longrightarrow 1$ — очевидно
$1 \Longrightarrow 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда $g(t) \equiv A \in R$.

□