Оглавление

Лекция 2

14 feb

0.0.1 Свойства

Property. *1.* $c \in (a,b)$:

$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b}.$$

2. $\int_a^{\to b} f dx$ *— сходится* $\Longrightarrow \lim_{A\to b} \int_A^{\to b} f = 0$

2' Если $\int_A^{\to b} f \not\to_{A\to b-} \Longrightarrow \int_a^{\to b}$ *расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).*

(Линейность) f, g *— функции на* $[a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{\to b}, \int_a^{\to b} g \text{ сходятся } \Longrightarrow \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} + \beta \int_a^{\to b} g.$$

(монотонность) $f \leqslant g, \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$ *сходятся.*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

Definition 1

Говорят, что $\int_a^{\to b} f$ *сходится абсолютно, если сходится* $\int_a^{\to b} |f|$.

Если $\int_a^{\to b} f$ *сходится абсолютно, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится и верно неравенство*

$$\left| \int_a^{\to b} f \right| \leqslant \int_a^{\to b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ сходится } \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \Longrightarrow \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left| \int_a^B \right| \leqslant \int_a^B |f| dx.$$

Definition 2

$\int_a^{\to b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} |f|$ расходится.

(интегрирование по частям) $f, g \in C^1[a,b)$

$$\int_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g, \quad fg\Big|_a^{\to b} = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. $\square$

(замена переменной) $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta), f \in C[a, b)$. *Если существует предел, обозначим его так:* $\exists \lim_{x\to\beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.

$$\int_\alpha^{\to beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy.$$

Доказательство. $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y)dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

$\Longrightarrow$ Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \to \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_\alpha^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} \to \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

$\Longleftarrow$ Пусть $\exists \int_\alpha^{\to\beta} (f \circ g)\varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.
2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b)$, $c_n \to b-$ $\exists \gamma_{n\in[\alpha,\beta)} : \varphi(\gamma_n) = c_n$.

   Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β, либо к числу меньшему β.

   - $\{\gamma_{n_k} \to \beta$

     $$\int_\alpha^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k}=c_{n_k}}.$$

   - $\gamma_{n_k} \to \tilde{\beta} < \beta$

     $$\varphi(gamma_{n_k}) \to \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$

     Но должно быть равно b. Противоречие.

   Значит $gamma_n \to b$.

$$\int_{alpha}^{\varphi(gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{phi(alpha)}^{phi(gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

$\square$

Theorem 1 (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $0 \leqslant f \leqslant g,\ f, g \in C[a, b)$. *Тогда*

1. *если* $\int_a^{\to b} g$ *сходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,*
2. *если* $\int_a^{\to b} g$ *расходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *расходится.*

Доказательство. 1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) :\ \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Longrightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$

□

Theorem 2 (Признаки Абеля И Дирихле)**.** $f \in C[a, b),\ g \in C^1[a, b),\ g$ *монотонна.*

Признак Дирихле *Если* f *имеет ограниченную первообразную на* $[a, b), g \to 0$, *то* $\int^{tb} fg$ *сходится.*

Признак Абеля *Если* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,* g *ограничена, то* $\int_a^{\to b} fg$ *сходится.*

Доказательство. F — первообразная f. $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\to b} fg dx = \int_a^{\to b} g dF == Fg \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} Fg' dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B \to b-} F(B) g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\to b} Fg' dx \leqslant M \cdot \int_a^{\to b} |g| dx = M \cdot \left| \int_a^{\to b} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|\,.$$

□

Example 1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} \underbrace{x^\varepsilon |\ln x|^\beta}\underbrace{\longrightarrow}_{x\to 0} 0 \leqslant C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \ \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^b = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\to\infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln\frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходтся.