

Конспект по матанализу I семестр  
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

16 декабря 2019 г.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Непрерывные функции</b>	<b>5</b>
1.1	Определения, свойства . . . . .	5
1.2	Теоремы . . . . .	5
1.2.1	Теоремы Вейерштрасса . . . . .	5
1.2.2	Теорема о промежуточном значении . . . . .	5
1.3	Степени с рациональным показателем . . . . .	5
1.4	Равномерная непрерывность . . . . .	5
1.4.1	Теорема Кантора . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Дифференцирование</b>	<b>7</b>
2.1	Определения . . . . .	7
2.2	Правила дифференцирования . . . . .	7
2.3	Сходимость последовательностей . . . . .	7
2.4	Первообразные . . . . .	10
2.5	Интеграл . . . . .	11
2.5.1	Интеграл Дарбу . . . . .	12
2.5.2	Связь интеграла и производящей . . . . .	16
2.5.3	Формула интегрирования по частям . . . . .	16
2.6	Логарифм и экспонента . . . . .	18



# Глава 1

## Непрерывные функции

### 1.1 Определения, свойства

### 1.2 Теоремы

#### 1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

#### 1.2.2 Теорема о промежуточном значении

### 1.3 Степени с рациональным показателем

### 1.4 Равномерная непрерывность

#### 1.4.1 Теорема Кантора



## Глава 2

# Дифференцирование

### 2.1 Определения

### 2.2 Правила дифференцирования

### 2.3 Сходимость последовательностей

**Theorem 1.**  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, f_n \rightarrow f$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \rightarrow |f(x)| \leq M$
2.  $f$  – ограничена:  $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

*Доказательство.* Очевидно □

**Theorem 2.**  $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$  на  $A$ . Пусть  $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$ . Тогда  $f_n g_n \Rightarrow f g$

*Доказательство.*

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

**Theorem 3** (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть  $f_n$  – последовательность функций на множестве  $A$ . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Необходимость.

Пусть  $f_n \Rightarrow f, \quad \varepsilon > 0$  найдем  $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$ .

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 3 выполнено.  $x \in A$  - фиксировано. Тогда  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  есть последовательность Коши (см 3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$ . Нашли  $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$  Зафиксируем  $k, x$ , перейдем к пределу по  $j$  :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для  $\forall x \in A, \forall k > N$ . □

**Ех.** Функция на  $\mathbb{R}$ , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

**Theorem 4** (Вейерштрасс). Пусть  $f_n$  - функция на множестве  $A$ .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно.

*Note.* Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$ .

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

**Ех** (Ван дер Варден).  $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$  ; продолжим с периодом 1.  $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  - непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в  $h_k (\pm)$ , чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном  $j$  значение будет разных знаков.

**Designation.** Ряд из функций  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$  - сходится обозначает, что функции  $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$  сходятся в соответствующем смысле.

**Ех.**  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$



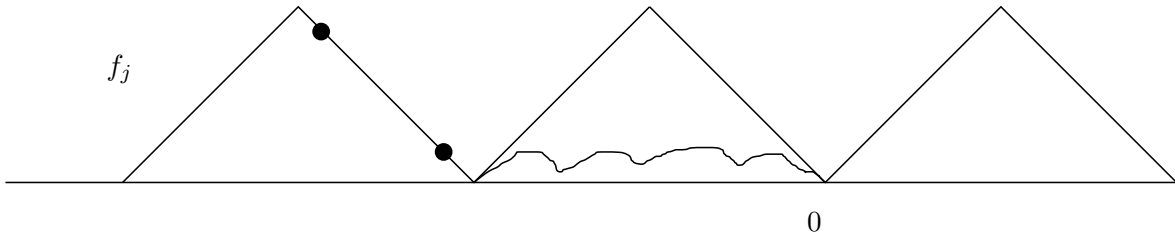


Рис. 2.1: График функции Ван дер Вардена

**Theorem 5.**  $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  Предположим, что  $f_n \rightarrow f$  поточечно.  $f_n$  дифференцируемы и  $f_n \Rightarrow g$  равномерно. Тогда  $f$  дифференцируемая на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$ .

*Доказательство.* Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} = f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для  $x, y \in \langle a, b \rangle$  :

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad c \text{ между } x, y.$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем  $k, l \rightarrow \infty$ .

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем  $x$ .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных  $k, x$ :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

## 2.4 Первообразные

Пусть все происходит на  $\langle a, b \rangle$ .  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Def 1.** Говорят, что  $f$  есть первообразная для  $g$ , если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$  всюду.

**Theorem 6** (Ньютон, Лейбниц). Если  $g$  – непрерывна, то у нее есть первообразная.

*Note.* К этой теореме мы еще вернемся.

**Statement.** Если  $f' = g$ , то  $(f + c)' = g$  для любой константы  $c$ .

**Theorem 7.** Если  $f_1, f_2$  – первообразные для  $g$ , то  $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
$e^x$	$e^x + c$

**Designation.** Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

**Statement.**  $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

**Def 2.** Линейная функция – это функция вида  $\varphi(h) = ch$ .

Линейная форма:  $\langle a, b \rangle$ ;  $\Phi$  – отображение отрезка  $\langle a, b \rangle$  в множество линейных функций.  
 $x \in \langle a, b \rangle$ ,  $\Phi(x)$  – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

**Def 3** (дифференциал).  $f$  – дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

**Ex.**  $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  – тождественная.  $dx(u, h) = h$

**Statement.**  $\Phi = c \cdot dx$ , где  $c$  – некая функция на  $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма  $\varphi = gdx$ ; найти функцию  $f : df = \varphi$

**Statement.**

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dg.$$

**Ex.**

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену  $x = \sin t$ , пусть  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) &= \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) \end{aligned}$$

Тогда  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

**Statement** (Формула интегрирования по частям).  $(fg)' = f'g + fg'$  *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

**Ex.**

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

**Ex.**

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

## 2.5 Интеграл

**Def 4.**  $A$  – множество произвольной природы.  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Phi$  – функционал на  $A$ .

**Def 5.** Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ .

$$f \mapsto \Phi(f)$$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

**Statement.** *Каким должен быть интеграл?*

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число  $(f \mapsto I(\alpha))$

2.  $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$  (Линейность)

3.  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$

4.  $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

**Def 6.** Разбиение – ступенчатая функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

**Def 7.**  $g$  на  $\langle a, b \rangle$  – ступенчатая, если при  $i \neq j$  она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка  $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

### 2.5.1 Интеграл Дарбу

**Def 8.**  $J$  – конечный интервал, если его разбиение – это набор интервалов  $\{J_k\}_{k=1}^N$ , такой что  $J_k \cap J_s = \emptyset$ ,  $k \neq s$ ,  $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$ . (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

**Def 9.** Длина интервала  $\langle a, b \rangle$  – это  $b - a$  Обозначается  $|J| = b - a$ ,  $|\emptyset| = 0$

**Lemma.** Если  $\{J_k\}_{k=1}^N$  – разбиение  $J$ , то  $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

**Def 10.**  $e$  – множество,  $f$  – ограниченная функция на  $e$ .  
Колебание  $f$  на  $e$  :

$$\begin{aligned} osc_e(f) &= \sup_{x, y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left( \sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left( \sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

Пока предполагаем, что  $f$  ограничена. Просуммируем отрезки  $J_1, \dots, J_N$  из разбиения отрезка  $J$ .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) = \underline{S}.$$

– нижняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

– верхняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

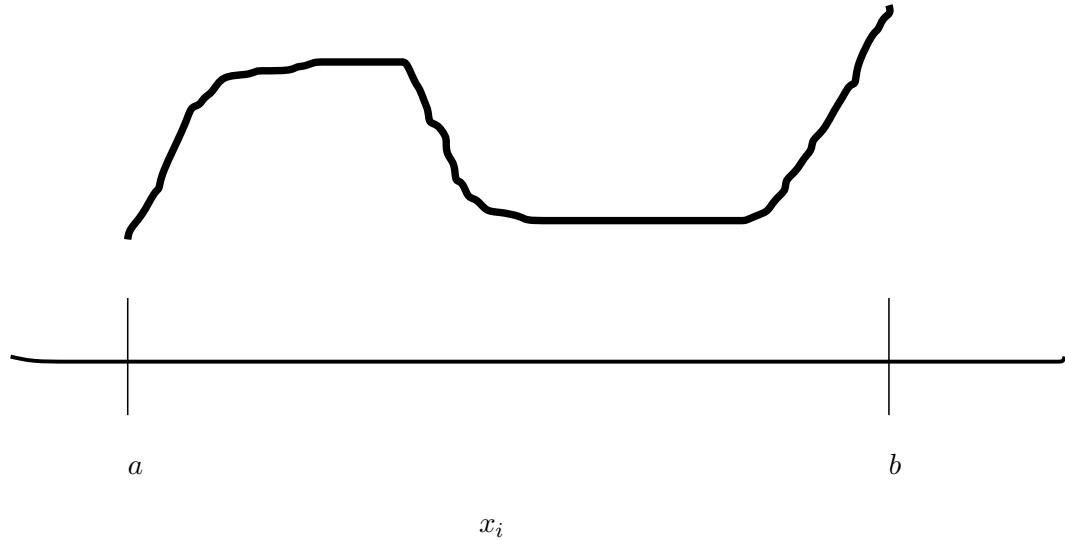


Рис. 2.2: График функции

**Designation.**  $A$  – множество всех нижних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$   
 $B$  – множество всех верхних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

**Statement.** Пусть  $\{A, B\}$  – щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели – это  $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$  (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от  $f$ )

**Statement.**  $\{A, B\}$  – щель.

*Доказательство.*  $\varepsilon$  – разбиение отрезка  $J_i$ .  $\underline{S}_\varepsilon(f)$ ,  $\bar{S}_\varepsilon(f)$  – верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что  $\underline{S}_\varepsilon(f) \leq \bar{S}_\varepsilon(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$  – разбиение  $J_i : \mathcal{F}$  – измельчение  $\mathcal{E}$ , если  $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$ .

**Lemma.** Если  $\mathcal{F}$  – измельчение для  $\mathcal{E}$ , то

$$\underline{S}_\mathcal{F}(f) \geq \underline{S}_\mathcal{E}, \quad \bar{S}_\mathcal{F} \leq \bar{S}_\mathcal{E}.$$

**Lemma.** Рассмотрим  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  – разбиения отрезка  $J_i$ . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  – разбиения.  $\mathcal{F}$  – общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{F} \leq \bar{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно,  $\{A, B\}$  – щель. □

*Note.* Определенные величины  $\bar{I}(f), \underline{I}(f)$  законны.

**Def 11.**  $f$  называется интегрируемой по Риману, если  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

**Ех.**

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману.  $\varphi$ – ступенчатая функция на  $J$ , Существует разбиение  $\underline{S}$  отрезка на  $J$ .  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \bar{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда  $\underline{I}(\varphi) - \bar{I}\varphi = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

*Note.* Пусть  $J$  – произвольный отрезок,  $f$  – ограниченная функция на  $J$ ,  $\mathcal{E}$  – разбиение отрезка  $J$  на непустые отрезки  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

**Theorem 8.** Критерий интегрируемости по Риману  $f$  – интегрируема по Риману на  $J$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $e_1, \dots, e_k$  Отрезка  $J$ , такое что  $\sum_{i=1}^k |e_k| \text{osc}_{e_k} f < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Проверим, что  $f$  удовлетворяет условию 8 □

**Property.** 1.  $f$  – непрерывна на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  – интегрируема.

2.  $\Sigma$  – разбиение,

$$\bar{S}_{\Sigma}(-f) = -\underline{S}_{\Sigma}(f).$$

3. Если  $\alpha > 0$ ,

$$\bar{S}_{\Sigma}(\alpha f) = \alpha \bar{S}_{\Sigma}(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если  $f$  – интегрируема и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f$  – интегрируема и  $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5.  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – ограничены.  $\Sigma$  – разбиение.

$$\bar{S}_{\Sigma}(f + g) \leq \bar{S}_{\Sigma}(f) + \bar{S}_{\Sigma}(g).$$

6.

$$\underline{S}_{\Sigma}(f + g) \geq \underline{S}_{\Sigma}(f) + \underline{S}_{\Sigma}(g).$$

7. Если  $f, g$  – интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f + g$  – интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8.  $f, g$  – интегрируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  – интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность.  $f \geq 0$ ,  $f$  – интегрируема по Дарбу. Тогда,  $I(f) \geq 0$ .

10.  $f, g$  – интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot g$  – интегрируема.

*Доказательство.*

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть  $J$  – отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

$f, g$  – интегрируемы, тогда  $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \bar{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \bar{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда  $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$ .

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11.  $f$  – интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $J \subset \langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot \chi_J$  – интегрируема. ( $\chi_J$  равна единице на  $J$  и нулю на остальных точках)

Если  $J = \{c\}$ , то  $I(f\chi_J) = 0$ .

12.  $J_1, J_2$  – два подотрезка, такие что  $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$ . Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла.  $f$  – интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $|f| \leq M$  на  $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

**Designation.**  $I(f\chi_J)$  не зависит от того, включает ли  $J$  концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{(c,d)}).$$

**Designation.** Если  $d < c$  :

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

**Statement.**  $f$  – интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

### 2.5.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – первообразная функция  $f$ , если  $F$  – дифференцируема и  $F' = f$ .

**Theorem 9** (Ньютон-Лейбниц). Пусть  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$  и непрерывна в точке  $t \in \langle a, b \rangle$ . Пусть  $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$ . Тогда  $F$  – дифференцируема в точке  $t$  и  $F'(t) = f(t)$ .

*Доказательство.*  $x \neq t$ .

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t) ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

$f$  – непрерывна в  $t$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ . Если  $|s - t| < \delta$ ,  $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

**Corollary.** Если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $\forall t_0 \in [a, b] : F$  – первообразная  $f$ .

**Corollary** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f$  – непрерывна на  $[a, b]$ ,  $F$  – первообразная  $f$ . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Def 12.**  $f \in C^k \langle a, b \rangle$ ,  $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$ , если  $f, f', \dots, f^{(k)}$  – непрерывны.

**Theorem 10.** Если  $f, g \leq C^1(a, b)$ , то

$$\int_a^b f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

где  $\Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

### 2.5.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  – непрерывны на  $[a, b]$  и  $f, g, f', g'$  – непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть  $\Phi$  – первообразная для  $f'g$ . Запишем первообразную для  $fg'$

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$



$$\Phi(x) = f(x)g(x) \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим  $u|_y^x = u(x) - u(y)$ .

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

**Theorem 11.**  $f_n, f$  – заданы на  $\langle a, b \rangle$ ;  $n \in \mathbb{N}$  Пусть

1. все  $f_n$  интегрируемы по Риману на  $\langle a, b \rangle$
2.  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

*Доказательство.*

**Lemma.**  $E$  – множество,  $u, v$  – вещественные функции на  $E$ .  $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \forall E$ . Тогда  $|osc_E(u) - osc_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|osc_{\langle a, b \rangle} - osc_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$  – отрезки  $\langle a, b \rangle$ :

$$\sum_{j=1}^N |I_j| osc_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| osc_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно,  $f$  – интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \exists M : \forall n \geq M \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

**Statement.** Если  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$ , то  $|f|$  тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

## 2.6 Логарифм и экспонента

Пусть функция  $l$  удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать  $l$ , заданную на  $\mathbb{R}_+$ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

**Def 13.** Логарифм – строго монотонная функция, заданная на  $\mathbb{R}_+$ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

**Statement.** Для  $n \in \mathbb{N}$ :

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

**Statement.** Если  $l$  – логарифм,  $c \neq 0$ , то  $cl$  – тоже логарифм.

**Lemma.** Если  $l$  – логарифм, то  $l$  – непрерывна на всей области определения.

*Доказательство.* Пусть  $l$  – логарифм. Считаем, что  $f$  строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что  $t = l(1) = 0$ . Пусть  $t > 0$ .

$$l((1+x)^2) = 2l(1+x).$$

При  $x \rightarrow 1+$  получаем, что  $t = 0$ . Если  $x \rightarrow 1-$ , получаем то же самое. Значит  $l$  – непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке.  $\square$

**Lemma.** Если  $l$  – логарифм, то функция  $l$  – дифференцируема.

*Доказательство.*

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t) dt \quad x \in (0, +\infty).$$

$\Phi$  дифференцируема.

$$\Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t) dt = \int_1^x l(t) dt + \int_x^{2x} l(t) dt = \Phi(x) =$$

$$x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x}) d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y) dy =$$

$$\Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y) dy$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$ . А  $\Phi$  дифференцируема, следовательно,  $f$  тоже дифференцируема.  $\square$

**Theorem 12** (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$ . Зафиксируем  $y$  и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

**Theorem 13.** Если  $l$  логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

*Доказательство.* Только что доказали. □

**Theorem 14.**  $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$  – логарифм.

Сама  $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

**Theorem 15.** Если  $C \neq 0$ , то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ – есть логарифм.}$$

*Доказательство.* Достаточно доказать теорему для  $C = 1$ .

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если  $x_1 > x$ ,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно,  $\varphi$  строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

**Designation.** Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

**Property.**  $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

**Statement.** Образ функции  $\log$  есть все вещественные числа.

*Доказательство.* При  $x_1 > x$ ,  $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$ . Рассмотрим  $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$ :

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$ . □

**Def 14** (Обратная функция к логарифму). У функции  $\log$  есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

**Property.** 1.  $\exp$  строго возрастает

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

**Statement.** Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

**Statement.**

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть  $f$  имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Ряд Тейлора для  $f$  в окрестности точки  $x$ :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

**Theorem 16.** Ряд Тейлора для экспоненты,  $x_0 = 0$ :

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого  $x$  этот ряд сходится к  $\exp(x)$ , сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

*Доказательство.*

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем  $R > 0$ , пусть  $|x| \leq R$  Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

**Lemma.** Пусть  $a_0, a_1, a_2 \dots$  – положительные числа и  $\exists N : a_j < \eta < 1 \quad \forall j > N$ . Тогда  $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

**Corollary.** Если  $a_j \geq 0$ ,  $a_j \rightarrow 0$ , то  $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме  $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$  стремится к нулю. Доказали равномерную сходимость.  $\square$

*Note.*

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

**Corollary** (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

*Доказательство.*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

$\square$

*Note.*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

**Corollary.**

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Ex** (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

$g$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

Если  $x \neq 0$ ,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2 \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

$g$  дифференцируема в нуле и  $g'(0) = 0$ .

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j - \text{полином.}$$

Значит,  $g$  бесконечно дифференцируемая функция и  $g^{(j)}(0) = 0$ .

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к  $g$ .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

$h$  – бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

**Corollary.** Пусть  $I = (a, b)$ ,  $a < b$ . Существует бесконечно дифференцируемая функция  $u$  :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$