Конспект по алгебре
I семестр
СПбГУ, факультет математики и компьютерных наук
(лекции Степанова Алексея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

14 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Линейная алгебра. Векторные пространства

1.1 Лекция 1

X — множество
$* : X \times X \to X$
$(x, y) \mapsto x * y$
Аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)
2. $\exists e \in X \ \forall a \in X : e * a = a * e = a$ (нейтральный элемент)
3. $\forall a \in X \ \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$ (обратный элемент)
4. $\forall a, b \in X : a * b = b * a$ (коммутативность)

Def 1. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется **полугруппой**

Def 2. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-2, называется **моноидом**

Def 3. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-3, называется **группой**

Def 4. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **коммутативной** или **абелевой группой**

Exs.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ — группа
2. $(\mathbb{N}, +)$ — полугруппа
3. $(\mathbb{N}_0, +)$ — моноид
4. $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ — группа

5. Пусть A — множество
   $X :=$ множество биективных отображений $A \to A$
   id_A– нейтральный элемент
   Если $f(x) = y$, то $\tilde{f}(y) = x$ — обратная функция ($f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id_A$).
   $f(x) = x + 1,\ g(x) - 2x,\ id_A(x) = x$
   $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$
   $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1$
   Следовательно, $(X, \circ)$ — не коммутативная группа

Designation.

- $\cdot$ — мультипликативность, 1, x^{-1}
- $+$ — аддитивность, 0, $-x$
- $\circ$ — относительно композиции, id, x^{-1}
- $*$ — абстрактная операция, e, x^{-1}

Пусть $(R, +)$ — абелева группа
Определим отображение

$$\cdot : R \times R \to R$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Для $(R, +, \cdot)$ могут быть верны следующие аксиомы:

5. $a(b + c) = ab + ac$
   $(b + c)a = ba + ca$ (дистрибутивность)
6. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность)
7. $\exists 1_R\ \forall a \in R : 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ (нейтральный элемент)
8. ab = ba (коммутативность)
9. $0_R \neq 1_R$
10. $\forall a \neq 0_R\ \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$ (обратный элемент)

Def 5. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5, называется **не ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 6. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-6, называется **ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 7. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5-7, называется **ассоциативным кольцом с единицей**.

Def 8. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-8, называется **коммутативным кольцом**.

Exs.

1. $\mathbb{Z}$ –коммутативное кольцо
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — поля
3. Рассмотрим $\mathbb{Z}_n = 0, \dots, n-1$ с операциями $+_n, \cdot_n$:
   $a +_n b = (a + b)\%n$
   $a \cdot_n b = (a \cdot b)\%n$
   Обратимые элементы:
   $ax = 1 + ny$
   $ax - ny = 1$
   Если $(a, n) = 1$, есть решение, иначе — нет. $\mathbb{Z}_p$– поле $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$

1.2 Лекция 2

Def 9. V — векторное пространство над полем F , если $(V, +)$ — абелева группа, задано отображение $V \times F \to V$
$(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$, удовлетворяющее аксиомам $\forall x, y \in V, \forall a, b \in F$:

5. $x \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$
6. $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$
   $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
7. $x \cdot 1_F = x$

$A \in M_n(F), \alpha \in F$
$(A, \alpha)_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$
$(AB)\alpha = A(B\alpha)$

Exs.

1. Множество векторов в $\mathbb{R}^3$
2. $F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}$
   $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$
3. X — множество, $F^X = \{f \mid f : X \to F\}$
   $f, g : X \to F$
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ — многочлены от одной переменной t

5. V — абелева группа, в которой $\forall a \in V : \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \in \mathbb{P}} = 0$ Тогда V — векторное пространство над $\mathbb{Z}_p$ $k \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{k}$

1.3 Лекция 3

Def 10. Алгебра A над полем F — кольцо, являющееся векторным пространством над F («+» — операция в кольце и в векторном пространстве), такое что $(ab)\alpha = a(b\alpha) \qquad a, b \in A, \alpha \in F$

Ex. $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ — не ассоциативная алгебра на $\mathbb{R}$

Def 11. Матрица размера $I \times J$ (I, J — множества индексов) над множеством X — это функция

$$A : I \times J \to X, \qquad (i, j) \to a_{ij}.$$

Пусть определено умножение $X \times Y \to Z, \qquad (x, y) \to xy$
(Z — коммутативный моноид относительно «+»)

Def 12. Строка — матрица размера $\{1\} \times J$
Столбец — матрица размера $J \times \{1\}$

A — строка длины J над X
B — строка длины J над Y
Тогда произведение $AB = \sum_{j \in J} a_{1j} b_{j1} \in Z$
$x \to x_e$ — координаты вектора x
$\underbrace{x \cdot y}_{\text{скалярное произведение}} = x_e^T \cdot y_e$

Def 13. Транспонирование матрицы.
D — матрица $I \times J$ над X
D^T — матрица $J \times I$ над $X : (D^T)_{ij} = (D)_{ji}$

Note. Пусть в X есть элемент $0 : 0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y$. Все кроме конечного числа $a_j = 0$. Тогда AB имеет смысл, даже когда $|J| = \infty$.
«почти все» = кроме конечного количества

Designation.

$$a_{i*} \text{ — } i\text{-я строка матрицы } A$$

$$a_{*j} \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } A$$

1.3.1 Произведение матриц

$$A \text{ — матрица } I \times J \text{ над } X.$$

$$B \text{ — матрица } J \times K \text{ над } Y.$$

$$AB \text{ — матрица } I \times K \text{ над } Z = X \cdot Y, \qquad (AB)_{ik} = a_{i*} \cdot b_{*k} = \sum_{j \in J} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

$$(x_1, \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = va, \qquad v \in V, a \in F.$$

Theorem 1. *Произведение матриц ассоциативно.*

A *— матрица* $I \times J$ *над* X

B *— матрица* $J \times K$ *над* Y

C *— матрица* $K \times L$ *над* Z

U, V, W *— коммутативные моноиды по сложению.*

$X \times Y \to U$, $U \times Z \to W$

$Y \times Z \to V$, $x \times V \to W$

$\forall x \in X, y \in Y, z \in Z: \ (xy)z = x(yz)$

$\forall x \in X, y \in Y, \ u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$*:*

- $(u_1 + u_2)z = u_1 z + u_2 z$
- $x(v_1 + v_2) = xv_1 + xv_2$

Тогда $(AB)C = A(BC)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k \in K} (AB)_{ik} c_{kl)} = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \\ &= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left(\sum_{k \in K} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j \in J} a_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}$$

□

Def 14. V — векторное пространство, F — поле. Единичная матрица:

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Statement. $E_{I\times I} M_{I\times I} = M_{I\times I} = M_{I\times I} E_{I\times I}$

Statement. *R — асссоциативное кольцо с единицей. $M_n(R)$ — множество матриц размера $n \times n$ над R — тоже ассоциативное кольцо с 1.*

1.4 Лекция 4

Def 15. $(G, *)$, $(H, \#)$ — группы. $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм, если:

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \# \varphi(g_2)$$

Def 16. R, S — кольца. $\varphi : R \to S$ — гомоморфизм, если:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$$

Для колец с 1: $\varphi(1) = 1$

Def 17. U, V — векторные пространства над F. $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, если:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u\alpha) = \varphi(u)\alpha$$

Note. Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Def 18. V — векторное пространство над полем F
v — строка элементов «длины» I над V
a — столбец «высоты» I, почти все элементы которого равны 0.
Тогда va — линейная комбинация набора v с коэффициентами .

Note. $U \subset V$
U является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V. Тогда U — подпространство V

Lemma. *$U \subseteq V$, $\forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in F$: $u_1 + u_2 \in U, u_1\alpha \in U$. Тогда U — подпространство. Если U — подпространство в V, то пишут $U \leqslant V$.*

Def 19. $v = \{v_i | i \in I\}$, где $v_i \in V \; \forall i \in I$
$\langle v \rangle$ — наименьшее подпространство, содержащее все v_i

Lemma. *$\langle v \rangle = \{va \mid a$ — столбец высоты I над F, где почти всюду элементы равны нулю $\} = U$*

Доказательство. $v_i \in \langle v \rangle \Rightarrow v_i a_i \in \langle v \rangle$
$\Rightarrow v_{i_1} a_{i_1} a + ... + v_{i_k} a_{i_k} \in \langle v \rangle$
$\Rightarrow \langle v \rangle$ содержит все варианты комбинаций. $va + vb = v(a+b) \in U$
$(va)\alpha = v(a\alpha) \in U$
$\Rightarrow$ множество линейных комбинаций — подпространство U — подпространство, содержащее $v_i \forall i \in I$
$\langle v \rangle$a — наименьшее подпространство, содержащее v_i
$\Rightarrow \langle v \rangle \subseteq U$ тогда $\langle v \rangle = U$ □

Def 20. Если $\langle v \rangle = V$, то v — система образующих пространство V. Базис — система образующих.

Designation. F^I — множество функций из I в F = множество столбцов высоты I
${}^I F$ — множество строк длины I

Набор элементов из V , заиндексирванных множеством I — это функция $f : I \to V$
$i \mapsto f_c$

Def 21. $v \in {}^I F$
v — **линейно независим**, если $\forall a \in F^I, a \neq 0 \Rightarrow va \neq 0$

Theorem 2. $v \subseteq V$
Следующие утверждения эквивалентны:

1. *v — линейно независимая система образующих*
2. *v — максимальная линейно-независимая система*
3. *v — j минимальная система образующих*
4. *$\forall x \in V \exists! a \in F^v : x = va = \sum\limits_{t \in v} t \cdot a_t$ (почти все элементы равны 0)*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (4) — доказали ранее (1) $\Rightarrow$ (2)
$x \in V \setminus v$
$x = va (a \in F^v)$
$va = x \cdot 1 = 0$ — линейная зависимость набора $v \cup x$
Т.о. любой набор , строго содержащий v, линейно зависим $\Rightarrow v$ — максимальный.
(1) $\Rightarrow$ (2)

$x \in V\backslash$
$v \subseteq V \cup x$–линейно зависим
$va + xa_x = 0$
$a \neq 0$
Если $a_x = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow a = 0$?!
Значит $a_x \neq 0$
$va = c \cdot (-a_x)$
$x = v \cdot \frac{a}{-a_x} \Rightarrow v$ –система образующих.

□

Lemma (Цорн)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — набор подмножеств (не всех) множества X.*
Если объединение любой цепи из $\mathcal{A}$, принадлежащей $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ существует максимальный элемент.
$M \in \mathcal{C}$ — максимальная, если $M \subseteq M' \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow M = M'$

Theorem 3 (о существовании базиса)**.** *V — векторное пространства*
X — линейное независимое подмножество V
Y — система образующих V
$X \leqslant Y$
Тогда существует базис Z пространства $V : X \leqslant Z \leqslant Y$

Доказательство. $\mathcal{A}$ — множество всех линейно независимых подмножеств, лежащих между X и Y. $X \in \mathcal{A}$
$\mathcal{C} \leqslant \mathcal{A}$
$X \leqslant \cup C \in \mathcal{C} \leqslant Y$
Пусть $\cup C \in \mathcal{C}$ — линейно зависимый. То есть$\exists u_1, ..., u_2 \in /$...

...

Пусть v — базис V.

$$\forall x \in V \; \exists! x_v \in F^v : x = v \cdot x_v$$

$$v = (v_1, \dots, v_n), \; x_v = \text{ матрица столцов альфа;}$$

$$x = v_1\alpha_1 + \dots = v \cdot x_v$$

□

1.5 Лекция 5

Theorem 4 (о замене)**.** *$u = \{u_1, \dots u_n\}$, $u_i \in V$ — линейно независимый набор. $v \subseteq V$ — система образующих. Тогда:*

1. *$\exists v_1, \dots v_n \in v : v \smallsetminus \{v_1, \dots v_n\} \cup u = w$ — тоже система образующих.*
2. *Причем, если u — базис, то w — базис.*

Corollary. Любые два базиса пространства V равномощны.

Def 22. $\dim V$ — размерность векторного пространства V, равная мощности базиса V.

Def 23. U, V — векторные пространства над F. $L : U \to V$ — линейное отображение, если

- $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
- $L(u\alpha) = L(u)\alpha$

Если L биективно, то это изоморфизм.

Designation. $U \cong V \overset{\text{def}}{=} \exists$ изоморфизм $U \to V$.

1.6 Лекция 6

1.7 Лекция 7

Statement.

$$U \leqslant W \quad \exists V \leqslant W : W = U \oplus V$$

Доказательство. Выберем базис u в U. Дополним до базиса $u \cup v$ пространства W и положим $V = \langle v \rangle$.

$$\langle u \rangle = U \langle v \rangle = V \langle u \cup v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle = U \oplus V = W$$

$$x \in U \cap V \Rightarrow x = ua = vb \Leftrightarrow ua - vb = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0 (u \cup v \text{ линейно независимый}$$

□

Corollary.

$$u \text{ — базис } U, v \text{ — базис } V, U, V \leqslant W$$

$$u \cup v \text{ — базис } W \Leftrightarrow U \oplus V$$

25.09.2019

1.8 Лекция 8

$$v = (v_1, v_2, \dots v_n) \in n^V$$

$$M_n(F) \text{ — алгебра матриц размера } n \times n \text{ над } F$$

$$GL_n(F) = M_n(F)^* \text{ — полная линейная группа степени } n \text{ над } F$$

Lemma.

$$v \in n^V, A \in GL_n(F)$$

$$v \text{ — \textit{линейно независимый}} \Leftrightarrow vA \text{ — \textit{линейно независимый}}$$

$$\langle v \rangle = \langle vA \rangle$$

Доказательство. $(vA)A^{-1} = v(AA^{-1}) = vE = v$, поэтому можно доказывать только в одну строну.
v — линейно независимый.
$vAb = 0 \Rightarrow A^{-1}Ab = 0 \Rightarrow b = 0$, т.е vA — линейно независимый.
$(vA)b = v(Ab) \in \langle v \rangle$, $\langle vA \rangle \leqslant \langle v \rangle$ □

Statement. *u, v — два разных базиса пространства V.*
Тогда $\exists!$ матрица $A \in GL_n(F) : u = vA$
При этом $a_{*k} = (u_k)_v \quad \forall k = 1, \dots n$. Такая матрица обозначается $C_{v\to u}$ и называется матрицей перехода от v к u.

$$C_{v\to u}C_{u\to v} = C_{v\to u}C_{u\to v} = E$$

Доказательство. Положим $a_{*k} = (a_k)_v \Rightarrow u_k = va_{*k} \Rightarrow u = vA$.
$vA = vB \Leftrightarrow A = B$ то есть A единственно.
Далее:

$$\left.\begin{array}{c} u = vC_{v\to u} \\ v = uC_{u\to v} \end{array}\right\}$$

$$uE - uC_{v\to u}C_{v\to u}$$

$$E = C_{u\to v}C_{v\to u}$$

□

Corollary. v — базис V
$f : GL_n(F) \to$ множество базисов пространства V
$f(A) = vA$ — биекция.

Доказательство.

$$|F| = q \qquad \dim V = u$$

$$(q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1}) \text{ — количество базисов}$$

$\mathbb{F}$ — поле из q элементов. □

Statement. *Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.*

Corollary. u, v — базисы V

$$x \underset{u}{=} C_{u\to v}x_v$$

Доказательство.

$$x = ux_u = vx_v$$

$$v = uC_{u\to v}$$

$$ux_u = uC_{u\to v}x_v \Rightarrow x_u = C_{u\to v}x_v$$

□

Corollary. (Матричные линейные отображения)

$$L : U \to V, \quad u \text{ — базис } U, v \text{ — базис } V$$

Тогда $\exists!$ матрица $L_{v,u}(L^v_u : \forall x \in U L(x)_v = L^v_u x_u$
При этом $(L^v_u)_{*k} = L(u_k)_v$

Note.

$$u = (u_1, \dots u_n) \in n^U$$

$$L : U \to V$$

$$L(a) := (L(u_1), \dots, L(u_n))$$

$$L(ua) = L(u)a \qquad a \in F^n$$

$$\varphi_v : V \to F^n$$

$$\varphi_v(g) = y_v \qquad \forall q \in V$$

φ_v — линейно $\Rightarrow (L(u)a)_v = L(u)_v a$

$$L(u)_v := (L(u_1)_v, \dots L(u_n))v)$$

Доказательство.

$$x = ux_u$$

$$L(x) = L(u)x_u$$

$$L(x)_v = L(u)_v x_u$$

Положим $L_u^v := L(u)_v$.

$$\forall x \in U : L(x)_v = L_u^v x_u$$

При $x = u_k : L(u_k)_v = L_u^v (u_k)_u = (L_u^v)_k$ □

Note. Если $Ax = Bx \quad \forall x \in F^n$, то $A = B$

26.09.2019

1.9 Лекция 9

Exs.

1. $V = \mathbb{R}[t]_3$ — многочлены степени не более 3

$$D(p) = p' \qquad V \to V$$

$$v = (1, t, t^2, t^3).$$

$$D(1) = 0, D(t) = 1, D(t^2) = 2t.$$

$$D_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$v^{(1)} = (1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}).$$

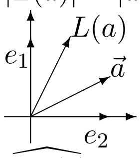
2. $V = \mathbb{R}[t]$

$$v = (1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots).$$

$$D(v_0) = 0, D(v_k) = v_{k-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots \\ & 0 & 1 & \cdots \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

3. $V = \mathbb{R}^3$
   $|L(a)| = |a|$

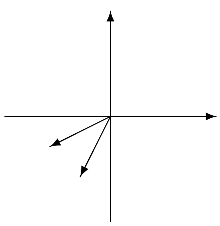


$\widehat{a, L(a)} = \varphi$
$e = (e_1, e_2)$- базис

$$L(e_1)_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$L(e_2)_e = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$



$$a_e = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$L(a)_e = \begin{pmatrix} \cos(\psi+\varphi) \\ \sin(\psi+\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$L(a)_e = L_e \cdot a_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Statement. $L : U \to V$
u, u' — базис U
v, v' — базис V
Тогда $L_{u'}^{v'} = C_{v' \to v} \quad L_u^v C_{u \to u'}$

Доказательство.

$$L(x)_v = L_u^v x_u.$$

$$C_{v' \to v} L(x)_v = L(x)_{v_1} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \to u} x_u.$$

$\forall x_u \in F^{dimU}$

$$L(x)_v = C_{v \to v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \to u} x_k.$$

$$L_u^v = C_{v \to v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \to u}.$$

□

Note.

$$\text{Если } U = V \qquad u = v, u' = v'.$$

$$L_{u'} = C_{u' \to u} L_u C_{u \to u'}.$$

Statement. *Линейное отображение однозначно определяется образом базисных векторов.*
$u = (u_1, \dots u_n) -$ *базис* U
Для любого векторного пространства V*:*

$$\forall v_1, \dots v_n = V$$

$$\exists! \text{ линейное отображение } (*) L : U \to V : L(u_k) = v_k \quad \forall k$$

Доказательство.

$$L(ua) := va$$

$$\forall L^* : L(ua) = L(u)a = va$$

□

При этом L инъективно тогда и только тогда, когда v — линейно независимый
L сюрьективно тогда и только тогда, когда v — система образующих
L — изоморфизм тогда и тоько тогда, когда v — базис.

Statement. $V, \quad v, v'$ — *базис* V
$L : V \to V$ *линейно*
$L(v_k) = v'_k \qquad \forall k$

$$(L_v)_k = L(v_k)_v = (v'_k)_v$$

$$L_v = C_{v \to v'}.$$

по другому

$$(Id^v_{v'})_k = Id(v'_k)_v = (v'_k)_v.$$

Тогда $L_v = C_{v \to v'} = Id^v_{v'}$

Def 24. $f : X \to Y$
$Imf = \{f(x) \mid x \in X\}$
$L : U \to V$ — линейное отображение
$\text{Im } L = \{L(x) \mid x \in U\}$
$\text{Ker } L = L^{-1}(0) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$

Lemma.
$\text{Im } L \leqslant V$
$\text{Ker } L \leqslant U$
Пусть $L(x) = y$

$$\forall y \in V : L^{-1} = x + \text{Ker } L$$

$$L^{-1}(y) = \{z \in U \mid L(z) = y\}$$

$$x + \text{Ker } L = \{x + z \mid z \in \text{Ker } L\}$$

1.10 Лекция 10

Theorem 5. $L : U \to V$

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker}\, L + \dim \operatorname{Im}\, L.$$

Доказательство. $u = (u_1, \dots u_k)$ — базис Ker L
$v = (v_1, \dots U_m)$ Дополним базис ядра до базиса U: $u \cup v$ — базис U
$L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots L(v_m))$ — базис образа. $\sphericalangle$ $x \in \operatorname{Im}\, L \quad \exists y \in U : L(y) = x$. $y = ua + vb, \qquad a \in F^k, b \in F^m$

$$x = L(y) = \underbrace{L(u)}_{(L(u_1),\dots L(u_k))=(0,\dots 0)} + L(v).$$

Следовательно, $L(v)$ — система образующих.

$$L(v)c = 0, \qquad c \in F^m.$$

$$L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \operatorname{Ker}\, L \Rightarrow vc = ud \qquad \text{для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u — два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ — линейно независимый. □

Theorem 6. *(формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)*
$U, V \leqslant W$

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

Доказательство. $\sphericalangle$ внешнюю сумму $U \oplus V$, $L(u, v) = u + v$
Тогда $ImL = U + V$. $(u, v) \in \operatorname{Ker}\, L \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \subset U \cap V$
$\operatorname{Ker}\, L = (u, -u) \mid u \in U \cap V \cong U \cap V$
$\dim(U \oplus V = \dim \operatorname{Ker}\, L + \dim \operatorname{Im}\, L = \dim U \cap V + \dim U + V$ □

08.10.2019

1.11 Лекция 11

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Простейший базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x = vx_v, \quad x = ex_e = Ex_e$

$$eC_{e \to v} = v \text{ — из столбцов } v.$$

$$C_{e\to v} = v \text{ — матрица из столбцов } (v_1, \dots v_n).$$

$L : F^m \to F^n, \qquad A \in M_{n\times m}(F)\ L(x) = Ax$

$$L(x)_e = L_0^e x_e, L(x)_e = L(x) = Ax = L_e^e x_e.$$

$Hom(F^n, F^m) \cong M_{m\times n}(F)$ — изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем A отождествляется с L , пишем A_u^v вместо L_u^v (A в базисе $u - v$).

Def 25. Линейный оператор из V в V называется эндоморфизмом V . Множество эндоморфизмов $V = End(V)$ — ассоциативная алгебра над f
$+, *\alpha$ — поточечные операции, $*$ — композиция.
$L, M, N \in End(V) : \quad L\circ(M+N) = L\circ M + L\circ N$ — следует из линейности L

v — базис V, $u = \dim V$
$\theta_v : End(V) \to M_n(F)$
$\theta_v = L_v$

Statement. θ_v *биективно.*

Practice. Построить обратное θ_v

Lemma. $(M\circ L)_v = M_v \circ L_v$

Statement. θ_v *— изоморфизм*
F *— алгебра*
$EndV \cong M_n(F)$

–

Theorem 7. $U \leqslant V$
$\forall L : V \to V, \quad U \leqslant \text{Ker } L, \exists! \tilde{L} : V\backslash U \to W$

$$\tau : \begin{array}{ccc} V\backslash U & \longrightarrow & W \\ \uparrow \pi_U & & \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}.$$

$\tau \circ \pi_U = L$
L *— эпиморфизм* $\Rightarrow \tau$ *— эпиморфизм*
$\text{Ker } L = U \Rightarrow \tau$ *— мономорфизм*

Доказательство. Диаграмма коммутативна, следовательно, $\tilde{L}$ строится однозначно. Пусть $\tilde{L}(x+U) := L(x).y \in U \in \text{Ker } L :\ L(x+y) = L(x) + L(y) = L(x)$ $\tilde{L}$ задано корректно (легко проверить, что оно линейно, единственность следует из коммутативности диаграммы. $\tilde{L}(x+U) = L(x)$ — необходимо и достаточно коммутативности диаграммы.
$\tilde{L}(x+U) = 0_W \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } L = U \Leftrightarrow x + U = 0 + U = O_{V\backslash U}$
Для инъективности : $\text{Ker } \tilde{L} = 0_{V\backslash U}$ □

Theorem 8 (О гомоморфизме)**.** $L : V \to W$

$$V\text{Ker } L \cong \text{Im } L.$$

Доказательство. Возьмем $U = \text{Ker } L$ и заменим W на ImL $n = \dim\langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle \leqslant \dim F^m = m$. Из линейной независимости строк следует, что $m \leqslant n$ Таким образом $m = n$.
n линейно независимых столбцов (строк) в n-мерном пространстве — базис и матрица A — матрица перехода $C_{e\to a}$, где $a = (a_{*1}, \dots a_{*n})$ — набор столбцов A . Следовательно, $A \in GL_n(F)$ — множество обратных матриц. ☐

Def 26. Ранг:
$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim\langle v_1, \dots v_n\rangle$,
$rkL = \dim \text{Im } L$
$u_1, \dots u_n$ — базис U, $L : U \to V$
$rkL = rk((L(u)) = \dim\langle L(u_1), \dots L(u_n)\rangle$
$A \in M_{m\times n}(f)$
Столбцовый ранг $A : rkA - rk(a_{*1}, \dots a_{*m})$
Строчный ранг : $rkA = rk(a_{1*}, \dots a_{n*})$
или наибольшее количество независимых столбцов (строк).

Lemma. $A \in M_{m\times n}$

1. *столбцы A линейно независимы $\Leftrightarrow$ столбцовый $rkA = n$*
2. *столбцы A — система образующих в F^m $\Leftrightarrow$ столбцовый $rkA = m$*
3. *строки A линейно независимы $\Leftrightarrow$ строчной $rkA = m$*
4. *строки A — система образующих в ${}^mF$ $\Leftrightarrow$ строчной $rkA = n$*
5. *столбцы являются базисом F^n $\Leftrightarrow$ $m = n =$ строчной rkA*
6. *если столбцы и строки A линейно независимы $\Leftrightarrow$ $n = m$, строки и столбцы — базисы, A обратима.*

Доказательство. (6)
из (1) $\Rightarrow c.rkA = n$
$n = \dim\langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle$ ☐

10.10.2019

1.12 Лекция 12

Lemma. *$L : U \to V$ — линейное отображение.*
$rkL = \ c.L_U^V$
Для любых базисов u, v пространств U, V.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_v \\ F^n & \xrightarrow{L_U^V} & F^m \end{array}$$

$A \in M_{m\times n}(F)$

$$ImA = \{Ax \mid x \in F^m\} = \{a_{*1}x_1 + \dots a_{*n}x_n \mid x_i \in F\} = \langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle.$$

$rkA = c.rkA$ — ранг оператора умножения на А. Из диаграммы $ImL \cong \text{Im } L_U^V \Rightarrow rkL = c.rkL_U^V$ ☐

Lemma. $A \in M_{m\times n}(F)$
$B \in GL_m(F), C \in GL_n(F)$
$rkA = rkBAC$ *— строчной или столбцовый.*

Доказательство. $L : F^n \to F^m$- оператор умножения на A. $A = L_e^e$.
$B = C_{e\to v}, C = C_{e\to u}$, где u, v — базисы пространств F^m, F^n.
$BAC = L_v^u$ Тогда $c.rkA = c.rkBAC = rkL$. Со столбцами все хорошо. Теперь со строками: $r.rkA^T = c.rkA$
$r.rk(BAC)^T = r.rk(A^TB^TC^T)$ $r.rk(BAC)^T = c.rkBAC$
Тогда $r.rkA^T = r.rkC^TA^TB^T$. (Заметим, что $(B^T)^{-1} = ((B^{-1})^T)$ Следовательно, B^T, C^T — произвольные обратимые матрицы. □

Practice. $(AB)^T = B^TA^T$

Theorem 9 (PDQ - разложение, равенство базисов)**.** $L : U \to V$ *— линейное отображений,* U, V *— коне*

1. *Существуют базисы* u, v *пространств* U, V *такие что*

$$L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Размер $E = rkL$.

2. $\forall A \in M_{m\times n}(F) \exists P \in GL_m(F), Q =\in GL_n(F) : A = PDQ,$ *где* $D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $c.rkA = r.rkA$

Доказательство. $(f_1, \dots f_k)$ — базис Ker L. Дополним до базиса на пространства $U : g \cup f = u$. Тогда (см. Теорему о ядре и о,разе). $L(g)$ — базис Im L. Дополним его до базиса v пространства V.

$$v = (L(g_1), \dots, L(g_l), v_{l+1}, \dots, v_n).$$

$$\begin{aligned} L(g_1)_v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ L(g_l)_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}.$$

$L(f_i) = 0$ таким образом $L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

Def 27. W — множество матриц-перестановок (группа Вейля).

$$a_{*i} = e_{\sigma(k)}, \qquad \text{где } \sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\} \text{ -биекция.}$$

$B =$ — множество обратимых верхнетреугольных матриц.(борелевская подгруппа) B^- — множество обратимых нижнетругольных матриц.

Theorem 10 (разложение Брюа)**.**

$$GL_n(F) = BWB = \{b_1 w b_2 \mid b_1, b_2 \in B, w \in W\}.$$

$w \in W : BwB$ — клетка Брюа.

Доказательство. $a \in GL_n(F)$

$$\exists b, c \in B : \; bac \in W.$$

Индукция по n
В первом столбце a выберем низший ненулевой элемент.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}.$$

$$ua = ()$$

Пусть a' — матрица, полученная из uav вычеркиванием i-ого столбца и j-строки. Легко видеть, что ее столбцы линейно независимы. Следовательно, a' обратима. Тогда по ПИ $\exists b', c' : b'a'c' \in W_{n-1}$. Все получилось!

□

Доказательство. см конспект $GL_n(F) = BWB$
$a \in GL_n(F)$ □

Theorem 11 (разложение Гаусса)**.**

$$GL_n(F) = WB^-B.$$

$w \in W : wB^-B$ — клетка Гаусса.

Доказательство. Докажем, что $\forall w \in W : BwB \subset wB^-B$
$BWB = \bigcup_{w \in W} BwB \subset ...$

Lemma (1)**.** *$D = D_n(F)$ — множество обратимых диагональных матриц. $U = U_n(F)$ — множество унитреугольных матриц. Тогда $B = DU = UD$.*

Practice. $a = \begin{pmatrix} \alpha_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i \neq \alpha_j, \text{если } i \neq j \;\Rightarrow\; ab = ba \Rightarrow b \in D$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

□

Lemma (2). *$U = \prod_{i<j} X_{ij}$, причем произведение берется в любом наперед заданном порядке.*

Доказательство. Будет в теории групп □

Designation. $w \in W : U_w := \prod_{i<j, \sigma(i)>\sigma(J)} X_{ij}$, где σ — перестановка соответствующая w. То есть $w^{-1} X_{ij} w = X_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Theorem 12 (Приведенной разложение Брюа). *$B = \bigcup_{w \in W} U_w w D U$ При этом w, а также элеметны из U_w, D, U определены по элементам из B из единственным образом.*

Доказательство. □

Corollary. *$BwB \subset wB^{-1}B = w(w^{-1}U_w w)B \subset wU^- B \subset wB^- B$*

Доказательство. $BwB = U_w wB$ □

□

Statement.

$$BwB \cap Bw'B = \varnothing, \; \forall w \neq w'.$$

1.13 Лекция 13

15.10.2019 Доказательство теорем

1.14 Лекция 14

17.10.2019

Разложение Гаусса. Идея доказательства: $a \in GL_n(F)$, $wa \in U^- B$. Найдем такое w.

Def 28. Главная подматрица матрицы A- подматрица $k \times k$ стоящая в левом верхнем углу матрицы A.

Lemma. *Обратимость любой главной подматрицы не зависит от умножения на U^- слева и на U справа.*

Доказательство. $a^{(k)}$ — главная подматрица $k \times k$ в a.

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где $b \in U^- F$ Обратимость $a^{(k)}$ равносильно обратимости $ba^{(k)}$, так как b обратима. □

Lemma. *$a \in U^- B \Leftrightarrow$ все главные подматрицы обратимы.*

Доказательство. Доказываем следствие влево. Индукция по n. База: $n = 1$ — очевидно
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к $a^{(n-1)}$. Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. □

Lemma. $\forall a \in GL_n(F) \exists w \in W$: *все подматрицы в wa обратимы. По условию $a^{(n-1)}$ обратима,*

Доказательство. Индукция по k. Докажем, что существует перестановка $a \in GL_n(F)$ такая, что главные подматрицы размера не более $k \times k$ обратимы.
$k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем i- строку с первой.
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

По индукционному предположению все главные подматрицы в $a^{(k)}$ обратимы. Все столбцы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k+1} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots a_{nk+1} & \end{pmatrix} = k+1$ $k+1$-мерное подпространство U в ${}^{k+1}F$. А первые k строк этой матрицы линейно независимы. $X = b_1, \dots b_k, Y = b_1, \dots b_n, \quad b_i = (a_{i1}, \dots a_{ik+1})$.
X — линейно независимый, $\langle y \rangle = U, \dim U = k+1$.

$$\exists Z : X \geqslant X \geqslant Y, \text{ где } Z \text{ — базис} U..$$

$$|Z| = k+1 \Rightarrow Z = b_1, \dots b_k, b_i, i > k..$$

Переставляем i-ю строку на $k+1$ место. У получившейся матрицы первые k главных подматриц равны главным подматрицам в a, а строки $k+1$-й строки главной подматрицы линейно независимы. Следовательно, она независима. □

$wa \in B^- B$. Домножая на B, B^-, получим, что хотели. □

Theorem 13 (Кронокера-Капелли)**.** *Система линейных уравнений $Ax = b$ Имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $rkA = rk(Ab)$, где (Ab) — расширенная матрица.*

Доказательство.

$$rkA = rk(Ab) \Leftrightarrow \langle a_{*1}, \dots \rangle = \langle a_{*1}, \dots a_{*n}, b \rangle \Leftrightarrow b \in \langle a_{*1}, \dots a_{*n} \rangle \Leftrightarrow \text{ система имеет решение.}$$

□

Глава 2

Начала теории групп

2.1 Лекция 15

Def 29. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если H — группа относительно операции, заданной в G.

$$H \leqslant G.$$

Lemma. *$H \subset B$ H — подгруппа $\Leftrightarrow \forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$.*

Statement. *G, H — группы.*

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \cdot g', h \cdot h').$$

Def 30. $\varphi X \to Y, (X, *), (Y, \cdots)$ — группы.
φ — гомоморфизм групп, если:

$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Lemma. *$G, H \leqslant F$*

1. *$G \cap H = \{1\}$*
2. *$G \cdot H = F$*
3. *$\forall g \in G, h \in H : gh = hg$*

Тогда $F \cong G \times H$.

Доказательство. $\varphi : G \times H \to F$
$\varphi(g, h) = g \cdot h$

$$\varphi((g, h) \cdot (g', h')) = \varphi(gg', hh') = gg'hh'.$$

$$\varphi(g, h) \cdot \varphi(g', h') = ghg'h'.$$

(1) $\Leftrightarrow \varphi$ сюрьективно.

$$\varphi(g, h) = \varphi(g', h') \Leftrightarrow gh = g'h' \Leftrightarrow g'^{-1}g = h'h^{-1} = 1 \Rightarrow g' = g, h' = h.$$

$\square$

2.2 Лекция 16

22.10.2019

Ex. $\ln : \mathbb{R}^*_{>0} \to (\mathbb{R}, +)$
$\ln ab = \ln a + \ln b$ — гомоморфизм.

Def 31.

$$\varphi G \to H \text{ — гомоморфизм.}$$

$$Im\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

$$\text{Ker } \varphi = \varphi{-}1 = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}.$$

Lemma. *$Im\varphi$ и Ker φ — подгруппы.*

Доказательство.

$$a, b \in \text{Ker } \varphi.$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 1 \Leftrightarrow ab \in \text{Ker } \varphi.$$

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } \varphi.$$

□

Lemma.

$$\varphi(g) = h, \quad \varphi : G \to H \text{ — гомоморфизм.}$$

$$\varphi^{-1} = \underbrace{g\text{Ker } \varphi}_{\text{левый смежный класс по ядру}\varphi} = \underbrace{\text{Ker } \varphi g}_{\text{правый}}.$$

Доказательство. $\varphi(x) = h = \varphi(g)) \Leftrightarrow \varphi\varphi^{-1} = 1 \Leftrightarrow \varphi(xy^{-1}) = 1 \Leftrightarrow xg^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \varphi g$ □

Def 32. $H \leqslant G$
H называется нормальной подгруппой , если $gH = Hg \quad g \in G$. ($H \trianglelefteq G$)

Note. $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G \Leftrightarrow g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall g \in G$

Lemma. $H \leqslant G$

$$g_1 H \cap g_2 H \neq 0 \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H.$$

Доказательство. $x \in g_1 H \cap g_2 H \Rightarrow x = g_1 h_1 = g_2 h_2, \quad h_1, h_2 \in H$. Тогда $g_1 = g_2(h_2 h_1^{-1}) \Rightarrow g_1 H = g_2(h_2 h{-}1)H$. □

Corollary. $G = \bigsqcup\limits_{g \in X} gH$, где X — множество представителей левых смежных классов по h.
$g_1 \overset{H}{\sim} g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$

Lemma.

$$|g_1 H| = |g_2 H|, \quad \forall g_1, g_2 \in G, H \leqslant G.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} g_1H \to g_2H \\ x \mapsto g_2g_1^{-1}x \end{pmatrix}.$$

Обратная $y \mapsto g_1g_2^{-1}y$ □

Theorem 14 (Лагранж). *G — конечная группа. Тогда $|G| = |H| \cdot |G : H|$, где $|G : H|$ — количество левых смежных классов G по H. $|G : H|$ — индекс H в G.*

Доказательство. Из прошлой леммы и следствия □

Corollary. Если $p = |G| \in \mathbb{P}$, то $\forall g \in G\backslash 1 : G = \{1, g, \dots g^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}_p$

Доказательство. $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leqslant G = \langle g \rangle$.
$|\langle g \rangle|$ делит p и больше единицы, так как содержит единицу и $g \neq 1$. Следовательно, $|\langle g \rangle| = p$.
Докажем, что все элементы $1, g, \dots g^{p-1}$ различны. Рассмотрим $0 \leqslant k, l \leqslant p-1$. Пусть $g^k = g^l \Rightarrow g^{k-l} = 1$. При $k - l \neq 0$, $g^n = g^{m(k-l)+r} = g^r$, $\quad r < k - l \leqslant p - 1$. Тогда бы $\{1, g, \dots g^{k-l-1}\} = \langle g \rangle$. Из чего следует $|\langle g \rangle| < p$. Противоречие.
Рассмотрим $k \in [0, p-1]$. $g^p = g^k \Leftrightarrow g^{p-k} = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow g^p = 1$.
Теперь проверим изоморфность. $\varphi : \mathbb{Z}_p \to G, \varphi(k) = g^k$ □

Def 33. Группа, порожденная одним элементом, называется циклической.

Statement. *Любая циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_n$.*

Доказательство. $G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Разберем два случая:

1. $g^m \neq 1 \, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow g^m \neq 1 \, \forall m \neq 0$.
$$\varphi\mathbb{Z} \to G, \quad \varphi(m) = g^m.$$
$$\varphi(m+k) = g^{m+k} = g^m g^k = \varphi(m)\varphi(k).$$

2. Пусть n — наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$.
$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, \quad \varphi(m) = g^m \text{ сюрьективно ..}$$
$g^m = 1 \Leftrightarrow g^{nk+r} = 1 \Leftrightarrow g^r = 1 \Rightarrow r = 0$
$$\text{Ker } \varphi = \{m \mid g^m = 1\} = n\mathbb{Z}.$$

□

Def 34. Порядок $g \in G$ — наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$. ord $(g) = |\langle g \rangle|$

Statement (из теоремы Силова). *$|G| = p^m$, $p \nmid m$. Тогда $\exists H \leqslant G : |H| = p^k \, \forall h \in H\backslash 1$.*
ord $(h \mid p^k)$*, следовательно,* $h^{pl} = 1 \Rightarrow (h^{p^{l-1}})^p = 1$

2.3 Лекция 17

24.10.2019

G — группа.

Def 35. $S \subseteq G$
$\langle S \rangle$ — наименьшая подгруппа содержащая S.

Statement. $\langle S \rangle = \{S_1^{n_1} \cdot \ldots S_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, S_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}$, *для абелевой* :$s_i \neq s_j$ *при* $j \neq j$.

Def 36. $s^g := g^{-1}sg$

Note. $(s^g)^h = s^{g^h}$
${}^h({}^g s) = {}^{h\,g}S$

Property.

1. $(s_1 s_2)^g = s_1^g s_2^g$
2. $(s^g)^{-1} = (s^{-1})^g$
   $s \mapsto s^g$ — *автоморфизм* G.

Def 37. $H \leqslant G$

$$H^G = \langle h^g \mid h \in H, g \in G \rangle \text{ — нормальное замыкание} H \text{ в } G.$$

Нормальное замыкание равно наименьшей нормальной подгруппе в G, содержащей H.
$\langle S \rangle^G$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая S.
$s^g = g^{-1}sg$ — сопряженный с s при помощи g.

$$H^g = \langle h^g \mid h \in H \rangle \text{ — подгруппа, сопряженная с } H \text{ при помощи } g.$$

Def 38. $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$ — коммутатор элементов a, b.

Note. $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$

Statement. $\varphi : G \to A$ — *гомоморфизм в абелеву группу.*
$\varphi([g, h]) = 1$
Тогда $[G, G] = \langle [g, h] \mid h, g \in G \rangle \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$ — *коммутант* G.
$[g, h]^f = [g^f, h^f]$

Statement. $[a, b]^{-1} = [a, b]$

Def 39. Центр группы — $Center(G) = Z(G) := \{c \in G \mid cg = gc \quad \forall g \in G\}$

Designation.
$G/H = \{gH \mid g \in G\}$ — множество левых смежных классов.
$H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ — множество левых смежных классов.

$H \trianglelefteq G \quad (H^g = H \forall g \in G)$

Def 40. Фактор-группа G/H — множество смежных классов по H с операцией $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$.

корректнсть определения.

$$g_1' \in g_1H \Rightarrow g_1'h_1.$$

$$g_2' \in g_2H \Rightarrow g_2'h_1.$$

$$g_1 \mid +g_2 \mid = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2g_2^{-1} = (g_1g_2)(g_2^{-1}h_1g_2)h_2 \in g_1g_2H.$$

□

Def 41. $\pi_{\mathrm{H}} : G \to G/H$, $g \mapsto gH$
π_{H} — эпиморфизм, $\mathrm{Ker}\ \pi_{\mathrm{H}} = H$

Theorem 15 (универсальное свойство факторгруппы)**.** *$N \trianglelefteq G$, $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм. Если* $\mathrm{Ker}\ f \geqslant N$*, то существует единственный гомоморфизм $\varphi : G/N \to H$, такой что $f = g \circ \pi_н$. Если f — эпиморфизм, то g — эпиморфизм. Если* $\mathrm{Ker}\ F = N$*, то g — мономорфизм.*

Theorem 16. $\varphi : G \to F$
$$G/\mathrm{Ker}\ \varphi \cong \mathrm{Im}\ \varphi.$$

Доказательство. Заменим N на $Im\varphi$.

$$\varphi' \to \mathrm{Im}\ \varphi \quad \mathrm{Ker}\ \varphi' = \mathrm{Ker}\ \varphi.$$

По прошлой теореме существует единственное:

$$\hat{\varphi} : \begin{array}{ccc} G/\mathrm{Ker}\ \varphi & \to & \mathrm{Im}\ \varphi \\ \uparrow \pi & & \uparrow \varphi' \\ G & & G \end{array}.$$

φ -сюрьективно. Следовательно, φ' сюрьективно.

□

$g\mathrm{Ker}\ \varphi \in \mathrm{Ker}\ \hat{\varphi} \Leftrightarrow \hat{\varphi}(g\mathrm{Ker}\ \varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi(g) = 1 \Leftrightarrow g\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ \varphi = 1_{G/\mathrm{Ker}\ \varphi}$. Следовательно, $\hat{\varphi}$ инъективно .

Ex. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \quad \varphi(x) \equiv x \mod n.$
$\mathrm{Ker}\ \varphi = n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2.4 Лекция 18

Ex.

$$U_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим

$$U_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{a \mid a_{ij} = 1, a_{ij} = 0, \forall i \neq j, j - i < k\}.$$

Мартица трансвекций:

$$t_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $U_n^{(k)}(F) = U_n^{(k)} = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j - i \geqslant k, \alpha \in F \rangle$ — группа.

Lemma. $U_n^{(k)} \setminus U_n^{(k-1)} \cong \underbrace{F \times \ldots \times F}_{n-k}, \quad F = (F, +)$. *Проверим, что есть гомоморфизм, и применим теорему о гомоморфизме.*

Доказательство.

$$\varphi : U_n^k \to F^{n-k}, \quad \varphi(a) = (a_{i\ k+1}, \dots, a_{n-k\ n})^T.$$

Заметим, что φ сюрьективна, $\varphi^{-1}(e) = U_n^{k+1}$.

$$a, b \in U_n^{(k)}, \qquad (a,b)_{i\ i+k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{i\ j+k} = b_{j\ i+k} + a_{i\ i+k}.$$

Тогда $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Следовательно, φ — гомоморфизм. □

Def 42. $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ — коммутатор.
$H, K \leqslant G, \quad [H, K] := \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$ — коммутант.

Statement. $[h, k]^g = [h^g, k^g] \Rightarrow [G, G] \trianglelefteq G$.

Statement. $\varphi : G \to A$ *— гомоморфизм.*
A *— абелева* $\Longrightarrow [G, G] \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$.

Доказательство.

$$\varphi([g, h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1.$$

Тогда

$$[g, h] \in \operatorname{Ker} \varphi, \quad \forall g, h \in G.$$

Из этого следует, что $[G, G] \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. □

Corollary. $[U_n^{(k)}, U_n^{(k}] \leqslant U_n^{(k+1)}$

Lemma. $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] = U_n^{(m+k)}$,*(если $l \geqslant n$, то $U_n^l := e$).*

Доказательство.

$$[t_{ij}(\alpha), t_{jh}(\beta)] = t_{ih}(\alpha\beta), \quad i, j, h \text{ различны.}$$

$\forall i, h : h - i \geqslant m$:

$$\exists j : j - i \geqslant k, h - j \geqslant m.$$

Следовательно, любая образующая (и сама группа) содержится: $U_n^{(m+k)} \subseteq [U_n^{(m)}, U_n^{(k)}]$. В обратную сторону:

$$[xy, z] = xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = x(yzy^{-1}z^{-1}zx^{-1}z^{-1} =$$
$$x[y, z]x^{-1}xzx^{-1}z{-}1 = [y, z]^{x^{-1}} \cdot [x, z]$$

Заметим, что

$$[t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] = e, \text{ если } j \neq l, h \neq i.$$

Тогда

$$t_{ij}(\alpha) \in U_n^{(k)},\ t_{hk}(\beta) \Longrightarrow [t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] \in U^{(m+k)_n}.$$

Посчитаем

$$\underbrace{[t_{ij}(\alpha), t_{li}(\beta)]}_{j \neq l} = [t_{li}(\beta), t_{ij}(\alpha)]^{-1} = t_{lj}(\beta\alpha)^{-1} = t_l j(-\beta\alpha).$$

Так как $U_n^{(k+m)}$ — нормальная подгруппа, то есть трансвекцию во включении 2.4 можно заменить на произведение трансвекций, то есть на любые элементы $U_n^{(k)}, U_n^{(m)}$. Доказали обратное утверждение. □

2.5 Лекция 19

2.5.1 Поговорим о коммутаторах

Lemma.

$$H = \langle X \rangle \leqslant G = \langle y \rangle.$$

Тогда

$$H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow x^y \in H \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Доказательство. В правую сторону очевидно (по определению), обратно: нужно доказать, что $h^g \in H \quad \forall h \in H, g \in G$. Разложим $g = y_1 \cdot \ldots y_m, \quad y_i = U \cup Y^{-1}$.

Индукция по m. При $m = 0 : g = 1 \wedge h^1 = h \in H$.

Переход: $m \geqslant 1$. По ИП $h^{y_1 \cdots y_{m-1}} \in H,\ h = x_1 \ldots x_n, \quad x_i \in X \cup X^{-1}$.

$$h^y = (h^{y_1 \ldots y^{m-1}})^y_m = x_1^{y_m} \ldots x_n^{y_m}.$$

$x_i \in X \Rightarrow x_i \in H$ по условию.

$$x_i \in X^{-1} \Rightarrow \big((x_i)^{-1})^{y_m}\big) = \big((x^{-1})^{y_m}\big)^{-1} \in H.$$

□

Note. В определении нормальной подгруппы вместо h^g такде можно написать $[g, h]$, так так для $h \in H, g \in G$

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = h^{g^{-1}}h \in H \Longleftrightarrow h^{g^{-1}} \in H.$$

g^{-1} можно заменить на g.
Аналогично в лемме можно заменить x^y на $[x, y]$.

Property (Формулы для коммутаторов). *1.* $[x,y]=[y,x]^{-1}$

2. $[xy,z]={}^x[y,z]\cdot[x,z]$

3. $[x,y]^z=[x^z,y^z]$

Lemma. $H,K\leqslant G,\quad [H,K]\trianglelefteq\langle H\cup K\rangle$

$$h\in H,k\in K,x\in H \text{ (для } x\in K \text{ аналогично).}$$
$$[h,k]^x={}^{x^{-1}}[h,k]=[h^{-1}h,k]^{-1}\cdot[x^{-1},k]^{-1}\in[H,K].$$

2.5.2 Возвращаемся к матрицам

$$U_n^{(k)}(F)=U_n^{(k)}=\{a\in M_n(F)\mid a_{i\ i}=1,a_{i\ j}\forall i\neq j,j-i<k\}=\langle t_{i\ j}(\alpha)\mid\alpha\in F,j-i\geqslant k\rangle.$$

Lemma. $U_n^{(k)}\trianglelefteq U_n=U_n^{(1)}$

Доказательство. Докажем, что $a=[t_{i\ j}(\alpha),t_{h\ l}(\beta)]\in U_n^{(k)}\quad\forall j-i\geqslant k.\ l>h$
Первый случай $i\neq h,i\neq l\Rightarrow a=e\in U_n^{(k)}$.
Второй случай $j=h\Rightarrow i\neq j:\quad a=t_{i\ l}(\alpha\beta),l-i\geqslant k+1$. Тогда $a\in U_n^{(k+1)}\leqslant U_n^{(k)}$.
Третий случай $j\neq h,i=l:\quad a=[t_{h\ j}(\beta),t_{i\ j}(\alpha)]^{-1}=t_{h\ j}(\beta\alpha)^{-1}=t_{h\ j}(-\beta\alpha)$. $j-h\geqslant k+1\Rightarrow t_{h\ j}(-\beta\alpha)\in U_n^{(k+1)}$. □

Lemma. *Пусть* $\preccurlyeq$ *— отношение линейного порядка на* $P=\{(i,j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$.

$$U_n(F)=\left\{\prod_{(i,j))\in P}t_{ij}(\alpha_{ij})\ \middle|\ \alpha_{ij}\in F\right\}.$$

Note. $H\trianglelefteq G,\ x,y\in G:\quad xH=yH\Leftrightarrow y^{-1}x\in H\Leftrightarrow x\equiv y \mod H$

Доказательство. Рассмотрим элемент $h\in U_n(F)$. Докажем по индукции (по k), что

$$h\equiv\prod_{\substack{(i,j)\in P\\ 0\leqslant j-i<k}}t_{ij}(\alpha_{ij})\mod U_n^{(k)}.$$

При $k=1$ утверждение очевидно, доказыать нечего.
Переход: $k-1\to k$
По предположению индукции

$$h\equiv\prod_{0<j-i<k-1}t_{ij}(\alpha_{ij})\mod U_n^{(k-1)}=\prod_{0<j-i<k-1}t_{ij}(\alpha_{ij})\cdot\prod_{j-i=k-1}t_{ij}(\alpha_{ij})U_n^{(k)}$$

Так как коммутатор $[u,t_{i\ i+k-1}(\alpha)]\in U_n^{(k)}\quad\forall u\in U_n$. То есть $[u,t_{i\ i+k-1}(\alpha)]\equiv 1\mod U_n^{(k)}$. Это равосильно

$$ut_{i\ i+k-1}(\alpha)\equiv t_{i\ i+k-1}\cdot u\mod U_n^{(k)}.$$

Получаем

$$h\equiv\prod_{0<j-i<k}t_{ij}(\alpha_{ij}\mod U_n^{(k)}.$$

□

Введем обозначения: w — матрица перестановки.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bullet \end{pmatrix} \in D.$$

$$B_n = D_n U_n = U_n D_n \quad (\forall d \in D_n : U_n^d = U_n).$$

$$B_n w B_n = U_n D_n w B_n, \text{ где } U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in F, j > i,\ t_{ij}(\alpha)^w \rangle \in U_n^- \text{- нижне треугольные.}$$

$$U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j > 1, \alpha \in F, t_{ij}(\alpha)^w \in U_n \rangle.$$

Corollary. Матрица и U_n представляется в виде произведения трансвекций в любом порядке. $U_n = U_w \cdot \overline{U}_w$

Доказательство. □

Corollary (приведенное разложение Брюа)**.** $B_n w B_\subseteq w B_n^- B_n$

Доказательство. $B_n w B_n = U_n w B_n = w U_w w^{-1} \overline{U}_w w B_n = w \underbrace{U_w^w}_{\subseteq U_n^-} \underbrace{\overline{U}_w^w B_n}_{\subseteq U_n} \subseteq w U_n^- B_n = w B_n^- B_n$ □

2.6 Лекция 20

2.6.1 Симметрическая группа

Def 43 (Перестановка)**.** $\sigma \in S_n \iff \sigma : \{1, \dots n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots n\}$ Табличная запись перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1, & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j \neq i_k (j \neq k).$$

Циклическая запись перестановки:

$$\tau = (j_1, \dots j_n) \iff \tau(j_1) = j_2,\ \tau(j_2) = j_3,\ \dots, \tau(j_{n-1}) = j_n,\ \tau(j_n) = j_1, \quad \tau(i) = i, \forall i \neq j_k.$$

Def 44. $(j_1 \dots j_n)$ и $(k_1 \dots k_m)$ независимы, если $j_h \neq j_l \quad \forall h, l$.

Lemma. *Любая перестановка равна произведению независимых (композиции) циклов.*

Def 45. Циклический (цикленный) тип перестановки — набор из длин независимых циклов,в произведение которых раскладывается перестановка.

Note. В определении слово "набор"подразумевает мультимножество, то есть порядок не важен, но элементы повторятся.

Ex. $(12)(345) \in S_6$ записывают $2 + 3$.

Lemma.
$$\sigma(i_1, i_2, \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k)).$$

Следовательно, сопряжение не меняет циклический тип.

Доказательство. $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1}(\sigma(t_j)) = \sigma \circ (i_1 \dots i_k)\sigma(i_{l+1 \mod 'm})$, где $\mod 'm$ — почти модуль (вместо 0 будет m). □

Def 46. Отношение на группе G :
$$x \sim_c y \Leftrightarrow \exists z : x = y^z.$$
$x = y^z \wedge y = ab \Rightarrow x = (a^b)^z - a^{bz}$.
Класс эквивалентности „$\sim_c$" — класс сопряженных элементов.

Theorem 17. *Класс сопряженных элементов в S_n состоит из всех перестановок фиксированного циклического типа.*

Доказательство. Следует из леммы 2.6.1 □

Ex. Рассмотрим группу S_4 и перестановки циклического типа $2 + 2$:
$$\begin{gathered}(12)(34)\\(13)(24)\\(14)(32)\end{gathered}$$

$\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$
Еще есть нейтральный класс e и $2, 3, 4$. Двумерная группа Клейна
$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$
— единственная нормальная подгруппа в S_n для любого n, индекс которой более 2.

Practice. Найти S_4 / K_4. Там 6 элементов.

Statement. $\operatorname{ord}(ab) \mid HOK(\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(b))$.
Порядок перестановки равен НОКу порядков независимых циклов.

2.7 Лекция 21

2.7.1 Продолжаем возиться с перестановками. Четность.

Def 47 (Инверсия)**.** $\sigma \in S_n$.
Инверсия в σ — пара $(i, j) : i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$.

Ex. Четыре инверсии:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Def 48 (Четность перестановки).

$$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\sigma \mapsto \text{ количество инверсий по модулю 2.}$$

Def 49. Транспозиция — цикл длины 2.

$$\tau(i) = \tau(j),\ \tau(j) = \tau(i),\ \tau(k) = k.$$

Lemma. *Любая перестановка σ раскладывается в произведении транспозиций соседних индексов.*

$$S_n = \langle (12), (23) \dots (n-1\ n) \rangle .$$

Доказательство. Индукция по количеству инверсий I в $\sigma \in S_n$.

База: $I = 0$ Это $\sigma = id$.

Переход: $I > 0$. Заметим, что

$$\exists i : \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

Тогда рассмотрим $\tau = \sigma \circ (i, i-1)$.

$$\tau(i) = \sigma(i+1) < \tau(i+1) = \sigma(i).$$

Так как $\tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k \notin \{i, i+1\}$, количество инверсий стало на одну меньше, чем количество инверсий в σ. Теперь по предположению индукции полученная перестановка раскладывается, а тогда и σ раскладывается. □

Lemma. $\tau = \sigma(i\ i+1) \Rightarrow |I(\tau) - I(\sigma)| = 1$

Lemma. *Если $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \dots \cdot \tau_k, \quad \forall i : \tau_i$ — транспозиция соседних индексов, то*

$$\varepsilon(\sigma) \equiv k \mod 2.$$

Theorem 18. *$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — гомоморфизм группы.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\sigma = \tau_1 \cdot \dots \tau_k \\ &\rho = \tau_{k+1} \cdot \dots \tau_n \qquad \forall i : \tau_i = (j\ j+1). \\ &\sigma \cdot \rho = \tau_1 \cdot \dots \tau_n \end{aligned}$$

Проверим требуемые свойства:

$\varepsilon \equiv k \mod 2, \quad \varepsilon(\rho) \equiv n - k \mod 2$

$\varepsilon(\sigma\rho) \equiv m \mod 2 \equiv \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho) \mod 2$

$\varepsilon(\rho^{-1}\sigma\rho) \equiv -\varepsilon(\rho) + \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho)$

$\varepsilon((i_1, \dots i_k)) = \varepsilon((1, \dots k)) \equiv k - 1 \mod 2$ □

Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. $\mathbb{Z}_n^*$ — множество обратимых элементов.

$x \in \mathbb{Z}_n$ обратимо тогда и только тогда, когда $\gcd(x, n) = 1$.

$\varphi|\mathbb{Z}_n^*|$ — количество чисел от 1 до $n-1$ взаимно простых с n. Из теоремы Лагранжа очевидно следует, что:

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Statement. A — *абелева группа.*

$$a, b \in A, \quad \text{ord } (a) = m, \ \text{ord } (b) = n, \ h = \text{lcm } (m, n)$$
$$(ab)^k = a^k b^k = (a^m)^x (b^n)^y = 1.$$

Тогда ord $(ab) \mid k$.

Lemma. $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\} \Rightarrow \text{ord } (ab) = \text{lcm } (\text{ord } (a), \text{ord } (b))$

Доказательство.

$$(ab)^l = 1 \Rightarrow \underbrace{a^l}_{\in \langle b \rangle} = \underbrace{b^{-l}}_{\in \langle b \rangle} = 1.$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \text{ord } (a) \mid l \\ \text{ord } (b) \mid l \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lcm } (\text{ord } (s), \text{ord } (b)) \mid l.$$

□

Corollary.

$$a \in A, b \in B, \quad A, B \leqslant A \times B.$$

Тогда ord $(ab) = \text{lcm } (\text{ord } (a), \text{ord } (b))$

Corollary.

$$\text{lcm } (\text{ord } (a), \text{ord } (b)) = 1.$$

Тогда ord $(ab) = \text{lcm } (\text{ord } (a), \text{ord } (b))$

Доказательство. $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = h$

$$h \mid |\langle a \rangle| \wedge h \mid |\langle b \rangle| \Rightarrow h \mid \gcd(\text{ord } (a), \text{ord } (b)) = 1 \Rightarrow h = 1.$$

Следовательно, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$. □

Corollary. Порядок перестановки равен наибольшему общему делителю полядков независимых циклв, в произведение которых она раскладывается.

> **Def 50** (Экспонента (показатель))**.** $\exp(A)$ — наименьшее натуральное число, такое что $a^n = 1 \quad \forall a \in A$.

Lemma. $\exp(A) = \text{lcm }_{a \in A}(\text{ord } (a))$

> **Theorem 19.** A — *абелева группа.* $\exp(A) < \infty$.
> *Тогда* $\exists a \in A : \text{ord } (a) = \exp(A)$

Доказательство. Разложим экспоненту на простые множители:

$$\exp A = p_1^{k_1} \cdot \ldots p_m^{k_m}, \quad \forall i \in [1, m] : p_i \in \mathbb{P}, k_i \in \mathbb{NN}.$$

Так как $\exp(A) = \text{lcm }_{x \in A}(\text{ord } x)$, существует $\forall i \in [1, m] x_i : p_i^{k_i} \mid \text{ord } (x_i)$.

$$\text{ord } x_i - p_i^{k_i} \cdot n_i = \text{ord } (x_i^{n_i}) = p_i k_i.$$

Так как порядки всех $x_i^{n_i}$ взаимно просты, то

$$\text{ord } \left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{n_i} \right) = \prod_{i=1}^{m} = \prod p_i^{k_i} = \exp(A).$$

□

2.8 Лекция 22

Statement. *$\varphi : G \to h$- гомоморфизм. $g \in G$. Тогда* $\operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid \operatorname{ord} g$.

Доказательство. Рассмотрим сужение $\tilde{\varphi} : \langle g \rangle \to \varphi(\langle g \rangle) = \langle \varphi(g) \rangle$.

$$\langle \varphi(g) \rangle \cong \langle g \rangle / \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}.$$

$$\operatorname{ord} \varphi(g) = |\langle \varphi(g) \rangle| = \frac{|\langle g \rangle|}{|\operatorname{Ker} \tilde{\varphi}|}.$$

Note. Можно использовать одну из доказанных лемм, тогда решение будет проще.

□

Theorem 20. *$p \in \mathbb{P}$*
$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ — циклическая, если $p \neq 2$ или $k \leqslant 2$. Иначе $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^* \cong C_2 \times C_{2^{k-2}}$

Доказательство. Обозначим $G = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$

$$|(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1).$$

Рассмотрим множество чисел вида $1 + px$. Они не делятся на p. Чтобы эти числа были меньше $|G^*|$, ограничим x.

$$H = \{1 + px \mid x \in \{0, \dots p^{k-1} - 1\}\}.$$

Statement. *H — подгруппа.*

$$(1 + px)(1 + py) = 1 + pz \in H.$$

Если

$$(1 + px)(1 + py) \equiv 1 \mod p^k.$$

$$a + apx + py + p^2xy \equiv 1 \mod p^k.$$

Следовательно , $a = 1 + pz$. Обратный элемент:

$$(1 + px)^{-1} = (1 + pz + py) \in H.$$

$$|H| = p^{k-1}, |G/H| = p - 1\text{- циклическая (докажем позже).}$$

$$\exists b \in G : \operatorname{ord}(bH) = p - 1, \quad \pi(b) = bH, \pi : G \to G/H.$$

То есть $p - 1 \mid \operatorname{ord} b$. Получаем $\exists l \in \mathbb{N} : \operatorname{ord} b^l = p - 1$. (или можно сказать, $p - 1 \mid \exp(G)$).

По следствию из теоремы Лагранжа $|H| \cdot p \cdot p^{k-1} \wedge 1 + p \in H \Rightarrow (1 + p)^{p^{k-1}} \equiv 1 \mod p^k$. Тогда $\operatorname{ord}(1 + p) \mid p^{k-1}$.

Осталось доказать, что

$$(1 + p)^{p^{k-2}} \not\equiv 1 \mod p^k.$$

Будем доказывать по индукции. Для $k = 2$ — очевидно. При $k > 2$:

$$(1 + p)^{p^{k-3}} = 1 + p^n x, \quad p \nmid p.$$

По предположению индукции $1 \leqslant n < k - 1$.

$$(1 + p)^{p^{k-2}} = \left((1 + p)^{p^{k-3}}\right)^p = (1 + p^n x)^p = 1 + p \cdot p^n + \sum_{i=2}^{p} C_p^i p^{ni} x^i \equiv 1 + p^{n+1}x + p^{n+2}y \mod p^{n+2},$$

так как

$$(1+p)^{p^{k-2}} = 1 + p^{n+1} \underbrace{(x+py)}_{\text{не делится на } p}.$$

$n+1 < k \Rightarrow p^k \nmid (1+p)^{p^{k-2}} - 1$

Remark.

$$C_p^i = \frac{p(p-1)!}{(p-1)!\ i!} \vdots\, p.$$

Remark. Если $p=2$, то при $i=2, n=1$

$$C_p^i = 1 \Rightarrow C_p^i p^2 \not\vdots\, p^3.$$

Поэтому для $p=2$ эти рассуждения не работыют.

Теперь разберем случай $p=2$.

$$|G| = 2^{k-1}, k \geqslant 3.$$

1. Любой элемент имеет порядок не более 2^{k-1}, то есть $(1+2x)^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$.

   Индукция по k. База $k=3$.

$$(1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 1 + 4x(x+1) \equiv 1 \mod 2^3,$$

так как либо x, либо $x+1$ четное.

Переход. По индукционному преднодожению

$$(1+2x)^{2^{k-3}} = 1 + 2^{k-1}y.$$

Дальше

$$(1+2x)^{2^{k-2}} = (1+2^{k-1}y)^2 = 1 + 2^k y + 2^{2k-2}y^2 \equiv 1 \mod 2^k.$$

Доказано.

$\operatorname{ord}_G 5 = 2^{k-2}$, то есть

$$5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \mod 2^k.$$

Индукция по k. База $k=3$.

$$5 \not\equiv 1 \mod 8.$$

Переход: по индукционному предположению

$$5^{2^{k-4}} \not\equiv 1 \mod 2^{k-1}.$$

$5^{2^{k-1}} = 1 + 2^n z, \quad 1 < n < k-1,\ 2 \nmid z.$

Remark. $n > 1$, так как $5 \equiv 1 \mod 2^2$

Тогда

$$\begin{aligned} 5^{2^{k-3}} &= (1+2^n \cdot z)^2 = 1 + 2 \cdot 2^n \cdot z + 2^{2n} \cdot z^2 = \\ &= 1 + 2^{n+1}(z + z^2 \cdot 2^{n-1}) \not\equiv 1 \mod 2^{n+2} \end{aligned}.$$

□

Глава 3

Коммутативные кольца

3.1 Лекция 23

3.1.1 Теорема о гомоморфизме для колец

Note. Воспоминания R, R' — кольца с 1 (не обязательно коммутативные).
$\varphi : R \to R'$ — гомоморфизм, если

$$\begin{array}{l} \varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s) \\ \varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s) \\ \varphi(1) = 1 \end{array} .$$

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(r) \mid r \in R\} \text{ — подкольцо в } R'.$$

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{r \mid \varphi(r) = 0\} \text{ — аддитивная подгруппа в } R.$$

Def 51. I — аддитивная подгруппа в R. I называется двусторонним (правым, левым) идеалом в R тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in R, t \in I : ar, ra \in I \quad \text{(соответственно для правого и левого } ra \in I, ar \in I).$$

Lemma. $\mathrm{Ker}\ \varphi$ *— двусторонний идеал.*

Def 52. I — двусторонний идеал, R — кольцо. Аддитивная факторгруппа R/I является кольцом относительно операции $(r+I)(s+I) = rs + I$

Доказательство. Если $x, y \in I : (r+x)(s+y) = rs + \underbrace{xs + sy + xy}_{\in I} \in rs + I$ □

Ex. $2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$$4\mathbb{Z} \overset{\text{как множества}}{=} (0 + 2\mathbb{Z}) \cdot (0 + 2\mathbb{Z}) \overset{def}{=} 0 + 2\mathbb{Z}.$$

Designation. $\pi : R \to R/I \quad \pi(r) = r + I$

Theorem 21. *Универсальное свойство I — идеал в R. $\varphi R \to R'$, $\quad I \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$ $\exists! \psi : R/I \to R'$:*

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{\varphi}{\to} & R' \\ \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\ R/I & & \end{array}$$

— коммутативна. $\operatorname{Ker} \varphi = I \Rightarrow \psi$ *— инъективна.* φ *— сюрьективна* $\Rightarrow \phi$ *— сюрьективна.*

Note. Далее считаем кольца коммутативными.

Def 53. $X \subseteq R$ — кольцо. Идеал, порожденный X — наименьший идеал, содержащих X. Он равен

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Обозначается: $\sum\limits_{x \in X} xR = \langle X \rangle_R$

$xR = (x)$ — главный идеал, порожденный x.

Ex. В $\mathbb{Z}$ любой идеал главный.

$I \trianglelefteq \mathbb{Z}$,

$$0 < r < I, \quad r \leqslant |s| \forall s \in I.$$

Рассмотрим $x \in I$.

$$x = rs + y, \quad 0 \leqslant y < r.$$

$$y = x - rs \in I.$$

Так как r — наименьший, то $y = 0$.

Ex.

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3} = 2 \cdot 2.$$

Идел, порожденный $1 + \sqrt{-3}$ и 2 ($(1 + \sqrt{-3})R + 2R$), не является главным идеалом.

3.1.2 Комплексные числа

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$

$$i := x + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x].$$

$$i^2 + 1 = x^2 + 1 + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x] = 0_{\mathbb{C}} \Longrightarrow i^2 = -1.$$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ — инъективное отображение. Отождествляем $r \in R \longleftrightarrow r + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x]$ и считаем, что $\mathbb{R} = \mathbb{C}$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

$$p = (x^2 + 1) \cdot f + (a + bx) \in a + bx + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x].$$

$$p + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x] = a + bi.$$

Таким образом

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc).$$

$\overline{a+bi} = a - bi$

$\forall w, z \in \mathbb{C}:$

$$\begin{gathered}\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{\overline{z}} = z\end{gathered}.$$

$\overline{\circ} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм.

$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z$

$\mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, i\}$

3.2 Лекция 24

3.2.1 Окончание комплексных чисел

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x] \diagup (x^2 + 1).$$

$$i := x + x(^2 + 1)\mathbb{R}[x]$$

Любое комплексное число представляется в виде $a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$, сопряжение: $\overline{a+bi} = a - bi$. Умножение на сопряженное: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Сложение с сопряженным: $(a + bi) + (a - bi) = 2a$. Получили, что $z \cdot \overline{z}, z + \overline{z} \in \mathbb{R}$.

Statement. *Существует ровно два автоморфизма на комплексных числах, оставляющие вещественные на месте.*

Доказательство. $f \in \mathbb{R}[x]$.

$$f(\varphi(i)) = \varphi(f(i)), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

так как $\varphi(\alpha^2) = \varphi(\alpha)^n$

$\varphi(a\alpha^n) = a\varphi(\alpha)^n, a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = x^2 + 1,\ f(i) = 0.\ f(\varphi(i)) = \varphi(f(i))$, то есть корень переходит в корень. Значит, нетривиальный только один. А второй — тривиальный. □

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

$$Argz := \alpha \in \mathbb{R} \diagup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Можно выразить через аргумент:

$$\begin{array}{l} a = |z| \cdot \cos\alpha \\ b = |z| \cdot \sin\alpha \\ z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ — тригонометрическая формула} \end{array} \quad Argz = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z}, & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arcctg}\frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z}, & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(b), & a = 0 \end{cases}.$$

Statement.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta).$$

Statement. $\varepsilon : \mathbb{R} \diagup 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \quad \varepsilon(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha)$ *— это гомоморфизм.*

$$\operatorname{Im} \varepsilon = S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Так же:

$$\begin{array}{l} \varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \\ \varepsilon(-\alpha) = \varepsilon(\alpha)^{-1} \\ \varepsilon(\beta - \alpha) = \frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(\beta)} \\ \varepsilon(n\alpha) = \varepsilon(\alpha)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \text{ — \textit{формула Муавра}} \end{array}.$$

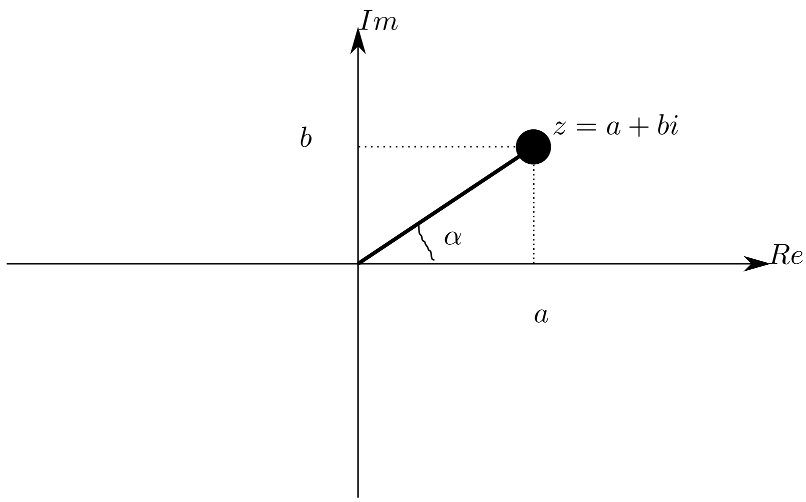


Рис. 3.1: Комплексное число на плоскости

Несколько слов о комплекснопеременных функциях

Def 54. Дифференциал:

$$f(x+\delta x) = f(x) + df(\delta x) + \overline{o(\delta x)}.$$

В случае дифференцирования функции от двух переменных, x — столбец, а df — матрица 2×2.

Note. Для комплексных коэффициентов: умножение на $\lambda + \mu i \to \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

Statement. *Напишем степенные ряды для тригонометрических функций:*

$$\begin{array}{l} e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ \sin t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = i \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}.$$

$$e^{i\alpha} = \sum_{n=2k} \frac{(i\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=2k+1} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

$$\varepsilon(\alpha) = e^{i\alpha}$$

Note (Показательная форма комплексного числа).

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot Arg z}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

2π — период для экспоненты.

$$e^{\alpha + 2\pi i} = e^{\alpha}.$$

$$a, b \in \mathbb{R}: \ e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^{a(\cos b + i \sin a)}.$$

На языке теории групп:

$$r \in \mathbb{R}^*_{>0}, \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : (r, \alpha) \mapsto r \cdot e^{i\alpha}.$$

То есть $\mathbb{R}^*_{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ — изоморфизм.

$$\mathbb{C}^* \cong \underbrace{\mathbb{R}^*_{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}_{\ln} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}.$$

$$Ln : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/3\pi\mathbb{Z}.$$

$Ln : (r, e^{i\alpha + 2\pi\mathbb{Z}}) = \ln r + i(\alpha + 2\pi\mathbb{Z}) = \ln r + i\alpha + 2\pi\mathbb{Z}.$

Statement (вычисление корня n-й степени)**.** *Вычисление корня в аддитивной группе $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ — решение уравнения:*

$$\begin{array}{l} xn \equiv 0 \mod 2\pi i\mathbb{Z} \\ xn = 2\pi i n, k \in \mathbb{Z} \\ x \equiv \frac{2\pi i k}{n} \mod 2\pi i\mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}.$$

$z^n = 1, \quad z = Lnz$, *далее*

$$nx = 0 \mid 2\pi i\mathbb{Z}.$$

$$z = e^x = e^{\frac{2\pi i k}{n}}.$$

3.3 Лекция 25

$$z^n \iff z = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$\Theta_n(Z) = z^k \text{ — гомоморфизм } \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*.$$

$$\mu_n = \text{Ker } \Theta_n = \{e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}.$$

Эти числа делят окружность на n равных частей.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n$
$k + n\mathbb{Z} \mapsto e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ — изоморфизм.

Def 55. Образующие элементы μ_n называются превообразными корнями из 1.

Corollary. $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ — превообразный корень тогда и только тогда, когда $\gcd(k, n) = 1$.

Statement. $z^n = w = re^{i\varphi}$. *Одно из решений этого уравнения:* $\left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}\right)^n$.

А все решения можно записать:

$$\sqrt[n]{w} = \{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{phi + 2\pi k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}, \quad z^n = w.$$

Theorem 22 (Основная теорема алгебры)**.** $p \in \mathbb{C}[x], \ \deg p \geqslant 1$
Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$.

Theorem 23 (Лиувилль)**.** *Любая ограниченная дифференцируемая функция $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — константа.*

3.3.1 Кольца главных идеалов

Евклидовы кольца

Def 56. Область целостности — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Designation. R — коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля.

Def 57. $f : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ Обладает свойствами:

1. $f(0) < f(r), \quad \forall r \in R$
2. $\forall a, b \in R, b \neq 0 \ \exists c, r \in R : a = bc + r \wedge f(r) < f(b)$

Тогда R — евклидова кольцо с евклидовой нормой f.

Theorem 24. *Любой идеал евклидова кольца главный.*

Доказательство. Пусть $I \triangleleft R$.

$$a \in I \setminus \{0\} : f(a) \leqslant f(b) \quad \forall b \in I \setminus \{0\}.$$

$$b = ac + r, \quad f(r) < f(a).$$

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{ac}_{\in I} \in I.$$

Если $r \neq 0$, то $f(a) \leqslant f(r) < f(a)$. Противоречие. □

Note. На практике ищется с помощью алгоритма Евклида.

Statement. $b = ac + r_1$
$a = r_1c_1 + r_2$
$r_1 = r_2c_2 + r_3$
$\vdots$
$f(r_{i+1}) < f(r_i)$
$\vdots$
$f(r_n) \leqslant f(d) \quad \forall d \in I \ aR + bR = r_nR$

Statement. *R — область главных идеалов. $a_i \in R$*

$$\sum_{i=1}^{m} a_iR = dR.$$

Тогда $d := \gcd(a_i)$.

Exs.

Кольцо	Норма
$\mathbb{Z}$	$\lvert \cdot \rvert$
$F[x]$, F — поле	deg
Гауссовы целые числа: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$\lvert \cdot \rvert$

Ex (не евклидово число)**.** $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$ — не евклидово кольцо главных идеалов.

3.3.2 Китайская теорема об остатках

Theorem 25. *КТО для целых чисел* $x \equiv x_1 \mod n_1$
$x \equiv x \mod n_2$
$\vdots$
$x \equiv x_m \mod n_m$
Существует единственное x *по модулю произведения* $n_1 \dots n_m$*, удовлетворяющее данным сравнениям.*

Theorem 26. *КТО* R *— коммутативное кольцо с 1.* $I_1, \dots I_m$ *— идеалы в* R*.*
$I_i + I_k = R \; \forall j \neq k$*. Тогда*

$$R/_{I_1} \oplus \dots \oplus R/_{I_m} \cong R/_{I_1 \dots I_M}.$$

Remark. A, B — кольца. Декартово произведение

$$A \oplus B = A \times B.$$

с покомпонентными операциями.

$$(a_1, b_1) + \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + \cdot a_2, b_1 + \cdot b_2).$$

Statement. *Идеалы* I, J *взаимно простые, если* $I + J = R$*.*

Доказательство. $I \cap J$ — идеал. $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ — идеал. $I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}$ □

Lemma. $I \cdot J \subseteq I \cap J$ *верно всегда.*

Lemma. $I + J = R \Longrightarrow I \cdot J = I \cap J$

Доказательство. $I \cap J = (I \cap J) \cdot R = (I \cap J)(I + J) = \underbrace{(I \cap J) \cdot I}_{\in I \cdot J} + \underbrace{(I \cap J) \cdot J}_{\in I \cdot J} \subseteq I \cdot J$ □

3.4 Лекция 26

I, J — идеалы в R

$$I + J = R \Leftrightarrow I, J \text{ взаимно простые.}$$

Lemma. $I + J = R$*. Тогда*

$$R/_{IJ} \cong R/_I \oplus R/_J.$$

Доказательство.

$$\varphi : R \to R/_I \oplus R/_J.$$

$$r \mapsto (r + I, r + J).$$

$$\operatorname{Ker} \varphi \ni r \Leftrightarrow \begin{cases} r + I = I \\ r + J \end{cases} \Leftrightarrow r \in I \cap J$$

$$\operatorname{Ker} \varphi = I \cdot J.$$

$$\exists a \in I, b \in J : a + b = 1.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_1 \mod I.$$
$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_2 \mod J.$$

То есть $\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J)$, следовательно, φ — сюрьективно.

По теореме о гомоморфизме колец

$$R\diagup_{IJ} \cong R\diagup_I \oplus R\diagup_J.$$

□

Lemma. *$J, I_1, \ldots I_n$ — идеалы в R.*

$$J + I_n = R \forall k \Longrightarrow J + I_1 \cdot \ldots I_n = R.$$

Доказательство. Индукция. База для $k = 1$. Очевидно. Переход:

По предположению индукции $J + \underbrace{I_1 + \ldots I_{n-1}}_{I} = R$. Нужно доказать , что $J + I \cdot I_n = R$.

$$\begin{aligned} R &= J + I \cdot R = J + I(J + I_n) = \\ &= J + IJ + II_n = J + II_n \end{aligned}.$$

□

Theorem 27 (Китайская теорема об остатках)**.** *$I_1, \ldots I_n$ — попарно взаимно простые идеалы, то есть $\forall j \neq k: \ I_j + I_k = R$. Тогда*

$$\frac{R}{I_1 \cdot \ldots I_n} \cong \frac{R}{I} \oplus \ldots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Note. Здесь дробью обозначается фактор кольцо.

Доказательство. Индукция по n. Так как I_k взаимно просто с $I_1 \cdot \ldots I_{n-1}$

$$\frac{R}{I_1 \ldots I_n} \cong \frac{R}{I_1 \cdot \ldots I_{n-1}} \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Дальше по предположению индукции получаем то, что хотим. □

Statement. $x \equiv x_k \mod I_k, \quad k = 1, \ldots n$ *равносильно тому, что*

$$x \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k c_k \mod I_1 \ldots I_n, \quad c_k \in \prod_{j \neq k} I_j \cap (1 + I_k).$$

Note. В целых числах:

$$x \equiv x_k \mod m_k, \quad k = 1, \ldots n.$$

Чтобы найти c_k, нужно решить диофантово уравнение:

$$y \cdot m_k + \underbrace{z \cdot \prod_{j \neq k} m_j}_{=c_k} = 1.$$

Statement (применение КТО)**.** *В $F[t]$:*

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, \ldots n, x_i \neq x_k \ \forall i \neq k$$

равносильно

$$p \equiv y_k \mod (t - x_k).$$

$$p(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k \prod \frac{t - x_i}{x_k - x_i} \mod (t - x_i) \ldots (t - x_n).$$

3.4.1 Простые и максимальные идеалы

Все кольца будут коммутативные с единицей.

Def 58. Простой идеал $P \neq R$ кольца R называется простым, если $ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

Note. Другими словами $R \setminus P$ замкнуто относительно умножения

Ex. В $\mathbb{Z}$ идеал $n\mathbb{Z}$ — простой тогда и только тогда, когда n — простое.

Ex. В $F[t]$ идеал $f \cdot F[t]$ простой тогда и только тогда, когда f — неприводимый многочлен.

Ex. Однако в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = R$ идеал $2R$ — не простой, хотя 2 не приводимо.

$$(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}) = 4 \in 2R.$$

Докажем, что элементы $2, 1 \pm \sqrt{-3}$ неприводимы. Обозначим их за $\alpha = \beta\gamma$. Квадраты равны 4.

$$|\alpha|^2 = 4 = |\beta|^2 \cdot |\gamma|^2.$$

$$|a + b\sqrt{-3}|^2 = a^2 + 3b^2,\ a, b \in \mathbb{Z}.$$

Либо $|\beta|^2 = 1$, либо $|\gamma|^2 = 1$, то есть β или γ обратимы.

Ex. $F[x, y] = R$

$$I = xR + yR.$$

— простой.

Def 59. Максимальны идеал — максимальный собственный идеал. Что равносильно тому, что это максимальный из идеалов, не содержащих единицу.

Note. Другими словами, M — максимальный идеал, если $M \neq R$ и $M \subseteq I \subset R \Rightarrow I = M$

Theorem 28. *Любой собственный идеал содержится в каком-то максимальном.*

Доказательство. $J \trianglelefteq R$.

$\mathcal{X}$ — множество всех идеалов, содержащих J и не содержащих единицу.

$\mathcal{Y}$ — линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{X}$, то $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \in \mathcal{X}$

$$a, b \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \Longrightarrow \exists I_1, I2 \in \mathcal{Y} : a \in I_1, b \in I_2 \wedge (I_1 \subseteq I_2 \vee I_2 \subseteq I_1),$$

так как $\mathcal{Y}$ — линейно упорядочено.

$$a, b \in I_k\ (k = 1, 2) : a + b \in I_k \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I.$$

$$a \in \bigcup I \Longrightarrow ra \in \bigcup I, r \in R.$$

Следовательно, $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}}$ — идеал.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \subseteq J \wedge \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \not\ni 1.$$

По лемме Цорна $\mathcal{X}$ содержит максимальный элемент. Пусть это M. Если $M \subset N \subset R$, $N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = M$ □

3.5 Лекция 27

3.5.1 Фактор кольцо по максимальному идеалу

Statement. *P — простой идеал в R тогда и только тогда, когда R/P — область целостности.*
$\mathfrak{M}$ — максимальный тогда и только тогда, когда R/M — поле.

Доказательство. $ab \in P \Leftrightarrow a \in P \vee b \in P$.
Пусть $\bar{\cdot} : R \to R/P$.
Тогда предыдущее утверждение равносильно

$$\overline{a}\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = 0 \vee \overline{b} = 0.$$

Обозначим $L(I, \mathfrak{R})$ — множество идеалов в R, содержащих I.

$$\bar{\cdot} : R \to R/P.$$

Докажем, что

$$\bar{\cdot} : L(R/\mathfrak{M}),\ I \mapsto \overline{I}.$$

— Образ этого идеала в $R/\mathfrak{M}$ При эпиморфизме идеал отображается в идеал. $\overline{a} \in \overline{I}$, где $a \in I$. $\overline{r} \in R/\mathfrak{M}$, $\overline{ra} \in \overline{I}$

Обратное: $L(0, R/\mathfrak{M}) \to L(\mathfrak{M}, R)$. Взятие полного прообраза $\overline{I} \mapsto I + \mathfrak{M} \triangleleft R$.
$L(M, R) = \{\mathfrak{M}, R\} \Leftrightarrow L(\{0\}, R/M) = \{\{0\}, R/M\} \Leftrightarrow R/M$ — поле.

$$\overline{\alpha} \in R/M \wedge \alpha \neq 0 \Leftarrow \overline{\alpha}R/M = R/M \Leftrightarrow \overline{\alpha} \text{ — обратим.}$$

□

Corollary. Любой максимальный идеал является простым.

Theorem 29. *В R любой ненулевой простой идеал является максимальным.*

Доказательство. Обозначим простой идеал pR и предположим, что он содержится в каком-то идеале $mR \neq R$. Тогда $p = mr \implies m \in pR \vee r \in pR$. В первом случае $mR = pR$, а втором $r = pa$, то есть $p = map \implies 1 = ma \implies mR = R$. Противоречие. □

3.5.2 Единственность разложения

R — кольцо с 1.

Def 60. $p \in R$ — простой, если pR — простой.

Def 61. $a, b \in R$ ассоциированные тогда и только тогда, когда $aR = bR$

Lemma. *R– область целостности. a, b — ассоциированные тогда и только тогда, когда $a = b\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$*

Доказательство. $aR = bR \Rightarrow a = b \cdot \varepsilon, b = a\delta \Rightarrow a = a\delta\varepsilon \Leftrightarrow a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \Rightarrow \varepsilon$ обратим □

Def 62. $a \in R$ приводим, если $a = bc \wedge aR \neq bR \wedge aR \neq cR$. Иначе a называется неприводимым.

Lemma. *Простой элемент неприводим. В ОГИ неприводимый является простым.*

Доказательство. pR — простой идеал, следовательно,

$$ab = p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in pR \\ b \in pR \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} aR \subset pR \\ bR \subset pR \end{array}\right. .$$

Но $pR \subset aR \cap bR$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} aR = pR \\ bR = pR \end{array}\right. .$$

Получаем, что p — неприводим.

Теперь в обратную сторону.

R — область главных идеалов, p — неприводим. $ab \in pR$.

$aR + bR = cR \Longrightarrow p = cd \Longrightarrow c, d \in R^*$

Если $d \in R^* \Longrightarrow cR = pR \Longrightarrow aR \subset pR$, если $c \in R^* \Longrightarrow aR + pR = R$, домножим на b : $\underbrace{abR + pbR}_{\subset pR} = bR \Longrightarrow bR \subset pR$ □

Def 63. Для колец $\dim R$ — размерность Крулля кольца или максимальная длина цепочки строго вложенных простых идеалов.

Ex. $\dim F[x_1, \ldots x_n] = n$

3.5.3 Нётеровы кольца

Def 64. R — нётерово тогда и только тогда, когда любое линейно упорядоченное множество идеалов содержит наибольший элемент.

ACC — ascending chain condition (условие обрыва возрастающих цепей)

Def 65. Артиново кольцо — аналогично, но заменить наибольший, на наименьший.

DCC — descending chain condition (условие обрыва убывающих цепей)

Lemma. *R — нётерово тогда и только тогда, когда любой идеал в R конечно порожден.*

Доказательство. Пусть R — нётерово, $I \triangleleft R$. Возьмем $a_1 \in I$.

$$a_1 R = I_1 \neq I \Longrightarrow \exists a_2 \in I \setminus R, I_2 := a_1 R + a_2 R \ldots.$$

Получаем цепочку, которая на может быть бесконечной, значит она где-то оборвется и мы получим, что любой идеал порожден этим набором.

В обратную сторону.

$\mathcal{A}$ — линейно упорядоченное множество идеалов.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I = a_1 R + \ldots + a_n R.$$

(так как оно конечно порожден) $\exists I_1, \dots I_n \in \mathcal{A}$, такие что $a_k \in I_k$. Так как $\mathcal{A}$ — линейно упорядочено, существует наибольший из I_k, пусть I_j.

$$a_1, \dots a_n \in I_j \Longrightarrow a_1R + \dots + a_nR = I_j.$$

I_j — наибольший из $\mathcal{A}$ □

Theorem 30. *R — нётерово. Тогда любой элемент раскладывается в произведение неприводимых.*

3.6 Лекция 28

Отступление

p — неприводим тогда и только тогда, когда pR — максимальный среди собственных главных идеалов.

R — область целостности.

$$pR \subsetneq aR \Longrightarrow p = ar \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in R^* \\ r \in R^* \end{array} \right.$$

Тогда либо $aR = R$ или $aR = pR$.

Если R не область целостности, из $p = ar$ следует, что

$$\left[\begin{array}{l} aR = pR \\ rR = pR \end{array} \right.$$

Тогда $r = px \wedge p = apx$, дальше $p(ax-1)$.

Теперь придумаем контрпример:

$$R = \mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p(ax-1))}.$$

Хотим доказать, что p неприводим и $\overline{p}R \subsetneq \overline{a}R \subsetneq R$. Профакторизуем: $\overline{p}$ — образ p в R,

$$R\big/_{(\overline{p}} \cong \mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p,p(ax-1))}.$$

Это изоморфно

$$\mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p)} \cong \mathbb{Z}[a,x].$$

Statement. *$I, J \triangleleft R$, $\pi_I : R \to R/I$*

$$R\big/(I+J) \cong (R/I)\big/_{\pi_I(J)} \cong (R/J)\big/_{\pi_J(I)}.$$

Тогда $\overline{p}R$ — простой идеал, следовательно, p — неприводим. В фактор кольце $R/(\overline{p}) : \overline{p}R \to 0$, $\overline{a}R \to$ не 0 и не все кольцо

Ex. $\mathbb{Z}[i]/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]/(x^2+1))/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]/(7))/(x^2+1) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]/(x^2+1)$.

x^2+1 неприводим в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ Значит, $\mathbb{Z}[i]/(7) \cong \mathbb{F}_{49}$.

Statement. *Рассмотрим кольцо R, A — R-алгебра. Тогда*

$$\forall a_1, \dots a_n \in A : \exists! \varphi_{a_1, \dots a_n} : R[x_1, \dots x_n] \to A : \varphi_{a_1, \dots a_n}(x_i) = A.$$

Это гомоморфизм подстановки ("eval").

3.6.1 Продолжение нёторвых колец

Theorem 31 (Теорема Гильберта о базисе)**.** *R — нётерово (коммутативное кольцо с единицей). Тогда $R[x]$ — нётерово.*

Note. $b \mid a \Leftrightarrow aR \subseteq bR$

Theorem 32. *R — неторова область целостности. Любой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых.*

Доказательство. $a \in R \setminus R^*$

1. Докажем, что существует такое p, что $p \mid a$ для неприводимого p. Если a неприводим, все отлично, иначе он предстваляется в виде $a = r_1 a_1$. При этом $a_1 R \neq aR$ и тогда $aR \subsetneq a_1 R \subsetneq a_2 R \subsetneq \ldots \subsetneq a_n R$. Эта цепочка точно оборвется, так как R — неторово. Причем $p = a_n$ — неприводим, иначе он не может быть последним. Значит $p \mid a$.

2. $p = p_1$ — неприводим. $a = p_1 c_1$

   Если $c_1 \in R^*$, то $p_1 c_1$ — неприводим. Иначе $p_1 c_1 == p_1 p_{22} = \ldots = p_1 p_2 \ldots p_m c_m$.

   $c_m \mid c_{m-1} \ldots \mid c_1$ и $c_1 R \subsetneq c_2 R \subsetneq \ldots c_m R$
   $$c_i = p_{i+1} c_{i+1}.$$

   Так как p_i необратим, то $c_i R \neq c_{i+1} R$. Цепочка обрывается, так как R неторово.

□

3.6.2 Факториальное кольцо

Def 66. Кольцо называется факториальным, если любой необратимый элемент единственным образом раскладывается в произведение неприводимых с точностью до ассоциированности.

Lemma. *Факториальное кольцо — область целостности.*

Доказательство. Если $p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = 0$, то $p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = 0$ — другое разложение.

Единственность означает: $p_1 \cdot \ldots p_m = q_1 \cdot \ldots q_n$, где p_i, q_j — необратимые $\Longrightarrow m = n \land \exists \sigma \in S_m : p_i$ ассоциировано с $\sigma(i)$. □

Theorem 33. *В R любой элемент раскладывается в произведение неприводимых и любой неприводимый элемент является простым. Тогда R — факториально.*

Note. Верно и обратное

Доказательство. Пусть $p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_m = q_1 \ldots q_n$.

Индукция по $\max(n, m)$.

База $m = n = 1$.

Переход: $\max(n, m) > 1$

Пусть $n > 1$.

$$q_1 \cdot \ldots q_n \in p_1 R \overset{p_1 R \text{ — простое}}{\Longrightarrow} p_1 \mid q_i \text{ для некоторого} i.$$

тогда $q_i \in p_i R \Longrightarrow q_i = p_i r_i$. Так как q_i неприводим, r_i — обратим, следовательно, q_i ассоциирует с p_1.

$$q_1 \dots g_{i-1} r_1 q_{i+1} \dots q_n = p_1 \dots p_m.$$

По предположению индукции p_i ассоциировано с сомножителями левой части (и $m-1 = n-1$). □

Corollary. Область главных идеалов является факториальным кольцом.

Theorem 34. *R — факториальное кольцо. Тогда $R[x]$ — тоже факториально.*

3.7 Лекция 29

3.7.1 Локализация кольца

$s \in R \xrightarrow{\varphi} A$, $\varphi(s)^e$ — обратный.

Если $r \cdot s = 0$, то $\varphi(r) = 0$.

Def 67. $S \subseteq R$, S — мультипликативное подмножество, если:

- $1 \in S$
- $\forall s_1, \dots s_2 \in S : s_1 s_2 \in S$

Def 68. Локализация кольца R в мультипликативном подмножестве S — кольцо $S^{-1}R$ вместе с гоморфизмом $\lambda_S : R \to S^{-1}R$, такое что:

- $\lambda_S(s)$ — обратимо в $S^{-1}R \quad \forall s \in S$
- $\forall \varphi : R \to A : \varphi(s)$ обратимо в A $\forall s \in S$ $\exists!$ гомоморфизм $\psi : S^{-1R \to A}$ такое что: $\varphi = \psi \circ \lambda_S$

$$R \quad \xrightarrow{\lambda_S} \quad S^{-1}R$$

Построение:

$R \times S$, введем отношение эквивалентности: $(r_1, s_1)(r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S : s r_1 s_2 = s r_2 s_1$

Докажем, что это отношение эквивалентности.

- Рефлексивность: очевидно
- Симметричность: очевидно
- Транзитивность: $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \sim (r_3, s_3) \Longrightarrow \exists s, s' \in S : s r_1 s_2 = s r_2 s_1 \wedge s' r 2 s_3 = s' r_3 s_2$ Домножим на s, потом на s_3 первое равенство, второе на s_1.

$$s_3 s' s r_1 r_2 = s' s r_2 s 1 s 3 = s_1 s s' r_2 s_3 = s s' r_3 s_2 s_1.$$

$$(s' s s_2) r_1 s_3 = (s' s s_2) r_3 r_1.$$

Тогда $(r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$.

$S^{-1}R := R \times S \diagup \sim$ Класс пары (r, s) обозначим $\frac{r}{s}$.

$$\lambda_S : R \to S^{-1}R : \quad \lambda_S(r) = \frac{r}{1}.$$

Сложение и умножение:

- $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$
  Несложно доказать, что это определение не зависит от выбора представителей классов.
- $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$
  Известно: $\frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r_1}{s_1} \Leftrightarrow r_1' s_1 s = r_1 s_1' s \quad (\exists s \in S)$. Также

$$\frac{r_1'}{s_1'} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1' s_2 + r_1 s_1'}{s_1' s_2} \Longleftrightarrow \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}.$$

  Тогда $(r_1 s_2 + r_2 + s_1) s_1' s_2 = (r_1' s_2 + r_2 s_1') s_1 s_2 s$. Сокращаем, получаем, что не зависит от выбора элемента класса.

$\lambda_S(x_1) + \lambda_S(r_1) = \frac{r_1}{1} + \frac{s_2}{1} = \frac{r_1 + r_2}{1} = \lambda_S(r_1 + r_2)$
$\lambda_s(s) = \frac{s}{1}$ обратим: $\frac{s}{1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s} = 1$
Таким образом, $S^{-1}R$ — кольцо.
$\varphi : RroA, \ \exists \varphi(s)^{-1} \quad \forall s \in S$
$\psi : S^{-1}R \to A$
$\varphi(\frac{r}{s)}) := \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ Если $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$, то есть $\exists s'' \in S : s'' r' s = s'' r s'$.

$$\varphi(s')\varphi(s)\varphi(r :) = \varphi(s'')\varphi(s')\varphi(r).$$

$$\varphi(s)\varphi(r')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}.$$

$$\psi(\frac{r'}{s'}) = \psi(\frac{r}{s}).$$

Построенное $R \times S \diagup \sim$ вместе с λ_S удовлетворяет второму из определения локализации.

Note. ψ задается единственным образом.

Lemma. λ_S — *инъекция тогда и только тогда, когда в S нет делителей нуля.*

Доказательство. $\frac{r_1}{1}\frac{r_2}{1} \Leftrightarrow \exists s \in S : s(r_1 - r_2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow$ в S нет делителей нуля □

Ex. R — область целостности. $S = R \setminus \{0\}$
Тогда $S^{-1}R$ — поле частных.

Statement. *Любая область целостности вкладывается в поле.*

Ex. S — множество всех неделителей нуля.
$S^{-1}R$ — полное кольцо частных.

Ex. P — простой идеал. $S = R \setminus P$ — мультипликативное подмножество. $R_P := (R \setminus P)^{-1}R$ — локализация в простом идеале.

Ex. $P = 2\mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_{(2)} := R_p = \{\frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, \ 2 \not| m\}$

Def 69. Главная локализация — $R_S l = \langle s\rangle^{-1}R$
$\langle s\rangle := \{1, s, s^2 \dots\},\ s \in R$

Ex. Кольцо многочленов над кольцом $R[x]$.
S — множество унитарных многочленов. $S^{-1}R[x]$

$$F[x_1, \dots, x_n] = F[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n].$$

3.8 Лекция 30

3.8.1 НОК и НОД

Def 70. R — ОГИ, $a, b \in R$.

$$aR + bR = dR.$$

$d = \gcd(a, b)$ — наибольший общий делитель.

Theorem 35. $\forall a, b \in R\ \exists x, y \in R :\ ax + by = \gcd(a, b)$

Def 71. R — ОГИ, $a, b \in R$.

$$aR \cap bR = cR.$$

$x = \mathrm{lcm}\ (a, b)$ — наименьшее общее кратное.

Practice. $\mathrm{lcm}\ (a, b) = \frac{a\cdot b}{\gcd(a,b)}$

Statement. *F — поле частных R. $a, b, b_i \in R$. Разложим $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2}$, где $\gcd(b_1, b_2)$. Тогда*

$$\exists x_1, x_2 \in R : a = b_1 x_1 a + b_2 x_2 a.$$

Из чего следует, что $\frac{a}{b} = \frac{ax_1}{b_2} + \frac{ax_2}{b_1}$.

Statement.

$$b = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} \quad p_i \text{ — неприводимы.}$$

$p_i^{k_i}$ взаимно просто с $\prod_{j\neq i} p_j^{k_j}$.

Statement. *R — ОГИ, F — поле частных.*

$$\forall a \in R\ \exists a_i \in R : \frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{p_i^{k_i}}, \quad b = \prod p_i^{k_i}.$$

Def 72. R — евклидово кольцо с евклидовой нормой f.
$\frac{c}{p^k}$ называется простейшей дробью, если p — простой в R, $k \in \mathbb{N}, c \in R,\ f(c) < f(p)$.

Theorem 36. *Любой элемент поля частных F евклидова кольца R раскладывается в сумму элемента из R и простейших дробей.*

Доказательство. p — неприводим, $k \in \mathbb{N}, a \in R$. Разложим $\frac{a}{p^k}$ в сумму простейших дробей и элемента кольца R.

Индукция по k.

База $k = 1$:

$$a = pb + x \Longrightarrow \frac{a}{p} = b + \frac{c}{p}.$$

Переход $k - 1 \to k$:

$$\frac{a}{p^k} = \frac{b}{p^{k-1}} + \frac{c}{p^k}.$$

По предположению индукции $\frac{b}{p^{k-1}}$ раскладывается, а $\frac{c}{p^k}$ — простейшая. □

3.8.2 Кольца многочленов

R — коммутативное кольцо с единицей.

Def 73. Многочлен от t над R — кортеж $(\alpha_0, \dots \alpha_n)$, записанный в виде $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$

Def 74. Сумма, произведение и степень $(+, \cdot, \deg\ )$ многочленов определены стандартным образом.

Def 75.

$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n.$$

α_n — старший коэффициент, α_0 — свободный член.

$R[t]$ — множество всех многочленов от переменной t в поле R.

Note. $R[t]$ — коммутативное кольцо с единицей. $R \hookrightarrow R[t] \to R, \quad \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n \mapsto \alpha_0$

R - алгебра.

Def 76. A– алгебра над R , если A — кольцо и R — модуль и $r(a_1 a_2) = (r a_1) a_2$.

По другому: $\begin{array}{l} \varphi : R \to A \\ \varphi(r) = r \cdot 1_A \end{array}$

Обратно: Если задана $\varphi : R \to A$ (гомоморфизм колец с единицей)

$$ra := \varphi(r) \cdot a$$

задает на A структуру R- модуля.

Note. В определении A не обязательно является коммутативным.

Def 77. A, B алгебры над R.

$$\Theta : A \to B$$

— гомоморфизм R -алгебр, если

1. $\Theta(a_1 a_2) = \Theta(a_1)\Theta(a_2)$
2. $\Theta(a_1 + a_2) = \Theta(a_1) + \Theta(a_2)$
3. $\Theta(1) = 1$ (если все с 1)
4. $\Theta(ra) = r\Theta(a)$

Def 78. A — R-алгебра, $a \in A, p \in R[t], \quad p(t) = \alpha_0 \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot t^n$.

$$\varepsilon_a(p) = p(a) := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n a^n.$$

$\varepsilon_a : R[t] \to A$ — гомоморфизм подстановки.

Statement (Универсальное свойство кольца многочленов)**.** $\forall a \in A \exists!$ *гомоморфизм R-алгебры* $\varepsilon : R[t] \to A : t \mapsto a$.

Доказательство. $\forall r \in R : \varepsilon(r) = \varepsilon(r \cdot 1) = r \cdot \varepsilon(1) = r \cdot 1$

$$\varepsilon(\alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n) = \varepsilon(\alpha_0) + \ldots \alpha_n \varepsilon(t^n) = \alpha_0 \cdot 1 + \ldots \alpha_n \cdot a^n.$$

□

3.8.3 Пара слов о многочленах от нескольких переменных

$$R[t_1, \ldots t_n] := R[t_1, \ldots, t_{n-1}][t_n].$$

$$R[t_1, \ldots t_n] = \{ \sum_{i_1, \ldots i_n = 0}^{m} \alpha_{i_1, \ldots, i_n} t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{i_n} \mid m \in \mathbb{N}_0, \alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_n} \in \mathbb{R} \}.$$

Statement. $\forall a_1, \ldots a_n \in A$ $\exists\exists!$ *гомоморфизм R — алгебры :*

$$R[t_1, \ldots t_n] \to A : \ \forall i \ t_i \mapsto a_i.$$

3.8.4 Вернемся к многочленам от одной переменой

F — поле. $F[t]$ — евклидово с евклидовой нормой deg.

Theorem 37 (Безу)**.** *Остаток от деления $p \in F[t]$ на $t - \alpha$ равен $p(\alpha)$.*

Corollary. p делится на $t - \alpha$ тогда и только тогда, когда $p[\alpha] = 0$.

Corollary. Многочлен степени n имеет на более n корней.

Theorem 38. *F — поле, $G \leqslant F^*$. $|G| < \infty$. Тогда G — циклическая.*

Доказательство. $\exp G = k \Longrightarrow \forall g \in G : g^k = 1$, то есть все элементы G скорни многочлена $t^k - 1 \Longrightarrow |G| \leqslant k$. А он имеет на больше k корней. k делит $|G| \Longrightarrow \exp G - |G|$. Следовательно, G — циклическая. $\square$

3.9 Лекция 31

Theorem 39 (Кармайкла)**.** *Если $8 \not| 8$,*

$$\exp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \operatorname{lcm}{}_i(p_i^{k_i} - p_i^{k^i-1},$$

если $8 \mid n$,

$$\operatorname{lcm}{}_{i,p_i\neq 2}(2^{k-2}, p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}).$$

Def 79. $n : \forall a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ Псевдопростое число Ферма — такое число a, что $a^{n+1} \equiv 1 \mod n$.

Practice. Для любых $p, q \in \mathbb{P}$

1. $p \cdot q$ не псевдопростое
2. p^k тоже не псевдопростое
3. Найти самое маленькое псевдопростое число
4. Может ли $p^k q^l$ быть псевдопростым?

3.9.1 Кратность корня и формальная производная

Def 80. α — корень $p \in F[t]$, F — поле.

$$p = (t-\alpha)p_1 = \ldots = (t-\alpha)^k g, \quad g(\alpha) \neq 0.$$

k — кратность корня α в p.

Note. Если кратность корня равна нулю, это не корень.

Theorem 40. *$F = \mathbb{R}, p(\alpha) = 0$. Кратность α в p' На один меньшее кратности α в p.*

Доказательство. Взяли $(t-\alpha)^k g)' = k((t-\alpha)^{k-1}g + (t-\alpha)^k g' = (t-\alpha)^{k-1}(kg + (t-\alpha)$. Второй сомножитель в точке α не равен нулю, следовательно, кратность α уменьшилась на один. $\square$

Def 81. A — F-алгебра. $\delta : A \to A$ называется дифференцированием, если она F-линейна и

$$\partial(u \cdot v) = \partial u \cdot v = \partial v \cdot u \qquad u, v \in A.$$

Def 82. F — -коммутативное кольцо с единицей. Определим формальную производную на $F[t]$:

$$\begin{array}{l} (\alpha)' = 0 \quad \forall a \in F \\ (t^n)' = nt^{n-1} \\ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k t^k\right)' = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot kt^{k-1} \end{array}.$$

Property.

1. $(\alpha v)' = \alpha v'$
2. $(uv)' = u'v + v'u$
3. $(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

Пусть $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$, R — кольцо. $P(R)$ — некоторое утверждение про кольцо R Предположим, что P наследуется подкольцами и факторкольцами, то есть

$$\forall \tilde{R} \subseteq R, I \triangleleft : \ P(R) \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} P(\tilde{R}) \\ P(R/I) \end{array} \right. .$$

P формулируется:

$$\forall \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Тогда $P(\mathbb{R}) \Longrightarrow P(R) \quad \forall$ кольца R.

Lemma.

$$\forall n : \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \rightarrowtail \mathbb{R}.$$

Theorem 41. **??** *равносильно тому, что $P(R)$ следует из любого конечнопорожденного подкольца $\tilde{R} : P(\tilde{R})$*

Доказательство. $P(\mathbb{R}) \Longrightarrow (P(\mathbb{Z}[t_1, \dots t_n])) \Longrightarrow P($ для любого конечнопророжденного кольца$)$

$\tilde{R}$ порождено элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ □

Theorem 42. *Если $k \neq 0$ в F, то при дифференцировании кратность падает на один.*

Note. В общем случае: α — корень g кратности $k \geqslant 1 \Longrightarrow \alpha$ — корень g кратности $k - 1$.

Ex. в $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$t^p - 1 = (t-1)^p.$$

1 — корень кратности p.

$$(t^p - 1)' = 0 \text{ — кратность } \infty.$$