Конспект по матанализу I семестр (лекции Кислякова Сергея Витальевича)

December 11, 2019

Contents

[section]

Chapter 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Chapter 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифф

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 2.3.1. *$f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leq M$
2. *f – ограничена:* $|f(n)| \leq M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Proof. Очевидно □

Theorem 2.3.2. *$f_n \rightrightarrows f, g_n \to\to g$ на A. Пусть $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n)x)| \leq M$. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows fg$*

Proof.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 2.3.3. *Критерий Коши для равномерной сходимости Пусть f_n – последовательность функций на множестве A. Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Proof. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall xinA.$

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \le |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть 2.3.3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 2.3.3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Example. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс): } f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 2.3.4 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n – функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \le a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Proof. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N.$

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \le |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \le a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

□

Example (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x,\ g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

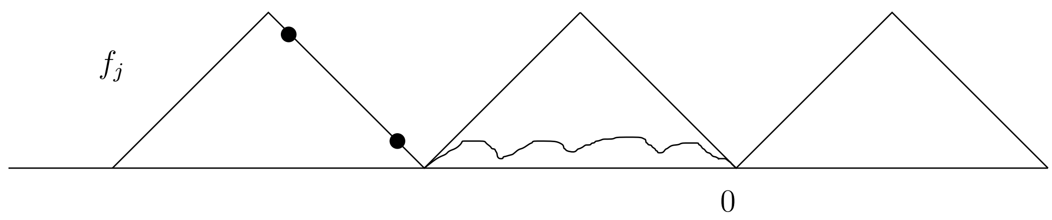

Figure 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}}: \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty}(f_j(x+h_k)-f_j(x))h_k = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{f_j(x+h_k)-f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k ($\pm$), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Name. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ – сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x)\dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Example. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{t}{n}+|x|}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+|x|}} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geq 1|.$$

Theorem 2.3.5. $f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a,b\rangle$ *и* $f' = g$.

Proof. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle\right| < \varepsilon.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x-y} - \frac{f(x) - f(y)}{x-1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

Оценим разность. Зафикируем x.

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \to |\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x-y} f'_k(x)| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x:

$$|y - x| < \delta, y \neq x \to |f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x-y}| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \to |g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x-y}| \leq 3\varepsilon.$$

□

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b\rangle$. $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$у и $f' = g$ всюду.

Theorem 2.4.1 (Ньютон, Лейбниц)**.** *Если g – непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c.*

Theorem 2.4.2. *Если f_1, f_2 – первообразные для g, то $f_1 - f_2 = const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \ \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Name. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция – это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b\rangle$; Φ – отображение отрезка $\langle a, b\rangle$ в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b\rangle$, $\Phi(x)$ – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал)**.** f – дифференцируема на $\langle a, b\rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Example. $x : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ – тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$*, где* c *- некая функция на* $\langle a, b\rangle$

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdg.$$

Example.

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos tdt = \int \cos^2(t)dt =$$
$$\int \tfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \tfrac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t)dt =$$
$$\tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{2} \int \cos td(2t)) = \tfrac{1}{2}(t + \tfrac{\sin 2t}{2})$$

Тогда $\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -fdy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Example.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Example.

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx.$$

$$= \sin x e^x - \int xosx de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A – множество произвольной природы. $\Phi : A \to \mathbb{R}$. Φ – функционал на A.

Def 5. Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
$f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi)\langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. *Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ($f \mapsto I(\alpha)$)*
2. *$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) = I(\beta)$ (Линейность)*
3. *$f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$*
4. *$\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a,b \rangle}) = b - a$*

Def 6. Разбиение – ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle \neq \varnothing.$$

Def 7. g на $\langle a, b \rangle$ – ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разиения нашего отрезка $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.5.1 Интеграл Дарбу

Def 8. J – конечный интервал, если его разбиение – это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^N$, такой что J_k
$capJ_s = \varnothing,\ k \neq s$, $\bigcup_{k=1}^N J_k = J_i$. (ДОпускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 9. Длина интервала $\langle a, b\rangle$ – это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\varnothing| = 0$

Lemma. *Если* $\{J_k\}_{k=1}^N$ *– разбиение* J, *то* $|J| = \sum\limits_{k=1}^N |J_k|$

Def 10. e – множетсво, f – ограниченная функция на .

Колебание f на e :

$$esc_e(f) = \sup_{x,y\in e} |f(x) - f(y)| =$$

$$= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y))\right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y))\right) =$$

$$= \sup_{x\in e} f(x) + \sup_{y\in e}(-f(x) = \sup_{x\in e} f(x) - \inf_{y\in e} f(y).$$

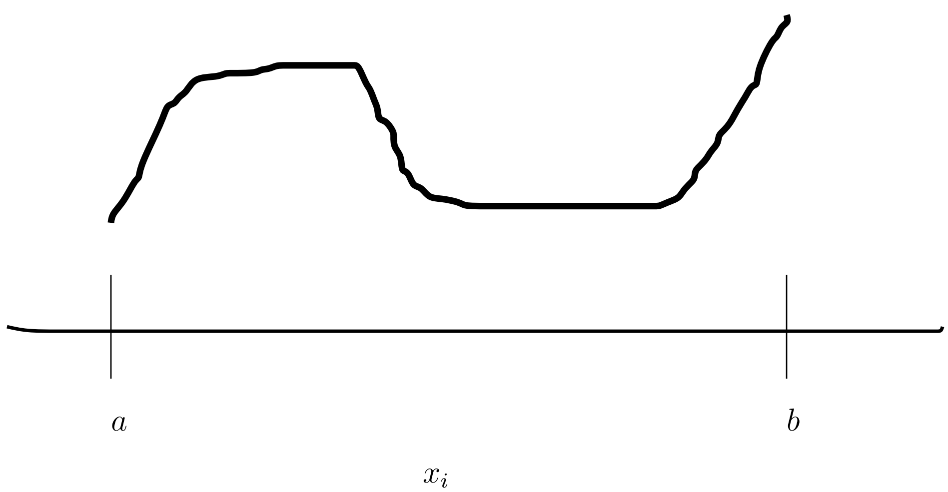

Figure 2.2: График функции

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки $J_1, \dots J_N$ из разбиения отрезка J.

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x\in J_k} f(x)\underline{S}.$$

– нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

– верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

Name. A – множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

B – множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. *Пусть* $\{A, B\}$ *– щель. Тогда*

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \overline{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели – это $[\underline{I}(f), \overline{I}(f)]$ *(верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от* f*)*

Statement. $\{A, B\}$ *– щель.*

Proof. ε – разбиение отрезка J_i. $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ – верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leq \overline{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ – разбиение J_i : $\mathcal{F}$ – измельчение $\mathcal{E}$, если $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. *Если* $\mathcal{F}$ *– измельчение для* $\mathcal{E}$*, то*

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geq \underline{S}_{\mathcal{E}}, \quad \overline{S}_{\mathcal{F}} \leq \overline{S}_{\mathcal{E}}.$$

Lemma. *Рассмотрим* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ *– разбиения отрезка* J_i*. Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)*

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – разбиения. $\mathcal{F}$ – общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{F}} \leq \overline{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ – щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 11. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Example.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ– ступенчатая функция на J, Существует разбиение $\underline{S}$ отрезка на J. $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\} : \varphi(x) = \sum i = 1^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i \overline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}\varphi = I(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{k} |e_i| c_i$

Note. Пусть J – произвольный отрезок, f – ограниченная функция на J, $\mathcal{E}$ – разбиение отрезка J на непустве отрезки $\{e_1, \dots e_n\}$.

.

Theorem 2.5.1. *Критерий интегрируемости по Риману f – интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение $e_1, ..e_k$ Отрезка J, такое что $\sum\limits_{i=1}^{k} |e_k| osc_{e_k} f < \varepsilon$.*

Proof. Проверим, что f удовлетворяет условию 2.5.1 □

Property.

1. *f – непрерывна на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ – интегрируема.*
2. *Σ – разбиение,*
$$\overline{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$
3. *Если $\alpha > 0$,*
$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$
Аналогично с нижней суммой.
4. *Если f – интергируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf – интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$*
5. *$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – ограничены. Σ – разбиение.*
$$\overline{S}_\Sigma(f+g) \le \overline{iS}_\Sigma(f) + \overline{S}_\Sigma(g).$$
6.
$$\underline{S}_\Sigma(f+g) \ge \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$
7. *Если f, g – интегрируемы на $\langle a, b\rangle$, то $f + g$ – интегрируема и*
$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$
Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.
8. *f, g – интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ –интегрируема и*
$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$
9. *Монотонность. $f \ge 0, f$ – интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \ge 0$.*
10. *f, g – интегрируемы на $\langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot g$ – интегрируема.*

Proof.
$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b\rangle.$$
Пусть J – отрезок. Оценим осцилляцию.
$$\forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y_| = |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(x)| =$$
$$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$
$$= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq$$
$$\leq C \cdot osc_J g + D \cdot osc_J f.$$
f, g – интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon\ \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.
Получаем
$$\begin{matrix} \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| osc_J f \leq \varepsilon \\ \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| osc_J g \leq \varepsilon \end{matrix}.$$
Тогда $\forall J \in \Sigma : osc_J(fg) \leq C \cdot osc_J g + D \cdot osc_J f$.
Следовательно,
$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot osc_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot osc_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot osc_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$
$\square$

11. *f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $J \subset \langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ – интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)*
Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.
12. *J_1, J_2 – два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \varnothing$. Тогда*
$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$
13. *Основная оценка интеграла. f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $|f| \leq M$ на $[c, d] \subset \langle a, b\rangle$*
$$\left|\int_c^d f\right| \leq M(d - c).$$

Name. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.
$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \overset{def}{=} I(f\chi_{\langle c, d\rangle}).$$
Name. Если $d < c$:
$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$
Statement. *f – интегрируема на $\langle a, b\rangle$.*
$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.5.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – первообразная функция f, если F – дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 2.5.2 (Ньютон-Лейбниц)**.** *Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$ и непрерына в точке $t \in \langle a, b\rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b\rangle : F(s) = \int_{t_0}^{s} f$. Тогда F – дифференцируема в точке tи $F'(t) = f(t)$.*

Proof. $x \neq t$.

$$\left|\frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t)\right| = \left|\frac{\int_{t_0}^{x} f = \int_{t_0}^{t} f}{x - t}\right| = \left|\frac{\int_{t}^{x}}{x - t} - f(t)\right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|}\left|\int_{t}^{x} f - (x - t)f(x)\right| = \frac{1}{|x - t|}\left|\int_{t}^{x} f(s) - f(t)ds\right| \leq \sup_{s\in[t,x]} |f(s) = f(t)|.$$

f – непрерывна в t. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta$. Если $|s - t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \Longrightarrow \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \to |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t, x]|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x\to t} |\frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t)| = 0 \Longrightarrow F'(t) = f(t).$$

$\square$

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $\forall t_0 \in [a, b] : F$ –первообразная f.

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница)**.** f – непрерывна на $[a, b]$, F –первообразная f. Тогда

$$\int_{a}^{b} f = F(b) - F(a).$$

Def 12. $f \in C^k\langle a, b\rangle, \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$, если $f, f', \ldots f^{(k)}$ – непрерывны.

Theorem 2.5.3. *Если $f, g \leq C^1(a, b)$, то*

$$\int_{b}^{a} fg' = f \cdot g \mid_a^b - \int_{a}^{b} f'g,$$

где $\Phi \mid_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

2.5.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a, b]$ и f, g, f', g' – непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ – первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(x)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 2.5.4. *f_n, f – Заданы на $\langle a, b\rangle; n \in \mathbb{N}$ Пусть*

1. *все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b\rangle$*

2. *$f_n \rightrightarrows f$. Тогда f интегрируема по Риману*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Proof.

Lemma. *E – множество, u, v – вещественные функции на E. $|u(x) - v(x)| \leq \lambda\ \forall E$. Тогда $|ose_E(u) - ose_E(v)| \leq 2\lambda$*

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

$$|ose_{\langle a,b\rangle} - ose_{\langle a,b\rangle(f)}| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists\{I_1, \dots I_N\}$ – отрезки $\langle a, b\rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| ose_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| osc_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a)+1).$$

Следовательно, f – интегрируема.

$$\left|\int_a^b f_n(x_)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x) - f(x)dx\right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0\ \exists M : \forall n \geq M\ \forall x \in \langle a, b\rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. *Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.6 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \Longrightarrow l(0) = 0.$$

Будем искать l, заданную на $\mathbb{R}_+$.

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 13. Логарифм – строго монотонная функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. *Для $n \in \mathbb{N}$:*

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \Longrightarrow l(1) = 0.$$

Statement. *Если l – логарифм, $c \neq 0$, то cl – тоже логарифм.*

Lemma. *Если l – логарифм, то l – непрерывна на всей области определения.*

Proof. Пусть l – логарифм. Считаем, что fстрого возрастает.

$$t = \lim_{x\to 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 1l(1+x).$$

При $xto1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \to 1-$, получаем тое самое. Значит l – непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. □

Lemma. *Если l – логарифм, то функция l – дифференцируема.*

Proof.

$$\Phi(x) - \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{gathered}\Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ x\int_x^{2x} l(x\cdot \tfrac{t}{x})d(\tfrac{t}{x}) = \Phi(x) + x\int_1^2 l(x\cdot y)dy = \\ \Phi(x) + xl(x) + x\int_1^2 l(y)dy\end{gathered}.$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x)-\Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. □

Theorem 2.6.1 (Производная логарифма)**.**
$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 2.6.2. *Если l логарифм, то*

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C\int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Proof. Только что доказали. □

Theorem 2.6.3. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t}dt$ *– логарифм.*
Сама $l(x) = C\cdot\int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 2.6.4. *Если $C \neq 0$, то*

$$\varphi(x) = C\int_1^x \frac{dt}{t} \text{ – есть логарифм.}$$

Proof. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x}}{)} \frac{t}{x}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

$\square$

Name. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \ x \overset{to}{\rightarrow} 0 \ \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Statement. *Образ функции* log *есть все вещественные числа.*

Proof. При $x_1 > x$, $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$. $\square$

Def 14 (Обратная функция к логарифму)**.** У функции log есть обратная функция, называющаяся экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Property. *1.* exp *строго возрастает*

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x+y).$$

Statement. *Экспонента дифференцируема:*

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)} j!}{x}^{j} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Theorem 2.6.5. *Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:*

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $epx(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Proof.

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \le R$ Применим:

$$\le \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражена стремиться к нулю.

Lemma. *Пусть* $a_0, a_1, a_2 \dots$ *– положительные числа и* $\exists N : a_j < \eta < 1 \; \forall j > N$*. Тогда* $a_0 a_1 \dots a_j \to 0 \quad j \to \infty$

Corollary. Если $a_j \geq 0,\; a_j \to 0$, то $a_0 \dots a_j \to 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. $\square$

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n! = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Proof.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad x \to \infty.$$

$\square$

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Example (Полезный пример)**.**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j \text{ – полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

h – бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b),\ a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{matrix} u(x) > 0 & x \in (a, b) \\ u(x) = 0 & x \notin (a, b) \end{matrix}.$$