Конспект по матанализу
III семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахарева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

24 октября 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: †

2 Sept

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n **сходится к** f **поточечно** ($f_n \to f$), если

$$\forall x \in E\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n **сходится к** f **равномерно на** E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N \ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0,1)$. Так как $\forall x \in (0,1)\colon x^n \to_{n\to\infty} 0$, $f_n \to f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. *$f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что*

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \to f \Longrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Longleftrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется **равномерно ограниченной на** E, если существует такое M, что

$$\forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leqslant M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. *Из равномерной сходимости следует поточечная*

1. *Если для всех $x \in E$ выполнено*
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$
где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E.

2. *Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что*
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$
то f_n не сходится равномерно к f на E.

3. *Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E. Тогда $f_ng_n \rightrightarrows 0$.*
□
$$\sup_{x\in E}|f_n(x)g_n(x)| \leqslant M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x\in E}|f_n(x)|}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
■

4. ***Критерий Коши***. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E, согда[1] для любого положительного ε существует N, что*
$$\forall n, m > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

□

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ *Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n, m > N$

$$\begin{aligned} &|f_m(x) - f(x)_n| \leqslant \\ &\qquad \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

[1]С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ *Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаметальна. Следовательно, существует предел $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*
Устремим $m \to \infty$. Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

■

5. *Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f тоже непрерывна в точке a.*

□ *Проверим, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\forall n > N \ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как f_n непрерывна в точке a, можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in E \quad \rho(x,a) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем два полученых неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| \leqslant& \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| + \\ &+ |f_n(a) - f_n(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon \end{aligned}$$

■

6. ***Теорема Стокса-Зайделя***. *Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна на E.*

□ *Следствие из 5[прошлого свойства].* ■

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функционоальный ряд

Рассмотрим функции $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — \textbf{функциональный ряд,}}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — \textbf{частичная сумма ряда.}}$$

Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что **ряд сходится поточечно**. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что **ряд сходится равномерно**.

$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — \textbf{остаток ряда}.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \to 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K.

Свойства.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* E*, согда* $r_n \rightrightarrows 0$ *на* E.

2. ***Критерий Коши***. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* E*, согда для всех* $\varepsilon > 0$ *существует такое* N*, что*

$$\forall m > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \colon \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x) \right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. ***Необходимое условие равномерной сходимости ряда***. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* E*, то* u_n *равномерно сходится к 0.*

   □ *По критерию Коши для* $p = 1$. ■

4. ***Признак сравнения***. *Пусть* $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}$ [2] *и для всех* $x \in E$ *выполнено неравенство* $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходится равномерно на* E*, то* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *тоже сходится равномерно на* E.

   □ *Обозначим частичные суммы*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$

   Заметим, что

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \leqslant |C_m(x) - C_n(x)|.$$

   Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше* ε *при* $m, n > N$ *и* $x \in E$*. Тогда можем применить критерий Коши для* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. ■

5. ***Признак Вейерштрасса***. *Пусть* $u_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *и для всех* $x \in E$ *выполнено неравенство* $|u_n(x)| \leqslant a_n$*. Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно.*

   □ *Применить признак Коши.* ■

6. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ *сходится равномерно, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно.*

7. ***Признак Дирихле***. *Пусть* $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$*, обозначим* $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$*. Если выполнены следующие условия, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ *сходится равномерно:*

   (a) *ряд* U_n *равномерно ограничен на* E*, то есть* $\exists M \colon \forall x \in E \ \forall n \quad |U_n(x)| \leqslant M$;
   (b) *ряд* v_n *равномерно сходится к нулю* ($v_n \rightrightarrows 0$);
   (c) *для любого* $x \in E$ *последовательность* $\{v_n(x)\}$ *монотонна.*

   □ *Воспользуемся преобразованием Абеля:*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) v_k(x) = U_n(x) v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$

   Так как $U_n(x)$ *равномерно ограничено, а* $v_n(x)$ *равномерно сходится к нулю,* $U_n(x) v_n(x)$ *тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1})|.$$

[2] Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае $\mathbb{C}$ не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

Оценим частичную сумму[3]

$$\sum_{k=1}^{n-1}|U_k(x)(v_k(x)-v_{k+1}(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}|U_k(x)|\cdot|v_k(x)-v_{k+1}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{n-1}|v_k(x)-v_{k+1}(x)| =$$

$$= M\cdot|v_1(x)-v_n(x)|$$

Так как $v_n \rightrightarrows 0$, $|v_1(x)-v_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |v_1(x)|$. *Значит, частичная сумма ряда стремится к* $M\cdot|v_1(x)|$, *следовательно*[4], *второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится.* ■

8. ***Признак Лейбница***. *Если выполнены следующие условия, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n(x)$ *равномерно сходится:*

   (a) $v_n \rightrightarrows 0$ *на* E;
   (b) *для любого* $x\in E$, *ряд* $\{v_n(x)\}$ *монотонный.*

□ *Обозначим за* $u_n(x) \coloneqq (-1)^n$. *Заметим, что ряд* $U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ *ограничен, тогда по признаку Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ *равномерно сходится.* ■

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. Обозначим $u_n(x)=\sin(nx)$ и $v_n(x)=\frac{1}{n}$. Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}}\cdot\left(e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}}-e^{-ix\cdot\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(e^{\frac{ixn}{2}}\right)\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ при $x\in(0,1)$. Обозначим $v_n(x)=\frac{x^n}{n}$. $v_n(x)$ монотонна для всех $x\in(0,1)$, так же $|v_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}$, поэтому v_n равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. ***Признак Абеля***. *Пусть* $u_n, v_n\colon E\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. *Если выполнены следующие условия, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ *сходится равномерно:*

   (a) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *равномерно сходится на* E;
   (b) *ряд* v_n *равномерно ограничен;*
   (c) *для любого* $x\in E$ *последовательность* $\{v_n(x)\}$ *монотонна.*

□ *Проверим критерий Коши, а именно: для любого* $\varepsilon>0$ *должно существовать число* N *такое,*

[3] В последнем переходе мы используем монотонность $v_k(x)$

[4] Например, по признаку сравнения

что

$$\forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\colon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля[5]*:*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) =$$

$$= \big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big)\cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1}\big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big)\cdot\big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)\big)$$

Так как v_n равномерно ограничено, а u_n равномерно сходится[6]*:*

$$\big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big)\cdot v_{n+p}(x) \leqslant |U_{n+p}(x) - U_n(x)|\cdot M < \varepsilon\cdot M.$$

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для u_n и монотонность v_n:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big)\cdot\big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p-1}\big|U_{n+k}(x) - U_n(x)\big|\cdot\big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{p-1}\big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\cdot|v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon\cdot 2M$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через ε, поэтому можем им воспользоваться. ■

1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

1. *Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E, f_n равномерно сходится к f на E и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существуют и равны.*

   То есть

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

   □

   (a) *Проверим, что у b_n есть предел. Из критерия Коши для f_n следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N, что*

$$\forall n, m > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

   Устремим $x \to a$. Тогда $f_n(x) \to b_n$ и $f_m(x) \to b_m$. Из того, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon,$$

   следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Поэтому предел b_n существует и $b \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n$.

   (b) *Определим функции*

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a\end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a\end{cases}$$

   Эти функции непрерывны в точке a. Кроме этого $g_n \rightrightarrows g$ на $E \cup \{a\}$, так как можно выбрать N из прошлого пункта.

[5] Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.
[6] Поэтому можем использовать критерий Коши

(c) *Используем свойство равномерной сходимости*

$$b = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

■

Следствие 1. Если $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f_n \rightrightarrows f$ на (a,b) и f_n непрерывна, то $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Лекция 2: †

9 Sept

2. Пусть $u_n\colon E\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E и $\lim_{x\to a} u_n(x) = b_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

□ Обозначим частные суммы за

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Тогда $\lim_{x\to a} S_n(x) = B_n$ и $S_n \rightrightarrows S$ на E. $S_n(x)$ — функции, поэтому можно применить свойство 1 и получить

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} S_n = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

■

3. Пусть $f_n \in C[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ [7]. Рассмотрим произвольную точку $c\in[a,b]$ и первообразную $\int_c^x f_n(t)dt$. Тогда

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ на } [a,b].$$

В частности,

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt.$$

□ Посмотрим на разность

$$\left|\int_c^x f(t)dt - \int_c^x f_n(t)dt\right| \leqslant |c-x|\cdot\max_{t\in[c,x]}|f(t)-f_n(t)| \tag{1.3.1}$$

Расширив отрезок $[c,x]$ до $[a,b]$, получаем следующую оценку на 1.3.1

$$1.3.1 \leqslant (b-a)\cdot\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.3.2}$$

Выражение в 1.3.2 не зависит от x, откуда и следует равномерная сходимость. ■

4. **Перестановка дифференцирования и предельного перехода**. Пусть $f_n\in C[a,b]$, $f_n' \rightrightarrows g$, $c\in[a,b]$ и $f_n(c) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$. Тогда f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$ и $f'=g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

[7] Из этих двух условий автоматически следует, что f непрерывна

☐ Так как $f_n' \rightrightarrows g$, по прошлому свойству

$$\int_c^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt.$$

Заметим, что

$$\int_c^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(c).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(c)}_{\to A} + \underbrace{\int_c^x f_n(t)dt}_{\rightrightarrows \int_c^x g(t)dt} \rightrightarrows A + \int_c^x g(t)dt.$$

■

Следствие 2 (дифференцирование равномерно сходящегося ряда)**.** Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $c \in [a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

1.4 Степенные ряды

Определение 5: Степенной ряд

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $a_n,\ z,\ z_0 \in \mathbb{C}$, называется **степенным с центром в точке** z_0.

Замечание. С помощью переносов любой степенной ряд сводится к ряду с центром в нуле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.[8]

Теорема 1.4.1. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при всех z, что $|z| < |z_0|$.*[a]

[a] То есть для всех z внутри шара с центром в нуле и радиусом z_0.

☐ Так как ряд сходится в точке z_0, $a_n z_0^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то есть $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

А такой ряд сходится, так как $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. ■

Следствие 3. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ расходится, то для всех z, что $|z| > |z_0|$, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.

Определение 6: Радиус сходимости

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — такое число, что для всех $z\colon |z| < R$ ряд сходится, а для всех $z\colon |z| > R$ ряд расходится.

Замечание. R может быть равным нулю или бесконечности.

[8] Далее в утверждениях будет обычно фигурировать ряд с центром в нуле для упрощения рассуждений.

Теорема 1.4.2 (Формула Коши-Адамара)**.** *Радиус сходимости существует и равен*

$$R_{cx} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□ Зафиксируем z.

$$q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $|z| < R_{\text{cx}}$, то $q < 1$, тогда по признаку Коши ряд сходится.
Если $|z| > R_{\text{cx}}$, то $q > 1$, аналогично по признаку Коши ряд расходится.
Если $|z| = R_{\text{cx}}$, то $q = 1$, и в этом случае ничего сказать нельзя. ■

Упражнение. Придумать формулировку в стиле признака Даламбера, то есть

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Здесь, в отличии от верхнего предела в формуле Коши-Адамара, еще нужно доказать, что предел существует.

Пример 1.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\quad n! \sim e^n$, поэтому $R_{\text{cx}} = \infty$.

Пример 1.4.2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$, $\quad R_{\text{cx}} = 0$.

Пример 1.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\quad R_{\text{cx}} = 1$.

Теорема 1.4.3. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим $0 < r < R$. Тогда в $\overline{B(0,r)}$ ряд сходится равномерно.*

□ Возьмем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Это сходящийся числовой ряд. Если взять ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с произвольным z, то

$$\max_{\overline{B(0,r)}} |a_n z^n| = |a_n| r^n.$$

Получили что, ряд максимумов сходится, из чего про признаку Вейерштрасса следует, что ряд сходится. ■

Следствие 4. Сумма степенного ряда непрерывна в шаре $B(0, R_{\text{cx}})$, так как частичные суммы будут непрерывными функциями, которые равномерно сходятся, следовательно, сходятся к непрерывной функции.

Теорема 1.4.4 (Теорема Абеля)**.** *Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, радиус сходимости равен R. Предположим, что в точке z есть сходимость. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $[0, R]$ равномерно. В частности,*

$$\exists \lim_{x\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

□ Докажем, что ряд сходится равномерно. Запишем следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

По условию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (не зависит от x), а $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ — монотонна и ограничена. Тогда по признаку Абеля ряд равномерно сходится на $[0, R]$ ■

Пример 1.4.4. Разложим в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{при } |x| < 1.$$

По признаку Абеля при $|x| = 1$ ряд тоже сходится. Поэтому $R_{\text{сх}} = 1$, причем на самом радиусе ряд тоже сходится.

Лемма 1. *Следующие ряды имеют одинаковые радиусы сходимости:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}.$$

□ Заметим, что если x_n сходится, то[9]

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Теперь воспользуемся формулой Коши-Адамара. Обозначим за R_1, R_2, R_3 радиусы сходимости рядов из условия.

$$R_2 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\left|a_n \cdot \frac{1}{n+1}\right|}} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}\right) \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1$$

$$R_3 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n \cdot n|} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n}\right) \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1$$

■

Теорема 1.4.5. *Пусть есть вещественный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, его ряд сходимость равен R. Тогда его можно проинтегрировать почленно для всех x, что $|x - x_0| < R$:*

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

□ Пусть $r = |x - x_0| < R$. В $\overline{B(x_0, r)}$ ряд равномерно сходится. Рассмотрим его частные суммы $S_n(x)$. Так как $S_n(x) \rightrightarrows S$,

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \int_{x_0}^{x} S(t) dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} S_n(t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_n(t) dt$$

■

Определение 7: Производная комплекснозначной функции

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, a — внутренняя точка E, $f\colon E \to \mathbb{C}$. Производную в точке a можно определить двумя способами:

1. это такая функция

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

[9] По определению верхнего предела это супремум частичных пределов последовательности, выберем такую $\{x_{k_i}, y_{k_i}\}$. Мы знаем, что $x_{k_i} \to x$, поэтому $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} y_{k_i} = x \lim_{i\to\infty} y_{k_i}$.

2. f дифференцируема в точке a, если существует такое $k \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(a) = k(z-a) + o_{z \to a}(z-a).$$

Замечание. Существование $f'(a)$ равносильно тому, что f дифференцируема в точке a, и в этом случае $k = f'(a)$.

Теорема 1.4.6. *Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, его радиус сходимости равен R, $f(z)$ — сумма ряда внутри шара $B(z_0, R)$. Тогда при $z\colon |z-z_0| < R$ функция f дифференцируема сколько угодно раз, при этом*

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!}(z-z_0)^{n-m}.$$

□ Опять скажем, что $z_0 = 0$. Достаточно доказать для $m = 1$, а далее по индукции. Пусть $|z| < r < R$. Запишем определение

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \\ &= \lim_{w \to z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \\ &= \lim_{w \to z} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^n - z^n)}{w - z} \overset{?}{=} \\ &\overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to z} a_n \underbrace{(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1})}_{\text{все стремятся к } z^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} \end{aligned}$$

Осталось доказать один переход. Если докажем равномерную сходимость ряда в $\overline{B(0,r)}$, то он будет верен. Обозначим

$$u_n(w) = a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}).$$

Заметим, что

$$|u_n(w)| \leqslant |a_n| \cdot \left(\left|w^{n-1}\right| + \left|w^{n-2}z\right| + \ldots + \left|z^{n-1}\right|\right) \leqslant |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Так как $r^{n-1} \in \overline{B(0,R)}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)$ сходится, следовательно можем переставить предел и суммирование. ■

Теорема 1.4.7 (О единственности разложения в степенной ряд)**.** *Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ и сходится в круге $B(z_0, R)$, то коэффициенты задаются однозначно:*

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

□ По теореме 1.4.6 можем записать следующую формулу:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (z-z_0)^{n-k}.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = a_m m! \implies a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

■

Определение 8

Для бесконечно дифференцируемого в точке z_0 степенного ряда f имеет место формула Тейлора с центром в точке z_0 :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^m.$$

1.5 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Запишем разложения, которые нам уже известны

1. e^x

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

2. $\sin x$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $\cos x$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Определение 9

Пусть $z\in\mathbb{C}$. Определим $\exp z,\sin z,\cos z$ для комплексного числа как ряды из формул выше.

Упражнение.

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}e^{x_2}\\
\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2\\
\sin(z_1+z_2) &= \sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin x_2\\
\sin^2 z+\cos^2 z &= 1\\
(e^z)' &= e^z\\
(\sin z)' &= \cos z\\
(\cos z)' &= -\sin z
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.1 (Формула Эйлера)**.**

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

□ Честная подстановка. Можно перегруппировывать слагаемые в рядах, так как они абсолютно сходятся.
■

4. $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots\qquad |x|<1.$$

□

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x(1-t+t^2-\ldots)dt=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Так как $1-t+t^2-t^3+\ldots$ — равномерно сходящийся ряд при $|t|<1$, можем интегрировать его почленно. Аналогично мы можем определить $\ln(1+z)$ для $z\in\mathbb{C}$, если $|z|<1$. ■

5. $\operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\square$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Формула верна внутри круга $|t| < 1$ для равномерной сходимости. $\blacksquare$

6. $(1+x)^p$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n.$$

Докажем, что радиус сходимости равен 1. Обозначим

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} x^n, \qquad f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^p}, \quad x \in (-1, 1).$$

Поступим хитро: докажем, что $f(x) \equiv 1$. Заметим, что $f(0) = 1$. Тогда достаточно проверить, что $f'(x) = 0$ для всех $x \colon |x| < 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= S(x)(1+x)^{-p} \\ f'(x) &= S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = \\ &= (1+x)^{-p-1} \big(S'(x)(1-x) - pS(x) \big) \end{aligned}$$

Проверим, что $(S'(x)(1+x) - pS(x)) = 0$.

$$\begin{aligned} {\color{red}p} \cdot S(x) \qquad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} x^n \cdot {\color{red}p} \\ {\color{red}(1+x)} \cdot S'(x) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot {\color{red}(1+x)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!} (x^{n-1} + x^n) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$p \cdot \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} = \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n+1)!} + \frac{p(p-1)\ldots(n-p)}{n!}.$$

Поэтому коэффициенты при x^k будут одинаковыми, следовательно, разность равна нулю.

7. Частный случай для $p = -\frac{1}{2}$

$$\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

8. $\arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Глава 2

Теория меры и интегрирования

Лекция 3: †

16 Sept

2.1 Системы множеств

Определение 10: Алгебра подмножеств

Пусть T — произвольное множество, 2^T — система подмножеств. $\mathfrak{A} \subset 2^T$ — **алгебра подмножеств**, если

(i) $\varnothing \in \mathfrak{A}$
(ii) $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$
(iii) $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow T \setminus A \in \mathfrak{A}$

Свойства.

1. $T \in \mathfrak{A}$
2. $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \setminus B = A \cap (T \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3. $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cup B = T \setminus \big((T \setminus A) \cap (T \setminus B)\big) \in \mathfrak{A}$
4. $A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, \dots n \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A},\ \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$

Определение 11: σ-алгебра

$\mathfrak{A} \subset 2^T$ — σ-алгебра, если $\mathfrak{A}$ – алгебра и

(ii σ) $\forall A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N}\colon\ \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Замечание. $\forall A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Пример 2.1.1.

1. $2^T = \mathfrak{A}$
2. $\{\varnothing, T\} = \mathfrak{A}$

Теорема 2.1.1. *Пусть T произвольное множество и $\mathcal{E} \subset 2^T$ — какая-то система подмножеств. Тогда существует минимальная по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

□ Возьмем пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. ■

Определение 12: Борелевская оболочка

σ-алгебра из прошлой теоремы называется **борелевской оболочкой**. Обозначается $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$

Определение 13

Рассмотрим топологическое пространство (T, τ) (τ — система отрытых множеств). Тогда $\mathfrak{B}(\tau)$ — **борелевская** σ-алгебра в T. Обозначается $\mathfrak{B}(T)$.

Определение 14: Полукольцо

Набор подмножеств $\mathcal{P} \subset 2^T$ называется **полукольцом**, если выполнены следующие аксиомы:

(i) $\varnothing \in \mathcal{P}$

(ii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \Longrightarrow P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$

(iii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \Longrightarrow P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнктны.

Пример 2.1.2. $T = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{[a, b)\}$

Теорема 2.1.2 (о свойствах полукольца)**.** *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $P, P_1, \ldots P_n \in \mathcal{P}$. Тогда*

1. $P \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} P_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, *где* $Q_j \in \mathcal{P}$ *и* Q_j *дизъюнктны;*
2. $\bigcup\limits_{j=1}^{n} P_j = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, *где* $Q_{k_j} \in \mathcal{P}$, Q_{k_j} *дизъюнктны и* $\forall j \colon Q_{k_j} \subset P_k$;
3. *в предыдущем пункте можно заменить* n *на* ∞.

□

1. Очевидно
2. Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{n} P_j = \underbrace{P_1}_{\in \mathcal{P}} \cup \overbrace{(P_2 \setminus P_1)}^{\bigsqcup Q_j} \cup \overbrace{(P_3 \setminus (P_1 \cup P_2)}^{\bigsqcup Q_j} \cup \ldots.$$

   При этом все полученные множества дизъюнктны.

3. В предыдущем пункте мы не пользовались конечностью объединения.

■

Пример 2.1.3 (Важный пример: полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^n$ и полукольцо биодических ячеек в $\mathbb{R}^n$)**.** Первое обозначается $\mathcal{P}^n$, второе — $\mathcal{P}^n_d$.

Рассмотрим два вектора

$$\begin{matrix} a = (a_1, \dots a_n) \\ b = (b_1, \dots b_n) \end{matrix}, \quad \forall i \colon b_i \geqslant a_i$$

Тогда $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \colon a_j \leqslant x < b_j\} = \prod [a_j, b_j)$ — **ячейка**.

Ячейка называется **кубической**, если $\forall j, k \colon |a_j - b_j| = |a_k - b_k|$.

Возьмем $e = (1, \dots 1)$ и $\overline{k} = (k_1, \dots k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}^n$. $[\overline{k}, \overline{k} + e)$ — кубик с целочисленными координатами. Такие ячейки назовем **ячейками ранка I**. Они покрывают все $\mathbb{R}^n$ и дизъюнктны.

Такие ячейки можно разбить на 2^n меньших ячеек второго ранга: $\left[\frac{\overline{k}}{2}, \frac{\overline{k}+e}{2}\right)$. Аналогично можно продолжить до ранга $S+1$: $\left[\frac{\overline{k}}{2^S}, \frac{\overline{k}+e}{2^S}\right)$.

Свойства.

- *внутри ранга ячейки не пересекаются*
- *ячейки разных рангов либо не пересекаются, либо одна содержится в другой*
- *если Q — ячейка ранга k, Q' — ячейка ранга $k+1$, то $Q \setminus Q'$ — объединение ячеек ранга $k+1$*

$\mathcal{P}'_d$ — множество всех ячеек $\left[\frac{\overline{k}}{2^S}, \frac{\overline{k}+e}{2^S}\right)$, для $s = 0, 1, \dots d$ и $\overline{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Теорема 2.1.3. *$\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_d$ — полукольца.*

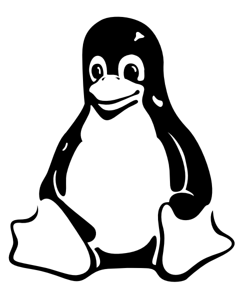
Теорема 2.1.4. *Для любого открытого непустого $\varnothing \neq G \subset \mathbb{R}^n$ существует счетный набор $P_k \in \mathcal{P}^n_d$*[a] *такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G.$$

[a] Можно считать, что P_k не пересекаются

□ Рассмотрим точку $x \in G$ и шар $B(x, r) \subset G$. Тогда существует такая ячейка S, что существует P_x ранга S, что $x \in P_x \subset B(x, r)$ (просто берем диаметр ячейки менее x).

Всего ячеек счетное число, поэтому в покрытии тоже будет счетное, при этом $\bigcup_{x \in G} P_x = G$. ■



2.2 Объем

Определение 15: Объем

Рассмотрим множество T, полукольцо $\mathcal{P} \subset 2^T$. Тогда $\mu \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — **объем**, если

(i) $\mu \geqslant 0$

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$

(iii) μ конечноаддитивна:

$$P, P_1, \dots P_k \in \mathcal{P},\ \bigsqcup_{j=1}^{k} P_j = P \Longrightarrow \mu(P) = \sum_{j=1}^{k} \mu(P_j).$$

Пример 2.2.1. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 = \{[a, b)\}$, $\mu([a, b)) = b - a$.

Пример 2.2.2. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g монотонно возрастает. Тогда $\nu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$ — тоже объем.

Пример 2.2.3. $\mathcal{P}$ — множества на плоскости, которые либо ограничены, либо дополнение ограничено.

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1 & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}, \quad \mu_2(A) = \begin{cases} +\infty & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}$$

Пример 2.2.4 (классический объем в $\mathbb{R}^n$)**.** Рассмотрим $\mathcal{P}^n$, $P = \prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$, где $\lambda_n(P) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Упражнение. Проверить, что это объем.

Теорема 2.2.1 (о свойствах объема)**.** *Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P}$, μ — объем на $\mathcal{P}$. $P, P_1, \dots P_n \in \mathcal{P}$.*

1. *(монотонность) $P' \subset P \Longrightarrow \mu(P') \leqslant \mu(P)$*
2. *(усиленная монотонность) P_k — дизъюнктны,*

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \subset P \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \leqslant \mu(P).$$

3. *(конечная полуаддитивность)*[a]

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \Longrightarrow \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

[a]Здесь не предполагается, что $\bigcup_{k=1}^{n} P_k \in \mathcal{P}$

□

1. Если $P \subset P'$, то $P \setminus P' = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$ и Q_k дизъюнктны.

   Тогда $P = P' \cup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$.

$$\mu(P) = \mu(P') + \sum_{k=1}^{n} \mu(Q_k) \geqslant \mu(P').$$

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнктны.

   Тогда $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) + \sum_{j=1}^{N} (Q_j) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

3. Пусть $P \cap P_k = P_k' \in \mathcal{P}$. Тогда $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k' = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m_k} \underbrace{Q_{k_j}}_{\subset P_k'}$ — дизъюнктны.

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{k_j}) \overset{\text{по } 2}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k') \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

∎

Замечание. Если $\mathcal{P}$ — алгебра, то по аксиоме (iii) можно проверять только для двух множеств, а далее по индукции.

Замечание. Если $\mathcal{P}$ — алгебра, $A, B \in \mathcal{P}$, $B \subset A$, то

$$\mu(B) < +\infty \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

2.3 Мера и ее свойства

Определение 16: Мера

Пусть $\mathcal{P}$ — подкольцо, μ — объем на $\mathcal{P}$. μ называется **мерой**, если μ счетно-аддитивен:

$$P, P_k \in \mathcal{P},\ P_k \text{ — дизъюнктны}, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \Longrightarrow \mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

[a]

[a]Сумма в этом ряду не зависит от порядка, так как он положительный.

Пример 2.3.1.

- Классический объем λ_n в $\mathbb{R}^n$ (докажем позже)
- $\left.\begin{array}{l} \nu_g([a,b)) = g(b) - g(a) \\ g \nearrow \text{ и непрерывна слева} \end{array}\right\} \Longrightarrow \nu_g$ — мера (Упражнение)

Теорема 2.3.1 (о счетной полуаддитивности меры)**.** *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — объем на $\mathcal{P}$. Тогда μ — мера, согда для любых $P, P_k \in \mathcal{P}$*

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \Longrightarrow \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

□

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ $P_k' = P_k \cap P$, $P = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, где Q_{k_j} — дизъюнктны. Тогда

$$\mu(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \underbrace{\mu(Q_{k_j})}_{\leqslant \mu(P_k') \leqslant \mu(P_k)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Пусть $Q, Q_j \in \mathcal{P}$, Q_j — дизъюнктны и $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$.

Из полуаддитивности следует, что $\mu(Q) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$. Теперь заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{n} Q_j \subset Q \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j) \leqslant \mu(Q).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \leqslant \mu(Q).$$

■

Теорема 2.3.2 (о нерпрерывности меры снизу)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, μ — объем на $\mathfrak{A}$. μ — мера, согда для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ таких, что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ верно следующее свойство*[a]

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \Longrightarrow \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

[a]Это свойство называется «непрерывностью меры снизу»

□

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Рассмотрим новую систему дизъюнктных множеств из $\mathfrak{A}$:

$$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2 \setminus A_1,\ A_3' = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j' = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A, \quad A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_n'.$$

Так как A_j' дизъюнктны,

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j') = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j') = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнктны. Рассмотрим такие $A_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_j$. Так как $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$,

$$\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

Из конечной аддитивности объема следует, что

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A).$$

Значит, μ — мера.

■

Определение 17: Конечный объем

Рассмотрим множество T, полукольцо $\mathcal{P}$ и объем μ на $\mathcal{P}$. Тогда μ называется **конечным объемом**, если $\mu(T) < \infty$.

Теорема 2.3.3 (о непрерывности меры сверху)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, μ — конечный объем на $\mathfrak{A}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) μ *— мера*

(ii) для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено[a]

$$A_{k+1} \subset A_k,\ A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

(iii) для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено

$$A_{k+1} \subset A_k,\ \varnothing = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Longrightarrow \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[a]Это и называется непрерывностью меры сверху

□

$(i) \implies (ii)$ Пусть $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$, тогда $A_1 = A \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ и B_j дизъюнктны. Следовательно,

$$\mu(A_1) = \mu(A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A) + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)}_{\mu(A_1)-\mu(A_{n+1})}$$

$$\underbrace{\cancel{\mu(A_1)}}_{\text{конечно}} = \mu(A) + \cancel{\mu(A_1)} - \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

$(ii) \implies (iii)$ Очевидно

$(iii) \implies (i)$ Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнктны и $B_j, A \in \mathfrak{A}$. Проверим счетную аддитивность. Рассмотрим

$$A_k = B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \ldots = A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \ldots \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \infty$. Следовательно,

$$= \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$= \mu\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_j\Big) = \mu(A) - \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)$$

Получили, что $\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j)$, значит, μ — мера.

■

2.4 Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.

Определение 18: Внешняя мера

T — произвольное множество, $\tau\colon 2^T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. τ — **внешняя мера**, если

(i) $\tau \geqslant 0$

(ii) $\tau(\varnothing) = 0$

(iii) (счетная полуаддитивность)

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies \tau(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k).$$

Замечание. τ конечно полуаддитивна.

Замечание. τ монотонна: $E_1 \subset E_2 \implies \tau(E_1) \leqslant \tau(E_2)$

Определение 19: τ-измеримо

Пусть τ — внешняя мера на T. Множество A — **τ-измеримо**, если для любого $E \subset T$[a]

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{2.4.1}$$

[a]В этом неравенстве знак $\leqslant$ есть всегда

Теорема 2.4.1. *Пусть τ — внешняя мера, $\mathfrak{A}_\tau$ — система τ-измеримых множеств. Тогда $\mathfrak{A}_\tau$ — σ-алгебра и $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — мера.*

□

0. $\varnothing \in \mathfrak{A}_\tau$

1. Докажем, что $A \in \mathfrak{A}_\tau \implies T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$ Заметим, что

$$E \setminus A = E \cap (T \setminus A) \quad E \setminus (T \setminus A) = E \cap A.$$

По определению τ-измеримости 2.4.1 для всех $E \subset T$

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)) = \tau(E \setminus (T \setminus A)) + \tau(E \cap (T \setminus A)).$$

Следовательно, $T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$.

2. Докажем, что $A, B \in \mathfrak{A}_\tau \implies A \cup B \in \mathfrak{A}_\tau$. Рассмотрим произвольное множество $E \subset T$. Запишем для него условие 2.4.1 для A

$$\begin{aligned}\tau(E) &= \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \\ &= \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B) = \\ &= \big(\tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B)\big) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \geqslant \\ &\geqslant \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B))\end{aligned}$$

Так как неравенство в обратную сторону верно всегда, $A \cap B \in \mathfrak{A}_\tau$.

3. Проверим конечную аддитивность τ на $\mathfrak{A}_\tau$. Хотим доказать, что для дизъюнктных $A, B \in \mathfrak{A}_\tau$ выполнено

$$\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cap B).$$

Заметим, что для всех E

$$(E \cap (A \cup B)) \cap A = E \cap A$$
$$(E \cap (A \cup B)) \setminus A = E \cap B$$

Подставим в условие τ-измеримости 2.4.1

$$\tau(E \cap (A \cup B)) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B).$$

Теперь подставим в качестве $E = T$

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B).$$

4. Проверим, что $\mathfrak{A}_\tau$ — σ-алгебра. Для этого осталось доказать, что

$$\forall A_j \in \mathfrak{A}_\tau\colon \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}_\tau.$$

Обозначим $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

   (a) Пусть все A_j дизъюнктны. Для всех E верно

$$\tau(E) = \tau\Big(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \tau\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) =$$

   Воспользуемся конечной аддитивностью и тем, что $E \setminus A \subseteq E \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$:

$$= \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A).$$

Устремим $n \to \infty$ и воспользуемся счетной аддитивностью для дизъюнктных множеств:

$$\begin{aligned}\tau(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A) \geqslant \\ \geqslant \tau\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E \cap A_j)\Big) + \tau(E \setminus A) \geqslant \\ \geqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E)\end{aligned}$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{A}_\tau$.

(b) Если A_j не дизъюнктны, рассмотрим новые A'_j :

$$A'_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k.$$

A'_j дизъюнктны и измеримы, при этом их объединение равно A. Тогда по первому пункту A измеримо.

$\mu = \tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$, при этом известно, что $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — объем и τ полудаддитивна. По теореме о счетной полуаддитивности, τ — мера.

■

Лекция 4: † 23 Sept

Определение 20: Полная мера

Пусть μ — мера на полукольце $\mathcal{P}$. Мера называется **полной**, если

$$e \in \mathcal{P},\ \mu(e) = 0 \Longrightarrow \forall e' \subset e\colon e' \in \mathcal{P}.$$

Следствие 5 (Ключевое свойство построения меры)**.** $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — полная мера.

□ Рассмотрим $e \in \mathfrak{A}_\tau$ и $e' \subset e$, причем $\tau(e) = 0$. Хотим доказать, что $e' \in \mathfrak{A}_\tau$. Хотим проверить такое равенство для всех $E \in T$:

$$\tau(E) = \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

По монотонности меры, $\tau(E) \geqslant \tau(E \setminus e')$. Так как $E \cap e' \subset E \cap e \subset e$,

$$0 \leqslant \tau(E \cap e') \leqslant \tau(e) = 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\tau(E) \geqslant \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

А в другую сторону это неравенство верно всегда в силу полуаддитивности внешней меры. ■

2.5 Продолжение меры. Построение внешней меры.

Обозначение. Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P}$ и μ_0 — меру на нем. Пусть

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P} \right\}.$$

Если E нельзя покрыть счетным набором P_j, будем считать $\mu^*(E) = +\infty$.

Теорема 2.5.1. *μ^* — внешняя вера и $\mu^*(E) = +\infty$.*

□

1. $E \in \mathcal{P} \overset{?}{\Longrightarrow} \mu^*(E) = \mu_0(E)$. Нужно проверить неравенство в две стороны.

   $\boxed{\leqslant}$ Возьмем покрытие $\{E, \varnothing, \varnothing, \dots\}$. Тогда $\mu^*(E) \leqslant \mu_0(E) + 0$.

   $\boxed{\geqslant}$ По теореме о счетной полуаддитивности меры, если $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P}$, то $\mu_0(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \leqslant \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$.

   В частности, $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2. Проверим счетную полуаддитивность μ^*, то есть докажем, что

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n \Longrightarrow \mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Каждое множество нужно оценить с некоторой точностью разбиения, а потом устремить разницу к нулю.
Если сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = +\infty$, то неравенство автоматически выполнено. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ конечно.
Тогда существует такое покрытие $\{P_j^{(n)}\}$, что ошибка не большая для фиксированного $\varepsilon > 0$:

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Далее запишем для E

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(n).$$

Так как μ^* — это инфимум, можно перейти к следующему неравенству

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

Теперь устремим $\varepsilon \to 0$ и получим

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

■

2.5.1 Теорема о продолжении меры

Теорема 2.5.2 (Теорема о продолжении меры)**.** *Пусть μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{P}$, μ^* — внешняя мера, построенная ранее. По ней построена σ-алгебра $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ измеримых по μ^* множеств.*

Тогда $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$[a] и $\mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — продолжение меры μ_0.

[a]Это содержательная часть

□ Хотим проверить, что если $P \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$, то есть

$$\forall E \in T\colon \mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Так как $\leqslant$ верно всегда, остается доказать неравенство в обратную сторону. Разберем два случая:

$\boxed{E \in P}$ Воспользуемся главной аксиомой полукольца: $E \setminus P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и дизъюнктны. Тогда $E = \underbrace{(P \setminus E)}_{\in \mathcal{P}} \cup \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \underbrace{Q_j}_{\in \mathcal{P}}$, причем это объединение дизъюнктное. Теперь заметим, что для μ_0 есть конечная аддитивность, а μ^* совпадает с μ на элементах кольца, и поэтому

$$\mu^*(E) = \mu_0(E) = \mu_0(P \cap E) + \mu_0\Big(\bigsqcup_{j=1}^{N} G_j\Big) =$$

$$= \mu^*(P \cap E) + \sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j)$$

Так как μ^* полуаддитивна, $\sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j\Big) = \mu^*(E \setminus P)$. Тогда

$$\mu^*(E) = \mu^*(P \cap E) + \mu^*(E \setminus P).$$

$\boxed{E \text{ произвольное}}$ Если $\mu^*(E) = +\infty$, то неравенство сразу верно, поэтому будем считать, что $\mu^*(E) < +\infty$. Воспользуемся этим и приблизим с точностью до любого ε к объединению элементов полукольца. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим такие $P_j \in \mathcal{P}$, что $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, при этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Так как $P_j \in \mathcal{P}$:

$$\mu_0(P_j) = \mu^*(P_j) \geqslant \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus E).$$

Тогда

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(P_j \setminus P) \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big) \cap P\right) + \mu^*\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big) \setminus P\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\geqslant}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\geqslant} \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P)$$

$\blacksquare$

Определение 21: Стандартное продолжение (продолжение Каратеодори)

$\mu = \mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — **стандартное продолжение** или **продолжение Каратеодори** меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$.

Замечание.

1. μ — полная мера, так как сужение — тоже полная мера.

2. Повторное продолжение бессмысленно.

   Упражнение. Проверить, что внешняя мера получится такой же.

3. $\mu(A) = \inf \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \;\middle|\; A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P} \right\}$

2.6 Единственность стандартного построения

Определение 22: σ-конечность объема и меры

Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо на 2^T, μ — объем или мера. Тогда μ называется σ-конечным(ой), если существуют такие $P_j \in \mathcal{P}$, $\mu(P_j) < +\infty$, что

$$T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j.$$

Теорема 2.6.1. *Пусть μ — стандартное продолжение μ_0 с $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}$, а ν — какое-то продолжение μ_0 с $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}'$. Тогда*

1. *для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$: $\nu(A) \leqslant \mu(A)$, более того, если $\mu(A) < +\infty$, то $\nu(A) = \mu(A)$*
2. *если μ_0 — σ-конечная мера, то $\mu = \nu$ на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$*

В частности, σ-конечная мера единственным образом продолжается на $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$[a].

[a]Это борелевская оболочка

□

1. $\boxed{1}$ Проверим неравенство. Известно, что $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_j \in \mathcal{P}$, следовательно,

$$\nu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) \underset{\nu\text{ — продолжение }\mu_0}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j).$$

   Перейдем к inf:

$$\nu(A) \leqslant \mu^*(A) = \mu(A).$$

   $\boxed{2}$ Пусть $P \in \mathcal{P}$ и $\mu(P) = \nu(P) < \infty$. Докажем, что $\nu(P \cap A) = \mu(P \cap A)$. Предположим, что $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$.

$$\mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) <$$
$$< \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P)$$

   Противоречие.

   $\boxed{3}$ Пусть $\mu(A) < \infty$, тогда существуют такие $P_j \in P$, что $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ [1], где $\mu(P_J) = \mu_0(P_j) < \infty$. Тогда из счетной аддитивности ν

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j \cap A) \underset{\text{по }2}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j \cap A) = \mu(A).$$

   Доказали первый пункт.

2. Пусть мера σ-конечна. Тогда все пространство можно представить в виде объединения конечных объемов и применить подпункт 3 из пункта 1 доказательства.

$$\mu_0 \text{ — } \sigma\text{-конечна} \Longrightarrow T = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \text{ дизъюнктны},\ \mu(P_j) < \infty.$$

■

2.7 Определения и простейшие свойства меры Лебега в $\mathbb{R}^n$

На полукольце ячеек $\mathcal{P}^n$ и диодическом полукольце ячеек $\mathcal{P}^n_d$ мы определили классический объем $\lambda_n = \lambda$.

[1]Можно всегда считать объединение дизъюнктным, так как можно заменить на него по стратегии, использованной ранее

Теорема 2.7.1. *Классический объем λ — σ-конечная мера на $\mathcal{P}^n$.*

▢ σ-конечность очевидна — подойдет покрытие единичными кубами.

Докажем, что это мера. Для этого можно доказать счетную полуаддитивность, то есть

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \Longrightarrow \lambda(P) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j).$$

Пусть $P = [a, b)$ и $P_j = [a_j, b_j)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, расширим один отрезок, а второй наоборот сузим.

Пусть $b' \in [a, b),\ P' = [a, b'] \subset P\colon \lambda([a, b)) - \lambda([a, b']) < \varepsilon$.

Еще возьмем $a'_j < a_j,\ P_j \subset (a'_j, b_j)\colon \lambda((a'_j, b_j)) - \lambda([a_j, b_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Заметим, что

$$P' \subset P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j.$$

Так как P'_j открытые, а P' компактно, существует конечное подпокрытие

$$\exists j_k\colon P' = [a, b') \subset \bigcup_{k=1}^{N} P'_{j_k} \subset \bigcup_{k=1}^{N} [a_{j_k}, b_{j_k}).$$

Так как μ конечно полуаддитивна,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \geqslant \lambda([a, b')) \geqslant \lambda([a, b)) - \varepsilon.$$

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a'_j, b_j)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a_j, b_j)) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Итого,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \varepsilon \geqslant \lambda(P) - \varepsilon.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$ и получим требуемое неравенство. ■

Определение 23: Мера Лебега

Мера Лебега — стандартное продолжение классического объема. $\mathfrak{A}^n$ — получающаяся σ-алгебра — множества **измеримые по Лебегу**.

Упражнение. Продолжения с $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_d$ совпадают.

Свойства.

1. *Все открытые множества измеримы. Более того, если G открыто и $G \neq \varnothing$, то $\lambda(G) > 0$.*

2. *Все замкнутые множества измеримы (дополнение к открытому). $\lambda(\{a\}) = 0$.*

3. *Если A измеримо и ограничено, то $\lambda(A) < \infty$ (можно ограничить параллелепипедом).*

4. *Если E_k измеримо и $\lambda(E_k) = 0$, то $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.*

5. *Если E — счетное множество, то $\lambda(E) = 0$.*

6. *Если E — множество и для всех $\varepsilon > 0$ $\exists E \subset E_\varepsilon$ измеримое и $\lambda(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то E измеримо и $\lambda(E) = 0$.*

   ▢ *Построим последовательность $E_n\colon \lambda(E_n) < \frac{1}{n}$. Можно считать, что $E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$. Тогда $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. По непрерывности сверху*

   $$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n).$$

   Так как λ полная, предел равен нулю, E измеримо и $\lambda(E) = 0$. ■

$\boxed{7}$ *Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ и гиперплоскость $H_k = \{x_k = 0\}$. $\lambda(H_k) = 0$.*

□

$$H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,\ Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0, |x_l| < j \text{ при } k \neq l\}.$$

Запихнем в маленький параллелепипед:

$$P_\varepsilon = [-j, j) \times \ldots \times \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon)}_{k} \times \ldots \times [-j, j).$$

$$\lambda(P_k) = (2j)^{n-1} \cdot 2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

■

$\boxed{8}$ *В $\mathbb{R}$ континуальное множество меры 0 — канторово множество.*

$\boxed{9}$ *Упражнение. Существует неизмеримое множество.*

2.8 Регулярность меры Лебега

Определение 24: Регулярная мера

Рассмотрим топологическое пространство T, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(T)$, μ — мера на $\mathfrak{A}$. μ называется **регулярной**, если

(i) $\forall A \in \mathfrak{A}:\quad \mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ открыто},\ A \subset G\}$
(ii) $\forall A \in \mathfrak{A}:\quad \mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ замкнуто},\ A \supset F\}$

Упражнение. Если $\mu(T) \leqslant \infty$, то из (i) следует (ii).

Лемма 2. *Для регулярности меры достаточно выполнения одного из двух свойств:*

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \in \mathfrak{A}\ \exists$ *открытое* $G:\quad A \subset G,\ \mu(G \setminus A) < \varepsilon$
(b) $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \in \mathfrak{A}\ \exists$ *замкнутое* $F:\quad A \supset F\ \mu(A \setminus F) < \varepsilon$

□

$\boxed{(a) \iff (b)}$ (a) для A равносильно (b) для $T \setminus A$

$\boxed{(a) \implies (i)}$ Очевидно

■

Теорема 2.8.1. *Мера Лебега регулярна.*

□ Проверим условие (a) из прошлой леммы.

1. Пусть $\lambda(A) < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие $P_j \in \mathcal{P}^n$, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset A, \quad \lambda(P_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_J) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Немного расширим ячейки, чтобы они стали открытыми множествами. Пусть $P_j = [a_j, b_j)$, построим $P_j \subset P'_j(a'_j, b_j)$, при этом $\mu(P'_j) - \mu(P_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Теперь $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P'_j \supset A$ и

$$\lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P'_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Если $\mu(A) = \infty$, то можем представить $\mathbb{R}^n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — дизъюнктные ячейки из $\mathcal{P}^n$. Тогда можем воспользовался σ-конечностью: представим A так
$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(Q_j \cap A)}_{\text{все конечны по мере}}.$$
Каждое из $(Q_j \cap A)$ можем приблизить каким-то открытым множеством $G_j\colon G_j \cap A \subset G_j$ и $\lambda(G_j \setminus (Q_j \cap A)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Тогда возьмем $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j \supset A$, поэтому $\lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$.

■

Следствие 6. Если E измеримо по Лебегу, то существуют компактные множество K_j такие, что
$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \quad \lambda(e) = 0.$$

□ Рассмотрим замкнутые $F_j \subset E$, что $\lambda(E \setminus F_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $F_j \subset F_{j+1} \subset \dots$

Построим из F_j компакты: $K_j = F_j \cap \overline{B(0,j)}$.
Рассмотрим e:
$$e = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$
Тогда
$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e.$$
Проверим, что $\lambda(e) = 0$.
$$\lambda(e) \leqslant \lambda(E \setminus F_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Значит, e измеримо и $\lambda(e) = 0$. ■

Следствие 7. Если E измеримо, то существуют открытые G_j и измеримое e', что $\lambda(e') = 0$ и
$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \setminus e'.$$

Теорема 2.8.2 (Ключевой момент. Почему интеграл Лебега удобнее Римана)**.** *Пусть G — открытое в $\mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируема в G.*

1. *Если $E \subset G$, то $f(E)$ измеримо.*
2. *Если $\lambda(E) = 0$, то $\lambda(f(E)) = 0$.*

Лекция 5: †

30 Sept

Теорема 2.8.3 (О сохранении измеримости при гладком отображении)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ и G — открытое, $C^1(G) \ni \Phi\colon G \to \mathbb{R}^m$ — гладкая функция на G. Тогда*

(1) если $e \subset G$ и $\lambda(e) = 0$, то $\Phi(e) \in \Omega_m$ и $\lambda(\Phi(e)) = 0$;
(2) если $E \subset G$ и $E \in \Omega_m$, то $\Phi(E) \in \Omega_m$,

где Ω_m — семейство измеримых по Лебегу множеств.

□

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Представим $E = e \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, где K_n — компактны и $\lambda(e) = 0$. Так как Φ гладкая, она переводит компакт в компакт.

$$\Phi(E) = \Phi(e) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n).$$

$\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n)$ — объединение замкнутых, следовательно, само является замкнутым, а поэтому измеримо по Лебегу. По первому пункту $\Phi(e)$ измеримо. А тогда и $\Phi(E)$ измеримо.

$\boxed{1}$ Пусть $\lambda(e) = 0$.

1. Рассмотрим случай, когда e входит в G внутри некоторой ячейки. $e \subset P \subset \overline{P} \subset G$, где P — ячейка, поэтому $\overline{P}$ — компакт.

   По теореме о конечном приращении $\Phi\big|_{\overline{P}}$ — липшицево, то есть[2]

   $$\exists c\colon \forall x, y \in \overline{P} \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant c \cdot \|x - y\|.$$

   Воспользуемся регулярностью меры Лебега: зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует открытое g, что

   $$e \subset g \subset G \text{ и } \lambda(g) < \varepsilon.$$

   Теперь представим g в виде объединения дизъюнктных ячеек: $g = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$. Обозначим ребро ячейки Q_j за h_j и перепишем условие $\lambda(g) < \varepsilon$, используя счетную аддитивность:

   $$\lambda(g) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j^m < \varepsilon.$$

   Заметим, что $\operatorname{diam} Q_j = h_j\sqrt{m}$. Так как Φ липшицево, $\operatorname{diam} \Phi(Q_j) \leqslant c \cdot h_j\sqrt{m}$. Тогда $\Phi(Q_j)$ можно погрузить в ячейку:

   $$\begin{aligned} &\Phi(Q_j) \subset Q_j, \quad h'_j \leqslant 2ch_j\sqrt{m} \\ &\lambda(Q'_j) \leqslant \underbrace{(2c\sqrt{m})^m}_{\text{не зависит от номера ячейки}} (h_j)^m \end{aligned}$$

   Мы знаем, что

   $$\Phi(e) \subset \Phi(g) \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Phi(Q_j) \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q'_j.$$

   При этом

   $$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q'_j) \leqslant (2c\sqrt{m})^m \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (h_j)^m < (2c\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon.$$

   Следовательно, $\Phi(e)$ можно покрыть множеством сколь угодно малой меры. Тогда $\Phi(e)$ измеримо и $\lambda(\Phi(e)) = 0$.

2. Если e не помещается в диадическую ячейку: $e \subset G$. Так как G открыто, каждая точка входит с некоторой окрестностью B, для можно найти некоторою ячейку P_j, что точка принадлежит P_j, а $\overline{P_j} \subset B \subset G$.

   Поэтому

   $$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, \quad P_j \text{ — ячейки, } \overline{P_j} \subset G.$$

   Тогда можем рассмотреть $e_j = e \cap P_j \subset P_j \subset G$. В этом случае $\lambda(e \cap P_j) \leqslant \lambda(e) = 0$ и $e \cap P_j \subset P_j \subset \overline{P_j} \subset G$.

   Можно применить первый пункт и получить, что

   $$\Phi(e \cap P_j) \text{ измеримо и } \lambda(\Phi(e \cap P_j)) = 0.$$

   Просуммируем: $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}(e \cap P_j)$ и

   $$\Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j) \Longrightarrow \lambda(\Phi(e)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\Phi(e \cap P_j)) = 0.$$

[2] Здесь под нормой подразумевается евклидова норма, то есть просто модуль. В качестве константы c достаточно взять максимум дифференциала на $\overline{P}$.

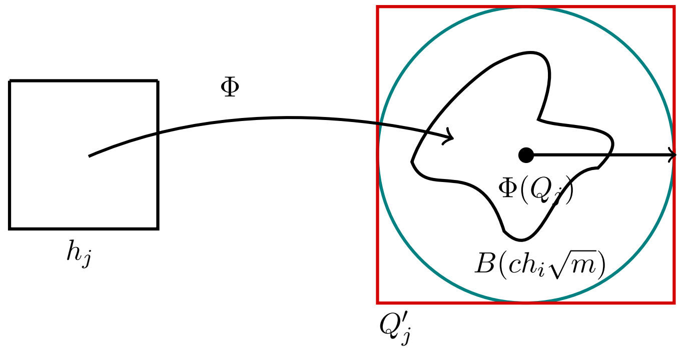


Рис. 2.1: Отображение Q_j

■

Ремарка. На самом деле гладкость не нужна, а достаточно локальной липшицевости.

Ремарка. Подпространство меньшей размерности, чем объемлющая, имеет меру нуль.

Следствие 8. Возьмем открытое $G \subset \mathbb{R}^m$ и функцию $f\colon G \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(G)$.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x) \mid x \in G\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Тогда $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$.

□ Рассмотрим множество $G \times \{0\}$. $\lambda_{m+1}(G \times \{0\}) = 0$, так как для любого покрытия параллелепипедами можно сколь угодно уменьшить объем (уменьшаем последнюю сторону, а это можно делать, так как покрыть нужно точку 0). Теперь возьмем $\Phi(x, 0) = (x, f(x))$. По доказанной теореме $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$. ■

Задача. Измеримость не сохраняется при непрерывном отображении. Привести пример. *Намек на решение: канторова лестница.*

2.9 Инвариантность меры Лебега при движении

Теорема 2.9.1 (Инвариантность при сдвиге)**.** *Рассмотрим $v \in \mathbb{R}^m$ и $E \in \mathfrak{A}_m$. Тогда $v + E = \{v + x \mid x \in E\}$ тоже измеримо и $\lambda(v + E) = \lambda(E)$.*

□ Так как сдвиг — липшицево отображение с коэффициентом 1, по прошлой теореме 2.8.3, $v + E$ измеримо.

Определим $\mu(E) = \lambda(v + E)$. μ — мера на $\mathfrak{A}$, так как множества измеримы по λ, согда они измеримы по μ.

Тогда для ячейки $P \in \mathcal{P}_m$ верно $\mu(P) = \lambda(v + P) = \lambda(P)$.

Так как λ — стандартное продолжение объема на ячейках, а μ — продолжение Каратеодори, причем они совпадают на полукольце, то по единственности стандартного продолжения они совпадают на $\mathfrak{A}_m$. Следовательно, $\lambda(E) = \lambda(v + E)$. ■

Теорема 2.9.2. *Пусть μ — инвариантная относительно сдвига (то есть $\forall E \in \mathfrak{A}_m\ \forall v\colon \mu(v + E) = \mu(E)$) мера на $\mathfrak{A}_m$.*

Дополнительно потребуем, что μ конечна на всех ограниченных измеряемых множествах (достаточно потребовать для ячеек).

Тогда существует такое $k \in [0, +\infty)$, что $\mu = k\lambda$, то есть

$$\forall E \in \mathfrak{A}_m : \mu(E) = k\lambda(E).$$

□ Рассмотрим $Q = [0,1]^m$. Пусть $k = \mu(Q)$ и $\widetilde{\mu} = \frac{\mu}{k}$. Тогда $\widetilde{\mu}(Q) = 1 = \lambda(Q)$.

Так как $\widetilde{\mu}$ инвариантно относительно сдвигов, $\widetilde{\mu} = \lambda$ на диадических ячейках $\mathcal{P}_m^d$ (для $\mathcal{P}_m^1$ уже знаем, для большего d можем раздробить ячейку на меньшие и сдвинуть туда меньшую).

Следовательно, $\widetilde{\mu} = \lambda$ на $\mathfrak{A}_m$. ■

Теорема 2.9.3 (Об инвариантности относительно вращения)**.** *Пусть $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование. Тогда, если E измеримо, то $U(E)$ тоже измеримо, причем $\lambda(U(E)) = \lambda(E)$.*

□ Так как U липшицево, $U(E)$ измеримо. Пусть $\mu(E) = \lambda(U(E))$ — тоже мера на $\mathfrak{A}_m$ (все аксиомы просто наследуются). Притом μ точно конечна на всех ограниченных множествах.

Проверим инвариантность относительно сдвига

$$v \in \mathbb{R}^m : \mu(v + E) = \lambda(U(v + E)) = \lambda(Uv + U(E)) = \lambda(U(E)) = \mu(E).$$

Тогда существует такое k, что $\mu = k \cdot \lambda$.

Но на единичном шаре B

$$\mu(B) = \lambda(U(B)) = \lambda(B) \Longrightarrow k = 1.$$

Получаем, что λ инвариантно относительно поворота. ■

Следствие 9. Мера Лебега инвариантна относительно движений.

Упражнение.

1. Как меняется мера при проекции?
2. Как меняется мера при других преобразованиях, например, гомотетии?

2.10 Изменение меры Лебега при линейном отображении

Лемма 3. *Пусть $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Тогда существуют ортонормированные базисы $\{g_j\}_{j=1}^m$ и $\{e_j\}_{j=1}^m$ и $s_j > 0$ такие, что*

$$Lx = \sum_{j=1}^m s_j \langle x, g_j \rangle e_j \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

при этом $|\det L| = \prod_{j=1}^m s_j$. Это называется *полярным разложением оператора.*

□ Рассмотрим L^* — сопряженный оператор и $A = LL^*$ — самосопряженный оператор. Так как L определено на $\mathbb{R}^m$, матрица A будет вещественной, а поэтому еще и симметричной. У симметричной матрицы можем взять ортонормированный базис из собственных векторов $\{g_j\}_{j=1}^m$.

Пусть g_j — собственный вектор собственного числа λ_j.

$$\lambda_j \underbrace{\langle g_j, g_j \rangle}_{=1} = \langle Ag_j, g_j \rangle = \langle LL^* g_j, g_j \rangle = \langle L^* g_j, L^* g_j \rangle \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda_j \geqslant 0.$$

Пусть $s_j = \sqrt{\lambda_j}$. Тогда $x \in \mathbb{R}^m$ представим в виде $\sum_{j=1}^m \langle x, g_j \rangle g_j$. Тогда

$$Lx = \sum_{j=1}^m \langle x, g_j \rangle \underbrace{Lg_j}_{s_j e_j}.$$

Поэтому $\{e_j\} = \{\frac{Lg_j}{s_j}\}$ — базис. Докажем, что он ортонормированный.

$$s_k s_n \langle e_k, e_n \rangle = \langle Le_k, Le_n \rangle = \langle L^* Lg_k, g_n \rangle = \langle \lambda_k g_k, g_n \rangle s_k^2 \delta_{k,n}$$

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

Докажем утверждение про определитель:

$$\det A = \prod_{j=1}^{m} \lambda_j = \left(\prod_{j=1}^{m} s_j \right)^2 .$$

С другой стороны,

$$\det A = \det L \cdot \det L^* = (\det L)^2.$$

■