Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

18 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Глава 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифференцирования

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 1. $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leq M$
2. f *– ограничена:* $|f(n)| \leq M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Доказательство. Очевидно □

Theorem 2. $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ *на* A*. Пусть* $\exists M : \forall x \in A\ \forall n |f_n(x)| \leq M$*. Тогда* $f_n g_n \rightrightarrows fg$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 3 (Критерий Коши для равномерной сходимости)**.** *Пусть* f_n *– последовательность функций на множестве* A*. Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j > N\ \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x in A.$

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть 3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Ex. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс): } f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 4 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n – функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \le a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \le |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \le a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

□

Ex (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \ne 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k $(\pm)$, чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ – сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \ldots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{t}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \le \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \ge 1|.$$

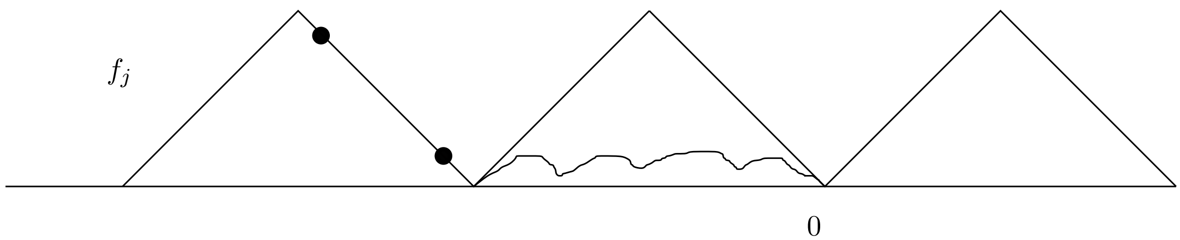

Рис. 2.1: График функции Ван дер Вардена

> **Theorem 5.** *$f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ Предположим, что $f_n \to f$ поточечно. f_n дифференцируемы и $f_n \rightrightarrows g$ равномерно. Тогда f дифференцируемая на $\langle a,b\rangle$ и $f' = g$.*

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right|.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{x-1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x,y \in \langle a,b\rangle.$$

Оценим разность. Зафикируем x.

$$\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \wedge x \neq y \to |\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} f_k'(x)| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x:

$$|y-x| < \delta, y \neq x \to |f_k'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x-y| < \delta \to |g(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leq 3\varepsilon.$$

□

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b\rangle$. $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle y$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 6 (Ньютон, Лейбниц). *Если g – непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c.*

Theorem 7. *Если f_1, f_2 – первообразные для g, то $f_1 - f_2 = const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c$, $\alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция – это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b\rangle$; Φ – отображение отрезка $\langle a, b\rangle$ в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b\rangle$, $\Phi(x)$ – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал). f – дифференцируема на $\langle a, b\rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ – тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, *где c - некая функция на $\langle a, b\rangle$*

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dg.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad x \in (-1,1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt = \int \cos^2(t) dt =$$
$$\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int ((1+\cos 2t) dt =$$
$$\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) = \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -fdy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Ex.

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx.$$

$$= \sin x e^x - \int xosx de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A – множество произвольной природы. $\Phi : A \to \mathbb{R}$. Φ – функционал на A.

Def 5. Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
$f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \Longrightarrow \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi)\langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. *Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число* ($f \mapsto I(\alpha)$)

2. $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)=I(\beta)$ *(Линейность)*

3. $f\leq g\Longrightarrow I(f)\leq I(g)$

4. $\langle a,b\rangle : I(\chi_{\langle a,b\rangle})=b-a$

Def 6. Разбиение – ступенчатая функция на отрезке $\langle a,b\rangle,\ a,b\in\mathbb{R}:$

$$\langle a,b\rangle=\bigcup_{i=1}^{n}\langle\alpha_i,\beta_i\rangle,\quad \langle\alpha_i,\beta_i\rangle\cap\langle\alpha_j,\beta_j\rangle\neq\varnothing.$$

Def 7. g на $\langle a,b\rangle$ – ступенчатая, если при $i\neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разиения нашего отрезка $\langle a,b\rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.5.1 Интеграл Дарбу

Def 8. J – конечный интервал, если его разбиение – это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^{N}$, такой что J_k $capJ_s=\varnothing,\ k\neq s,\ \bigcup_{k=1}^{N}J_k=J_i$. (ДОпускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 9. Длина интервала $\langle a,b\rangle$ – это $b-a$ Обозначается $|J|=b-a$, $|\varnothing|=0$

Lemma. *Если* $\{J_k\}_{k=1}^{N}$ *– разбиение* J*, то* $|J|=\sum\limits_{k=1}^{N}|J_k|$

Def 10. e – множетсво, f – ограниченная функция на .

Колебание f на e :

$$esc_e(f)=\sup_{x,y\in e}|f(x)-f(y)|=$$

$$=\sup_{y}\left(\sup_{x}(f(x)-f(y))\right)=\sup_{x}\left(\sup_{y}(f(x)-f(y))\right)=$$

$$=\sup_{x\in e}f(x)+\sup_{y\in e}(-f(x)=\sup_{x\in e}f(x)-\inf_{y\in e}f(y).$$

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки $J_1,\dots J_N$ из разбиения отрезка J.

$$\sum_{k=1}^{N}|J_k|\inf_{x\in J_k}f(x)\underline{S}.$$

– нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1\dots J_N$

$$\sum_{k=1}^{N}|J_k|\sup_{x\in J_k}f(x)=\overline{S}.$$

– верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1\dots J_N$

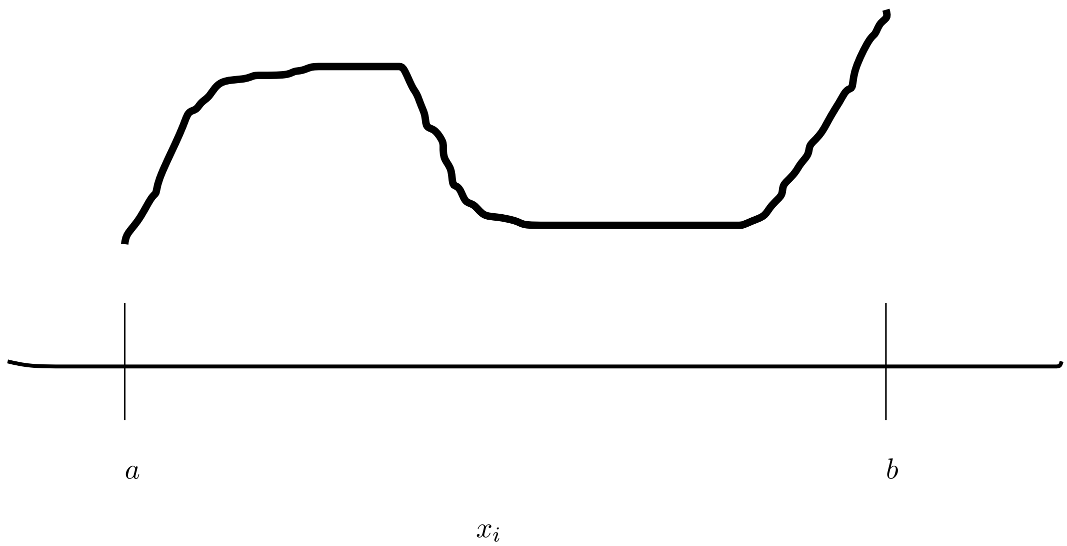

Рис. 2.2: График функции

Designation. A – множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i
B – множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. *Пусть* $\{A, B\}$ *– щель. Тогда*

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \overline{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели – это $[\underline{I}(f), \overline{I}(f)]$ *(верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от* f*)*

Statement. $\{A, B\}$ *– щель.*

Доказательство. ε – разбиение отрезка J_i. $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ – верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leq \overline{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ – разбиение J_i : $\mathcal{F}$ – измельчение $\mathcal{E}$, если $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. *Если* $\mathcal{F}$ *– измельчение для* $\mathcal{E}$*, то*

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geq \underline{S}_{\mathcal{E}}, \quad \overline{S}_{\mathcal{F}} \leq \overline{S}_{\mathcal{E}}.$$

Lemma. *Рассмотрим* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ *– разбиения отрезка* J_i*. Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)*

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – разбиения. $\mathcal{F}$ – общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{F}} \leq \overline{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ – щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 11. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ex.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ– ступенчатая функция на J, Существует разбиение $\underline{S}$ отрезка на J. $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\} : \varphi(x) = \sum i = 1^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i \overline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}\varphi = I(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{k} |e_i| c_i$

Note. Пусть J – произвольный отрезок, f – ограниченная функция на J, $\mathcal{E}$ – разбиение отрезка J на непустве отрезки $\{e_1, \dots e_n\}$.

.

Theorem 8. *Критерий интегрируемости по Риману f – интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение $e_1, ..e_k$ Отрезка J, такое что $\sum\limits_{i=1}^{k} |e_k| osc_{e_k} f < \varepsilon$.*

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию 8 □

Property. *1. f – непрерывна на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ – интегрируема.*

2. Σ – разбиение,

$$\overline{S}_{\Omega}(-f) = -\underline{S}_{\Omega}(f).$$

3. Если $\alpha > 0$,

$$\bar{S}_{\Sigma}(\alpha f) = \alpha \bar{S}_{\Sigma}(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если f – интергируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf – интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5. $f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ – ограничены. Σ – разбиение.

$$\overline{S}_{\Sigma}(f + g) \leq \overline{i S}_{\Sigma}(f) + \overline{S}_{\Sigma}(g).$$

6.

$$\underline{S}_{\Sigma}(f + g) \geq \underline{S}_{\Sigma}(f) + \underline{S}_{\Sigma}(g).$$

7. Если f, g – интегрируемы на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ – интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. f, g – интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ –интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность. $f \geq 0, f$ – интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geq 0$.

10. *f, g – интегрируемы на $\langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot g$ – интегрируема.*

Доказательство.
$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \le C, |g| \le D \text{ на } \langle a, b\rangle.$$

Пусть J – отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y_| = |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(x)| =$$

$$\le |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$
$$= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| \le$$
$$\le C \cdot osc_J g + D \cdot osc_J f.$$

f, g – интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon \ \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \le \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \le \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{matrix} \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| osc_J f \le \varepsilon \\ \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| osc_J g \le \varepsilon \end{matrix}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : osc_J(fg) \le C \cdot osc_J g + D \cdot osc_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot osc_J fg \le C \cdot \sum_J |J| \cdot osc_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot osc_J f \le (C + D)\varepsilon.$$

□

11. *f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $J \subset \langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ – интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)*

    Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. *J_1, J_2 – два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \varnothing$. Тогда*

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. *Основная оценка интеграла. f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $|f| \le M$ на $[c, d] \subset \langle a, b\rangle$*

$$\left|\int_c^d f\right| \le M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \overset{def}{=} I(f\chi_{\langle c, d\rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

Statement. *f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$.*

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.5.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ – первообразная функция f, если F – дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 9 (Ньютон-Лейбниц). *Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a,b\rangle$ и непрерына в точке $t \in \langle a,b\rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a,b\rangle : F(s) = \int_{t_0}^{s} f$. Тогда F – дифференцируема в точке tи $F'(t) = f(t)$.*

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left|\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)\right| = \left|\frac{\int_{t_0}^{x} f = \int_{t_0}^{t} f}{x-t}\right| = \left|\frac{\int_{t}^{x}}{x-t} - f(t)\right| =$$

$$\frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f - (x-t)f(x)\right| = \frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f(s) - f(t)ds\right| \leq \sup_{s\in[t,x]} |f(s) = f(t)|.$$

f – непрерывна в t. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$. Если $|s-t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x-t| < \delta \Longrightarrow \forall s \in [t,x] : |s-t| < \varepsilon \to |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t,x]|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x\to t} |\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)| = 0 \Longrightarrow F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a,b\rangle$, то $\forall t_0 \in [a,b] : F$ –первообразная f.

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница). f – непрерывна на $[a,b]$, F –первообразная f. Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 12. $f \in C^k\langle a,b\rangle, \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0,\infty\}$, если $f, f', \dots f^{(k)}$ – непрерывны.

Theorem 10. *Если $f, g \leq C^1(a,b)$, то*

$$\int_b^a fg' = f \cdot g \mid_a^b - \int_a^b f'g,$$

где $\Phi \mid_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

2.5.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a,b]$ и f, g, f', g' – непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ – первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(x)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x)\int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 11. *f_n, f – Заданы на $\langle a, b\rangle; n \in \mathbb{N}$ Пусть*

1. *все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b\rangle$*
2. *$f_n \rightrightarrows f$. Тогда f интегрируема по Риману*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. *E – множество, u, v – вещественные функции на E. $|u(x) - v(x)| \leq \lambda\ \forall E$. Тогда $|ose_E(u) - ose_E(v)| \leq 2\lambda$*

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

$$|ose_{\langle a,b\rangle} - ose_{\langle a,b\rangle(f)}| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists\{I_1, \dots I_N\}$ – отрезки $\langle a, b\rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| ose_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| osc_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a)+1).$$

Следовательно, f – интегрируема.

$$\left|\int_a^b f_n(x_)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x) - f(x)dx\right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0\ \exists M : \forall n \geq M\ \forall x \in \langle a, b\rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. *Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.6 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \Longrightarrow l(0) = 0.$$

Будем искать l, заданную на $\mathbb{R}_+$.

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 13. Логарифм – строго монотонная функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. *Для $n \in \mathbb{N}$:*

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \Longrightarrow l(1) = 0.$$

Statement. *Если l – логарифм, $c \neq 0$, то cl – тоже логарифм.*

Lemma. *Если l – логарифм, то l – непрерывна на всей области определения.*

Доказательство. Пусть l – логарифм. Считаем, что fстрого возрастает.

$$t = \lim_{x \to 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 1l(1+x).$$

При $x to 1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \to 1-$, получаем тое самое. Значит l – непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. □

Lemma. *Если l – логарифм, то функция l – дифференцируема.*

Доказательство.

$$\Phi(x) - \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{gathered} \Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ x \int_x^{2x} l(x \cdot \tfrac{t}{x}) d(\tfrac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy = \\ \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy \end{gathered}.$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. □

Theorem 12 (Производная логарифма).
$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 13. *Если l логарифм, то*

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 14. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ *– логарифм.*
Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 15. *Если $C \neq 0$, то*

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ – есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x}}{)} \frac{t}{x}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \; x \xrightarrow{to} 0 \; \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Statement. *Образ функции* log *есть все вещественные числа.*

Доказательство. При $x_1 > x,\ \log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$. □

Def 14 (Обратная функция к логарифму)**.** У функции log есть обратная функция, называющаяся экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Property. *1.* exp *строго возрастает*

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Statement. *Экспонента дифференцируема:*

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)} j!^j}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Theorem 16. *Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:*

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $epx(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left|\exp x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\right| = \frac{\exp c}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leq R$ Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражена стремиться к нулю.

Lemma. *Пусть* $a_0, a_1, a_2 \ldots$ *– положительные числа и* $\exists N : a_j < \eta < 1\ \forall j > N$. *Тогда* $a_0 a_1 \ldots a_j \to 0 \quad j \to \infty$

Corollary. Если $a_j \geq 0,\ a_j \to 0$, то $a_0 \ldots a_j \to 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \ldots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. □

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n! = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad x \to \infty.$$

□

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример)**.**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j \text{ – полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

h – бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b),\ a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция $u:$

$$\begin{array}{ll} u(x) > 0 & x \in (a, b) \\ u(x) = 0 & x \notin (a, b) \end{array}.$$

Designation. l– логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

тТакое число называется основанием логарифма l.

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e.

Designation (общий случай)**.**

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a – ан для l.

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : \ u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \ldots \log u}_{n}) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$

Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

1. $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1+v_2)\log u) = \exp v_1 \exp u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$
2. $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$
3. $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_2 \log u) = u^{v_1 v_2}$

2.6.1 Показательная функция

Def 15. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 16. Пусть $\neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

2.6.2 Степенная функция

Def 17. Степенная функция $g(x) = x^b, \quad x \in (0, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. *Если $a > 1$, то $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x, \quad x \to \infty$*

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{blogx - xloga}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нолю при $x \to \infty$. $\square$

Practice.
$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$
$\forall \alpha : \lim_{x \to 0} x^\alpha \log x = 0$

Statement. *Ранее доказали , что*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится при любых x. Экспонента равномерна на любом конечном отрезка.

Ряд для e^x по степеням $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0) \tag{2.1}$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность"

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ – непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ – сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}}{(2k)!} x^{2k} \tag{2.2}$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. *В 2.2 общий член стремиться к нулю, если* $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k}\right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

2.6.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 17 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0)**.**
$f(x) = \log(1+x),\ f'(x) = (1+x)^{-1},\ f^{(2)} = -(1+x)^{-2},\ f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \ \ldots$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)(1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{\log^{(n)} 1}{n!} x^n + \frac{\log^{k+1}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n \to 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \to 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \to 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. *Раскладывается ли логарифм ряд Тейлора:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \tag{2.3}$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n}|x|^n \longleftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $xin(-1,1]$.

> **Theorem 18.** $x \in (-1,1]$. *Тогда ряд 2.3 равномерно сходится равномерно на любом* $(r,1], \quad r > -1$.

Доказательство. 1. $x \in [0,1]$.

$$\left|\log(1+x) - \sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right| \le \frac{1}{k+1}x^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \le \frac{1}{k+1}x^{k+1} \le \frac{1}{k+1}, \quad c \in lra \tag{2.4}$$

В частности, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

2. $-1 < x \le 0$

$$\left|\log(1+x) - \sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right| \le \frac{1}{k+1}|x|^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \le \frac{1}{k+1}|x|^{k+1} \le \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{k+1} \tag{2.5}$$

Удачным случаем 2.5 будет $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \le \frac{1}{2}, \ x \in (-\frac{1}{2}, 0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1-x^{n+1}$. Подставим $x = -x$:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k dt = \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

$$\log(1+t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^n}{1+x}dx \qquad -1 < t \le 0, t < x \le 0.$$

$$\int_0^t \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^t (\frac{|x|^n}{1-|x|}dx \le \frac{1}{1-|t|}\int_t^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}|t|^{n+1}.$$

Это выражение стремится к нулю при $n \to \infty, \ t > -1$, если $tin(-1,0], |t| \le r < 1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\le \frac{1}{1+|t|}\frac{1}{n+1}|t|^n \le \frac{1}{1-r}\frac{1}{n}r^n$.

□

Note. Логарифм – аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $|1 = \frac{x}{x_0}| < 1$.

$$\log x - \log x_0 = \log\frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}(\frac{x}{x_0} - 1)^n.$$

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{ooo}\frac{1}{n}(-1)^n\frac{1}{x_0}(x - x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

2.6.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.

$$f(t)-f(a)=\int_a^t f'(x)d(x-t)=f'(x)(x-t)\mid_{x=a}^{x=t}-\int_a^t f''(x)(x-t)dx=$$

$$=f'(a)(t-a)+\int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

То есть:

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+\int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

И так далее

Theorem 19. *f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.*

$$f(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(t-a)^j+\frac{1}{n!}\int_a^t f^{(n+1)}(z)(t-x)^{n+1}dx.$$

Ex. $x \rightsquigarrow u$, $x=a(1-u)+tu$
$u\in[0,1]$, $dx=(t-a)du$

$$t-x=t-a(1-u)-tu=t-a+au-tu=t-a+u(t-a)=(t-a)(1-u) \tag{2.6}$$

$$r_n(a,t)=\frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a(1-u)+tu)(t-a)^n(1-u)^n(t-a)^n du.$$

Если $a=0$:

.

$f(x)=(1+x)^m, \qquad m\in\mathbb{R}$
$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$
$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-1}$
$\vdots$
$f^{(k)}(x)=m(m-1)\dots(m-k-1)(1+x)^{m-k}$

Designation.

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

$|x|<1$

$$(1+t)^m=1+\binom{m}{1}t+\binom{m}{2}t^2+\ldots+\binom{m}{n}t^n+\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.$$

Theorem 20 (Ряд Ньютона)**.** *Ряд*

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}t^k$$

сходится к $(1+t)^m$, при $|t|<1$

Доказательство. $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$. $0 \le t < 1$.

$$|R_n(t)| \le |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right|.$$

ПУсть $\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right| = I$

1. Сначала $0 \le t0$:

$$I \le \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \longleftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \le t^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right|\frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

   Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2}\frac{|m-n-1|}{n+2}t.$$

   $t < 1,\ t+\varepsilon < 1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)(t)} < t+\varepsilon$

2. Следующий случай $-1 < t < 0$

$$1+|t| \ge |1+tu| \ge 1-|t||u|.$$

$$\left|\frac{1-u}{1+tu}\right| \le \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1-(n\frac{1-|t|}{1-|t|u}.$$

   Это не превосходи $1-n(1-|t|)$.

□