

Конспект по топологии  
I семестр  
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

30 декабря 2019 г.



# Оглавление



# Глава 1

## Общая топология

### 1.1 Метрические пространства

**Def 1.** Метрическое пространство — пара  $(X, d)$ , где  $X$  — множество (точек), а  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  — расстояние, такая что  $\forall x, y, z \in X$ :

1.  $d(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

*Note.* Вместо буквы  $d$  используют  $\rho(x, y)$  или  $|xy|$ .

**Property** (Неравенство многоугольника).

$$\forall x_1, \dots, x_n \in X : \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \geq d(x_1, x_n).$$

**Exs.**

1. Прямая  $\mathbb{R}$ ,

$$d(x, y) = |x - y|$$

2. Плоскость  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ,

$$d((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

3.  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ ,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

4. Подпространство.

Пусть  $X = (X, d)$  — метрическое пространство.  $Y \subset X$ ,  $(Y, d|_{Y \times Y})$  — подпространство.

5. Единичная метрика.

$$X \text{ любое множество, } d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

6. Нестандартные метрики на плоскости:

$$d_1((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v|$$

$$d_\infty((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$$

7. Расстояние в графе

**Def 2.**  $X$  — метрическое пространство,  $x \in X, r > 0$ .

Открытый шар с центром в  $x$  и радиусом  $r$

$$B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Замкнутый шар с центром в точке  $x$  и радиусом  $r$

$$\overline{B}_r(x) = B[x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Сфера с центром в точке  $x$  и радиусом  $r$

$$S_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

**Exs.**

1.  $X = \mathbb{R}, B_r(x) = (x - r, x + r)$

2.  $X = \mathbb{R}^2$

3.  $X = (\mathbb{R}^2, d_1)$

4.  $X = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$



Рис. 1.1: Второй, третий и четвертый примеры

**Def 3.** Множество  $A \subset X$  открыто, если  $\forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$ .

**Exs.**

1. Квадрат без границы на плоскости открыт, а квадрат с границей — нет.

2. Интервалы в  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b)$  — открыты, остальные — нет.
3.  $X$  с единичной метрикой — все множества открыты.
4.  $\emptyset$  всегда открыто
5. Все пространство тоже всегда открыто

*Note.* Открытость — относительное свойство, зависит от пространства.

*Ex.*  $[0, 1)$  не открыто на прямой, но открыто на  $[0, +\infty)$

**Theorem 1.** *Открытые шары открыты.*

**Theorem 2.** *Объединение любого набора открытых множеств открыто.*

*Доказательство.*  $\{A_i\}_{i \in I}$  — семейство открытых множеств. Рассмотрим

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Пусть  $x \in A$ . Тогда  $\exists i \in I : x \in A_i$ . Так как  $A_i$  открыто,  $\exists r > 0 : B_r(x) \subset A_i \implies B_r(x) \subset A$ . Следовательно,  $A$  открыто.  $\square$

**Theorem 3.** *Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто.*

*Доказательство.* Докажем для двух. Пусть  $A, B$  открыты. Рассмотрим  $x \in A \cap B$ .

$$\left. \begin{array}{l} \exists r_1 > 0 : B_{r_1} \subset A \\ \exists r_2 > 0 : B_{r_2} \subset B \end{array} \right\} \implies B_{\min(r_1, r_2)} \subset A \cap B.$$

$\square$

*Practice.* Открытые множества на прямой представимы в виде дизъюнктного объединения открытых интервалов, причем не более чем счетного числа.

## 1.2 Топологические пространства

**Def 4.**  $X$  — любое множество.

**Топологическая структура (топология)** на множестве  $X$  — множество  $\Omega \subset 2^X$  такая, что:

1.  $\emptyset, X \in \Omega$
2. Объединение любого набора множеств из  $\Omega$  принадлежит  $\Omega$

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \Omega : \bigcup_{i \in I} A_i \in \Omega$$

3. Пересечение конечного числа принадлежащих  $\Omega$  множеств тоже принадлежит  $\Omega$ :

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \Omega : \bigcap_{i \in [1, n]} A_i \in \Omega.$$

Топологическое пространство —  $(X, \Omega)$ ,  $X$  — множество,  $\Omega$  — топологическая структура, элементы  $\Omega$  — открытые множества данного топологического пространства.

**Exs.**

1. Метрические пространства (топология задана метрикой)
2. Дискретная топология  $\Omega = 2^X$
3. Антидискретная топология  $\Omega = \{\emptyset, X\}$

**Def 5.** Топологическое пространство  $(X, \Omega)$  метризуемо, если существует метрика на  $X$ , задающая топологию  $\Omega$ .

**Def 6.**  $X$  — топологическое пространство.

Множество  $A \subset X$  называется замкнутым, если  $X \setminus A \in \Omega$ .

**Exs.**

1.  $X = \mathbb{R}$ .  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $\mathbb{R}$  — замкнуты.
2. Дискретное пространство — все множества замкнуты.
3. Антидискретное пространство — замкнуты только  $\emptyset$  и  $X$ .

*Practice.* Замкнутые шары замкнуты.

**Theorem 4.**

1.  $\emptyset$ ,  $X$  замкнуты
2. Пересечение любых наборов замкнутых множеств замкнуто
3. Конечное объединение замкнутых множеств замкнуто



**Property.**  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $A$  открыто,  $B$  замкнуто.

1.  $A \setminus B$  открыто
2.  $B \setminus A$  замкнуто

### 1.3 Внутренность, замыкание, граница

**Designation.**  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $A \subset X$ .

**Def 7.** Внутренность множества  $A$  ( $\text{Int} A, A^\circ$ ) — объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $A$ .

**Property.**

1.  $\text{Int} A$  — наибольшее по включению открытое множество, содержащее  $A$ .
2.  $A$  открыто тогда и только тогда, когда  $A = \text{Int} A$ .

**Def 8.** Окрестность точки  $x \in X$  — любое открытое множество, содержащее  $x$ .

**Def 9.** Точка  $x \in A$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если существует окрестность  $U \ni x$  такая, что  $U \subset A$ .

**Theorem 5.** Внутренность множества — множество внутренних точек.

**Corollary.**  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.

**Def 10.** Замыкание множества  $A$  ( $\text{Cl} A, \bar{A}$ ) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

**Property.**

1.  $\text{Cl} A$  — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее  $A$ .
2.  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\text{Cl} A = A$ .
3.  $\text{Cl}(X \setminus A) = \text{Int} A$   
 $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl} A$

**Def 11.** Точка  $x \in X$  называется точкой прикосновения, если для любой окрестности  $U \ni x$ :  $U \cap A \neq \emptyset$ .

**Theorem 6.** Замыкание множества  $A$  — множество всех точек прикосновения.

*Доказательство.* Перейдем к дополнениям.

$$X \setminus \text{Cl}A \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid x \text{ — не точка прикосновения}\}.$$

$$\text{Int}(X \setminus A) \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid \exists \text{ окрестность } U \ni x, U \cap A = \emptyset\}.$$

$$U \cap A = \emptyset \iff U \subset X \setminus A \iff x \text{ — внутренняя точка } X \setminus A.$$

□

**Def 12.** Точка  $x \in X$  называется внешней точкой множества  $A$ , если  $x$  — внутренняя точка  $X \setminus A$ .  
Внешность  $A$  — внутренность  $X \setminus A$ .

**Def 13.**  $x \in X$  — изолированная точка множества  $A$ , если для существует окрестность  $U \ni x : A \cap U = \{x\}$ .

**Def 14.**  $x \in X$  — предельная точка множества  $A$ , если для любой окрестности  $U \ni x : (A \cap U) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

**Property.**

1.  $\text{Cl}A = \{\text{изолированные точки}\} \sqcup \{\text{предельные точки}\}$
2.  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $A$  содержит все свои предельные точки.

**Def 15.** Граница множества  $A = \text{Cl}A \setminus \text{Int}A$ .  
Обозначения:  $\text{Fr}A$ ,  $\partial A$ .

**Property.**

1.  $\text{Fr}A$  замкнуто.
2.  $\text{Fr}A = \text{Fr}(X \setminus A)$
3.  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\text{Fr}A \subset A$ .
4.  $A$  открыто тогда и только тогда, когда  $A \cap \text{Fr}A = \emptyset$ .
5.  $\text{Cl}A = \text{Int}A \sqcup \text{Fr}A$

**Statement.**  $X = \text{Int}A \sqcup \text{Cl}A \sqcup \text{Fr}A$

*Practice.*

1.  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
2.  $\text{Int}(A \cup B)$  не всегда равно  $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$
3.  $\text{Cl}(A \cap B) = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$
4.  $\text{Cl}(A \cup B)$  не всегда равно  $\text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$

## 1.4 Подпространства

**Designation.**  $X = (X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $Y, Z \subset X$ .

**Def 16.** Индуцированная (относительная) топология на  $Y$  —  $\Omega_Y = \{Y \cap U \mid U \in \Omega\}$ .  
 $Y$  с такой топологией называется подпространством  $X$ :  $(Y, \Omega_Y)$  — подпространство  $X$ .

**Theorem 7.**  $\Omega_Y$  — топология на  $Y$ .

*Доказательство.* Просто проверяем определение. □

**Theorem 8.** Определение согласовано с метрическим. Если  $X = (X, d)$  — метрическое пространство,  $\Omega$  — топология, заданная метрикой  $d$ , то  $\Omega_Y$  — топология, заданная  $d|_{Y \times Y}$ .

*Доказательство.*

$$\boxed{\subset} \quad A \in \Omega_Y \implies A = Y \cap U, \quad U \in \Omega \implies \forall x \in A \exists r > 0 : B_r^X(x) \subset U.$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y$$

Тогда  $\forall x \in A \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A \implies A$  открыто относительно  $d|_{Y \times Y}$ .

$$\boxed{\supset} \quad A \text{ открыто относительно } d|_{Y \times Y} \implies \forall x \in A \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A.$$

$$U := \bigcup_{x \in A} B_r^X(x) \in \Omega.$$

$$Y \cap U = \bigcup_{x \in A} (Y \cap B_r^X(x)) = \bigcup_{x \in A} B_r^Y(x) = A \implies A \in \Omega_Y$$

□

**Theorem 9.**  $\{B \mid B \text{ замкнуто относительно } \Omega_Y\} = \{A \cap Y \mid A \text{ замкнуто относительно } \Omega\}$

*Доказательство.*  $B \subset Y$  замкнуто в  $Y \iff Y \setminus B \in \Omega_Y \iff \exists U \in \Omega : Y \setminus B = Y \cap U \iff \exists U \in \Omega : B = Y \cap (X \setminus U)$  — замкнуто в  $X$ . □

**Property.**  $A \subset Y$

1. Если  $A$  открыто в  $X$ , то  $A$  открыто в  $Y$ .

2. Если  $Y$  открыто в  $X$ , то

$$A \in \Omega_Y \implies A \in \Omega.$$

3. Если  $A$  замкнуто в  $X$ , то  $A$  замкнуто в  $Y$ .

4. Если  $Y$  замкнуто в  $X$ , то

$$A \text{ замкнуто в } Y \implies A \text{ замкнуто в } X.$$

*Practice.*  $A \subset Y$

1.  $\text{Cl}_Y A = \text{Cl} A \cap Y$

2.  $\text{Int}_Y A$  не всегда равно  $\text{Int} A \cap Y$

## 1.5 Сравнение топологий

**Designation.**  $X$  — множество,  $\Omega_1, \Omega_2 \subset 2^X$  — топологические структуры.

**Def 17.** Если  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , то  $\Omega_1$  слабее (грубее), чем  $\Omega_2$ , а  $\Omega_2$  сильнее (тоньше), чем  $\Omega_1$ .

**Theorem 10.**  $X$  — множество,  $d_1, d_2$  — метрики на  $X$ .  $d_1, d_2$  задают топологии  $\Omega_1, \Omega_2$ . Тогда эквивалентны:

- $\Omega_1$  сильнее  $\Omega_2$
- В любом шаре метрики  $d_2$  содержится шар метрики  $d_1$  с тем же центром.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  По определению первое утверждение равносильно тому, что  $\Omega_2 \subset \Omega_1 \iff \forall A \in \Omega_2 : A \in \Omega_1$ .

Пусть  $B(x)$  — открытый шар в метрике  $d_2$ .

$$B(x) \in \Omega_2 \implies B(x) \in \Omega_1 \implies x \text{ — внутренняя точка } X.$$

Следовательно, существует шар метрики  $d_1$ , содержащий  $B(x)$ .

$\Leftarrow$   $A \in \Omega_2$

$\forall x \in A : \exists B$  — открытый шар в метрике  $d_2 \implies \exists B' \subset B$  — открытый в метрике  $d_1$ .

□

**Corollary.**  $d_1, d_2$  — метрики на  $X$ .

$$\exists c > 0 : d_2 \leq cd_1 \quad (\forall x, y \in X : d_2(x, y) \leq cd_1(x, y)).$$

Тогда  $d_2$  слабее  $d_1$  ( $\Omega_2$  слабее  $\Omega_1$ ).

*Доказательство.*  $d_2 \leq cd_1 \implies B_{\frac{r}{c}d_1}(x) \subset B_r^{d_2}(x)$ . Выполнено второе условие теоремы ?? . Значит,  $d_2$  слабее  $d_1$ . □

**Def 18.**  $d_1$  и  $d_2$  называются **липшицево эквивалентными**, если  $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 d_2 \leq d_1 \leq c_2 d_2$ .

**Corollary.** Липшицево эквивалентные метрики задают одинаковые топологии.

**Ex.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

Метрики  $d_1, d_2, d_\infty$  задают одинаковые топологии так как:

$$d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty$$

$$d_\infty \leq d_1 \leq n d_\infty$$

## 1.6 База топологии

**Designation.**  $X$  — множество,  $\Omega$  — топология на  $X$ .

**Def 19.**  $\Sigma \subset \Omega$  — база топологии  $\Omega$ , если  $\forall A \in \Omega$  представляется в виде объединения элементов  $\Sigma$ .

**Ex.** В метрическом пространстве базой будет множество всех открытых шаров.

**Ex.** На  $\mathbb{R}^1$  — открытые интервалы с рациональными концами.

*Remark.*  $\Sigma$  — база  $\Omega$  тогда и только тогда, когда

$$\forall U \in \Omega \forall x \in U \exists V \in \Sigma : x \in V \subset U.$$

**Theorem 11.**  $X$  — множество,  $\Sigma \subset 2^X$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1. Существует такая топология, что  $\Sigma$  — база  $\Omega$
  2.  $\forall A, B \in \Sigma : A \cap B$  — представимы в виде объединения элементов  $\Sigma$
- и  $X$  представимо в виде объединения элементов  $\Sigma$ .

*Доказательство.*

$1 \implies 2$  Очевидно.

$2 \implies 1$  Пусть

$$\Omega = \{\text{объединение любых наборов элементов } \Sigma\}.$$

Аксиомы из определения топологии выполняются, следовательно,  $\Omega$  — топология на  $X$ .

□

**Def 20.**  $\Lambda \subset \Omega$  — предбаза  $\Omega$ , если  $\Omega$  является наименьшей по включению топологией, содержащей  $\Lambda$ .

**Theorem 12.** Для любого  $\Lambda \subset 2^X$  существует топология  $\Omega$  такая, что  $\Lambda$  — ее предбаза.  
База  $\Omega$  — все возможные конечные пересечения элементов  $\Lambda$  и все пространство.

**Def 21.**  $X = (X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $x \in X$ .  $\Sigma_x \subset \Omega$  — набор открытых множеств, содержащих  $x$ .

$\Sigma_x$  — база окрестности  $x$ , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x : \exists \text{ окрестность } V \in \Sigma_x : x \in V \subset U.$$

**Ex.** Шары с центром в точке являются базой окрестности в ней.

## 1.7 Произведение топологических пространств

**Def 22.**  $X, Y$  - топологические пространства.

Топология произведения на  $X \times Y$  – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y - \text{открыты.}\}.$$

$X \times Y$  с такой топологией – произведение  $X$  и  $Y$ .

**Theorem 13.** *Определение ?? корректно.*

*Доказательство.* 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.



Рис. 1.2: Пересечение

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в  $X$  и в  $Y$ , а значит принадлежит базе.

□

**Theorem 14.**  $A \cap X$  – замкнуто,  $B \cap Y$  – замкнуто. Тогда  $A \times B$  – замкнуто в  $X \times Y$ .

*Доказательство.* Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$  открыто в  $Y$ , а  $X \setminus A$  открыто в  $X$ . Тогда объединение произведений с  $X$  и  $Y$  есть объединение открытых в  $X \times Y$ .

□

*Practice.* Для любых  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  :

$$1. \text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$$

$$2. \text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$$

$$3. A \times B \text{ как произведение подпространств равно } A \times B \text{ как подпространство произведения.}$$

### 1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой.  $d_X, d_Y$  - метрики.

**Theorem 15.**

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

$d$  - метрика на  $X \times Y$ . Произведение метризуемых пространств метризуемо.

*Доказательство.* 1. Проверим, что  $d$  - метрика. Очевидно, что  $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$ . Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \stackrel{?}{\geq} d(p, p'') \stackrel{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2.  $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества  $X$  и  $Y$ .

3.  $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$  Рассмотрим  $W \in \Omega_{X \times Y}$ .



Рис. 1.3: Произведение метрических пространств

$\exists A \subset X, B \subset Y$ - открытые,  $(x, y) \in A \times B \subset W$ .

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем  $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

**Statement.** *Согласование метрик:*

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

*Доказательство.* Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (x'', y'')) &\stackrel{?}{\leq} d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) \\ &\stackrel{||}{=} \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \end{aligned}.$$

□



Рис. 1.4: Неравенство треугольника

### 1.7.2 Тихоновская топология

**Designation.**

- $X = \prod_{i \in I} X_i$  — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \rightarrow X_i$  — координатная проекция.
- $\Omega_i$  — топология на  $X_i$ .



**Def 23** (Тихоновская топология). Пусть  $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$  – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на  $X = \prod X_i$  – топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \Omega_i\}.$$



Рис. 1.5: Тихоновская топология

*Tasks.*

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобратся с отрезком  $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$ .
2. Канторовское множество  $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

## 1.8 Непрерывность

$X, Y$  - топологические пространства,  $\Omega_1, \Omega_2$  - топологии,  $f : X \rightarrow Y$ .

**Def 24.**  $f$  – непрерывна, если  $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \subset \Omega_X$ .

*Note.*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

**Exs.**

1. Тожественное отображение непрерывно.  $id_X : X \rightarrow X$
2. Константа тоже непрерывна.  $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если  $X$  - дискретно,  $\forall f : X \rightarrow Y$  - непрерывно.

4. Если  $Y$  - антидискретно,  $\forall f : X \rightarrow Y$  - непрерывно.

**Def 25.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in Y$   $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

**Theorem 16.**  $f$  - непрерывна тогда и только тогда, когда  $\forall x_0 \in X : f$  - непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ )

$y_0 \in U$ .

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$ )

$U \subset Y$  - открыто, хотим доказать, что  $f^{-1}(U)$  - открыто. Достаточно доказать, что  $\forall x \in f^{-1}(x)$ - внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда  $x$  - внутренняя точка  $f^{-1}(U)$ . □

### 1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

**Theorem 17.**  $X, Y$  - метрические пространства.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in X$ .

Тогда  $f$  - непрерывна в точка  $x_0$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ ) Так как  $f$  - непрерывна в точке  $x$ , существует окрестность  $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$ .

Так как  $V$  открыто,  $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$ .

$\Leftarrow$ ) Рассмотрим  $U \ni f(x)$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$  :

$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$ . Можем взять  $V := B_\delta(x)$ . □

### 1.8.2 Липшицевы отображения

**Def 26.**  $X, Y$  - метрические пространства.

$f : X \rightarrow Y$  - липшицево, если  $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$ .  $C$  - константа Липшица данного отображения.

**Corollary.** Все липшицевы отображения непрерывны.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ .

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C \delta = \varepsilon.$$

□

**Ех.**  $X$  – метрика,  $x_0 \in X$ .  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

*Task.*  $A \subset X$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что  $X$  тоже липшицево с константой 1.

**Ех.**  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывна.

### 1.8.3 Композиция непрерывных отображений

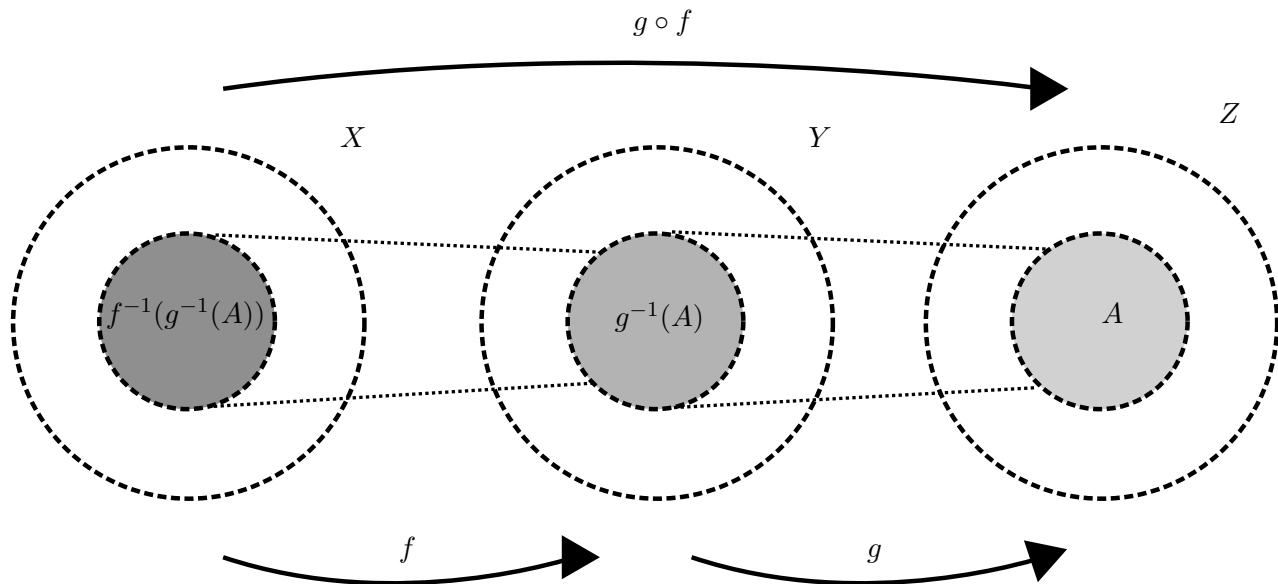


Рис. 1.6: Композиция отображений

**Theorem 18.** *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

## 1.9 Гомеоморфизм

**Designation.**  $X, Y$  — топологические пространства.

**Def 27.** Гомеоморфизм между  $X$  и  $Y$  — непрерывное биективное отображение  $f : X \rightarrow Y$  такое, что  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  тоже непрерывно.

**Def 28.**  $X$  и  $Y$  гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

**Designation.**  $X$  и  $Y$  гомеоморфны:  $X \cong Y$  или  $X \simeq Y$ .

**Property.**

1. Тожественное отображение — гомеоморфизм.
2. Если  $f$  — гомеоморфизм, то  $f^{-1}$  — гомеоморфизм.
3. Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.

**Theorem 19.** Гомеоморфность — отношение эквивалентности.

*Note.*

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в  $X$  и  $Y$ .
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

*Note.* Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

*Note.* Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

**Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом**

Пусть  $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$  такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

$f$  — биекция между  $[0, 2\pi)$  и  $S^1$ ,  $f$  — непрерывно, но  $f^{-1}$  разрывно в точке  $(1, 0)$ .

**Примеры гомеоморфных пространств**

**Statement.**

- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d : (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d] \cong (c, d]$
- $\forall a, b : (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b : [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

**Theorem 20.** Открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^n$

**Designation.**  $D^n$  — замкнутый единичный шар в  $\mathbb{R}^n$

**Designation.**  $S^n$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^{n+1}$

**Theorem 21.**  $S^n \setminus \{\text{точка}\} \cong \mathbb{R}^n$

*Practice.*

1. Квадрат с границей гомеоморфен  $D^2$
2.  $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

## 1.10 Аксиомы

### 1.10.1 Аксиомы счетности

**Def 29.**  $X = (X, \Omega)$  База в точке  $x \in X$  – такое множество  $\Sigma_x \subset \Omega$ , что:

1.  $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2.  $\forall U \ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

**Designation.** Счетное множество – не более, чем счетное.

**Def 30.** Пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме сечности (1АС), если для любой точки  $x \in X$  существует счетная база в этой точке.

**Def 31.** Пространство  $X$  удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

**Theorem 22.**  $2AC \Rightarrow 1AC$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  – база топологии,  $x \in X$ . Пусть

$$\Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\}.$$

Тогда  $\Sigma_x$  – база в точке. □

**Theorem 23.** Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.

**Statement.**  $\mathbb{R}$  имеет счетную базу.

**Theorem 24.** Если  $X$  и  $Y$  имеют счетную базу, то  $X \times Y$  тоже имеет счетную базу.

**Theorem 25.** Если  $X$  имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.

**Corollary.**  $\mathbb{R}^n$  имеет счетную базу.

*Practice.* 1АС тоже наследуется подпространствами и произведениями.

**Def 32.** Топологическое свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

**Ex.** Дискретность, антидискретность, 1АС, 2АС – наследственные свойства.

**Theorem 26.** *Линделёф Если  $X$  удовлетворяет  $2AC$ , то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

*Доказательство.* Пусть  $\Lambda$  – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия.  $\Lambda$  – счетное покрытие.

Каждому  $U \in \mathcal{A}$  сопоставим  $V$  из исходного покрытия, для которого  $U \subset V$ .

Все такие  $V$  образуют искомое счетное покрытие. □

### 1.10.2 Сепарабельность

**Def 33.** Всюду плотное множество – множество, замыкание которого есть все пространство.

**Def 34.** Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

**Ex.**  $\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$

**Def 35.** Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

**Property.**  $X, Y$  – сепарабельны  $\implies X \times Y$  тоже.

*Note.* Сепарабельность – не наследственное свойство.

**Theorem 27.**

- Счетная база  $\implies$  сепарабельность.
- Для метризуемых пространств сепарабельность  $\implies$  счетная база

### 1.10.3 Аксиомы отделимости

**Def 36.**  $X$  обладает свойством  $T_1$ , если для любых различных точек  $x, y \in X$  существует такое открытое  $U$ , что  $x \notin U \wedge y \notin U$ .

Другое название:  $T_1$ -пространство.

**Theorem 28.**  $T_1 \iff$  любая точка является замкнутым множеством.

**Def 37.**  $X$  – хаусдорфово, если для любых  $x, y \in X$  существуют окрестности  $U \ni x, V \ni y : U \cap V = \emptyset$ .

Другое название:  $T_2$ -пространство.

**Designation.** про такие окрестности  $U, V$  говорят, что они отделяют  $x$  и  $y$  друг от друга.

*Note.* Все метрические пространства хаусдорфовы.

**Theorem 29.**  $X$  хаусдорфово  $\iff$  "диагональ"  $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$  замкнута в  $X \times X$

**Def 38.**  $X$  – регулярно, если

- обладает  $T_1$
  - $\forall$  замкнутого  $A \subset X \forall x \in X \setminus A \exists$  открытые  $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$
- Другое название  $T_3$ -пространство.

*Note* (Переформулировка определения  $T_3$ ).  $X$  регулярно тогда и только тогда, когда обладает свойством  $T_1$  и

$$\forall x \in X, \forall \text{ окрестности } U \ni x \exists \text{ окрестность } V \ni x : \text{Cl}(V) \subset U.$$

**Def 39.**  $X$  – нормально, если

- обладает  $T_1$
  - $\forall A, B \in X (A \cap B = \emptyset) \exists$  открытые  $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$
- Другое название  $T_4$ -пространство.

*Note* (Переформулировка определения  $T_4$ ).  $X$  нормально тогда и только тогда, когда обладает свойством  $T_1$  и

$$\forall x \in X, \forall \text{ замкнутого } A \subset X \text{ и } \forall \text{ открытого } U \supset A \exists \text{ открытое } V : A \subset V \wedge \text{Cl}(V) \subset U.$$

**Statement.**  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

*Practice.* Свойства  $T_1 - T_3$  наследуются подпространствами и произведениям.  
Нормальность не наследственная.

**Def 40.** Все метрические пространства нормальны.

*Доказательство.* Хороший метод.

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на  $A$  и единицу на  $B$ . □

**Lemma** (Урысон).  $X$  – нормально,  $A, B \subset X$  – замкнуты,  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда существует непрерывная функция  $f : X \rightarrow [0, 1] : f|_A = 0 \wedge f|_B = 1$

## 1.11 СВЯЗНОСТЬ

**Designation.**  $X$  — топологическое пространство.

**Def 41** (Связное топологическое пространство).

$X$  связно, если:

- его нельзя разбить на два непустых открытых множества;
- его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;
- не существует открыто-замкнутых множеств, кроме  $\emptyset$  и  $X$ ;
- не существует сюръективного непрерывного отображения  $f : X \rightarrow 0, 1$ .

**Exs.**

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$  несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$  несвязно
- $\mathbb{Q}$  несвязно

### 1.11.1 Связные множества

**Def 42.** Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологией.

*Practice.*

- Множество  $A \subset X$  несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые  $B$  и  $C$ , что  $ClA \cap C = \emptyset \wedge ClC \cap B = \emptyset$ .
- Множество  $A$  в метрическом пространстве  $X$  несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые  $U, V : U \cap V = \emptyset \wedge U \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap A \neq \emptyset$ .
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

**Property.** Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.

### Связные множества на прямой

**Statement.** Отрезок  $[0, 1]$  связан.

**Theorem 30.** Для  $X \subset \mathbb{R}$  следующие утверждения эквивалентны:

1.  $X$  — связно
2.  $X$  — выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)
3.  $X$  — интервал, точка или пустое множество



## 1.11.2 Связность при отображении

**Theorem 31.**  $X$  — связно,  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Тогда множество  $f(X)$  связно.

**Theorem 32.**  $X$  связно,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно,  $a, b \in f(X)$ . Тогда  $f(X)$  содержит все числа между  $a$  и  $b$ .

*Доказательство.* По теореме ??  $f(X)$  связно. Тогда по определению  $f(X)$  выпукло, значит содержит  $[a, b]$ .  $\square$

## 1.11.3 Компоненты связности

**Def 43.** Компонента связности топологического пространства  $X$  — максимальное по включению связное множество в  $X$ .

**Exs.**

1.  $[0, 1] \cup [2, 3]$  две компоненты связности —  $[0, 1]$  и  $[2, 3]$ .
2. Компоненты связности  $\mathbb{Q}$  — отдельные точки.

**Lemma** (Об объединении связных множеств). Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$  — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда  $A := \bigcup_{i \in I} A_i$  тоже связно.

*Доказательство.* Пусть  $A$  разбивается на непустые открытые  $U$  и  $V$ .

$$\exists i, j \in I : U \cap A_i \neq \emptyset \wedge V \cap A_j \neq \emptyset.$$

Так как  $A_i$  связно,  $A_i \subset U$ . Аналогично  $A_j \subset V$ . Следовательно,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Противоречие.  $\square$

**Theorem 33.** Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:

- каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;
- различные компоненты связности не пересекаются.

*Доказательство.*

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.  
Рассмотрим  $x \in X$ . Пусть  $A$  — объединение всех связных множеств, содержащих  $x$ . Такие есть, так как множество  $\{x\}$  связно. По лемме ?? полученное множество связно, значит это компонента связности.
2. Различные компоненты связности не пересекаются.  
Пусть  $A, B$  — различные компоненты связности и  $A \cap B \neq \emptyset$ . По лемме ??  $A \cup B$  тоже связно, но  $A$  и  $B$  были максимальными по включению. Значит  $A \cup B = A = B$ . Противоречие.

$\square$

**Lemma.** Замыкание связного множества связно.

**Theorem 34.** Компоненты связности замкнуты.

*Доказательство.* Следует из леммы ??.

□

*Note.* компоненты связности не всегда открыты. Например, в  $\mathbb{Q}$ .

**Corollary.** Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

**Corollary.** Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

## 1.12 Линейная связность

**Designation.**  $X$  — топологическое пространство.

**Def 44.** Путь в  $X$  — непрерывное отображение  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Точки  $\alpha(0)$  и  $\alpha(1)$  — концы пути (или начало и конец). Путь  $\alpha$  **соединяет**  $\alpha(0)$  и  $\alpha(1)$ .

**Def 45.**  $X$  линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ех.

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \exists \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

**Theorem 35.** Если  $X$  линейно связно,  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, то  $f(X)$  линейно связно.

*Доказательство.* Если  $\alpha$  — путь, соединяющий  $x, y \in X$ , то  $f \circ \alpha$  соединяет  $f(x)$  в  $f(X)$ .

□

**Lemma.** Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.

*Доказательство.*

Рефлексивность:  $\forall x \in X \exists \alpha(t) = x$

Симметричность:  $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \rightarrow \exists \bar{\alpha} = \alpha(1 - t)$

Транзитивность: если  $\alpha$  идет из  $x$  в  $y$ , а  $\beta$  из  $x$  в  $z$ , построим путь  $\gamma$ , идущий из  $x$  в  $z$ :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

### 1.12.1 Компоненты линейной связности

**Def 46.** Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

**Def 47** (переформулировка). Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

## 1.12.2 Линейная связность и связность

**Theorem 36.** Если  $X$  линейно связно, то оно связно.

**Corollary.** Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

**Ех** (Связность не влечет линейную связность). Рассмотрим множество

$$\left\{ \left( x, \cos \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

*Доказательство.*

## 1. Связность

График линейно связан, значит он связан, а  $(0, 0)$  — его предельная точка.  $X$  — замыкание графика в  $X$ , следовательно,  $X$  — связно.

2.  $(0, 0)$  не соединяется путем с другими точками

Пусть  $\alpha$  — путь с началом в  $(0, 0)$ . Рассмотрим  $T = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) = (0, 0)\}$ .  $T$  замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

Докажем, что  $T$  открыто в  $[0, 1]$ . Рассмотрим  $t_0 \in T$ . Так как  $\alpha$  непрерывно  $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : |\alpha(t)| < 1$ . Предположим, что  $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$ . Пусть  $f(t)$  — первая координата  $\alpha(t)$ . Тогда  $f(t_1) > 0$ . По непрерывности

$$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,  $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$ . Получаем  $|\alpha(t_2)| > 1$ . Противоречие.

Значит,  $T$  — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связан,  $T = [0, 1]$ . Тогда,  $\alpha$  — постоянный путь в точке  $(0, 0)$ .

□

## 1.12.3 Локальная линейная связность

**Def 48.** Пространство  $X$  локально линейно связно, если для любой точки  $x \in X$  и любой окрестности  $U \ni x$  существует линейно связная окрестность  $V \ni x : V \subset U$ .

**Ех.** Любое открытое множество на плоскости локально линейно связно.

**Theorem 37.** В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.

*Доказательство.* 1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.

2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связанные множества  $\{U_i\}$ , а тогда любое связанное множество  $A$  содержится в одном из  $U_i$  (так как  $A \cap U_i$  и  $A \setminus U_i$  открыты в  $A$ ). Значит это компоненты связности.

□

### Негомеоморфность интервалов и окружности

**Theorem 38.** Интервалы  $[0, 1]$ ,  $[0, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $S^1$  попарно негомеоморфны.

**Theorem 39.**  $\mathbb{R}^2$  не гомеоморфна никакому интервалу и  $S^1$

*Доказательство.*

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества  $\mathbb{R}^2$  связно.

□

## 1.13 Компактность

**Designation.**  $X$  — топологическое пространство.

**Def 49.**  $X$  компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

**Designation.**  $X$  — компакт.

**Exs.**

1. Все конечные пространства компактны
2. Все ахти дискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4.  $\mathbb{R}$  некомпактно

**Def 50.** Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

*Note.*  $A \subset X$ . Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств  $V_i \subset A$ , открытых в  $A$ ,  $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств  $U_i \subset X$ , открытых в  $X$ ,  $A \subset \bigcup U_i$

*Practice.* Объединение двух компактных множеств компактно.

**Theorem 40** (лемма Гейне-Бореля). Отрезок  $[0, 1]$  компактен.

*Доказательство.* Пусть  $l_0 = [0, 1]$ ,  $\{U_i\}$  — открытые множества в  $\mathbb{R}$ ,  $l_0 \subset \bigcup U_i$ . Докажем, что  $l_0$  покрывается конечным числом  $U_i$ . Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом  $U_i$ . Обозначим ее  $l_1$ .

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее:  $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \dots$ , длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку  $x_0$ . Она лежит в каком-то  $U_{i_0}$ . С некоторого  $n$  этот  $U_{i_0}$  содержит  $l_n$ . Следовательно,  $l_n$  покрывается конечным набором  $U_i$ . Противоречие. □

**Theorem 41.** Если  $X$  компактно и  $A \subset X$  замкнуто, то  $A$  компактно.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\{U_i\}$  — покрытие  $A$  открытыми в  $X$  множествами. Добавим в него  $X \setminus A$ , получим покрытие  $X$ , выберем конечное подпокрытие и уберем  $X \setminus A$ . Это конечное покрытие  $A$  некоторыми множествами из  $\{U_i\}$ .  $\square$

**Theorem 42.** Если  $X, Y$  компактны, то  $X \times Y$  компактно.

*Доказательство.*

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие  $X \times Y$  открытыми  $U_i \times V_i$ , где  $U_i \subset X$ ,  $V_i \subset Y$ .

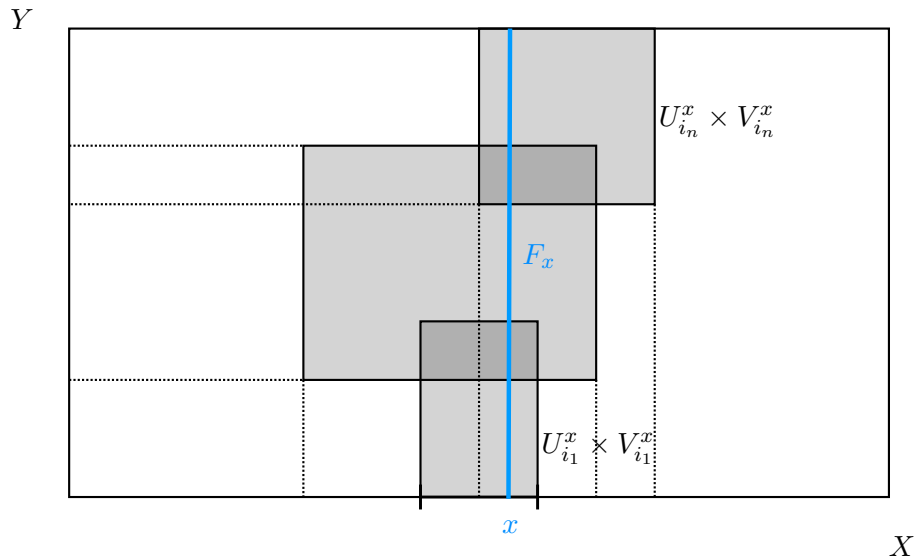


Рис. 1.7: Покрытие и гомеокопия

2. Для всех  $x \in X$  рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой)  $F_x := \{x\}Y$ .  $F_x \cong Y$ , тогда  $F_x$  компактно, следовательно,  $F_x$  покрывается конечным набором "прямоугольников"  $U_{i_1}^x \times V_{i_1}^x, \dots, U_{i_n}^x \times V_{i_n}^x$ .
3.  $U^x = U_{i_1}^x \cap \dots \cap U_{i_n}^x$  — пересечение проекций "прямоугольников" на  $X$ .  $U^x \times Y$  покрывается теми же "прямоугольниками".
4. Получили окрестности  $U^x$  для всех точки  $x \in X$ . Выберем из  $\{U^x\}_{x \in X}$  конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие  $X \times Y$ .

$\square$

**Theorem 43.** Если  $X$  хаусдорфово и  $A \subset X$  компактно, то  $A$  замкнуто в  $X$ .

*Доказательство.* Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как  $X$  хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \ni x : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Выберем из  $\{U_a\}$  конечное подпокрытие  $A$ :  $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ .  $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$  — окрестность  $x$ , не пересекающая  $A$ .  $\square$

**Theorem 44.** Если  $X$  компактно и хаусдорфово, то оно нормально.

*Доказательство.*

1. Регулярность. Пусть  $A$  замкнуто,  $x \notin A$ . Построим  $\{U_{a_i}\}$  и  $\{V_{a_i}\}$  как в доказательстве теоремы ??.

$$U := \bigcup U_{a_i}, V := \bigcap V_{a_i}.$$

$U$  и  $V$  — открытые множества,  $U \supset A$ ,  $V \ni x$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .

2. Теперь выведем нормальность. Пусть  $A, B$  замкнуты и  $A \cap B = \emptyset$ . Так как  $X$  регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \supset B : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Теперь рассмотрим конечное подпокрытие  $A$  из  $\{U_{a_i}\}$ :  $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ . Аналогично получим открытые  $U := \bigcup U_{a_i} \supset A$  и  $V := \bigcap V_{a_i} \supset B$ ,  $U \cap V = \emptyset$ . Доказали, что  $X$  нормально.  $\square$

### 1.13.1 Компактность в $\mathbb{R}^n$

**Designation.**  $X$  — метрическое пространство.

**Def 51.** Множество  $A \subset X$  ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

**Def 52.** Диаметр множества  $A$ :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

**Property.**  $A$  ограничено тогда и только тогда, когда  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Corollary.** Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

**Theorem 45.** Компактное метрическое пространство ограничено.

**Corollary.** Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

**Theorem 46.** *Множество в  $\mathbb{R}^n$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  По прошлому следствию ??.

$\Leftarrow$  Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  ограничено тогда и только тогда, когда  $A$  содержится в некотором кубе  $[-a, a]^n$ . Куб компактен, так как является произведением компактов.  $A$  замкнуто и ограничено, из этого следует, что  $A$  — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

### 1.13.2 Центрированные семейства

**Designation.** Здесь  $I$  обозначает не более чем счетное множество.

**Def 53.** Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

**Theorem 47.**  *$X$  компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  От противного. Пусть  $\{A_i\}$  — центрированный набор замкнутых множеств в  $X$  и  $\bigcap A_i = \emptyset$ . Тогда дополнения  $X \setminus A_i$  образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие  $A_i$  имеют пустое пересечение. Противоречие.

$\Leftarrow$  Рассмотрим покрытие  $\{A_i\}_{i \in I}$ . Выберем в нем конечный набор множеств  $A_1, \dots, A_n$ . Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из  $A_1, \dots, A_n$ , это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений  $\bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ . Значит  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит  $\{A_i\}_{i \in I}$  не покрытие. Противоречие.

□

**Corollary.** Пусть  $X$  — произвольное топологическое пространство,  $\{A_i\}_{i \in I}$  — центрированный набор замкнутых множеств в  $X$ , хотя бы одно из которых компактно. Тогда  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Не умоляя общности  $A_0$  компактно. По теореме ?? (возьмем  $X = A_0$ )  $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$  имеет непустое пересечение.

□

**Theorem 48.** *Пусть  $\{A_i\}_{i \in I}$  — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .*

*Note.* Теорема ?? обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

### 1.13.3 Непрерывные отображения компактов

**Theorem 49.** Пусть  $X$  компактно,  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Тогда множество  $f(X)$  компактно.

*Доказательство.* Пусть  $\{U_i\}$  — открытое покрытие  $f(X)$ . Тогда  $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$  — открытое покрытие  $X$ . Выберем в нем конечное подпокрытие  $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$ . Тогда  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  — конечное подпокрытие  $f(X)$ . Следовательно,  $X$  компактно.  $\square$

**Theorem 50.** Пусть  $X$  компактно,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Тогда  $f(X)$  имеет максимум и минимум.

*Доказательство.*  $f(X)$  компактно, следовательно,  $f(x)$  замкнуто и ограничено, а тогда  $f(X)$  содержит свои супремум и инфимум.  $\square$

**Theorem 51.** Пусть  $X$  компактно,  $Y$  хаусдорфово,  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывная биекция. Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

*Доказательство.*  $f$  непрерывно  $\iff$  прообразы замкнутых множеств замкнуты.  $f^{-1}$  непрерывно  $\iff$   $f$ -образы замкнутых множеств замкнуты.

Если  $A \subset X$  замкнуто,  $A$  компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда  $f(A)$  компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.  $\square$

### 1.13.4 Вложения компактов

**Def 54.**  $f : X \rightarrow Y$  — вложение, если  $f$  — гомеоморфизм между  $X$  и  $f(X)$ .

**Corollary.** Пусть  $X$  компактно,  $Y$  хаусдорфово,  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывная инъекция. Тогда  $f$  — вложение.

### 1.13.5 Лемма Лебега

**Theorem 52** (Лемма Лебега).  $X$  — компактное метрическое пространство.  $\{U_i\}$  — его открытое покрытие. Тогда существует такое  $r > 0$ , что любой шар радиуса  $r$  целиком содержится в одном из  $U_i$ .

**Def 55.** Число  $r$  называется числом Лебега данного покрытия.

*Доказательство.*

$$\forall x \in X \exists r_x > 0, U_i \in \{U_i\} : B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что  $\left\{B_{\frac{r_x}{2}}\right\}_{x \in X}$  — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

$$r \leq \frac{r_x}{2}, \quad \overline{xy} + \overline{yz} < r + \frac{r_x}{2} < r_x.$$

Следовательно,  $B_r(y) \subset B_{\frac{r_x}{2}}(y) \subset B_{r_x}(x) \subset U_i$ .  $\square$



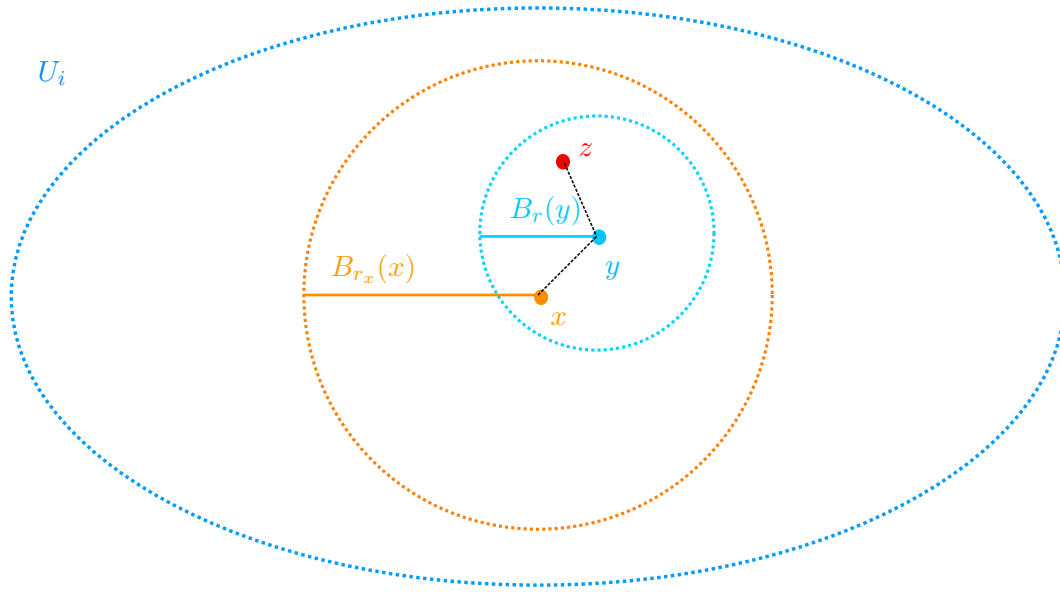


Рис. 1.8: Лемма Лебега

**Corollary.** Пусть  $X$  — компактное метрическое пространство,  $Y$  — топологическое пространство,  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно,  $\{U_i\}$  — открытое покрытие  $Y$ . Тогда  $\exists r > 0 : \forall x \in X f(B_r(x))$  содержится в одном из  $U_i$ .

*Доказательство.* Применим лемму Лебега к покрытию  $\{f^{-1}(U_i)\}$ . □

### 1.13.6 Равномерная непрерывность

**Def 56.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, x' \in X (d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

**Theorem 53.** Если  $X$  компактно, то любое непрерывное  $f : X \rightarrow Y$  равномерно непрерывно.

*Доказательство.* Применим следствие ?? из леммы Лебега к  $f$  и покрытию  $Y$  шарами радиуса  $\frac{\delta}{2}$  □

### 1.13.7 Теорема Тихонова

**Theorem 54** (Тихонов, без доказательства). Пусть  $\{X_i\}$  — произвольное семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение  $\prod_{i \in I} X_i$  тоже компактно.

### 1.13.8 Локальная компактность

**Designation.**  $X$  — топологическое пространство.

**Def 57.**  $X$  локально компактно, если  $\forall x \in X \exists$  окрестность  $U \ni x : \text{Cl}U$  компактно.

Ех.  $\mathbb{R}^n$  локально компактно.

*Practice.* Если  $X$  локально компактно и хаусдорфово, то  $X$  регулярно.

### 1.13.9 Одноточечная компактификация

**Designation.**  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство.

**Def 58.** Одноточечная компактификация  $X$  — топологическое пространство  $\widehat{X}$ :

- $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}, \quad \infty \notin X$
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \notin U$  открыто в  $\widehat{X}$  тогда и только тогда, когда  $U$  открыто в  $X$
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \in U$  открыто в  $\widehat{X}$  тогда и только тогда, когда  $X \setminus U$  компактно

**Statement.** Определение ?? корректно, то есть указанные открытые множества образуют топологию на  $X \cup \{\infty\}$ .

*Practice.*

1.  $\widehat{X}$  компактно
2.  $\widehat{X}$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда  $X$  локально компактно
3.  $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$
4.  $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$

## 1.14 Полные метрические пространства

### 1.15 Предел последовательности

**Designation.**  $X$  — топологическое пространство.

**Def 59.** Точка  $x \in X$  — предел последовательности  $\{x_n\} \subset X$ , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in U \quad \forall n > N.$$

Синонимы:  $x_n$  стремится к  $x$  или  $x_n$  сходится к  $x$

**Designation.**  $x_n \rightarrow x$  и  $x = \lim x_n$

**Property.**

1.  $x_n = x$  сходится к  $x$
2.  $x_n \rightarrow x \implies$  любая подпоследовательность тоже сходится к  $x$
3. Если  $X$  хаусдорфово, то предел единственный

4. В метрическом пространстве  $X = (X, d)$ ,

$$x_n \rightarrow x \iff d(x, x_n) \rightarrow 0.$$

5. Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей.

$$\forall \text{ замкнутого } A \subset X : (\{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow x \implies x \in A).$$

6. В метрическом пространстве  $X$  (или в пространстве со счетной базой) верно обратное: если  $A \subset X$  содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то  $A$  замкнуто.

## 1.16 Полные пространства

**Designation.**  $X = (X, d)$  — метрическое пространство.

**Def 60.**  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N \ d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

или

$$d(x_n, x_k) \rightarrow 0, \quad n, k \rightarrow \infty.$$

Синонимы:  $\{x_n\}$  — последовательность Коши,  $\{x_n\}$  сходится в себе.

**Def 61.**  $X$  полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

**Property.**

1. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

*Note.* Полнота — не топологическое свойство!

**Exs.**

1.  $\mathbb{R}$  полно (критерий сходимости Коши)
2.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  не полно (если  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ , она фундаментальна, но не имеет предела в  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ )
3.  $[0, 1]$  полно
4.  $(0, 1)$  не полно

**Theorem 55.**  $\mathbb{R}^n$  полно.

*Доказательство.* Пусть  $\{x\}$  — последовательность в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ . Предположим, что  $\{x_k\}$  фундаментальна в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\forall i \in [1, n] : \{x_k^i\}$  — тоже фундаментальна. Значит координатные последовательности имеют пределы  $x^1, \dots, x^n$ . Следовательно,  $x_k \rightarrow x := (x^1, \dots, x^n)$ .  $\square$

**Theorem 56.** Если  $X$  полно и  $Y \subset X$  замкнуто, то  $Y$  полно.

*Practice.* Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.

*Practice.* Множество в  $\mathbb{R}^n$  полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

### 1.16.1 Теорема о вложенных шарах

**Theorem 57** ("о вложенных шарах"). Пусть

- $X$  — полное метрическое пространство
- $A_1, A_2, \dots$  — непустые замкнутые множества в  $X$
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
- $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$

Тогда  $\bigcap A_i \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Для всех  $A_n$  выберем точку  $x_0$ . Так как  $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ ,  $\{x_n\}$  фундаментальна, следовательно, имеет предел  $x$ , который принадлежит  $X$ , так как  $X$  полно.

$$\forall n \geq k : x_n \in A_k \implies x \in A_k.$$

Тогда  $x \in \bigcap A_i \implies \bigcup A_i \neq \emptyset$ . □

### 1.16.2 Теорема Бэра

**Def 62.**  $X$  — топологическое пространство. Множество  $A \subset X$  нигде не плотно, если:

$$\text{IntCl}A = \emptyset$$

или

$X \setminus A$  содержит всюду плотное множество

или

любое открытое  $U \subset X$  содержит открытое  $V \subset U$  такое, что  $V \cap A = \emptyset$ .

**Ех.**  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  — ненулевой многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{R}$ . Тогда  $f^{-1}(0)$  нигде не плотно в  $\mathbb{R}^n$ .

**Ех.** Канторovo множество нигде не плотно в  $\mathbb{R}$ .

**Theorem 58** (Бэр). Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным набором нигде не плотных множеств.

*Доказательство.* Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — нигде не плотные множества. Пусть  $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$ .

$A_1$  нигде не плотно, следовательно, открытый шар  $B_{r_0}(x_0)$  содержит открытое множество  $U_1 : U_1 \cap A_1 = \emptyset$ .

$U_1$  содержит открытый шар, который содержит  $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1)$ ,  $r_1 \leq 1$ .

Построили замкнутый шар  $B_1 \subset B_0$ ,  $B_1 \cap A_1 = \emptyset$ . Аналогично построим последовательность  $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , где радиус  $r_i \leq \frac{1}{i}$  и  $B_i \cap A_i = \emptyset$ .

По теореме ?? о вложенных шарах существует точка  $x \in \bigcap B_i$ . Тогда  $x \notin \bigcup A_i \Rightarrow \bigcup A_i \neq X$ .  $\square$

**Corollary.** Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

**Theorem 59** (усиление теоремы Бэра). Пусть  $X$  — полное метрическое пространство,  $A$  — объединение счетного набора нигде не плотных множеств. Тогда  $\text{Int} A = \emptyset$ .

### 1.16.3 Пополнение

**Def 63.** Пусть  $X$  — метрическое пространство. Пополнение  $X$  — такое метрическое пространство  $\bar{X}$ , что

- $\bar{X}$  полно
- $X \subset \bar{X}$  как подпространство, то есть  $d_X = d_{\bar{X}}$
- $X$  всюду плотно в  $\bar{X}$

**Theorem 60** (без доказательства). У любого метрического пространства есть пополнение.

## 1.17 Компактность метрических пространств

### 1.17.1 Секвенциальная компактность

**Def 64.**  $X$  секвенциально компактно, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

**Theorem 61.**  $X$  компактно,  $S \subset X$  — бесконечное множество. Тогда существует такая точка  $x \in X$ , что любая окрестность  $U \ni x$  содержит бесконечно много точек  $S$ .

*Доказательство.* От противного. Пусть  $\forall x \in X \exists$  окрестность  $U_x : |U_x \cap S| < \infty$ . Выберем из  $\{U_x\}$  конечное подпокрытие  $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ .

$$S = (S \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (S \cap U_{x_n}).$$

Каждое из  $S \cap U_{x_i}$  конечно, следовательно,  $S$  конечно. Противоречие.  $\square$

**Theorem 62.** Если  $X$  — компактное метрическое пространство, то  $X$  секвенциально компактно.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — последовательность в  $X$ . Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В  $\{x_n\}$  конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.

2. В  $\{x_n\}$  бесконечное число различных точек. По теореме ?? существует точка  $x \in X$ , в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности. Построим подпоследовательность  $y_k = x_{n_k} : n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \quad k = 1, 2, \dots$

Она сходится к  $x$ .

□

**Theorem 63.**  $X$  — топологическое пространство. Если  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то  $X$  секвенциально компактно.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — последовательность в  $X$ . Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В  $\{x_n\}$  конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.
2. В  $\{x_n\}$  бесконечное число различных точек. По теореме ?? существует точка  $x \in X$ , в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности.

Пусть  $U_1, U_2, \dots$  — счетная база в точке  $x$ . Рассмотрим такие вложенные окрестности  $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ :

$$V_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k.$$

Построим подпоследовательность  $y_k = x_{n_k} : n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in V_k \quad k = 1, 2, \dots$

Она сходится к  $x$ .

□

### 1.17.2 Вполне ограниченные множества

**Designation.**  $X = (X, d)$  — метрическое пространство.

**Def 65.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Множество  $S \subset X$  —  $\varepsilon$ -сеть в  $X$ , если

$$\forall x \in X \exists s \in S : d(x, s) < \varepsilon.$$

**Def 66.**  $X$  вполне ограничено, если для любого  $\varepsilon$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

*Practice.* Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

**Theorem 64.** Если метрическое пространство  $X$  компактно, то оно вполне ограничено.

**Theorem 65.** Если метрическое пространство  $X$  секвенциально компактно, то оно вполне ограничено.

*Доказательство.* Пусть для  $\varepsilon > 0$  нет конечной  $\varepsilon$ -сети. Построим последовательность  $x_1, x_2, \dots$ :

$x_1$  — любая точка

$x_2$  — такая точка, что  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$

...

$x_n$  — такая точка, что  $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon \quad \forall i \in [1, \dots, n-1]$

...

Такая  $\{x_n\}$  не может иметь сходящейся подпоследовательности, так как все попарные расстояния не менее  $\varepsilon$ . Противоречие.  $\square$

**Theorem 66.** Если метрическое пространство  $X$  секвенциально компактно, то оно полно.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность. По секвенциальности у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Так как  $\{x_n\}$  фундаментальна, она тоже сходится к тому же пределу.  $\square$

**Theorem 67.** Если  $X$  полно и вполне ограничено, то  $X$  компактно.

*Доказательство.* Пусть существует открытое покрытие  $\{U_i\}$ , у которого нет конечного подпокрытия. Пусть  $S_1$  — конечная 1-сеть. Все пространство покрыто конечным числом шаров радиуса 1 (пусть замкнутых) с центрами в  $S_1$ . Значит, хотя бы один из них не покрывается конечным числом  $U_i$ .

Пусть это  $A_1$ .

Теперь рассмотрим конечную  $\frac{1}{2}$ -сеть  $S_2$  и пересечения

$$A_1 \cap \bar{B}_{\frac{1}{2}}(s), \quad s \in S_2.$$

Они покрывают  $A_1$ , следовательно, одно из них не покрывается конечным набором  $U_i$ . Обозначим его  $A_2$ .

Аналогично строим последовательность замкнутых множеств  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , где  $A_n$  не покрывается конечным набором  $\{U_i\}$ .

$$A_n = A_{n-1} \cap \bar{B}_{\frac{1}{n}}(s), \text{ где } s \in S_n \text{ — конечная } \frac{1}{n}\text{-сеть.}$$

Тогда  $\text{diam} A_n \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ . По теореме о вложенных шарах  $\exists x \in \bigcap A_n$ .

$$\exists U_i : x \in U_i \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

Далее

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : A_n \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

То есть  $A_n$  покрывается одним  $U_i$ . Противоречие.  $\square$

**Theorem 68** (Три определения компактности).  $X$  — метрическое пространство. Следующие свойства равносильны:

1.  $X$  компактно
2.  $X$  секвенциально компактно
3.  $X$  — полное и вполне ограниченное

*Доказательство.*

$1 \implies 2$  Уже доказано (см. теорему ??)

$2 \implies 3$  Уже доказано (см. теоремы ?? и ??)

$3 \implies 1$  Уже доказано (см. теорему ??)

□

### 1.17.3 Компактность и счетная база

**Theorem 69.** Если  $X$  вполне ограничено, то оно имеет счетную базу топологии.

*Доказательство.* Объединим конечные  $\varepsilon$ -сети для  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ . Получим счетное всюду плотное множество. Тогда  $X$  сепарабельно, значит  $X$  имеет счетную базу (так как  $X$  — метрическое пространство). □

**Theorem 70.** Если  $X$  метризуемо и компактно, то  $X$  имеет счетную базу топологии.

### 1.17.4 Обобщение

**Theorem 71.**  $X$  имеет счетную базу топологии. Тогда  $X$  компактно тогда и только тогда, когда  $X$  секвенциально компактно.

*Доказательство.*

$\implies$  Уже доказано (см. ??)

$\impliedby$  Рассмотрим открытое покрытие. По теореме Линделёфа, из него можно выбрать счетное подпокрытие:  $U_1, U_2, U_3, \dots$

Пусть нет конечного подпокрытия. Рассмотрим конечные поднаборы  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ . Никто из них не покрывает  $X$ , следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n).$$

По секвенциальной компактности можем выбрать из  $\{x_n\}$  сходящуюся подпоследовательность  $\{y_k\}$ . Пусть  $y_k \rightarrow y$ .

Так как  $\{U_i\}$  — покрытие,  $\exists j : y \in U_j$ . Но с некоторого момента  $y \notin U_j$ , так как в каждом  $U_n$  только конечное число членов последовательности.

Значит это не предел!

□

## 1.18 Факторизация

**Def 67.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $\sim$  — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство  $X/\sim$  — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество  $U$  открыто в  $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$  открыто в  $X$ .

Эта топология называется фактортопологией.

*Note.* Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества  $X$ .



### 1.18.1 Каноническая проекция на факторпространство

**Designation.** Здесь и далее  $X$  — топологическое пространство,  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $X$ .

**Def 68.** Каноническая проекция  $X$  на  $X/\sim$  или отображение факторизации — отображение

$$p : X \rightarrow X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке  $x \in X$  ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

**Theorem 72.** Каноническая проекция непрерывна.

*Note* (Переформулировка определения).  $A \subset X/\sim$  открыто тогда и только тогда, когда  $p^{-1}(A)$  открыто в  $X$ .

*Note.* Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

**Property.** Следующие свойства наследуются факторпространством:

- Связность
- Линейная связность
- Компактность
- Сепарабельность

### 1.18.2 Стягивание множества в точку

**Def 69.** Пусть  $A \subset X$ . Введем отношение эквивалентности  $\sim$  на  $X$ :

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается  $X/A$ , операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности —  $A$  и одноточечные.

**Ex.**  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$  (доказано позже в теореме ??)

### 1.18.3 Несвязное объединение

**Def 70.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение  $X \sqcup Y$  с такой топологией:  $A$  открыто в  $X \sqcup Y \iff A \cap X$  открыто в  $X$  и  $A \cap Y$  открыто в  $Y$ .

*Note.* Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств  $\{X_i\}_{i \in I}$ .

*Practice.* Все компоненты связности  $X$  открыты тогда и только тогда, когда  $X$  — несвязное объединение своих компонент связности.

### 1.18.4 Приклеивание по отображению

**Designation.**  $X, Y$  — топологические пространства,  $A \subset X$ .  $f : A \rightarrow Y$  — непрерывное отображение.

**Def 71.**  $\sim$  — наименьшее отношение эквивалентности на  $X \sqcup Y$ , такое что

$$\forall a \in A : a \sim f(a).$$

Факторпространство  $(X \sqcup Y)/\sim$  обозначается  $X \sqcup_f Y$ . Операция называется приклеиванием  $X$  к  $Y$  по  $f$ .

**Ех.** Пусть  $x_0, y_0$  — точки в  $X, Y$ ,  $A = \{x_0\}$ ,  $f(x_0) = y_0$ . Результат склеивания — **букет**  $(X, x_0)$  и  $(Y, y_0)$ .

**Ех.** Склеим в квадрате  $ABCD$  стороны  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр  $S^1 \times [0, 1]$ .

**Ех.** Если склеить  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , получилась **лента Мебиуса**.

**Def 72.** Пусть  $X$  — топологическое пространство.  $\Gamma$  — подгруппа группы  $\text{Homeo}(X)$  — группы всех гомеоморфизмов из  $X$  в себя.

Введем отношение эквивалентности  $\sim$  на  $X$  :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

**Designation.** Факторпространство  $X/\sim$  обозначается  $X/\Gamma$  или  $\Gamma \backslash X$

**Ех.**  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ , где  $\mathbb{Z}$  действует на  $\mathbb{R}$  параллельными переносами.

**Theorem 73.** Пусть  $p : X \rightarrow X/\sim$  — каноническая проекция.  $f : X \rightarrow Y$  переводит эквивалентные точки в равные:

$$\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Тогда

1.  $\exists \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : f = \bar{f} \circ p$ .
2.  $\bar{f}$  непрерывно тогда и только тогда, когда  $f$  непрерывно.

*Доказательство.*

- Определим  $\bar{f}([x]) = f(x)$  для всех  $x \in X$
- $\implies$  По непрерывности композиции, если  $\bar{f}$  непрерывна, то  $f$  тоже.
- $\impliedby$  В обратную сторону — по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

**Theorem 74** (Склеивание концов отрезка).  $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

*Доказательство.* Рассмотрим  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ .

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство  $[0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$ . Соответствующее  $\bar{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$  — биекция. По теореме ??  $\bar{f}$  непрерывно.  $[0, 1]/\{0, 1\}$  — компактно,  $S^1$  — хаусдорфово, следовательно,  $\bar{f}$  — гомеоморфизм.  $\square$

**Theorem 75.**  $X$  — замкнуто,  $Y$  — хаусдорфово.  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывно и сюръективно. Тогда

$$X/\sim \cong Y,$$

где  $\sim$  определяется условием

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

**Theorem 76.**  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

*Доказательство.* Вместо  $D^n$  возьмем  $B$  — замкнутый шар радиуса  $\pi$  с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$ . По прошлой теореме ?? достаточно построить сюръективный гомеоморфизм  $f : B \rightarrow S^n$ , отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left( \frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x| \right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

$\square$

## 1.19 Многообразия

**Designation.** Здесь и далее  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

**Def 73.**  $n$ -мерное многообразие — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки  $x \in M$  есть окрестность, гомеоморфная  $\mathbb{R}^n$ .

Число  $n$  — размерность многообразия.

**Theorem 77.** При  $m \neq n$  никакие непустые открытые подмножества  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  не гомеоморфны.

**Corollary.** Многообразие размерности  $n$  не гомеоморфно многообразию размерности  $m$ .

**Ex.** 0-мерные многообразия — не более чем счетные дискретные пространства.

**Ex.** Любое открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$  или любого многообразия — многообразие той же размерности.

**Ex.** Сфера  $S^n$  —  $n$ -мерное многообразие

**Ех.** Проективное пространство  $\mathbb{RP}^n = S^n / \{id, -id\}$  – многообразие

*Practice.* В диске  $D^n$  склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно  $\mathbb{RP}^n$ .

**Def 74.**  $n$ -мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство  $M$  со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо  $\mathbb{R}^n$ , либо  $\mathbb{R}_+^n := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем**  $M$  и обозначаются  $\partial M$ .

**Def 75.** Поверхность – двумерное многообразие.

**Ех.**  $D^n$  – многообразие с краем,  $S^{n-1}$  – его край.

**Theorem 78.**  $\mathbb{R}_+^n$  не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в  $\mathbb{R}^n$ .

**Склеивание поверхности их квадрата** Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ( $aba^{-1}b^{-1}$ ) – тор  $S^1 \times S^1$ .
2. Одна пара с переворотом ( $abab^{-1}$ ) – бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ( $abab$ ) – проективная плоскость  $\mathbb{RP}^2$ .

**Theorem 79.**

- Пусть дан правильный  $2n$  угольник ( $D^2$  с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).
- Пусть в  $m$ -угольнике некоторые  $2n$  сторон ( $2n < m$ ) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.

*Note.* Можно брать и несколько многоугольников и склеивать их между собой.

### 1.19.1 Классификация многообразий

*Note.* Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

**Theorem 80** (без доказательства). Пусть  $M$  – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда

1.  $M$  – компактно, без края  $\implies M \cong S^1$
2.  $M$  – некомпактно, без края  $\implies M \cong \mathbb{R}$
3.  $M$  – компактно,  $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, 1]$
4.  $M$  – некомпактно,  $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, +\infty)$

**Corollary.** Компактное 1-мерное многообразие без края – несвязное объединение конечного набора окружностей.

### 1.19.2 Сферы

**Def 76.** Пусть  $p \in \mathbb{N}$ . Сфера с  $p$  ручками строится так: берем сферу  $S^2$ , вырезаем  $p$  не пересекающихся дырок (внутренностей  $D^2$ ). Далее берем  $p$  торov с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

**Def 77.** Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

*Practice.* Сфера с одной пленкой –  $\mathbb{RP}^2$ , сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

### 1.19.3 Классификация поверхностей

**Statement.** Поверхность — связное двумерное многообразие.

**Theorem 81.**

- Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.
- Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.
- Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.

*Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.*

*Note.* Число дырок равно числу компонент края.

### 1.19.4 Эйлерова характеристика

**Def 78.** Пусть  $M$  – компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика  $M$  – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

**Theorem 82.** Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.

**Exs.**

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки  $\chi$  уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n$ ,  $\chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$

- $\chi(\text{сферы с } p \text{ ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с } q \text{ пленками}) = 2 - q$