Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

28 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ *– замкнуто,* $B \cap Y$ *– замкнуто. Тогда* $A \times B$ *– замкнуто в* $X \times Y$*.*

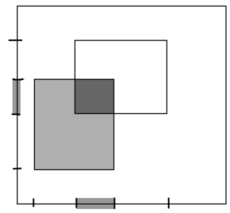

Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X,\ B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x, y), (x', y')) = max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \overset{?}{\geq} d(p, p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.

$$\exists A \subset X,\ B \subset Y\text{- открытые}, (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

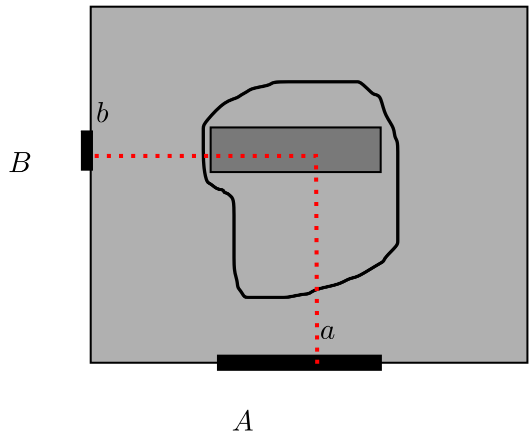

Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B^Y_{r_2}(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B^{X\times Y}_r((x,y)) = B^X_r(x) \times B^Y_r(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leq} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leq & \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

□

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i.

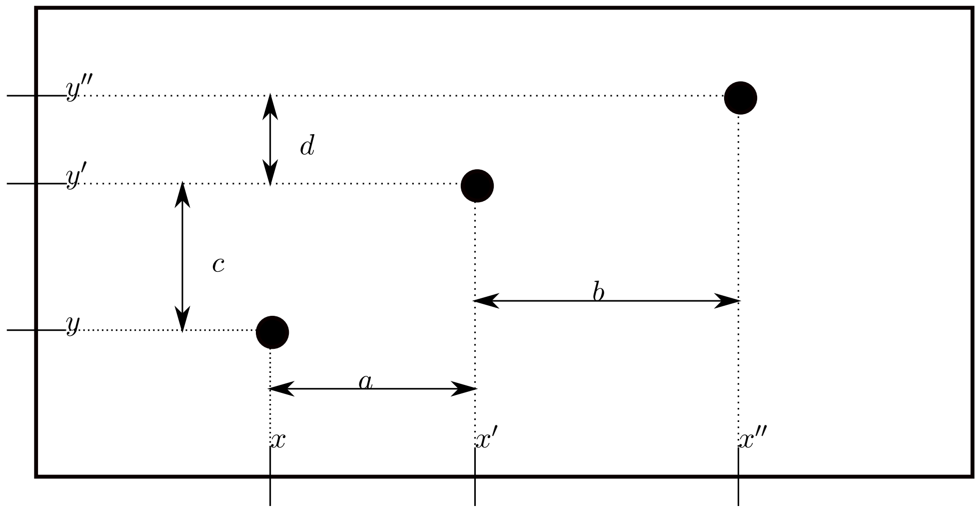

Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Def 2 (Тихоновская топология)**.** Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i\in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \Omega_i\right\}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

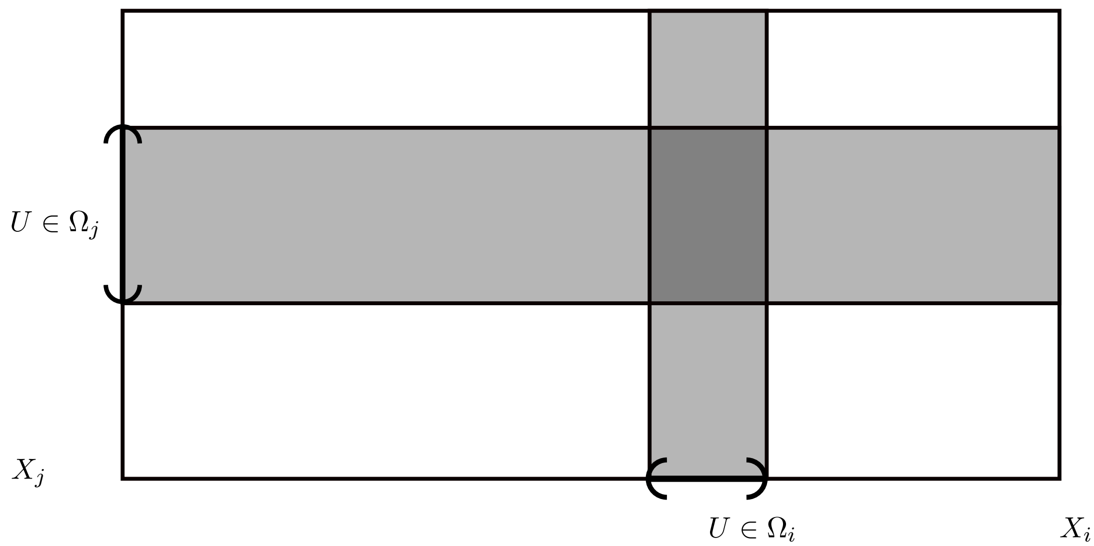

Рис. 1.4: Тихоновская топология

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

Theorem 4. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. $\Rightarrow$)
$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$)
$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$- внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.*
Тогда f – непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < d \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\Leftarrow$) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.
$f : X \to Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

1.9 Гомеоморфизм

Designation. X, Y — топологические пространства.

Def 6. Гомеоморфизм между X и Y — непрерывное биективное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f^{-1} : Y \to X$ тоже непрерывно.

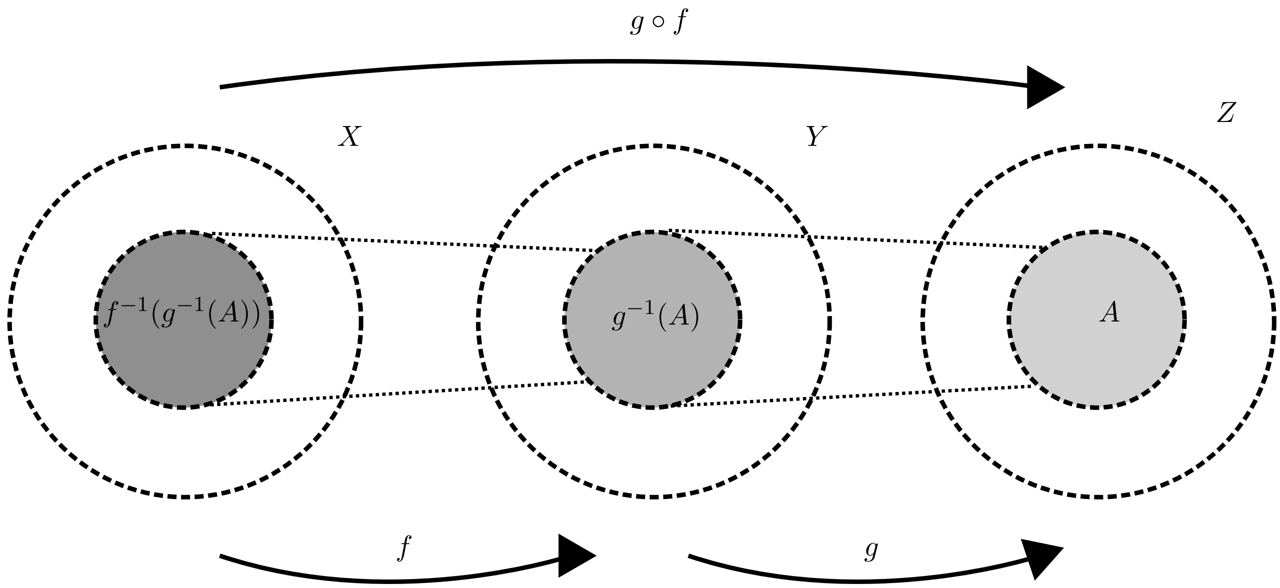

Рис. 1.5: Композиция отображений

Def 7. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. *Тождественное отображение — гомеоморфизм.*
2. *Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.*
3. *Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.*

Theorem 7. *Гомеоморфность — отношение эквивалентности.*

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y.
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \to S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f – биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1, f – непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке (1, 0).

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d: \ [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d: \ (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d: \ [a, b) \cong [c, d) \cong (c, d]$
- $\forall a, b: \ (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b: \ [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 8. *Открытый шар в* $\mathbb{R}^n$ *гомеоморфен* $\mathbb{R}^n$

Designation. D^n — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$

Designation. S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$

Theorem 9. $S^n \setminus \{\text{\textit{точка}}\} \cong \mathbb{R}^n$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.10 Аксиомы

1.10.1 Аксиомы счетности

Def 8. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \not\ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 9. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сетности (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 10. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2AC), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 10. *$2AC \Rightarrow 1AC$*

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 11. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

Statement. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 12. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 13. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 11. Топологические свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 14. *Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in A$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.10.2 Сеперабельность

Def 12. Всюду плотное множество – множество, замыканние которого есть все пространство.

Def 13. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 14. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. *X, Y – сепарабельны $\Longrightarrow X \times Y$ тоже.*

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 15.

- *Счетная база* $\Longrightarrow$ *сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность* $\Longrightarrow$ *счетная база*

1.10.3 Аксиомы отделимости

Def 15. X обладает свойтсвом T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 16. $T_1 \Longleftrightarrow$ *любая точка является замкнутым множеством.*

Def 16. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y :\ U \cap V = \varnothing$.

Def 17. X хаусдорфово $\Longleftrightarrow$ Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 18. X – регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X$ $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \varnothing$
  Другое название T_3-пространство

Def 19. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \varnothing)$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \varnothing$

Другое название T_4-пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.
Нормальность не наследственная.

Def 20. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.
$f : X \to Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. □

Lemma (Урысон). *X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует непрерывна функция $f : X \to [0,1] :\ f\restriction_A = 0 \wedge f\restriction_B = 1$*

1.11 Связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 21 (Связное топологическое пространство).
X связно, если:

его нельзя разбить на два непустых открытых множества;

его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;

не существует открыто-замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и X;

не существует сюрьективного непрерывного отображения $f : X \to 0, 1$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- $\mathbb{Q}$ несвязно

1.11.1 Связные множества

Def 22. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологий.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C, что $ClA \cap C = \varnothing \wedge ClC \cap B = \varnothing$.
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V :\ U \cap V = \varnothing \wedge U \cap A \neq \varnothing \wedge V \cap A \neq \varnothing$.
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. *Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.*

Связные множества на прямой

Statement. *Отрезок $[0, 1]$ связен.*

Theorem 17. *Для $X \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *X — связно*
2. *X — выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)*
3. *X — интервал, точка или пустое множество*

1.11.2 Связность при отображении

Theorem 18. *X — связно, $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f(x)$ связно.*

Theorem 19. *X связно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(x)$ содержит все числа между a и b.*

Доказательство. По теореме 18 $f(x)$ связно. Тогда по определению $f(x)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. □

1.11.3 Компоненты связности

Def 23. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X.

Exs.

1. $[0, 1] \cup [2, 3]$ две компоненты связности — $[0, 1]$ и $[2, 3]$.
2. Компоненты связности $\mathbb{Q}$ — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств)**.** *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда $A \coloneqq \bigcup_{i \in I} A_i$ тоже связно.*

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V.

$$\exists i, j \in I : \ U \cap A_i \neq \varnothing \wedge V \cap A_j \neq \varnothing.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Противоречие. □

Theorem 20. *Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:*

- *каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;*
- *различные компоненты связности не пересекаются.*

Доказательство.

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
   Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x. Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме 1.11.3 полученное множество связно, значит это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются.
   Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \varnothing$. По лемме 1.11.3 $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

□

Lemma. *Замыкание связного множества связно.*

Theorem 21. *Компоненты связности замкнуты.*

Доказательство. Следует из леммы 1.11.3. □

Note. компоненты связности не всегда открыты. Например, в $\mathbb{Q}$.

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.12 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 24. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \to X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 25. X линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ex.

$$\forall\, p, q \in \mathbb{R}^n \ \exists\ \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

Theorem 22. *Если X линейно связно, $f : X \to Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ в $f(X)$. □

Lemma. *Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.*

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X\ \exists\ \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \to \exists \overline{\alpha} = \alpha(1 - t))$

Транзитивность: если α идет из x в y, а β из x в z, построим путь γ, идущий из x в z:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

1.12.1 Компоненты линейной связности

Def 26. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 27 (переформулировка)**.** Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.12.2 Линейная связность и связность

Theorem 23. *Если X линейно связно, то оно связно.*

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ex (Связность не влечет линейную связность)**.** Рассмотрим множество

$$\left\{\left(x, \cos\frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x > 0\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность
   График линейно связен, значит он связен, а $(0,0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X, следовательно, X — связно.

2. $(0,0)$ не соединяется путем с другими точками
   Пусть α — путь с началом в $(0,0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0,1] \mid \alpha(t) = (0,0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

   Докажем, что T открыто в $[0,1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) :\ |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) :\ \alpha(t_1) \neq (0,0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

   $$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = \left(\frac{1}{2\pi n}, 1\right)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

   Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связен, $T = [0,1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0,0)$.

□

1.12.3 Локальная линейная связность

Def 28. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x :\ V \subset U$.

Ex. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связано.

Theorem 24. *В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.*

Доказательство.

1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.
2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности.

□

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 25. *Интервалы* $[0, 1]$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{R}$, S^1 *попарно негомеоморфны.*

Theorem 26. $\mathbb{R}^2$ *не гомеоморфна никакому интервалу и* S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества $\mathbb{R}^2$ связно.

□

1.13 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 29. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны
2. Все ахти дискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. $\mathbb{R}$ некомпактно

Def 30. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A, $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X, $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

Theorem 27 (лемма Гейне-Бореля). *Отрезок* $[0,1]$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $l_0 = [0,1], \{U_i\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}$, $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i. Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i. Обозначим ее l_1.

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \ldots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0. Она лежит в каком-то U_{i_0}. С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n. Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i. Противоречие. □

Theorem 28. *Если* X *компактно и* $A \subset X$ *замкнуто, то* A *компактно.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X, выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. □

Theorem 29. *Если* X, Y *компактны, то* $X \times Y$ *компактно.*

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X,\ V_i \subset Y$.

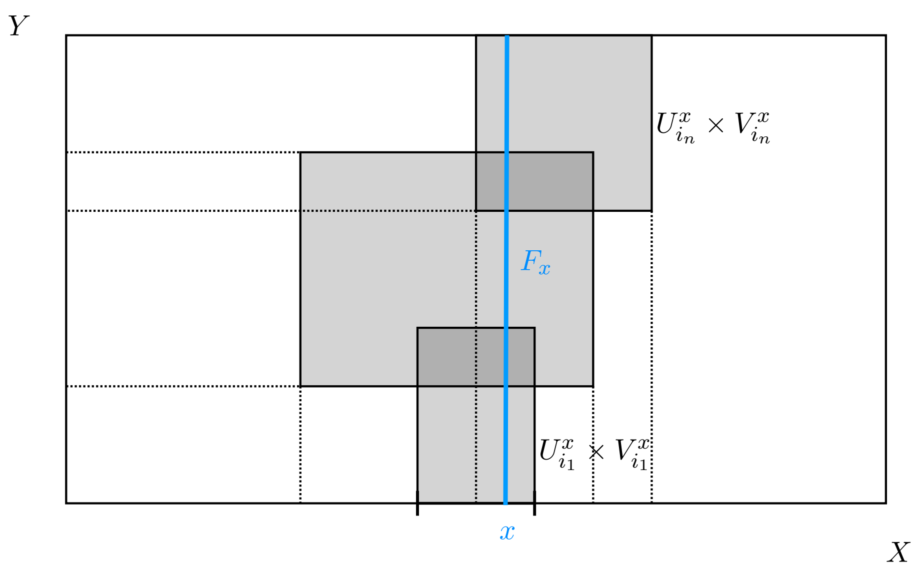

Рис. 1.6: Покрытие и гомеокопия

2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x \coloneqq \{x\}Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U^x_{i_1} \times V^x_{i_1}, \ldots, U^x_{i_n} \times V^x_{i_n}$.

3. $U^x = U^x_{i_1} \cap \ldots \cap U^x_{i_n}$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X. $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".

4. Получили окрестности U^x для всех точке $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

□

Theorem 30. *Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X.*

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \ \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \ni x : U_a \cap V_a = \varnothing.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A: $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$. $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x, не пересекающая A. □

Theorem 31. *Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.*

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы 30.

$$U \coloneqq \bigcup U_{a_i},\ V \coloneqq \bigcap V_{a_i}.$$

   U и V — открытые множества, $U \supset A,\ V \ni x,\ U \cap V = \varnothing$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть $A,\ B$ замкнуты и $A \cap B = \varnothing$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \ \exists \text{ окрестности } U_a \ni a,\ V_a \supset B : U_a \cap V_a.$$

   Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$. Аналогично получим открытые $U \coloneqq \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V \coloneqq \bigcap V_{a_i} \supset B,\ U \cap V = \varnothing$. Доказали, что X нормально.

□

1.13.1 Компактность в $\mathbb{R}^n$

Designation. X — метрическое пространство.

Def 31. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 32. Диаметр множества A:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. *A ограничено тогда и только тогда, когда* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 32. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 33. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ По прошлому следствию **??**.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. Тогда A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.13.2 Центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 33. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 34. *X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств $A_1, \dots A_n$. Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из $A_{1 \dots n}$, это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i \in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Не умоляя общности A_0 компактно. По теореме **??** (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$ имеет непустое пересечение. □

Theorem 35. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.*

Note. Теорема **??** обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots.$$

1.13.3 Непрерывные отображения компактов

Theorem 36. *Пусть X компактно, $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X. Выберем в нем конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$. Тогда $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. □

Theorem 37. *Пусть X компактно, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.*

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(x)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. □

Theorem 38. *Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная бикеция. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. f непрерывно $\iff$ прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно $\iff$ f-образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. □

1.13.4 Вложения компактов

Def 34. $f : X \to Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм меду X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \to Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.14 Полные метрические пространства

1.14.1 Компактность полных метрических пространств

1.15 Факторизация

Def 35. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство $X/\sim$ — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X.

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X.

1.15.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Def 36. Каноническая проекция X на $X/\sim$ или отображение факторизации — отображение

$$p : X \to X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 39. *Каноническая проекция непрерывна.*

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X.

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. *Следующие свойства наследуются факторпространством:*

- *Связность*
- *Линейная связность*
- *Компактность*
- *Сепарабельность*

1.15.2 Стягивание множества в точку

Def 37. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X:

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A, операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме **??**)

1.15.3 Несвязное объединение

Def 38. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологий: A открыто в $X \sqcup Y \iff A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y.

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.15.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \to Y$ — непрерывное отображение.

Def 39. $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A: \; a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f.

Ex. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y, $A = \{x_0\}, f(x_{00} = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0).

Ex. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ex. Если склеить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, получилась **лента Мебиуса**.

Def 40. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство $X/\sim$ обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ex. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами.

Theorem 40. *Пусть $p : X \to X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \to Y$ переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X: \; x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \overline{f} : X/\sim \to Y : f = \overline{f} \circ p.$
2. $\overline{f}$ *непрерывно тогда и только тогда, когда* f *непрерывно.*

Доказательство.

- Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- $\boxed{\Longrightarrow}$ По непрерывности композиции, если $\overline{f}$ непрерывна, то f тоже.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

$\square$

Theorem 41 (Склеивание концов отрезка)**.** $[0,1]/\{1,0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0,1] \to S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0,1]/\{0,1\} \to S^1$. Соответствующее $\overline{f} : [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ — биекция. По теореме **??** $\overline{f}$ непрерывно. $[0,1]/\{0,1\}$ — компактно, S^t — хаусдорфово, следовательно, $\overline{f}$ — гомеоморфизм. $\square$

Theorem 42. *X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \to Y$ – непрерывно и сюрьективно. Тогда*

$$X/{\sim} \cong Y,$$

где $\sim$ определяется условием

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Theorem 43. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме **??** достаточно построить сюрьективный гомеоморфизм $f : B \to S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|}\sin|x|, \cos|x|\right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}_{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

$\square$

1.16 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 41. n-мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число n — размерность многообразия.

Theorem 44. *При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m.

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n-мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

Def 42. n-мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M.

Def 43. Поверхность – двумерное многообразие.

Ex. D^n — многообразие с краем, S^{n-1} — его край.

Theorem 45. $\mathbb{R}^n_+$ *не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в* $\mathbb{R}^n$.

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) — тор $S^1 \times S^1$.

2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) — бутылка Клейна.

3. Обе пары с переворотом ($abab$) — проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

Theorem 46.

- *Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).*

- *Пусть в m-угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.*

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать из между собой.

1.16.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 47 (без доказательства). *Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда*

1. M *– компактно, без края* $\Longrightarrow M \cong S^1$
2. M *– некомпактно, без края* $\Longrightarrow M \cong \mathbb{R}$
3. M *– компактно,* $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0,1]$
4. M *– некомпактно,* $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0,+\infty)$

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.16.2 Сферы

Def 44. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2, вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 45. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – $\mathbb{RP}^2$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.16.3 Классификация поверхностей

Statement. *Поверхность — связное двумерное многообразие.*

Theorem 48.

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.*

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.16.4 Эйлерова характеристика

Def 46. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенныам связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 49. *Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- χ(бутылки Клейна) $= 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- χ(сферы с n дырками) $= 2 - n$, χ(тора с дыркой) $= -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- χ(сферы с p ручками) $= 2 - 2p$
- χ(сферы с q пленками) $= 2 - q$