# Конспект по матанализу
# II семестр
# Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
# (лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

28 февраля 2020 г.

# Оглавление

# Глава 1

# Интергирование

## 1.1

### Лекция 1

14 feb

### 1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x-x_0)^i,$$

а $R_{n,x_0}$ — остаток.

**Theorem 1** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1}(\langle a,b \rangle),\ x, x_0 \in (a,b)$. *Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде*

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

*Доказательство.* Индукция по $n$.

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Переход: $n-1 \to n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x-t)^{n-1} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

$\square$

### 1.1.2 Теорема о среднем

**Theorem 2** (Хитрая теорема о среднем)**.** $f, g \in C[a,b],\ g \geqslant 0$. *Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

*Доказательство.* Найдем максимум и минимум $f$ на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

**Corollary.** Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

**Theorem 3.** *Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.*

*Доказательство.* Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\cdot\left(-\frac{((x-t)^n)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^x.$$

□

## 1.2 2

### Лекция 2

### 1.2.1 Свойства

**Property.**

**1** *$c \in (a,b)$:*

$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b}.$$

**2** $\int_a^{\to b} f dx$ *— сходится* $\Longrightarrow \lim_{A\to b} \int_A^{\to b} f = 0$

**2'** *Если* $\int_A^{\to b} f \not\to_{A\to b-} \Longrightarrow \int_a^{\to b}$ *расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).*

$\boxed{\textbf{линейность}}$ *$f, g$ — функции на $[a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^{\to b}, \int_a^{\to b} g \text{ сходятся } \Longrightarrow \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} + \beta \int_a^{\to b} g.$$

$\boxed{\textbf{монотонность}}$ *$f \leqslant g, \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$ сходятся.*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

**Definition 1: Абсолютная сходимость**

*Говорят, что* $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, *если сходится* $\int_a^{\to b} |f|$.

*Если* $\int_a^{\to b} f$ *сходится абсолютно, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится и верно неравенство*

$$\left| \int_a^{\to b} f \right| \leqslant \int_a^{\to b} |f|.$$

*Доказательство.* Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ сходится } \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \Longrightarrow \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого $B$ :

$$\left| \int_a^B \right| \leqslant \int_a^B |f| dx.$$

**Definition 2: Условная сходимость**

$\int_a^{\to b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} |f|$ расходится.

$\boxed{\text{интегрирование по частям}}$ $f, g \in C^1[a,b)$

$$\int_a^{\to b} f g' = fg \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f' g, \quad fg \Big|_a^{\to b} = \lim_{x \to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. □

$\boxed{\textbf{замена переменной}}$ $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta), f \in C[a,b)$. *Если существует предел, обозначим его так:* $\exists \lim_{x\to\beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.

$$\int_\alpha^{\to beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

*Доказательство.* $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^{c} f(y)dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \to \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} \to \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\exists \int_{\alpha}^{\to\beta} (f \circ g)\varphi'$ . Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.
2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b),\ c_n \to b-\ \ \exists \gamma_{n \in [\alpha,\beta)} : \varphi(\gamma_n) = c_n$.
   Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к $\beta$, либо к числу меньшему $\beta$.
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \beta$
   $$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k} = c_{n_k}}.$$
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \tilde{\beta} < \beta$
   $$\varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$

     Но должно быть равно $b$. Противоречие.

   Значит $\gamma_n \to b$.
   $$\int_{alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{phi(alpha)}^{phi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

$\square$

**Theorem 4** (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $0 \leqslant f \leqslant g,\ \ f, g \in C[a, b)$. *Тогда*

1. *если* $\int_a^{\to b} g$ *сходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,*
2. *если* $\int_a^{\to b} g$ *расходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *расходится.*

*Доказательство.*

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) :\ \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Longrightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

$\square$

**Theorem 5** (Признаки Абеля и Дирихле)**.** $f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$, $g$ *монотонна.*

**Признак Дирихле** *Если* $f$ *имеет ограниченную первообразную на* $[a, b), g \to 0$, *то* $\int^{tb} fg$ *сходится.*

**Признак Абеля** *Если* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,* $g$ *ограничена, то* $\int_a^{\to b} fg$ *сходится.*

*Доказательство.* $F$ — первообразная $f$. $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\to b} fgdx = \int_a^{\to b} gdF == Fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} Fg'dx.$$

**признак Даламбера** $\lim_{B \to b-} F(B)g(B) = 0$

**признак Абеля** $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как $F$ ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\to b} Fg'dx \leqslant M \cdot \int_a^{\to b} |g|dx = M \cdot \left|\int_a^{\to b} g'dx\right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|\,.$$

□

**Example 1.**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \leqslant Cx^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon}dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \ \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^b = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\to \infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon}dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln \frac{1}{2}}^\infty y^\beta dy.$$

Тоже сходтся.

**Example 2.**

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{s^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leqslant 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ – ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ – убывает.

   Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

**Example 3** (Более общий вид)**.**

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$, $f$ монотонна.

Если при $x \to +\infty$ $f \to 0$, то интегралы сходятся,
Если при $x \to +\infty$ $f \not\to 0$, то интегралы расходятся.

*Remark.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \to 0, \text{ при } x \to +\infty.$$

*Practice.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 \, dx \text{ сходится?}$$

## 1.3 Вычисление площадей и объемов

### 1.3.1 Площади

1. $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0,\ P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x) dx$

2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b],\ f \geqslant g,\ T_{f,g} = \{(x, y) \mid xin[a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

   **Corollary** (Принцип Кавальери)**.** Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

   Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ \beta - \alpha \leqslant 2\pi,\ f \geqslant 0$, $g$ непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [a, b],\ r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть $\tau$ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^{n}$, $\quad \alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}}$, $m_j =$

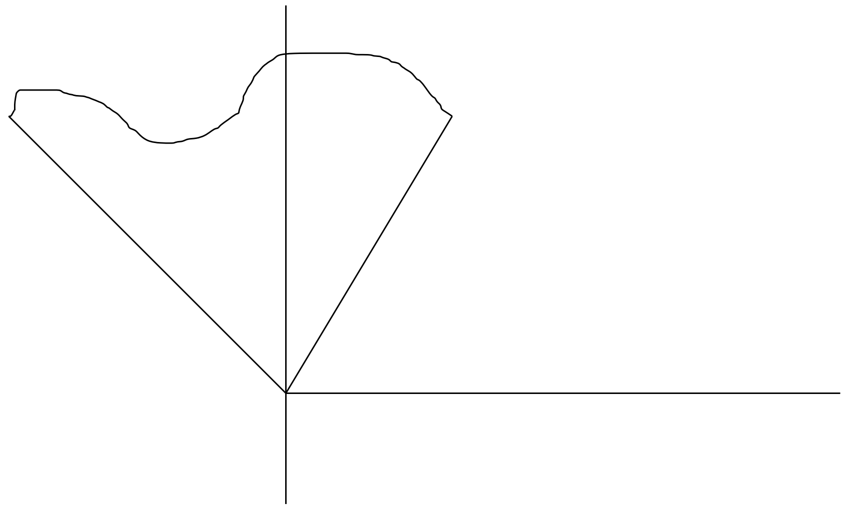


Рис. 1.1: sector

$\min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$.

$$\sum \frac{m_j^2}{2}(\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leqslant S(\tilde{P}_f) \leqslant \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$. Значит

$$S(\tilde{P}_f)\frac{1}{2}\int_a^b fst(\varphi)d\varphi.$$

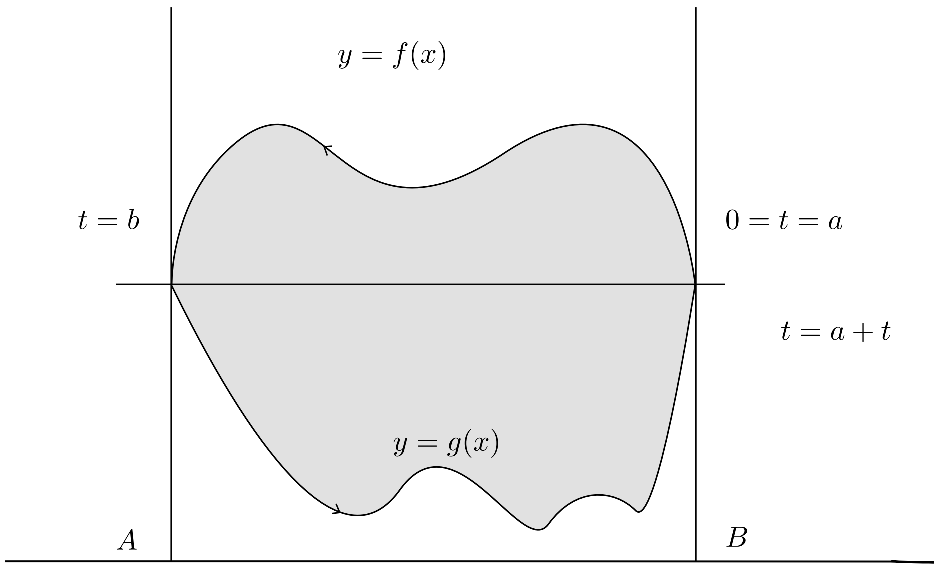
4. Площадь фигуры, ограниченной праметрически заданной кривой. $x, y : \mathbb{R}to\mathbb{R}$. $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(T)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx.$$

$$\int_A^B g(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[b,a+T]\\ dx=x'(t)dt\\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t)dt$$

$$\int_A^B f(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[a,b]}}{=} -\int_b^a y(t)x'(t)dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx = -\int_a^{a+T} y(t)x'(t)dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t)dt.$$




### 1.3.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.

2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3,\ T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

   **Definition 3**

   Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

   $\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение не $T$:

$$\forall \Delta \subset [a, b]\ \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta\ T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

**Example 4.** $T$ — тело вращения, $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x)\}.$$

*Доказательство формулы.* Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело $T$ и $\tau$ дробление отрезка $[a, b]$ . Поместим его между двумя цилиндрами.

$$\sum (x_j - x_{j-1}) S(T(x_* \Delta_j)) \leqslant V \leqslant (x_j - x_{j-1}) S(T(x^* \Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы. □

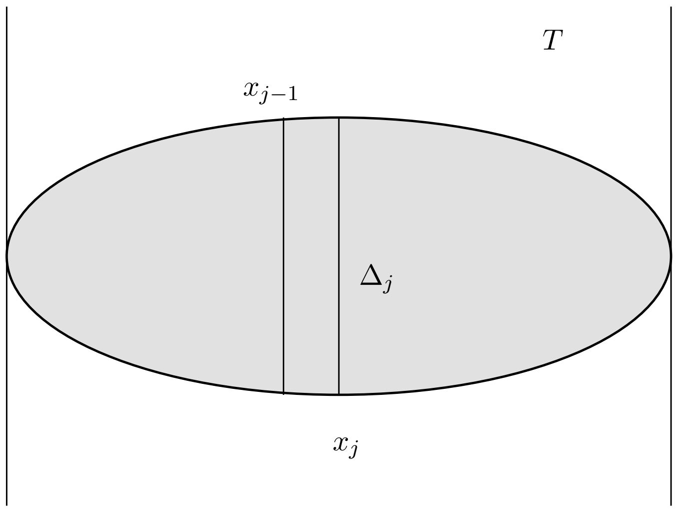



Рис. 1.2: cilinder

**Example 5** (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$T = \{0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+y^2)}\}$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} = Ie^{-x^2}.$$

**Лекция 3**

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi(y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

## 1.4 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади

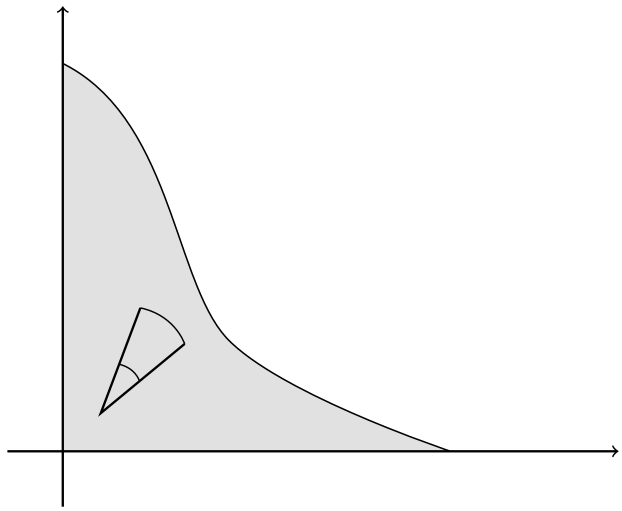


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона

**Definition 4: Путь**

Путь в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C[a,b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))\,,\ \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути — $\gamma(a)$, конец пути — $\gamma(b)$.
Носители пути — $\gamma([a,b])$.
$\gamma$ замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.
$\gamma \in C^n[a,b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a,b] \iff \gamma$ — $r$-гладкий путь.
$\gamma^{-1}$ — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a-b-t),\ \forall t \in [a,b]$.

*Note.* Разные пути могут иметь один общий носитель.

**Definition 5**

Два пути $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если существует строго возрастающая сюрьекция

$$\varphi : [a,b] \to [c,d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

**Statement.** *Это отношение эквивалентности.*

**Definition 6: Кривая**

Кривая в $\mathbb{R}^n$ — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

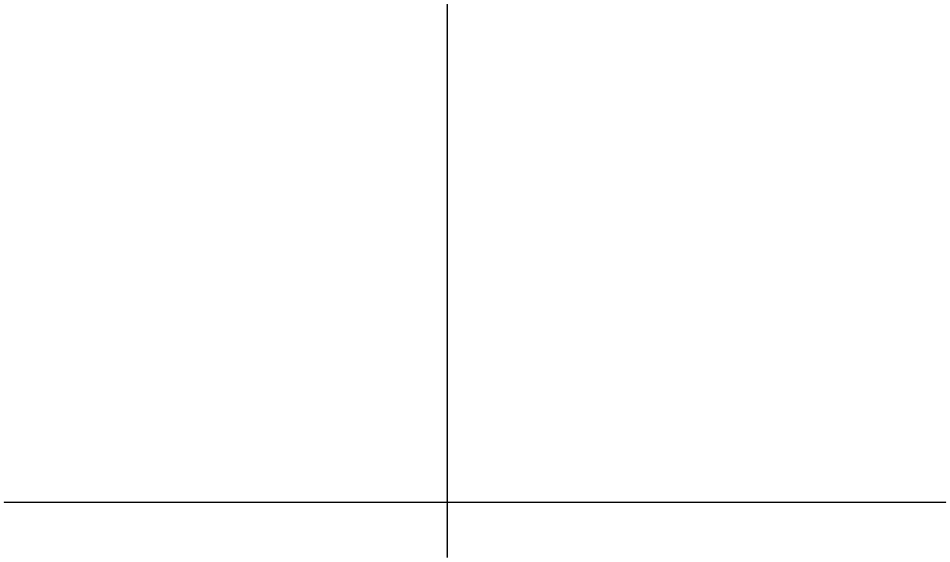


Рис. 1.4: puasson

**Example 6.**

$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t_0).$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Можно определить:

начало кривой

- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривя $r$-гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

### 1.4.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \ c \in (a, b)$.

$$\gamma = \gamma \mid_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma \mid_{[c,b]} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geqslant |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geqslant \sum_1^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$ Где $\forall$ дробления $[a, b]$ $\tau = \{x_j\}$

**Definition 7: Длина пути**

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_\tau l_\tau$, где

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \ \tau = \{x_j\}_{j=0}^m .$$

*Practice.* Придумать пример бесконечно длинного пути.

**Definition 8**

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

**Definition 9**

Длина крвивой — длина любой из ее параметризаций.

**Property.**

$\boxed{1.}$ $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

$\boxed{2.}$ *Аддитивность*

$$\gamma : [a,b], c \in (ab) \qquad \gamma = \gamma \Big|_{[a,c]}, \ \gamma\gamma \Big|_{[c,b]} .$$

*Тогда* $l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma)$.

*Доказательство.*

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ $\tau$ — дробление $[a,b]$.

$$\tau^l \ (\tau \cap [a,c] \cup \{c\})$$
$$\tau^r = (\tau \cap [c,b] \cup \{c\})$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1}| \leqslant l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{tau^r}(\gamma^r) \leqslant l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ $\tau^l$ — дробление $[a,b]$, $\tau^r$ — дробление $[c,d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$l(\gamma) \leqslant l_\tau(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r)$$
$$\sup_{\tau^l} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^l$$
$$\sup_{\tau^r} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^r$$

∎

**Theorem 6** (Длина гладкого пути)**.** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *— гладкий путь. Тогда* $\gamma$ *обязательно спр и*

$$l(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt.$$

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \ldots \gamma_n'(\tau)\right).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma_1'(t)^2 + \ldots \gamma_n'(t)^2|}.$$

*Доказательство.* 1. $\Delta \subset [a,b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(m_j(\Delta))^2}, \qquad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a,b]$ чему равно $l(\gamma\,\big|_\Delta)$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$. Тогда

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1}|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k'(...)\right|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(x_j - x_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k'(...)\right|^2}$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta|\,m(\Delta) \leqslant l(\gamma\,\big|_\Delta \leqslant |\Delta|\,M(\Delta).$$

2.

$$\int_\Delta \left|\gamma_k'(t)\right| dt = \int_\Delta \sqrt{|\gamma_1'(t)|\,sr + \ldots |\gamma_n'(t)|}dt.$$

$$m(\Delta) \leqslant \max\sqrt{...} \leqslant M(\Delta).$$

$$|\Delta|\,m(\Delta) \leqslant \int_\Delta \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant |\Delta|\,M(\Delta).$$

3.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : s,t \in [a,b],\ |s-t| < \delta \quad \forall j \in [1,k] : \left|\gamma_j'(s) - \gamma_j'(t)\right| < \varepsilon.$$

$$|\Delta| < \delta \Longrightarrow M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leqslant \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta) \leqslant \varepsilon n|$$

4. Теперь возьмем дробление $[a,b]$ на кусочки длиной меньше $\delta$.

$$[a,b] = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant l(\gamma\,\big|_{\Delta_j} \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant \int_{\Delta_j}\left|\gamma'\right| \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$\sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{j=1}^{k} M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \int_a^b \left|\gamma'\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{j=1}^{k} M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^{k} M(\gamma_j)\,|\Delta_j| - \sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^{k} |\Delta_i| = \varepsilon n(b-a).$$

□

**Example 7.** Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$$

### 1.4.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в $\mathbb{R}^3$.

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2| + |y'(t)^2| + |z'(t)^2|}.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a, b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a, b]\}$.

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha h}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

*Remark.* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m,\ \Delta \subset [a, b]$ — отрезок.

$$l(\gamma\,\big|_\Delta) = \int_\Delta \underbrace{\big|\gamma'(t)\big|\,dt}_{\text{Дифференциал дуги}}.$$

Если $f$ задана на носителе пути $\gamma$ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t)\,|\gamma'(t)|\,dt$

# Глава 2

# Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

## 2.1 Нормированные пространства

**Example 8.** $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$.

$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

Если $p = +\infty$, $|x|_{+\infty} = \max_{1\leqslant j\leqslant m}$.

*Note.* Все нормы в $\mathbb{R}^m$ эквивалентны.

**Example 9.** $(K, \rho)$ — метрический компакт. Рассмотрим множество $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — непрервна$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$|f|_\infty = |f|_{C(K)} = \max_{x\in K} |f(x)|.$$

**Theorem 7.** $C(K)$— *полно.*

*Доказательство.* Рассмотрим фундментальную последовательность функций $|f_n| \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальны, значит

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall k, n > N : |f_k - f_n| < \varepsilon\ \forall x \in K\ \ |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \to \infty$. $f_k(x) \to f(x)$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. $f_{n_0}$ — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)|\,|f_{n_0}(x_1 - f(x_2)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K\ \ |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon}_{\max_{x\in K}|f-f_n|\leqslant\varepsilon}.$$

□

**Example 10.** $(K, \rho)$ — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — ограничена$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$|f|_\infty == \sup_{x\in K} |f(x)|\,.$$

**Theorem 8.** *$l_\infty(X)$ — полно.*

*Доказательство.* Аналогично. □

*Note.* $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

*Note.* Замкнутое подпространство полного пространства полно.

**Example 11.** $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a, b] = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\right\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

**Theorem 9.** *$(C^1[a, b], \varphi_3)$ полно.*

*Доказательство.* $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \to_{n,kro\infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \to 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \to 0$. Тогда $|f_n - f_k| \to 0$ и $|f_n' - f_k'| \to 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f_n'\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, тое есть $\exists g = f'$.
2. $f_3(f_n - f) \to 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \to 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : \max|f_n - f| < \varepsilon \wedge \max\left|f_n' - g\right| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$= \left|f_n(x) - \left(\int_a^x f_n'(t)dt + f(a)\right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x \left(g(t) - f_n'(t)\right)dt - (f_n(a) - f(a))\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x \left|g(x) - f_n'(t)\right| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2)$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \to f \wedge f_n' \to g$. □

# ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Remark.* $|f_n - f| \to 0, \quad f_n \in C(K) \Longrightarrow f \in C(k).$

$$x_k \to x_0 \Longrightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}(x_k) = f(n).$$

*Remark.* Из того, что $|f_n - f|_\infty \to 0$ и $|f'_n - g|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

*Practice.* $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$