

Билеты по алгебре  
I семестр

Тамарин Вячеслав

14 января 2020 г.

## Вопрос 1 Векторное пространство

**Def 1.** Пусть  $(V, +)$  — абелева группа,  $F$  — поле, и задана операция (умножение)  $V \times F \rightarrow V$ . Предположим, что  $\forall u, v \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие свойства:

1.  $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$
2.  $v(\alpha + \beta) = v\alpha + v\beta$
3.  $(v + u)\alpha = v\alpha + u\alpha$
4.  $v \cdot 1 = v$

Тогда  $V$  называется **векторным пространством** над полем  $F$ .

**Property.**

1.  $v \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
2.  $v \cdot (-1) = -v$
3.  $v \cdot (-\alpha) = (-v)\alpha = -(v\alpha)$
4.  $v \cdot \sum \alpha_i = \sum v\alpha_i$
5.  $\sum v_i \cdot \alpha = \sum v_i \alpha$

**Exs.**

1. Множество векторов в  $\mathbb{R}^3$
- 2.

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

3.  $X$  — множество,  $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$   
 $f, g : X \rightarrow F$   
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4.  $F[t]$  — многочлены от одной переменной  $t$

## Вопрос 2 Подпространство, линейная оболочка

**Def 2.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется **подпространством**, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в  $V$ .

**Statement 1** (критерий подпространства). Подмножество  $U \subseteq V$  является подпространством тогда и только тогда, когда  $\forall u, v \in U, \alpha \in F : u + v, u\alpha \in U$ .

**Def 3.** Пусть  $u_1, \dots, u_n \in V$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ . Сумма

$$\sum_{k=1}^n u_k \alpha_k$$

называется **линейной комбинацией** векторов  $u_1, \dots, u_n$  с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Линейная комбинация называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю.

*Note.* Пусть  $S \subseteq V$ , и задан набор чисел  $\alpha_s \in F$ ,  $s \in S$ . Операция бесконечной суммы будет определена только в случае, когда почти все  $\alpha_s$  равны нулю.

**Def 4.** Линейной оболочкой набора  $S$  называется подпространство, порожденное  $S$ , то есть наименьшее подпространство, содержащее  $S$ .

**Designation.** Линейная оболочка набора  $S$  обозначается  $\langle S \rangle$ .

**Statement 2.**  $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \alpha_k \mid u_k \in S, \alpha_k \in F \right\}$

**Def 5.** Если  $\langle S \rangle = V$ , то  $S$  называется **системой образующих** пространства  $V$ .

**Def 6.** Кортеж векторов  $(u_1, \dots, u_n)$  называется **линейно независимым**, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Множество  $S \subseteq V$  называется **линейно независимым**, если любой кортеж, составленный из конечного числа различных векторов из  $S$ , является линейно независимым.

**Def 7.** Базис — линейно независимая система образующих.

## Вопрос 3 Матрицы

### i Конечные матрицы

**Def 8.** Двумерный массив  $m \times n$  элементов поля  $F$  называется **матрицей** размера  $m \times n$  над  $F$ .

**Designation.** Множество таких матриц обозначается  $M_{m \times n}(F)$ . Если  $m = n$ , пишут  $M_n(F)$ . Элемент матрицы  $A$  в позиции  $(i, j)$  записывается  $a_{ij}$ .

**Property.**

- Для двух матриц одинакового размера определена операция поэлементной суммы:  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
- Также определено умножение матрицы на число:  $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$ .
- Произведением матрицы  $A \in M_{m \times n}(F)$  на матрицу  $B \in M_{n \times k}$  называется матрица  $C = AB \in M_{m \times k}(F)$  элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

**Theorem 1.** Множество  $M_{m \times n}(F)$  с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством над полем  $F$ .

*Доказательство.* Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число:

$$\begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \\ (AB)\alpha = A(B\alpha) = (A\alpha)B \end{cases}.$$

Все кроме первого свойства очевидны. Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k \in K} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \\ &= \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left( \sum_{k \in K} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j \in J} a_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}$$

**Def 9.** Квадратная матрица  $E$  с 1 на главной диагонали и остальными нулями называется **единичной**.

**Property.** Умножение данной матрицы на единичную справа и слева не ее не изменяет.

Матрица  $E_n$  является нейтральным элементом в  $M_n(F)$ . □

### Обобщение конечных матриц

Пусть даны множества  $X_{ij}, Y_{jh}$ , коммутативные моноиды  $(Z_{ih}, +)$ , где  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $h = 1, \dots, k$ , и функции «умножения»  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ . Обозначим через  $X, Y, Z$  наборы множеств  $X_{ij}, Y_{jh}, Z_{ih}$ , соответственно, через  $M(X)$  — множество матриц  $A$  с элементами  $a_{ij} \in X_{ij}$ , и аналогично  $M(Y), M(Z)$ . Тогда можно определить произведение матриц  $A \in M(X)$  и  $B \in M(Y)$  как матрицу  $C = AB \in M(Z)$ , где  $c_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh}$ .

Если все  $X_{ij}, Y_{jh}$  будут коммутативными моноидами, а функция умножения дистрибутивной, умножение матриц тоже будет дистрибутивным и ассоциативным.

### ii Произвольные матрицы

Пусть  $I, J$  — произвольные множества (возможно бесконечные), элементами которых мы будем индексировать строки и столбцы матриц. Пусть  $\forall i \in I \wedge j \in J$  задано множество  $X_{ij}$ , и обозначим набор всех таких множеств через  $X$ . Тогда матрицей размера  $I \times J$  над  $X$  называется функция  $A : I \times J \rightarrow \bigcup X_{ij}$   $(i, j) \mapsto a_{ij}$ , такая что  $a_{ij} \in X_{ij}$ .

**Designation.** Множество матриц размера  $I \times J$  над  $X$  обозначается  $M_{I \times J}(X)$ . Если  $I = \{1\}$ , то матрица размера  $I \times J$  будут называться столбцами длины  $J$ , а если  $J = \{1\}$ , то столбцами высоты  $I$ . Множества строк обозначим данной длины  ${}^J X$ , множество столбцов —  $X^J$ .

Будем считать, что все  $X_{ij}$  — абелевы группы в аддитивной записи. Тогда сумма двух матриц одного размера определяется поэлементно:  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Если все  $X_{ij}$  — векторные пространства над полем  $F$ , также можно определить умножение на число:  $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$ .

### Умножение матриц

Пусть все операции умножения  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$  дистрибутивны (для  $a \cdot 0 = 0$ ), и в каждом столбце матрицы  $Y$  почти все элементы равны 0.

**Designation.** Обозначим  $M_{J \times H}^{c.f.}(Y) \subset M_{J \times H}(Y)$ , состоящее из всех матриц  $B$ , у которых для любого фиксированного  $h \in H$  почти все элементы  $b_{jh}$  равны 0.

**Def 10.** Пусть  $\forall i \in I, j \in J, h \in H$  заданы операции умножения  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ , причем  $\forall x, x' \in X_{ij}$  и  $\forall y, y' \in Y_{jh}$  выполнены равенства

$$(x + x')y = xy + x'y \wedge x(y + y') = xy + xy'.$$

Произведение матриц  $A \in M_{i \times J}(X)$  и  $B \in M_{J \times H}^{c.f.}(Y)$  как матрицу  $AB \in M_{I \times H}(Z)$  с элементами

$$(AB)_{ih} = \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jh}.$$

При этом суммы определены, так как почти все слагаемые равны нулю.

*Note.* Аналогично определяется умножение матриц  $A \in M_{I \times J}^{r.f.}(X)$  и  $B \in M_{J \times H}(Y)$ .

**Lemma 1.** Обычные свойства умножения матриц 1 выполнены, если определены все входящие в формулы операции.

Если  $\forall i, j, h \in I$  заданы дистрибутивные операции умножения  $X_{ij} \times X_{jh} \rightarrow X_{ih}$ , то множество  $M_{I \times I}^{c.f.}(X)$  является кольцом с единицей.

**Designation.** Если  $X_{ij}$  одно и то же поле  $F$  для всех  $i, j$ , будем писать  $M_{i \times J}(F)$  вместо  $M_{i \times J}(X)$ . Если  $I = J$ , то будем писать  $M_I(F)$  вместо  $M_{I \times I}(F)$ . Если  $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$ , то можем писать  $M_{m \times n}(F)$ .

### Другие характеристики матриц

**Def 11.** Множество обратимых элементов кольца  $M_n(F)$  называется полной линейной группой степени  $n$  над  $F$  и обозначается  $\text{GL}_n(F)$ .

**Designation.** Для множества  $M_{I \times \{1\}}^{c.f.}(F)$  введем специальное обозначение  $F_{fin}^I$  и будем называть его множеством финитных столбцов высоты  $I$  над  $F$ . Другим словами,  $F_{fin}^I$  — множество финитных (у которых почти все значения равны 0) функций из  $I$  в  $F$ . Аналогично,  ${}^J F_{fin} = M_{\{1\} \times J}^{r.f.}(F)$ .

**Def 12.** Пусть  $A \in M_{I \times J}(F)$ . Матрица  $A^T \in M_{J \times I}(F)$  с элементами  $(A^T)_{ij} = a_{ji}$  называется транспонированной к  $A$ .

**Statement 3.**  $(AB)^T = B^T A^T$

*Note.* Для обозначения столбца часто используется строка  $(a_1, \dots, a_n)^T$ .

## Вопрос 4 Эквивалентные определения базиса

**Theorem 2** (Эквивалентные определения базиса). *Следующие условия на подмножество  $v$  векторного пространства  $V$  эквивалентны:*

- (1)  $v$  — линейно независимая система образующих
- (2)  $v$  — максимальная линейно независимая система
- (3)  $v$  — минимальная система образующих
- (4) любой элемент  $x \in V$  представляется в виде линейной комбинации набора  $v$ , причем единственным образом

*Доказательство.*

**1  $\implies$  2** Пусть  $v$  — не максимальная линейно независимая система. Мы знаем, что  $v$  — система образующих. Тогда любой элемент  $a \in V$  представляется в виде линейной комбинации  $v$ , а значит любой набор, содержащий  $v$ , принадлежит линейной оболочке  $\langle v \rangle$ , следовательно, набор линейно зависимый.

**2  $\implies$  1** Так как  $v$  максимальная линейно независимая система, любой элемент  $a \in V$  выражается через элементы  $v$ . Следовательно,  $v$  — система образующих.

**1  $\implies$  3** Пусть из  $v$  можно убрать некоторые элементы так, что полученный набор  $u$  будет минимальной системой образующих. Тогда любой элемент набора  $v \setminus u$  представим в виде линейной комбинации  $u$ . Следовательно,  $v$  линейно зависим.

**3  $\implies$  1** Если  $v$  линейно зависим, то во всех линейных комбинациях набора  $v$  можно заменить один элемент на линейную комбинацию других. А тогда  $v$  не минимален.

**1  $\implies$  4** Так как  $v$  — система образующих  $\langle v \rangle = V$ . Теперь докажем, что представление единственно. Пусть  $x = va = \sum_{y \in v} ya_y$ ,  $a \in F_{fin}^v$ . Предположим, что  $\exists b \in F_{fin}^v : x = vb$ . Тогда  $0 = va - vb \implies 0 = v(a - b)$ . Так как  $v$  линейно независим, можем сократить:  $0 = a - b$ , значит представление единственно.

**4  $\implies$  1** Так как любой элемент представим в виде линейной комбинации набора  $v$ ,  $\langle v \rangle = V$ . Так как представление единственно,  $v$  линейно независим.

□

## Вопрос 5 Существование базиса

**Theorem 3** (О существовании базиса). *Пусть  $X, Y \subseteq V$ , причем набор  $X$  линейно независим, а  $Y$  — система образующих. Тогда существует базис  $Z$ , содержащий  $X$  и содержащийся в  $Y$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  — набор всех линейно независимых подмножеств  $Y$ , содержащих  $X$ . Этот набор не пуст, так как содержит  $X$ . Пусть  $\mathcal{L}$  — линейно упорядоченный поднабор в  $\mathcal{A}$ . Обозначим через  $S$  объединение всех множеств из  $\mathcal{L}$ . Так как  $\forall C \in \mathcal{L}$  лежит между  $X$  и  $Y$ ,  $S$  обладает этим свойством. Рассмотрим конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq S$ . По определению объединения множеств  $\forall i = 1, \dots, n \exists B_i \in \mathcal{L}$ , содержащее  $v_i$ . Так как  $\mathcal{L}$  — лум, среди множеств  $B_1, \dots, B_n$  найдется наибольшее  $B_k$ . Тогда  $v_1, \dots, v_n \in B_k$ . Так как  $B_k$  линейно независимо, то и  $\{v_1, \dots, v_n\}$  линейно независимо. Следовательно,  $S$  линейно независимо, значит  $S \in \mathcal{A}$ . По лемме Цорна получаем, что  $\mathcal{A}$  содержит максимальных элемент. Пусть это  $Z$  — максимальное из линейно независимых подмножеств  $Y$ , содержащих  $X$ .

Пусть  $y \in Y \setminus Z$ . Так как  $Z$  линейно независимо,  $Z \cup \{y\}$  линейно зависимо, то есть  $\exists a \in F_{fin}^Z$ ,  $a_y \in F : ya_y + Za = 0$ , где  $a_y \neq 0$ . Следовательно,  $y \in \langle Z \rangle$ . Тогда  $Y \subseteq \langle Z \rangle$ . С другой стороны,  $V = \langle Y \rangle$  — наименьшее подпространство, содержащее  $Y$ . Значит  $V \subseteq \langle V \rangle$ , то есть  $Z$  — система образующих, следовательно, и базис.

□

## Вопрос 6 Лемма о замене

**Theorem 4** (лемма о замене). Пусть  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  — линейно независимый набор из  $n$  векторов,  $v$  — система образующих пространства  $V$ . Тогда:

1.  $\exists v_1, \dots, v_n \in v : v \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \cup u = w$  — система образующих.
2. Причем, если  $u$  — базис, то  $w$  — базис.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0$ . Утверждение для нуля верно.

Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ . По предположению индукции  $\exists v_1, \dots, v_{n-1} \in v$  такие, что  $w' = v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \cup \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  является системой образующих. Причем, если  $v$  был линейно независимым, то  $w'$  — базис.

$u_n$  выражается через линейную комбинацию набора  $w'$ :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in F, w_j \in v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

Заметим, что кто-то из  $\beta_j \neq 0$  (иначе  $u$  линейно зависим). Не умоляя общности, считаем, что  $\beta_m \neq 0$ . Пусть  $v_n = w_m$ . Тогда  $v_n$  выражается через линейную комбинацию набора  $w = w' \setminus \{v_n\} \cup \{u_n\}$ . Следовательно,  $w' \subseteq \langle w \rangle$ , значит  $w$  — система образующих.

Пусть набор  $v$  (а тогда и  $w'$ ) линейно независим. Рассмотрим  $w'' = w' \setminus \{v_n\}$  и линейную комбинацию  $w''a + u_n \alpha$  набора  $w$ , где  $a \in F_{fin}^{w''}$ .

$$0 = w''a + u_n \alpha = w''a + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i \alpha + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j \alpha = w''b + v_n \beta_m \alpha, \quad b \in F_{fin}^{w''}.$$

Если  $\alpha \neq 0$ , то  $w''b + v_n \beta_m \alpha$  является нетривиальной линейной комбинацией набора  $w'' \cup \{v_n\} = w''$ , равной нулю. Значит,  $\alpha = 0$ , тогда  $w''a = 0$ . Так как  $w'' \subseteq w'$ ,  $w''$  линейно независим, следовательно,  $a = 0$ .

Получаем, что  $w$  линейно независим.

□

## Вопрос 7 Количество элементов в базисе

**Theorem 5** (количество элементов в базисе). Любые два базиса пространства  $V$  равномощны.

*Доказательство.* Пусть  $v, u = \{u_1, \dots, u_n\}$  — базисы пространства  $V$ . Не умоляя общности, считаем, что мощность множества  $v > n$ . Перенумеруем элементы базиса  $u$  так, что  $u_1, \dots, u_k \notin v$  и  $u_{k+1}, \dots, u_n \in v$ .

Тогда по лемме о замене 4 существует подмножество  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq v : w = v \setminus \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$  — базис.  $u \subseteq w$  и  $|v| = |w|$ . Так как базис — максимальная линейно независимая система, то один базис не может строго содержаться в другом. Следовательно,  $w = u$ , откуда  $|v| = n$ . □

**Def 13.** Размерность пространства — мощность любого базиса этого пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем существует конечный базис.

## Вопрос 8 Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений

### i Линейные отображения

**Def 14.** Пусть  $V$  и  $U$  — векторные пространства,  $L$  — функция  $V \rightarrow U$ .  $L$  называется **линейным отображением**, если  $\forall x, y \in V, \alpha \in F$  :

$$\begin{aligned} L(x + y) &= L(x) + L(y) \\ L(x\alpha) &= L(x)\alpha \end{aligned}$$

Биективное линейное отображение называется **изоморфизмом**. Линейное отображение из пространства в само себя называется **линейным оператором**. Отображение из пространства в основное поле часто называется **функционалом**.

**Property.** Пусть вектор  $v = (v_1, \dots, v_n)$  и отображение  $L : V \rightarrow U$ .

$$L(v) = (L(v_1), \dots, L(v_n)) \in {}^nU.$$

Тогда

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^n.$$

Note. В случае бесконечного  $v$  можем переписать аналогично, обозначив  $L(v) \in {}^nU : L(v)_x = L(x) \quad \forall x \in v$ :

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^v.$$

**Designation.** Пусть  $v$  — базис  $V$ . Тогда  $\forall x \in V \exists ! a \in F_{fin}^v : x = va$ . Тогда  $a = x_v$  — столбец координат  $x$  в базисе  $v$ .

**Lemma 2.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ , а  $v$  — базис  $V$ . Отображение  $\varphi_v : V \rightarrow F^v$ , заданное равенством  $\varphi_v(x) = x_v$ , является изоморфизмом векторных пространств.

*Доказательство.* Рассмотрим  $x, y \in V$ .

$$\begin{cases} vx_v = x \\ vy_v = y \end{cases} \implies v(x_v + y_v) = x + y = v(x + y)_v \implies \varphi_v(x + y) = \varphi_v(x) + \varphi_v(y).$$

$$v(x\alpha)_v = x\alpha = v(x_v\alpha) \implies \varphi_v(x\alpha) = \varphi_v(x)\alpha.$$

Построим обратное отображение:  $\theta_v : F^v \rightarrow V$ ,  $\theta_v(a) = va$ . Следовательно,  $\varphi_v$  — биективное линейное отображение.  $\square$

**Corollary 1** (классификация векторных пространств). Любое векторное пространство изоморфно пространству  $F^I$  для некоторого множества  $I$ , мощность которого равна размерности пространства.

Два пространства изоморфны между собой тогда и только тогда, когда их размерности равны.

### ii Матрицы линейных отображений

**Statement 4.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — базис  $U$ ,  $v = (v_1, \dots, v_m)$  — базис  $V$ .

$$\exists ! A \in M_{m \times n}(F) : \forall x \in U \quad L(x)_v = Ax_u.$$

Столбцы матрицы  $A$  вычисляются по формуле  $a_{*k} = L(u_k)_v$ .

*Доказательство.* По определению столбца координат  $x = ux_u$ .

$$\varphi_v \circ L(x) = \varphi_v \circ L(ux_u).$$

Тогда  $L(x)_v = \varphi_v(L(x)) = \varphi_v(L(u))x_u$ . Пусть  $A = \varphi_v(L(u)) = (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$ .

Докажем единственность. Предположим, что  $Ax = Bx$  для любого столбца  $x$ . Тогда  $A = B$ .  $\square$



**Def 15.** Матрица  $A$  из прошлого утверждения 4 называется матрицей отображения  $L$  в базисах  $u, v$  и обозначается через  $L_u^v$ .

Если  $U = V$ ,  $u = v$ , говорят о матрице оператора  $L$  в базисе  $u$  и обозначают ее через  $L_u$ .

$$L(x)_v = L_u^v x_v \text{ или } L(x)_u = L_u x_u \text{ в случае } U = V \wedge u = v.$$

**Theorem 6.** Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов.

Если  $U, V, W$  — конечномерные линейные пространства с базисами  $u, v, w$ , соответственно,  $L : U \rightarrow V$ ,  $M : V \rightarrow W$  — линейные отображения, то  $(M \circ L)_u^w = M_v^w L_u^v$ .

Если  $U = V = W$  и  $u = v = w$ , то  $(M \circ L)_u = M_u L_u$ .

## Вопрос 9 Матрица перехода от одного базиса с другому. Замена координат и изменение матрицы оператора при замене базиса

### i Матрица перехода

**Theorem 7.** Пусть  $v$  — базис  $n$ -мерного пространства  $V$  над полем  $F$ . Набор  $u = (u_1, \dots, u_n)$  является базисом тогда и только тогда, когда существует  $A \in \text{GL}_n(F)$  такая, что  $u = vA$ .

**Def 16.** Если  $u, v$  — базисы, то  $A$  называется матрицей перехода от  $v$  к  $u$  и обозначается через  $C_{v \rightarrow u}$

При этом:

- (1) Столбец матрицы  $C_{v \rightarrow u}$  с номером  $k$  равен столбцу координат вектора  $u_k$  в базисе  $v$ .  $(C_{v \rightarrow u})_k = (u_k)_v$
- (2)  $C_{v \rightarrow u}^{-1} = C_{u \rightarrow v}$
- (3) Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

*Доказательство.*

$\implies$  Положим  $\forall k \in [1, n] : a_{*k} = (u_k)_v$ . Тогда  $va_{*k} = u_k \implies u = vA$

$\implies$  Если  $u = vA$ ,  $\langle u \rangle = \langle vA \rangle = V$ . При этом  $u$  минимален, так как иначе и  $v$  не минимален, значит  $u$  — базис.

1. По построению.

$$2. \begin{cases} u = vC_{v \rightarrow u} \\ v = uC_{u \rightarrow v} \end{cases} \implies uE = uC_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} \implies E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

3. Пусть  $B \in M_{n \times m}(F)$  двусторонне обратима.  $BB_1 = E_{n \times n} \wedge B_2B = E_{m \times m}$ . Тогда  $B_2 = B_2E_n = B_2(BB_1) = (B_2B)B_1 = E_mB_1 = B_1$ . Значит  $B_1 = B_2$ .  $B_1B = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} = B_1B \implies B$  — квадратная.

□

Note. Если пространство  $V$  бесконечномерно, почти все элементы каждого столбца должны быть равны нулю.

Note. Если  $V = F^n$ ,  $e$  — стандартный базис, то  $C_{e \rightarrow u}$  — матрица, составленная из столбцов базиса  $u$ .

## ii Преобразование координат при замене базиса

**Theorem 8.** Пусть  $u, v$  — базисы пространства  $V$ .

$$\forall x \in V : x_v = C_{v \rightarrow u} x_u.$$

*Доказательство.* Запишем определение столбца координат  $x = ux_u = vx_v$ . Про базисы мы знаем, что  $v = uC_{u \rightarrow v}$ . Тогда

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \implies x_u = C_{u \rightarrow v}x_v.$$

□

## iii Преобразование матрицы оператора при замене базиса

*Note.* Матрица перехода  $C_{u \rightarrow v}$  совпадает с матрицей тождественного отображения  $1_V$  в базисах  $u$  и  $v$ .

**Lemma 3.** Пусть  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — базис пространства  $U$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n) \in^n V$  — набор векторов пространства  $V$ . Тогда существует единственное линейное отображение

$$L : U \rightarrow V : L(u) = v.$$

При этом

$L$  инъективно тогда и только тогда, когда  $u$  линейно независим

$L$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $u$  — система образующих

$L$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $u$  — базис

*Доказательство.*  $\forall x \in U : x = ux_u$ . Тогда  $\forall L : L(x) = L(u)x_u$ . Зададим  $L$  так:  $L(x) = vx_u$ . Оно линейно и единственно. □

*Note.* Пусть  $u, v$  — базисы пространства  $V$ . Тогда матрица отображения  $L$  из леммы в базисе  $u$  совпадает с матрицей перехода  $C_{u \rightarrow v}$ .

**Statement 5.** Пусть  $u, u'$  — базисы пространства  $U$ ,  $v, v'$  — базисы пространства  $V$ ,  $L : V \rightarrow U$  — линейное отображение. Тогда

$$L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} L_u^v C_{u \rightarrow u'}.$$

*Доказательство.*

$$L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v'} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}$$

□

*Note.* Если  $U = V$  и  $u = v$ ,  $u' = v'$ ,

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

## Вопрос 10 Внешняя и внутренняя пряма сумма пространств, естественный изоморфизм между ними

**Designation.**  $U, V$  — подпространства векторного пространства  $W$  над полем  $F$ .

**Def 17.** Сумма  $U + V$  — совокупность  $\{x + y \mid x \in U, y \in V\}$ .

*Note.*  $U + V \subseteq W \wedge U \cap V \subseteq W$ .

**Def 18.** Пространство  $W$  называется внутренней прямой суммой подпространств  $U$  и  $V$ , если

$$\forall z \in W \exists! x \in U, y \in V : z = x + y.$$

То есть  $W = U + V \wedge V \cap U = \{0\}$ .

**Def 19.**  $U, V$  — векторные пространства. Их внешней прямой суммой называется их декартово произведение с покомпонентными операциями.

**Designation.** Обе прямые суммы обозначаются  $U \oplus V$ .

*Note.* Пространства  $U, V$  естественно вкладываются в из внешнюю прямую сумму:  $\forall x \in U : x \mapsto (x, 0) \wedge \forall y \in V : y \mapsto (0, y)$ . Если отождествить  $U$  и  $V$  с их образами, то внешняя сумма превращается в прямую сумму подпространств.

**Statement 6.**  $U, C \leq W, U \oplus V$  — их внешняя прямая сумма. Зададим  $\varphi : U \oplus V \rightarrow W$  так  $\varphi(x, y) = x + y$ .  $\varphi$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $W$  является внутренней суммой подпространств  $U$  и  $V$ .

Если  $W = U \oplus V$ , то объединение базисов  $U$  и  $V$  — базис  $W$ . Поэтому  $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$ .

**Statement 7.**  $\forall U \leq W \exists V \leq W : W = U \oplus V$ .

*Доказательство.* Выберем базис  $u$  подпространства  $U$  и дополним его до базиса пространства  $W$ :  $u \cup v$ . Тогда подойдет  $V = \langle v \rangle$ .  $\square$

**Theorem 9.** Для пространств  $U_1, \dots, U_n \leq V$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow V, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$  — изоморфизм
- (2)  $\forall x \in V \exists! (x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n) : x = x_1 + \dots + x_n$
- (3)  $V = U_1 + \dots + U_n$  и  $U_i \cap \left( \sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\} \quad i \in [1, n]$
- (4) Объединение базисов подпространств  $U_1, \dots, U_n$  — базис  $V$ .

## Вопрос 11 Ядро и образ линейного отображения. Слои линейного отображения

**Def 20.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Тогда

Ядро отображения  $L$  —  $\text{Ker } L = L^{-1}(0) := \{x \in U \mid L(x) = 0\}$

Образ отображения  $L$  —  $\text{Im } L = \{L(x) \mid x \in U\}$

**Statement 8.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение.

$$\text{Ker } L \leq U \wedge \text{Im } L \leq V.$$

**Def 21.**  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Слой отображения над точкой  $y \in V$  — множество  $\{x \in U \mid L(x) = y\} = L^{-1}(y)$

**Statement 9.** Все слои отображения  $L$  являются сдвигами ядра.  $L(x) = y, x \in U$ :

$$L^{-1}(y) = x + \text{Ker } L.$$

## Вопрос 12 Теорема о размерности ядра и образа. Теорема о размерности прямой суммы

**Theorem 10** (о размерности ядра и образа).  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Тогда

$$\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L.$$

*Доказательство.*  $u = (u_1, \dots, u_k)$  — базис  $\text{Ker } L$ ,  $v = (v_1, \dots, v_m)$ . Дополним базис ядра до базиса  $U$ :  $u \cup v$  — базис  $U$ . Докажем, что  $L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$  — базис образа.

$$\forall x \in \text{Im } L \exists y \in U : L(y) = x.$$

Разложим  $y = ua + vb$ ,  $a \in F^k, b \in F^m$

Тогда

$$x = L(y) = L(u) \cdot a + L(v) \cdot b.$$

Так как  $u \in \text{Ker } L$ :  $L(u) = (L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)$ . Следовательно,  $L(v)$  — система образующих. Проверим, что  $L(v)$  линейно независим. Пусть

$$L(v) \cdot c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(v)c = L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \text{Ker } L \Rightarrow vc = ud \text{ для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда  $vc - ud = 0$ , но  $v$  и  $u$  — два базисных вектора. Следовательно,  $c = d = 0$  и  $L(v)$  — линейно независимый.  $\square$

**Theorem 11** (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения). Пусть  $U, V \leq W$ .

$$\dim U \cap V + \dim U + \dim V = \dim U + \dim V.$$

*Доказательство.* Зададим линейное отображение  $L : U \oplus V \rightarrow W : L(u, v) = u + v$ . Тогда  $\text{Im } L = U + V$ .

$$(u, v) \in \text{Ker } L \iff u + v = 0 \iff u = -v \in U \cap V.$$

$$\text{Ker } L = \{(u, -u) \mid u \in U \cap V\} \cong U \cap V.$$

По теореме о размерности ядра и образа

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = \dim U \cap V + \dim U + \dim V.$$

$\square$

## Вопрос 13 Факторпространство и его универсальное свойство

**Designation.**  $V$  — векторное пространство,  $U \leq V$ .

**Def 22.**  $x + U$  — аффинное подпространство или смежный класс  $V$  по  $U$ .

$y \sim_U x \iff y - x \in U$  — эквивалентность.

**Def 23.** Множество смежных классов  $V$  по  $U$  с операциями

$$(x + U) + (y + U) = (x + y) + U$$

$$(x + U)\alpha = x\alpha + U$$

называется факторпространством  $V$  по  $U$  и обозначается  $V/U$ .

*Проверка корректности определения.* Докажем, что определение операций не зависит от выбора представителей классов.

- Сложение

$$x' + U = x + U \implies x' + 0 \in x + U \implies x' \in x + U.$$

$$y' + U = y + U \implies y' + 0 \in y + U \implies y' \in y + U.$$

Тогда  $\exists z \in U : x' = x + z$  и  $\exists t \in U : y' = y + t$ .

$$\begin{aligned} (x' + U) + (y' + U) &:= (x' + y') + U = \\ &= (x + y) + \underbrace{(z + t)}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq (x + y) + U \end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

- Умножение

$$\begin{aligned} (x' + U)\alpha &:= x'\alpha + U = \\ &= (x + z)\alpha + U = x\alpha + \underbrace{z\alpha}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq x\alpha + U \end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

□

**Designation.**  $\pi_U : V \rightarrow V/U$  — естественная проекция:  $\pi_U(x) = x + U$ .

Note.  $\pi_U$  линейно и сюръективно  $\text{Ker } \pi_U = U$ .

По теореме о размерности ядра и образа  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ .

**Statement 10.** Пусть  $U \subseteq V$ . Для любого линейного отображения  $L : V \rightarrow W$ ,  $U \subseteq \text{Ker } L$ , существует единственное отображение  $\tilde{L} : V/U \rightarrow W : L = L \circ \pi_U$ . При этом сюръективность  $\tilde{L}$  равносильна сюръективности  $L$ , а инъективность  $\tilde{L}$  — тому, что  $\text{Ker } L = U$ . То есть такая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \tilde{L} & \\ V/U & & \end{array}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{L}(x + U) = L(x)$ . Эта формула задает линейное отображение и равносильна  $L = \tilde{\pi}_U$ . Следовательно,  $\tilde{L}$  существует и единственно.

$\pi_U$  инъективно, следовательно,  $L$  сюръективно  $\iff \tilde{L}$  сюръективно.

Отображение  $\tilde{L}$  инъективно  $\iff \text{Ker } \tilde{L} = \{0_{V/U} + U\}$ .

$$x + U \in \text{Ker } \tilde{L} \iff \tilde{L}(x + U) = 0 \iff L(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } L.$$

□

**Theorem 12** (о гомоморфизме).  $L : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$$V/\text{Ker } L \cong \text{Im } L.$$

*Доказательство.* Возьмем  $U = \text{Ker } L$  и заменим  $W$  на  $\text{Im } L$ . Далее применим утверждение 10. □

## Вопрос 14 Ранг набора элементов векторного пространства, ранг оператора, строчной и столбцовый ранг матрицы

### Def 24.

Рангом набора векторов называется размерность линейной оболочки этого набора.

Рангом линейного оператора называется размерность образа этого оператора.

Столбцовым (строчным) рангом матрицы называется ранг набора ее столбцов (строк).

*Note.* Из любой системы образующих можно выбрать базис, следовательно, ранг набора векторов — наибольшее количество линейно независимых векторов из этого набора. Так как образы базисных векторов порождают образ оператора, то ранг оператора равен рангу набора базисных векторов, а он равен столбцовому рангу матрицы оператора (вне зависимости от выбора базиса).

**Theorem 13.** Пусть  $A \in M_{m \times n}(F)$ .

- (1) Набор столбцов матрицы  $A$  линейно независим тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен  $n$ .
- (2) Набор столбцов матрицы  $A$  порождает  $F^m$  тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен  $m$ .
- (3) Набор столбцов матрицы  $A$  является базисом в  $F^m$  тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг  $m = n$ . В этом случае  $A$  обратима.
- (4) Если все строки матрицы  $A$  линейно независимы, и все столбцы линейно независимы, то  $m = n$ , а  $A$  обратима.

*Доказательство.* Пункты (1) и (2) очевидны. Из них следует, что столбцовый ранг равен  $m = n$  тогда и только тогда, когда набор столбцов — базис в  $F^m$ . В этом случае  $A$  — матрица перехода от стандартного базиса к базису из столбцов матрицы  $A$ , а значит  $A$  обратима.

Количество линейно независимых столбцов и строк не может быть больше размерности, следовательно,  $n \leq m \wedge m \leq n \implies n = m$ . □

**Lemma 4.** Умножение матрицы на обратимую (слева или справа) не меняет ее столбцовый и строчной ранги.

*Доказательство.* Умножение матрицы оператора слева на обратимую матрицу соответствует замене базиса в его области значений, а справа — в области определения. Так как столбцовый ранг оператора не зависит от выбора базиса, то столбцовый ранг не меняется при умножении.

Строчный ранг равен столбцовому рангу транспонированной к ней, а транспонированная к обратной — обратима.  $\square$

## Вопрос 15 PDQ-разложение. Равенство строчного и столбцового рангов матрицы

**Theorem 14** (PDQ-разложение). Пусть  $U, V$  — конечномерные пространства. Для любого линейного отображения  $L : U \rightarrow V$  существуют базисы пространств  $U$  и  $V$ , в которых матрица отображения  $L$  имеет вид  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Любая матрица  $A \in M_{m \times n}(F)$  представляется в виде  $A = PDQ$ , где  $P \in GL_m(F)$ ,  $Q \in GL_n(F)$ , а  $D$  записывается в блочном виде  $D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . При этом размер единичной матрицы равен строчному и столбцовому рангу  $A$ .

Доказательство.

**Первое утверждение** Выберем базис  $(f_1, \dots, f_k)$  ядра оператора  $L$  и дополним его до базиса  $u = (g_1, \dots, g_l, f_1, \dots, f_k)$  пространства  $U$ . Тогда векторы  $L(g_1), \dots, L(g_l)$  линейно независимы и их можно дополнить до базиса  $v$  пространства  $V$ . Получаем нужную матрицу отображения  $L$  в базисах  $u, v$ .

**Второе утверждение** Пусть  $L : F^n \rightarrow F^m$  — оператор умножения на матрицу  $A$ . Выберем базис  $u$  пространства  $F^n$  и  $v$  — пространства  $F^m$  так, чтобы  $L_v^u = D$ . Тогда

$$A = A_e^e = C_{e \rightarrow u} L_v^u C_{v \rightarrow e} = PQD,$$

где  $e$  — стандартный базис пространства столбцов.

Так как ранги при умножении обратимую матрицу не меняются, столбцовый и строчный ранги равны рангу единичной матрицы.  $\square$

**Lemma 5.** Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда ее ранг равен ее размеру.

**Theorem 15** (Кронекера-Капелли). Система  $Ax = b$  совместима тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A$  равен рангу расширенной матрицы  $(Ab)$ .

## Вопрос 16 Разложение Брюа

**Def 25.** Матрица  $A$  называется верхней (нижней) треугольной, если  $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$  ( $i < j$ ).

Треугольная матрица с 1 на диагонали называется унитреугольной.

**Designation.**

$B = B_n(F)$  — множество верхних треугольных матриц.

$B^- = B_n^-(F)$  — множество нижних треугольных матриц.

$U = U_n(F)$  — множество верхних унитреугольных матриц.

$U^- = U_n^-(F)$  — множество нижних унитреугольных матриц.

$W = W_n$  — множество матриц перестановок, то есть матрицы, отличающиеся от единичной перестановкой столбцов.

**Lemma 6.** Множества  $W, B, B^-, U, U^-$  являются подгруппами в  $GL_n(F)$ .

**Theorem 16** (разложение Брюа).  $\mathrm{GL}_n(F) = BWB$

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall a \in \mathrm{GL}_n(F) \exists b, c \in D, w \in W : a = bwc$ .

По индукции по  $n$  докажем, что, домножая  $a$  слева и справа на верхнетреугольные матрицы, можно получить матрицу перестановки.

Пусть  $i$  — наибольший индекс, для которого  $a_{i1} \neq 0$ . Запишем  $a$  в виде

$$a = \begin{pmatrix} x & * \\ a_{i1} & z \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i-11} \end{pmatrix}, \quad \text{а } z = (a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

Домножая  $a$  слева на верхнетреугольную матрицу, получим матрицу, у которой первый столбец совпадает с  $i$ -м столбцом единичной матрицы. После этого, домножая справа на подходящую верхнетреугольную матрицу можем сделать  $i$ -ю строку равной первой строке единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} E & -\frac{x}{a_{i1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ a_{i1} & z \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{a_{i1}} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых матриц } f, g.$$

Заметим, что так как строки полученной матрицы линейно независимы, то и строки матрицы  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  тоже линейно независимы. Поэтому последняя матрица обратима и к ней можно применить индукционное предположение. Следовательно, существуют матрицы  $u, v \in B_{n-1}(F) : u \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} v \in W_{n-1}$ . Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ 0 & u^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \text{где } u^{(1)} \in B_{i-1}(F), \quad u^{(3)} \in B_{n-i}(F).$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ 0 & u^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot v$$

является матрицей-перестановкой, следовательно,

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} & 0 & u^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

— тоже матрица-перестановка.

Так как обратная к верхнетреугольной — верхнетреугольная, получаем нужное утверждение. □

**Def 26.** Множество  $BwB$  при фиксированном  $w$  называется клеткой Брюа.

**Statement 11.** Две различные клетки Брюа не пересекаются.



## Вопрос 17 Разложение Гаусса

**Def 27.** Главная подматрица матрица  $A$  порядка  $k$  — подматрица, стоящая на пересечении первых  $k$  строк и первых  $k$  столбцов.

**Lemma 7.** Умножение матрицы на нижнюю унитреугольную слева и на верхнюю унитреугольную справа не меняет обратимости главных подматриц.

*Доказательство.*  $a^{(k)}$  — главная подматрица  $k \times k$  в  $a$ . Умножим на нижнюю унитреугольную матрицу слева:

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где  $b \in U^-(F)$ . Обратимость  $a^{(k)}$  равносильна обратимости  $ba^{(k)}$ , так как  $b$  обратима. □

**Lemma 8.** Все главные подматрицы обратимы тогда и только тогда, когда матрица раскладывается в произведение обратимых унитреугольных верхнетреугольной и нижнетреугольной.

*Доказательство.* Доказываем следствие влево. Индукция по  $n$ .

База:  $n = 1$  — очевидно

Переход:

$$a^{(n)} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к  $a^{(n-1)}$ . Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. □

**Lemma 9.**  $\forall a \in \text{GL}_n(F) \exists w \in W$  : все подматрицы в  $wa$  обратимы.

*Доказательство.* Индукция по  $k$ . Докажем, что существует перестановка  $a \in \text{GL}_n(F)$  такая, что главные подматрицы размера не более  $k \times k$  обратимы.

База:  $k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем  $i$ -ю строку с первой.

Переход:  $k \rightarrow k+1$  Все столбцы обратимой матрицы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы, составленной из первых  $k$  столбцов, равен  $k$  Тогда существует  $k$  линейно независимых строк этой матрицы. Переставим эти строки на первые  $k$  мест.

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы  $a^{(k)}$  главная подматрица порядка  $k$  обратима. По индукционному предположению все меньшие главные подматрицы в  $a^{(k)}$  обратимы. □

**Theorem 17** (Разложение Гаусса).  $\mathrm{GL}_n(F) = WB^-B$

*Доказательство.* Рассмотрим  $a \in \mathrm{GL}_n(F)$ . Построим перестановку  $w$ , чтобы все главные подматрицы были обратимы. Далее домножим справа и слева на унитарные матрицы так, чтобы получить верхнетреугольную матрицу:  $wa \in B^-B$ . Домножая на  $B, B^-$ , получим, что хотели.  $\square$

## Вопрос 18 Определение группы, подгруппы, прямое произведение групп

**Def 28.** Множество  $X$  с операцией  $*$ , удовлетворяющее

1.  $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$  (ассоциативность);
2.  $\exists e \in X \forall a \in X : e * a = a * e = a$  (нейтральный элемент);
3.  $\forall a \in X \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$  (обратный элемент),

называется группой.

**Def 29.** Непустое подмножество  $H \subset G$  называется подгруппой  $G$ , если  $H$  — группа относительно операции, заданной в  $G$ .

**Designation.** Обозначается:  $H \leq G$

**Lemma 10.**  $H \subset G$ .  $H$  — подгруппа тогда и только тогда, когда  $\forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$ .

**Property.** Любая группа имеет две тривиальные подгруппы: сама группа и множество, состоящее из одного нейтрального элемента.

**Def 30.** Пусть  $G_1, G_2$  — группы с операциями  $*_1$  и  $*_2$  соответственно. Прямое произведение  $G = G_1 \times G_2$  — декартово произведение  $G_1$  и  $G_2$  с операцией  $*$ :

$$(g_1, g_2) * (g'_1, g'_2) = (g_1 *_1 g'_1, g_2 *_2 g'_2), \quad g_1, g'_1 \in G_1, \quad g_2, g'_2 \in G_2.$$

Аналогично определяется произведение любого семейства групп.

## Вопрос 19 Подгруппа, порожденная множеством. Классификация циклических подгрупп

**Def 31.** Пусть  $X$  — подмножество группы  $G$ . Подгруппой, порожденной множеством  $X$ , называется наименьшая группа по включению, содержащая  $X$ .

**Designation.** Подгруппа, порожденная  $X$ , обозначается  $\langle X \rangle$ .

**Def 32.** Группа, порожденная одним элементом, называется циклической.

**Lemma 11.**  $\langle X \rangle = \{x_1 \dots x_k \mid k \in \mathbb{Z}_+, x_i \in X \cap X^{-1}\}$ .

**Statement 12.** Любая циклическая группа изоморфна  $\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Z}_n$ .

*Доказательство.*  $G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ . Разберем два случая:

1.  $g^m \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \implies \nexists a, b \in \mathbb{Z} : g^a = g^b$ . Тогда отображение

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad \varphi(m) = g^m \text{ — изоморфизм.}$$

$$\varphi(m+k) = g^{m+k} = g^m g^k = \varphi(m)\varphi(k).$$

2. Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $g^n = 1$ . Заметим, что любое целое  $l$  можно с остатком разделить на  $n : l = ns + r, \quad 0 \leq r < n$ . Тогда

$$g^l = g^{ns} g^r = g^r.$$

Следовательно,  $\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ . Тогда отображение

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad k \rightarrow g^k \text{ — изоморфизм.}$$

□

## Вопрос 20 Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа

**Def 33.** Пусть  $H \leq G$ . Множества  $gH$  и  $Hg$  называются левым и правым смежными классами по подгруппе  $H$  соответственно.

**Designation.**

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$  — множество левых смежных классов.

$H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$  — множество правых смежных классов.

**Def 34.** Отношение сравнимости по модулю  $H$ :

$$a \equiv b \pmod{H} \iff a \in bH.$$

**Lemma 12.** Сравнимость по модулю  $H$  — отношение эквивалентности. Два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

*Доказательство.*

Рефлексивность:  $a = ae \in aH$

Симметричность:  $a \in bH \implies \exists h \in H : a = bh \implies b = ah^{-1} \in aH$

Транзитивность:  $a \in bH, b \in cH \implies a = bh, b = ch' \implies a = chh' \in cH$

Второе утверждение вытекает из того, что классы сравнимости — левые смежные классы по подгруппе. □

**Corollary 2.**

$$G = \bigsqcup_{g \in X} gH, \text{ где } X \text{ — множество представителей левых смежных классов по } H$$

**Lemma 13.**

$$|g_1H| = |g_2H|, \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad H \leq G.$$

*Доказательство.* Такое отображение будет изоморфизмом:

$$\left( \begin{array}{c} g_1H \rightarrow g_2H \\ x \mapsto g_2g_1^{-1}x \end{array} \right).$$

Обратное:  $y \mapsto g_1g_2^{-1}y$

□

**Theorem 18** (Лагранж).  $G$  — конечная группа. Тогда  $|G| = |H| \cdot |G : H|$ , где  $|G : H|$  — количество левых смежных классов  $G$  по  $H$ .  $|G : H|$  — индекс  $H$  в  $G$ .

*Доказательство.* Из прошлой леммы и следствия □

**Lemma 14.** Множества  $G/H$  и  $H \setminus G$  равномощны.

*Доказательство.* Зададим биекцию  $\varphi : G/H \rightarrow H \setminus G$ ,  $aH \mapsto (aH)^{-1} = Ha^{-1}$ . □

## Вопрос 21 Порядок элемента группы.

**Def 35.** Порядок  $g \in G$  — наименьшее натуральное число, такое что  $g^n = 1$ .  
Второе определение:  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ .

**Theorem 19.** Пусть  $G$  — группа,  $g \in G$ . Тогда  $|G| : \text{ord}(g)$

*Доказательство.* Применим теорему Лагранжа для подгруппы порожденной  $g$ :  $|G| : |\langle g \rangle|$ ,  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$  □

**Theorem 20.** Пусть  $\varphi : G \rightarrow H$  — гомоморфизм.  $g \in G$ ,  $\text{ord}(g) = n$ . Тогда  $\text{ord}(g) : \text{ord}(f(g))$ .

*Доказательство.*

$$1_H = f(1_G) = f(g^n) = f(g)^n \implies n : \text{ord}(f(g)).$$

□

**Statement 13.** Пусть  $G$  — абелева группа,  $a, b \in G$ . Тогда  $\text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) : \text{ord}(ab)$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = n$ ,  $\text{ord}(ab) = m$

$$(ab)^n = a^n b^n = 1 \implies n : m.$$

□

**Theorem 21.** Пусть  $G$  — абелева группа,  $a, b \in G$ ,  $\gcd(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1$ . Тогда  $\text{ord}(ab) = \text{ord}(a)\text{ord}(b)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = H$ . Это подгруппа  $\langle a \rangle$  и  $\langle b \rangle$ . По теореме Лагранжа  $\text{ord}(a) : |H|$  и  $\text{ord}(b) : |H|$ . Так как порядки  $a$  и  $b$  взаимно просты,  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ . Тогда

$$a^s = b^t \iff a^s = b^t = e.$$

Это равносильно тому, что

$$s : \text{ord}(a), \quad t : \text{ord}(b).$$

Если  $(ab)^n = e$ , то  $a^n = b^{-n}$ , значит  $n : \text{ord}(a) \wedge n : \text{ord}(b)$ . Порядки взаимно просты, следовательно  $n : \text{ord}(a)\text{ord}(b)$ . С другой стороны, по прошлому утверждению  $\text{ord}(a)\text{ord}(b) : \text{ord}(ab)$ . Следовательно,

$$\text{ord}(a)\text{ord}(b) = \text{ord}(ab).$$

□

## Вопрос 22 Экспонента группы, критерий цикличности группы

**Def 36.** Экспонентой или показателем группы  $G$  называется натуральное число  $d : g^d = e \quad \forall g \in G$ . Если такого  $d$  не существует, то говорят, что экспонента группы равна бесконечности.

**Theorem 22** (свойства экспоненты группы).

- (1) Экспонента группы равна НОКу всех порядков ее элементов.
- (2) Если группа конечна, то ее экспонента делит ее порядок.
- (3) Экспонента прямого произведения групп  $G_1 \times \dots \times G_l$  равна НОКу экспонент этих групп.
- (4) Если  $G$  — абелева группа конечной экспоненты, то существует элемент, порядок которого равен ее экспоненте.
- (5) Конечная абелева группа является циклической тогда и только тогда, когда ее экспонента равна ее порядку.

*Доказательство.* Докажем пункт (4). Пусть  $d = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$  — экспонента группы  $G$ , где  $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{P}$ . Тогда  $\exists g_1, \dots, g_l \in G$ , порядки которых делятся на  $p_1^{k_1}, \dots, p_l^{k_l}$  соответственно.

Если  $\text{ord}(g) = mn$ , то  $\text{ord}(g^m) = n$ . Возведем  $g_1, \dots, g_l$  в нужные степени и считаем, что  $\text{ord}(g_i) = p_i^{k_i} \quad \forall i \in [1, l]$ .

Воспользуемся теоремой 21, и по индукции докажем, что  $\text{ord}(g_1 \cdot \dots \cdot g_l) = \text{ord}(g_1) \cdot \dots \cdot \text{ord}(g_l) = d$ .  $\square$

## Вопрос 23 Нормальные подгруппы. Гомоморфизмы групп. Свойства ядра и образа.

### i Нормальные подгруппы

**Def 37.** Пусть  $H \leq G$ .  $H$  называется нормальной подгруппой, если  $gH = Hg \quad g \in G$ .

**Designation.** Обозначается:  $H \trianglelefteq G$ .

*Note.*  $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G \iff g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall g \in G \iff H \trianglelefteq G$

### ii Гомоморфизмы групп

**Def 38.** Пусть  $(G, *)$ ,  $(H, \#)$  — группы. Функция  $f : G \rightarrow H$  называется гомоморфизмом, если  $f(a \cdot b) = f(a) \# f(b) \quad \forall a, b \in G$ .

Образ гомоморфизма  $\text{Im } f = \{f(g) \mid g \in G\}$ .

Ядро гомоморфизма  $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ .

**Def 39.**

Мономорфизм — инъективный гомоморфизм.

Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

**Lemma 15.** Если  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп,  $f(e_G) = e_H$  и  $\forall x \in G : f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

**Lemma 16.** Пусть  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп,  $g \in G$ ,  $h = g(g)$ . Тогда  $f^{-1}(h) = g\text{Ker } f$ .

Гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро состоит из одного элемента.

**Lemma 17.** Образ гомоморфизма групп является подгруппой, а ядро — нормальной подгруппой.

## Вопрос 24 Существование эпиморфизма групп с данным ядром, факторгруппа.

**Statement 14.** Для любой нормальной подгруппы  $H$  группы  $G$  существует группа  $F$  и эпиморфизм  $\pi : G \rightarrow F$ , ядро которого равно  $H$ .

*Доказательство.* Пусть  $F = G/H$  и зададим отображение  $\pi : G \rightarrow F$  по формуле  $\pi(x) = xH$ . Зададим операцию в  $F$  по формуле  $(xH) \cdot (yH) = xyH$ . Так как  $H \trianglelefteq G$ , эта операция не зависит от выбора представителей  $x$  и  $y$  смежных классов  $xH$  и  $yH$ :

$$xhyh' = xy(y^{-1}hy)h' \in xyH.$$

Ассоциативность операции следует из ассоциативности операций в  $G$ . Нейтральный элемент — смежный класс  $eH = H$ , обратный для  $xH$  — смежный класс  $x^{-1}H$ . Следовательно,  $H$  — группа. По построению  $F$  сразу получаем, что  $\pi$  — гомоморфизм. При этом  $\pi$  сюръективно.

$$\pi(x) = e_{G/H} = H \iff x \in H.$$

Следовательно,  $\text{Ker } \pi = H$ . □

**Def 40.** Группа, построенная в доказательстве, называется факторгруппой  $G$  по  $H$ , а отображение  $\pi$  — канонической проекцией или гомоморфизмом редукции по модулю  $H$ .

## Вопрос 25 Универсальное свойство факторгруппы и теорема о гомоморфизме

**Theorem 23** (универсальное свойство факторгруппы). Пусть  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм, а  $N \trianglelefteq G$ . Если  $\text{Ker } f \geq N$ , то существует единственный гомоморфизм  $g : G/N \rightarrow H$ , такой что  $f = g \circ \pi$ . Если  $f$  — эпиморфизм, то  $g$  — эпиморфизм. Если  $\text{Ker } f = N$ , то  $g$  — мономорфизм.

*Доказательство.* Пусть  $x \in G$ .  $f = g \circ \pi \implies$

$$g(xN) = f(x) \tag{1}$$

Если  $y$  — другой представитель смежного класса  $xN$ , то  $y = xn$  для некоторого  $n \in N$ , и  $g(yN) = f(y) = f(x)f(n) = g(x)$ , так как  $n \in N \leq \text{Ker } f$ . Следовательно, формула 1 корректно определяет отображение  $g$ . Оно является гомоморфизмом из определения умножения смежных классов. Очевидно, что  $g$  единственно, так как удовлетворяет  $f = g \circ \pi$ .

Если композиция сюръективна, то  $g$  обязан быть сюръективным, так как применяется последним.

Если  $\text{Ker } f = N$ ,

$$xN \in \text{Ker } g \iff x \in \text{Ker } f = N \iff xN = 1_{G/N}.$$

□

**Theorem 24** (о гомоморфизме групп). Пусть  $f : G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп. Тогда

$$\text{Im } f \cong G/\text{Ker } f.$$

*Доказательство.* Отображение  $\bar{f} : G \rightarrow \text{Im } f$ , заданное формулой  $\bar{f}(x) = f(x)$  является эпиморфизмом, причем его ядро равно  $\text{Ker } f$ . По универсальному свойству факторгруппы существует изоморфизм  $\text{Im } f \rightarrow G/\text{Ker } f$ . □

## Вопрос 26 Сопряженные элементы, коммутаторы, коммутант.

### i Сопряженные элементы

**Def 41.** Пусть  $x, y \in G$ . Элемент  $x^y := y^{-1}xy$  называется *правым сопряженным* к  $x$  при помощи  $y$ . А  ${}_y x = x^{y^{-1}} = yxy^{-1}$  — *левым сопряженным* к  $x$  при помощи  $y$ .

**Lemma 18.** Пусть  $x, y, z \in G$ . Тогда

1.  $(xy)^z = x^z \cdot y^z$  и  ${}^z(xy) = {}^z x \cdot {}^z y$ , то есть сопряжение при помощи  $z$  — гомоморфизм.
2.  ${}^y {}^z x = {}^z ({}_y x)$ , то есть отображение из группы  $G$  в группу автоморфизмов группы  $G$ , переводящее элемент в левое сопряжение при помощи этого элемента, является гомоморфизмом.

*Note.* Отношение « $x$  сопряжено с  $y$ » — отношение эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *классами сопряженных элементов*.

**Lemma 19.** Пусть  $H = \langle X \rangle$  — подгруппа в группе  $G = \langle Y \rangle$ . Тогда  $H \trianglelefteq G$  тогда и только тогда, когда  $\forall x \in X, y \in Y : x^y \in H$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Очевидно.

$\Leftarrow$  Пусть  $h \in H$ , а  $g = y_1 \cdot \dots \cdot y_m \in G, y_i \in Y$ .

Индукция по  $m$ .

База:  $m = 0, g = 1$ .

Переход:  $m - 1 \rightarrow m$ . По предположению индукции  $h^{y_1 \dots y_{m-1}} \in H$ , следовательно,  $h^{y_1 \dots y_{m-1}} = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  и  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Тогда  $h^g = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{y_m} = x_1^{y_m} \cdot \dots \cdot x_n^{y_m}$ , а каждый сомножитель лежит в  $H$  по условию.

□

**Def 42.** Наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащая подгруппу  $H$  называется *порождающим замыканием*  $H$  и  $G$ .

**Designation.** Обозначается:  $H^G$ .

*Note.*  $H^G$  порождается всеми элементами вида  $h^g, h \in H, g \in G$ .

### ii Коммутатор

**Def 43.** Коммутатором называется элемент  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ .

**Property.** Выполнены следующие коммутаторные формулы:

1.  $[x, y]^{-1} = [y, x]$
2.  $[x, yz] = [x, y] \cdot {}^y[x, z]$
3.  $[x, y]^z = [x^z, y^z]$

### iii Коммутант

**Def 44.** Пусть  $X, Y$  — подгруппы  $G$ . Взаимным коммутантом этих подгрупп называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами  $[x, y]$ ,  $x \in X, y \in Y$ .

**Designation.** Обозначается:  $[X, Y]$ .

**Lemma 20.** Пусть  $X$  и  $Y$  — подгруппы в  $G$ . Тогда  $[X, Y] \subseteq \langle X \cup Y \rangle$ .

*Доказательство.* По формуле 2 из свойств коммутаторов ii

$$[x, y]^z = z^{-1}[x, y] = [x, z^{-1}]^{-1} \cdot [x, z^{-1}y] \in [X, Y].$$

Аналогично, для  $x, z \in X, y \in Y$ :

$$[x, y]^z = ([y, z]^{-1})^z = (z^{-1}[y, x])^{-1} = ([y, x^{-1}]^{-1} \cdot [y, z^{-1}x])^{-1} = [z^{-1}z, y] \cdot [z^{-1}, y]^{-1} \in [X, Y].$$

По лемме 19 получаем нормальную подгруппу. □

**Lemma 21.** ?? Пусть  $S_X$  и  $S_Y$  — множества образующих подгрупп  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда  $[X, Y] = \langle [s, t] \mid s \in S_X, t \in S_Y \rangle^{\langle X \cup Y \rangle} = Z$ .

*Доказательство.* По лемме 20  $Z \subseteq [X, Y]$ . Докажем, что любой образующий элемент  $[X, Y]$  содержится в  $Z$ .

Пусть  $s \in S_X, y = t_1 \dots t_n, t_i \in S_Y$ . По индукции докажем, что  $[s, y] \in Z$ .

База:  $n = 1$ . По определению  $Z$ .

Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ .

$$[s, y] = [s, t_1] \cdot {}^{t_1}[s, t_2 \dots t_n].$$

По индукционному предположению  $[s, t_2 \dots t_n] \in Z$ , следовательно,  $[s, y] \in Z \quad \forall s \in S_X, y \in Y$ .

Аналогично для  $s \in S_Y, x = t_1, \dots, t_n, t_i \in S_X$ . □

**Statement 15.**  $\varphi : G \rightarrow A$  — гомоморфизм.  $A$  — абелева  $\implies [G, G] \subseteq \text{Ker } \varphi$ .

*Доказательство.*

$$\varphi([g, h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1.$$

Тогда

$$[g, h] \in \text{Ker } \varphi, \quad \forall g, h \in G.$$

Из этого следует, что  $[G, G] \subseteq \text{Ker } \varphi$ . □

## Вопрос 27 Соотношения между трансвекциями. Взаимные коммутанты верхнетреугольных групп. Порождение верхнетреугольной группы.

**Designation.** Пусть  $F$  — поле,

$$U_n^{(k)} = U_n^{(k)}(F) = \{a \in M_n(F) \mid a_{ii} = 1, a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, j - i < k\}.$$

$$U_n = U_n F := U_n^{(1)}(F) \wedge U_n^{(k)} = \{1\} \quad k \geq n.$$

**Lemma 22.** Группа  $U_n^{(k)}$  порождена трансвекциями  $t_{ij}(\alpha)$  по всем  $\alpha \in F \wedge j - i \geq k$ .



**Statement 16.** Пусть  $i, j, k, h$  — попарно различные индексы. Тогда

$$\begin{aligned} t_{ij}(\alpha)t_{ij}(\beta) &= t_{ij}(\alpha + \beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{jk}(\beta)] &= t_{ik}(\alpha\beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{ki}(\beta)] &= t_{kj}(-\alpha\beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{hk}(\beta)] &= e. \end{aligned}$$

**Lemma 23.** Группа  $U_n^{(k)}$  нормальна в  $U_n$ . Более того,  $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] = U_n^{(k+m)}$ .

*Доказательство.* Используем лемму ?? и формулы из прошлого утверждения, чтобы доказать нормальность.

Из формул прошлого утверждения также следует

$$[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] \subset U_n^{(k+m)}.$$

Так как  $U_n^{(k+m)}$  нормальна, из леммы ?? следует, что  $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}]$  содержится в этой подгруппе. С другой стороны, каждая образующая группы  $U_n^{(k+m)}$  — коммутатор образующих  $U_n^{(k)}$  и  $U_n^{(m)}$ . А тогда выполнено требуемое равенство.  $\square$

**Вопрос 28** Приведенное разложение Брюа. Соотношение между клетками Брюа и Гаусса.

**Вопрос 29** Симметрическая группа. Циклическая запись перестановки. Классы сопряженных элементов в  $S_n$ .

## i Симметрическая группа

**Def 45.** Пусть  $X$  — множество. Множество биекций  $X \rightarrow X$  с операцией композиции называется симметрической группой множества  $X$  и обозначается через  $S_X$ .

**Def 46** (Перестановка).  $\sigma \in S_n \iff \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$

Табличная запись перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j \neq i_k (j \neq k).$$

Циклическая запись перестановки:

$$\tau = (j_1, \dots, j_n) \iff \tau(j_1) = j_2, \tau(j_2) = j_3, \dots, \tau(j_{n-1}) = j_n, \tau(j_n) = j_1, \quad \tau(i) = i, \forall i \neq j_k.$$

**Def 47.** Перестановки  $(j_1 \dots j_n)$ ,  $(k_1 \dots k_m)$  называются **независимыми**, если  $j_h \neq j_l \quad \forall h, l$ .

**Lemma 24.** Любая перестановка равна произведению независимых (композиции) циклов.

**Def 48.** Циклический (цикленный) тип перестановки — набор из длин независимых циклов, в произведение которых раскладывается перестановка.

*Note.* В определении слово «набор» подразумевает мультимножество, то есть порядок не важен, но элементы повторяются.

**Ех.**  $(12)(345) \in S_6$  записывают  $2 + 3$ .

**Lemma 25.**

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)).$$

Следовательно, сопряжение не меняет циклический тип.

*Доказательство.*  $\sigma(i_1 \dots i_k) \sigma^{-1}(\sigma(t_j)) = \sigma \circ (i_1 \dots i_k) \sigma(i_{l+1 \bmod m})$ , где  $\bmod m$  — почти модуль (вместо 0 будет  $m$ ).  $\square$

**Def 49.** Отношение на группе  $G$  :

$$x \sim_c y \iff \exists z : x = y^z.$$

$$x = y^z \wedge y = ab \implies x = (a^b)^z = a^{bz}.$$

Класс эквивалентности « $\sim_c$ » — класс сопряженных элементов.

**Theorem 25.** Класс сопряженных элементов в  $S_n$  состоит из всех перестановок фиксированного циклического типа.

*Доказательство.* Следует из леммы 25  $\square$

**Ех.** Рассмотрим группу  $S_4$  и перестановки циклического типа  $2 + 2$ :

$$\begin{aligned} &(12)(34) \\ &(13)(24) \\ &(14)(32) \end{aligned}$$

$$\sigma(12)(34) \sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$$

Еще есть нейтральный класс  $e$  и  $2, 3, 4$ . Двумерная группа Клейна

$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

— единственная нормальная подгруппа в  $S_n$  для любого  $n$ , индекс которой более 2.

**Statement 17.**  $\text{ord}(ab) \mid \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$ . Порядок перестановки равен НОКу порядков независимых циклов.

## Вопрос 30 Транспозиции и инверсии. Четность перестановки.

**Def 50** (Инверсия). Пусть  $\sigma \in S_n$ . Инверсия в перестановке  $\sigma$  — пара  $(i, j) : i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Def 51** (Четность перестановки).

$$\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\sigma \mapsto \text{количество инверсий по модулю 2}.$$

**Def 52.** Транспозиция — циклическая перестановка длины 2.

$$\tau(i) = \tau(j), \tau(j) = \tau(i), \tau(k) = k.$$

**Lemma 26.** Любая перестановка  $\sigma$  раскладывается в произведение транспозиций соседних индексов.

$$S_n = \langle (12), (23), \dots, (n-1 \ n) \rangle.$$

*Доказательство.* Индукция по количеству инверсий  $I$  в  $\sigma \in S_n$ .

База:  $I = 0$  Это  $\sigma = id$ .

Переход:  $I > 0$ . Заметим, что

$$\exists i : \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

Тогда рассмотрим  $\tau = \sigma \circ (i, i+1)$ .

$$\tau(i) = \sigma(i+1) < \tau(i+1) = \sigma(i).$$

Так как  $\tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k \notin \{i, i+1\}$ , количество инверсий стало на одну меньше, чем количество инверсий в  $\sigma$ . Теперь по предположению индукции полученная перестановка раскладывается, а тогда и  $\sigma$  раскладывается.  $\square$

**Lemma 27.**  $\tau = \sigma \circ (i, i+1) \Rightarrow |I(\tau) - I(\sigma)| = 1$

**Lemma 28.** Если  $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ ,  $\forall i : \tau_i$  — транспозиция соседних индексов, то

$$\varepsilon(\sigma) \equiv k \pmod{2}.$$

**Theorem 26.**  $\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  — гомоморфизм групп.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k \\ \rho &= \tau_{k+1} \cdot \dots \cdot \tau_n \quad \forall i : \tau_i = (j, j+1). \\ \sigma \cdot \rho &= \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_n \end{aligned}$$

Проверим требуемые свойства:

$$\varepsilon \equiv k \pmod{2}, \quad \varepsilon(\rho) \equiv n - k \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\sigma\rho) \equiv m \pmod{2} \equiv \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho) \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\rho^{-1}\sigma\rho) \equiv -\varepsilon(\rho) + \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho)$$

$$\varepsilon((i_1, \dots, i_k)) = \varepsilon((1, \dots, k)) \equiv k - 1 \pmod{2} \quad \square$$

## Вопрос 31 Определение кольца, подкольца, идеала, прямое произведение колец

### i Кольцо

**Def 53.** Кольцо — множество  $R$ , на котором заданы операции  $+$ ,  $\times$ , обладающие следующими свойствами  $\forall a, b, c \in R$ :

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения)
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (ассоциативность сложения)
3.  $\exists 0 \in R : a + 0 = 0 + a = a$  (нейтральный элемент по сложению)
4.  $\forall a \in R \exists b \in R : a + b = b + a = 0$  (обратный элемент по сложению)
5.  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  (ассоциативность умножения)
6.  $\begin{cases} a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$  (дистрибутивность)

Кольцо является кольцом с единицей, если

$$\exists e \in R \forall a \in R : a \times e = e \times a = a.$$

Кольцо является коммутативным кольцом, если

$$\forall a, b \in R : a \times b = b \times a.$$

**Property.**

1. *Нейтральный по сложению единственный.*
2. *Обратный элемент по сложению существует и единственен для любого элемента кольца.*
3. *Нейтральный по умножению единственен, если существуют.*
4.  $\forall a \in R : a \times 0 = 0$
5.  $-b = (-1) \times b$
6.  $(-a) \times b = (-ab)$
7.  $(-a) \times (-b) = (ab)$

**ii Подкольцо**

**Def 54.** Подмножество  $A \subset R$  называется **подкольцом**  $R$ , если  $A$  само является кольцом относительно операций, определенных в  $R$ .

**Designation.** Говорят, что  $R$  — расширение кольца  $A$ .

**Property.**

1. *Ноль и единица кольца являются нулем и единицей в подкольце.*
2. *Подкольцо наследует свойство коммутативности.*
3. *Пересечение любого набора подколец — подкольцо.*

**Def 55.** Пусть  $X$  — подмножество кольца  $R$ . Подкольцом, порожденным множеством  $X$ , называется наименьшее подкольцо в  $R$ , содержащее  $X$ .

**Lemma 29.** Подкольцо, порожденное  $X$ , состоит из всевозможных сумм элементов вида  $x_1 \times \dots \times x_k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X \cup \{1\}$  (если имеется ввиду кольцо без 1, то  $x_i \in X$ ).

**iii Идеалы**

**Def 56.** Аддитивная подгруппа  $I$  кольца  $R$  называется **левым (правым) идеалом**, если  $\forall r \in R, x \in I : rx \in I$  ( $xr \in I$ ).

Двусторонний идеал — идеал, являющийся левым и правым.

**Property.**

1. *Пересечение любого числа идеалов — идеал.*

**Def 57.** (Левым, правым или двусторонним) идеалом, порожденным подмножеством  $X$  кольца  $R$ , называется наименьший (левый, правый или двусторонний) идеал, содержащий  $X$ .

Идеал коммутативного кольца, порожденный одним элементом, называется **главным идеалом**.

**Designation.** Левый идеал, порожденный множеством  $X$ , обозначается  $\sum_{x \in X} xR$  (правый —  $\sum_{x \in X} Rx$ ). Если  $R$  — коммутативное кольцо, то идеал, порожденный  $X \subseteq R$  обозначают  $(X)$ .

**Lemma 30.** (Левый, правый или двусторонний) идеал, порожденный  $X$ , состоит из всевозможных сумм элементов вида  $(rx, xr$  или  $rxs)$ , где  $r, s \in R$ ,  $x \in X \cup \{1\}$  (если имеется ввиду кольцо без 1, то  $x_i \in X$ ).

## iv Прямое произведение колец

**Def 58.** Произведение колец  $R$  и  $S$  — множество пар  $(r, s)$ ,  $r \in R$ ,  $s \in S$  с покомпонентными операциями  $\forall r_1, r_2 \in R, s_1, s_2 \in S$ :

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$\bullet (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

## Вопрос 32 Гомоморфизмы колец, ядро, образ, слои

**Def 59.** Пусть  $R, A$  — кольца. Функция  $f : R \rightarrow A$  называется гомоморфизмом колец, если

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned} \quad \forall a, b \in R.$$

Для гомоморфизмов колец с единицей будем требовать также, чтобы  $f(1_R) = 1_A$ .

**Def 60.**  $f : R \rightarrow A$  — гомоморфизм.

Образ гомоморфизма  $f$  —  $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in R\}$

Ядро гомоморфизма  $f$  —  $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$

Мономорфизм — инъективный гомоморфизм.

Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Если между двумя кольцами существует изоморфизм, они называются **изоморфными**.

**Lemma 31.** Пусть  $f : R \rightarrow A$  — гомоморфизм колец. Тогда  $f(0) = 0$ , и  $\forall x \in R : f(-x) = -f(x)$ .

Если  $f$  — гомоморфизм колец с единицей, и  $x \in R^*$ , то  $f(x) \in A^*$  и  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ .

**Lemma 32.** Пусть  $f : R \rightarrow A$  — гомоморфизм,  $x \in R$ ,  $y = f(x)$ . Тогда  $f^{-1}(y) = x + \text{Ker } f$ .

Гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро равно  $\{0\}$ .

**Lemma 33.** Образ гомоморфизма колец является подкольцом, а ядро — двусторонним идеалом.

## Вопрос 33 Факторкольцо, существование эпиморфизма с данным ядром

**Theorem 27.** Для любого двустороннего идеала  $I$  кольца  $R$  существует кольцо  $A$  и эпиморфизм  $\pi : R \rightarrow A$ , ядро которого равно  $I$ .

*Доказательство.* Так как  $I$  — подгруппа аддитивной группы кольца, то можно рассмотреть факторгруппу  $R/I$ . Зададим умножение:

$$(r + I) \cdot (s + I) = rs + I, \quad r, s \in R.$$

Если  $r + x \in r + I$  и  $s + y \in s + I$  — другие представители классов,

$$(r + x)(s + y) = rs + (ry + xs + xy) \in rs + I.$$

Следовательно, определение корректно. Операции в  $R/I$  удовлетворяют свойствам кольца, так как операции в  $R$  удовлетворяют.

Отображение  $\pi$  зададим аналогично группам:  $\pi(x) = x + I$  — это гомоморфизм, причем сюръективный. Найдем его ядро:

$$\pi(x) = e_{R/I} = e + I = I \iff x \in I.$$

Значит,  $\text{Ker } \pi = I$ . □

**Def 61.** Кольцо  $R/I$  называется **факторкольцом**  $R$  по  $I$ , а отображение  $\pi = \pi_I$  — канонической проекцией или гомоморфизмом редукции по модулю  $I$ .

## Вопрос 34 Универсальное свойство факторкольца и теорема о гомоморфизме

**Theorem 28** (Универсальное свойство факторкольца). Пусть  $R, R'$  — кольца,  $I$  — двусторонний идеал в  $R$ ,  $f : R \rightarrow R'$ . Если  $I \subseteq \text{Ker } f$ , то существует единственный гомоморфизм  $g : R/I \rightarrow R'$  такой, что  $f = g \circ \pi$ .

Если  $\text{Ker } f = I$ , то  $g$  инъективен. Если  $f$  сюръективен, то  $g$  сюръективен.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ R/I & & \end{array}$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in R$ .  $f = g \circ \pi \implies$

$$g(x + I) = f(x) \tag{2}$$

Если  $y$  — другой представитель  $x + I$ , то  $y = x + a$  для некоторого  $a \in I$ , и  $g(y + I) = f(y) = f(x) + f(a) = g(x)$ , так как  $a \in I \subseteq \text{Ker } f$ . Проверим  $g(xy + I) = g(x + I)g(y + I)$ :

$$g(xy + I) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x + I)g(y + I).$$

Также

$$g((x + y) + I) = f(x + y) = f(x) + f(y) = g(x + I) + g(y + I).$$

Следовательно, формула 2 корректно определяет отображение  $g$ . Оно является гомоморфизмом (проверили выше). Очевидно, что  $g$  единственно, так как удовлетворяет  $f = g \circ \pi$ .

Если композиция сюръективна, то  $g$  обязан быть сюръективным, так как применяется последним.

Если  $\text{Ker } f = I$ ,

$$x + I \in \text{Ker } g \iff x \in \text{Ker } f = I \iff x + I = 1_{R/I}.$$

□

## Вопрос 35 Определение комплексных чисел, арифметические операции, геометрическое представление

### i Определение и арифметика

**Def 62.** Факторкольцо  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$  называется полем комплексных чисел.

Композиция отображений  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$  является гомоморфизмом колец с единицей. Так как  $\mathbb{R}$  — поле, то она инъективна, ее ядро — идеал в  $\mathbb{R}$ , который тривиален. Будем отождествлять элементы поля  $\mathbb{R}$  с их образами под действием этого мономорфизма и считать, что  $\mathbb{R}$  — подполе в  $\mathbb{C}$ :

$$r \in \mathbb{R} \longleftrightarrow r + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t].$$

Обозначим через  $i$  смежный класс  $t + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t]$ . Заметим, что

$$i^2 + 1 = t^2 + 1 + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t] = 0_{\mathbb{C}} \implies i^2 = -1.$$

Рассмотрим элемент поля  $p \in \mathbb{R}[t]$ :

$$\begin{aligned} p &= (t^2 + 1) \cdot f + (a + bt) \in a + bt + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t] \\ p + (t^2 + 1)\mathbb{R}[x] &= a + bi \end{aligned}$$

Значит, любой элемент поля может быть однозначно записан в виде  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Сложение определено по правилу:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Так как  $i^2 = -1$ :

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

**Def 63.** Пусть  $x, y \in \mathbb{R}$  и  $z = x + yi$ . Тогда  $x = \operatorname{Re} z$  — вещественная часть, а  $y = \operatorname{Im} z$  — мнимая часть числа  $z$ .

Число  $\bar{z} = x - yi$  называется комплексно сопряженным к  $z$ .

**Property.**

1.  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
2.  $(a + bi) + (a - bi) = 2a$
3.  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
4.  $z \in \mathbb{R} \iff z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
5.  $z \in \mathbb{R} \iff z\bar{z} \in \mathbb{R}$
6. Мультипликативный обратный:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

**Statement 18.** Отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  — автоморфизм поля  $\mathbb{C}$ .

## ii Геометрическое представление

**Def 64.** Модуль комплексного числа  $z$  —  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{z\bar{z}}$

**Def 65.**  $\arg z := \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z} & a > 0 \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z} & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(b) & a = 0 \end{cases}$$

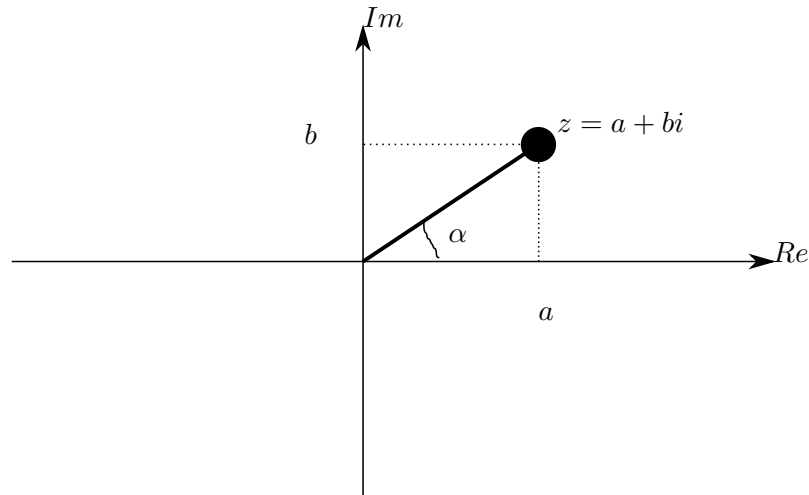


Рис. 1: Комплексное число на плоскости

Можем выразить через аргумент:

$$\begin{aligned} a &= |z| \cdot \cos \alpha \\ b &= |z| \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Тогда  $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

## Вопрос 36 Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Операции в тригонометрической форме

### i Тригонометрическая форма

Тригонометрическая форма:  $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

### Операции в тригонометрической форме

Умножение:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) \cdot |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w) = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left( \cos(\arg z) \cos(\arg w) - \sin(\arg z) \sin(\arg w) + i(\cos(\arg z) \sin(\arg w) + \sin(\arg z) \cos(\arg w)) \right) = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left( \cos(\arg z + \arg w) + i \sin(\arg z + \arg w) \right) \end{aligned}$$

Для целого  $n$  выполняется **формула Муавра**:

$$z^n = |z|^n \left( \cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z) \right).$$

Единственность представления комплексного числа в тригонометрической форме и формулу произведения в тригонометрической форме можно выразить так:

$$\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0}^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$



Так как  $\ln : \mathbb{R}_{>0}^* \rightarrow \mathbb{R}$  — изоморфизм:

**Statement 19.**  $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

*Доказательство.* Отображения  $z \mapsto (\ln |z|, \arg z)$  и  $(r, x) \mapsto e^r (\cos x + i \sin x)$  являются взаимно обратными гомоморфизмами. □

## ii Показательная форма

**Statement 20.** Напишем степенные ряды для экспоненты и тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ \sin t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &:= \cos \alpha + i \sin \alpha. \\ \varepsilon(\alpha) &= e^{i\alpha} \end{aligned}$$

**Def 66** (Показательная форма комплексного числа).

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \text{Arg} z}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

$2\pi$  — период для экспоненты.

$$e^{\alpha+2\pi i} = e^{\alpha}.$$

$$a, b \in \mathbb{R} : e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^{a(\cos b + i \sin b)}.$$

**Вопрос 37** Строение мультипликативной группы комплексных чисел, корни из 1, уравнение  $z^n = w$

**Вопрос 38** Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

**Def 67.** Элемент  $a$  кольца  $R$  называется делителем нуля, если существует  $b \in R \setminus \{0\}$  такой, что  $ab = 0$ .

Область целостности — коммутативное кольцо с единицей без нетривиальных делителей нуля (то есть кроме нуля).

**Designation.**  $R$  — коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля.

**Def 68.** Пусть задана функция  $f : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $f(0) < f(r), \quad \forall r \in R \setminus \{0\};$
2.  $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists q, r \in R : a = bq + r \wedge f(r) < f(b).$

Тогда  $R$  — евклидово кольцо с евклидовой нормой  $f$ .

**Def 69.** Кольцо  $R$  называется **кольцом главных идеалов**, если любой идеал в  $R$  является главным, то есть имеет вид  $aR$  для некоторого  $a \in R$ .

Область главных идеалов (ОГИ) — область целостности, в которой любой идеал главный.

**Theorem 29.** Евклидово кольцо является областью главных идеалов.

*Доказательство.* Пусть  $I \triangleleft R$  — нетривиальный идеал. Рассмотрим  $b \in I$  с минимальной возможной евклидовой нормой.

$$b \in I \setminus \{0\} : f(b) \leq f(a) \quad \forall a \in I \setminus \{0\}.$$

Тогда  $\exists q, r \in R$ :

$$a = bq + r, \quad f(r) < f(b).$$

$$r = \underbrace{a}_{\in I} - \underbrace{bq}_{\in I} \in I.$$

Если  $r \neq 0$ , то  $f(b) \leq f(r) < f(b)$ . Противоречие.

Значит, произвольный элемент из  $I$  делится на  $b$ , следовательно,  $I \subseteq bR$ . С другой стороны,  $b \in I \implies bR \subseteq I$ , из чего следует равенство.  $\square$

**Exs.** Примеры евклидовых колец и их норм:

Кольцо	Норма
$\mathbb{Z}$	$ \cdot $
$F[x]$ , $F$ — поле	$\deg$
Гауссовы целые числа: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$ \cdot $

**Ex.**  $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$  — не евклидово кольцо, но кольцо главных идеалов.

## Вопрос 39 Взаимно простые идеалы, их пересечение и произведение

Пусть  $R$  — кольцо,  $I, J$  — идеалы в  $R$ .

**Statement 21.** Сумма идеалов  $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$  является идеалом, причем это наименьший идеал, содержащий  $I \cup J$ .

**Def 70.** Произведение идеалов — идеал  $IJ$ , порожденный элементами  $ab$  по всем  $a \in I, b \in J$ :

$$\left\{ \sum_{i=1}^k a_i b_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}.$$

**Def 71.** Идеалы  $I$  и  $J$  кольца  $R$  называются **взаимно простыми**, если  $I + J = R$ .

**Lemma 34.** Если  $I$  и  $J$  — взаимно простые идеалы, то  $IJ = I \cap J$ .

*Доказательство.*

$\subseteq$  По определению идеала.

$\supseteq$  Пусть  $x \in I \cap J$ . Так как  $I$  и  $J$  взаимно просты, то  $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$ . Тогда  $x = xa + xb \in (I \cap J)I + (I \cap J)J \subset IJ$

$\square$

**Def 72.**  $A, B$  — кольца. Декартово произведение колец — множество

$$A \oplus B = A \times B$$

с покомпонентными операциями:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2) \end{aligned}.$$

**Theorem 30.** Пусть  $I + J = R$ . Тогда

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

*Доказательство.* Рассмотрим естественный гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow R/I \oplus R/J \\ r &\mapsto (r + I, r + J) \end{aligned}$$

Посмотрим на ядро  $\varphi$ :

$$\text{Ker } \varphi \ni r \iff \begin{cases} r + I = I \\ r + J = J \end{cases} \iff r \in I \cap J = I \cdot J$$

Докажем, что  $\varphi$  — сюръекция:

Пусть  $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$ .

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_1 \pmod{I}.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_2 \pmod{J}.$$

То есть  $\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J)$ , следовательно,  $\varphi$  — сюръективно.

По теореме о гомоморфизме колец

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

□

## Вопрос 40 Китайская теорема об остатках

**Lemma 35.** Пусть  $J, I_1, \dots, I_n$  — идеалы в  $R$  и  $J$  взаимно прост с каждым из  $I_i$ . Тогда он взаимно прост с их произведением.

*Доказательство.* Индукция.

База для  $k = 2$ .

$$R = J + I_1 = J + I_1 R = J + I_1 (J + I_2) = (J + I_1 J) + I_1 I_2 \subseteq J + I_1 I_2 \quad (3)$$

Переход  $n - 1 \rightarrow n$ :

По предположению индукции  $J + \underbrace{I_1 + \dots + I_{n-1}}_I = R$ . Нужно доказать, что  $J + I \cdot I_n = R$ . Проведем действия из базы 3.

□

**Theorem 31** (Китайская теорема об остатках).  $I_1, \dots, I_n$  — попарно взаимно простые идеалы, то есть  $\forall j \neq k : I_j + I_k = R$ . Тогда

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I_1} \oplus \dots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

*Note.* Здесь дробью обозначается фактор кольцо.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . Так как  $I_k$  взаимно просто с  $I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}$

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}} \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Дальше по предположению индукции получаем то, что хотим. □

**Statement 22.** Если  $x \equiv x_k \pmod{I_k}, \quad k = 1, \dots, n$ , то

$$x \equiv \sum_{k=1}^n x_k c_k \pmod{I_1 \cdot \dots \cdot I_n}, \quad c_k \in \left( \prod_{j \neq k} I_j \right) \cap (1 + I_k).$$

*Note.* В целых числах:

$$x \equiv x_k \pmod{m_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Чтобы найти  $c_k$ , нужно решить диофантово уравнение:

$$y \cdot m_k + z \cdot \underbrace{\prod_{j \neq k} m_j}_{=c_k} = 1.$$

**Statement 23** (применение КТО). В  $F[t]$  :

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, \dots, n, x_i \neq x_k \quad \forall i \neq k$$

равносильно

$$p \equiv y_k \pmod{(t - x_k)}.$$

$$p(t) \equiv \sum_{k=1}^n y_k \prod_{i \neq k} \frac{t - x_i}{x_k - x_i} \pmod{(t - x_1) \dots (t - x_n)}.$$

## Вопрос 41 Существование максимальных идеалов

**Def 73.** Собственный идеал  $P$  кольца  $R$  называется простым, если  $ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

*Note.* Другими словами  $R \setminus P$  замкнуто относительно умножения

**Def 74.** Собственный идеал  $I$  называется **максимальным**, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале.

*Note.* Другими словами,  $M$  — максимальный идеал, если  $M \neq R$  и  $M \subseteq I \subset R \Rightarrow I = M$ .

**Theorem 32.** Любой собственный идеал содержится в каком-то максимальном идеале.

*Доказательство.*  $J \triangleleft R$ .

$\mathcal{X}$  — множество всех идеалов, содержащих  $J$  и не содержащих единицу.

Если  $\mathcal{Y}$  — линейно упорядоченное подмножество  $\mathcal{X}$ , то  $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \in \mathcal{X}$

$$a, b \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \implies \exists I_1, I_2 \in \mathcal{Y} : a \in I_1, b \in I_2 \wedge (I_1 \subseteq I_2 \vee I_2 \subseteq I_1),$$

так как  $\mathcal{Y}$  — линейно упорядочено.

$$a, b \in I_k \ (k = 1, 2) : a + b \in I_k \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I.$$

$$a \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \implies ra \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I, \ \forall r \in R.$$

Следовательно,  $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I$  — идеал.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \subseteq J \wedge \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \not\supseteq 1.$$

По лемме Цорна  $\mathcal{X}$  содержит максимальный элемент. Пусть это  $M$ . Проверим, что  $M$  максимальный и среди всех собственных идеалов. Если  $M \subseteq N \subsetneq R$ , то  $N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = M$ .  $\square$

## Вопрос 42 Факторкольца по простым и максимальным идеалам. Прообразы простых и максимальных идеалов

**Def 75.** Кольцо называется областью целостности, если  $\{0\}$  является простым идеалом. Другими словами,  $R$  — область целостности, если  $R \neq \{0\}$  и  $ab \neq 0 \ \forall a, b \in R \setminus \{0\}$ .

**Lemma 36.** Прообраз простого идеала — простой. Прообраз максимального идеала при эпиморфизме — максимальный.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$  — гомоморфизм.

1. Пусть  $P$  — простой идеал в  $R_2$ . Тогда  $ab \in P \iff a \in P \vee b \in P$ . Теперь посмотрим на  $\varphi^{-1}(P) = P'$ .

$$a'b' \in P' \iff \varphi(a'b') \in P \iff \varphi(a')\varphi(b') \in P \iff \varphi(a') \in P \vee \varphi(b') \in P \iff a' \in P' \vee b' \in P'.$$

2. Пусть  $M$  — максимальный идеал в  $R_2$ ,  $\varphi$  — эпиморфизм. Обозначим  $M' = \varphi^{-1}(M)$ . Предположим, что  $\exists I \subsetneq M'$ . Посмотрим на  $\varphi(I)$ .  $\varphi(I) \supseteq \varphi(M') = M$ . Так как  $M$  — максимальный идеал, а  $\varphi$  — эпиморфизм,  $\varphi(I) = M$ .

Пусть  $\exists a \in I : a \notin M'$ . Тогда  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ,  $b \in M'$ . // дальше надо что-то еще сделать

$\square$

**Corollary 3.** Идеал  $P$  — простой тогда и только тогда, когда  $R/P$  — область целостности. Идеал  $M$  — максимальный тогда и только тогда, когда  $R/M$  — поле.

**Corollary 4.** Любой максимальный идеал является простым.

**Theorem 33.** В  $R$  любой ненулевой простой идеал является максимальным.

*Доказательство.* Обозначим простой идеал  $pR$  и предположим, что он содержится в каком-то идеале  $mR \neq R$ . Тогда  $p = mr \implies m \in pR \vee r \in pR$ . В первом случае  $mR = pR$ , а втором  $r = pa$ , то есть  $p = tar \implies 1 = ta \implies mR = R$ . Противоречие.  $\square$

## Вопрос 43 Неприводимые и простые элементы

**Designation.**  $R$  — область целостности.

**Def 76.** Элемент  $p \in R$  называется **простым**, если  $pR$  — простой.

**Def 77.** Элементы  $a, b \in R$  называются **ассоциированными**, если  $aR = bR$

**Lemma 37.**  $R$  — область целостности.  $a, b$  — ассоциированные тогда и только тогда, когда  $a = b\varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$

*Доказательство.*  $aR = bR \Rightarrow a = b \cdot \varepsilon, b = a\delta \Rightarrow a = a\delta\varepsilon \Leftrightarrow a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \Rightarrow \varepsilon$  обратим □

**Def 78.** Необратимый элемент  $a \in R$  называется **неприводимым**, если из равенства  $a = bc$  следует, что  $b$  или  $c$  ассоциирован с  $a$ .

**Lemma 38.** Необратимый элемент  $a$  неприводим тогда и только тогда, когда Он не раскладывается в произведение необратимых элементов.

**Lemma 39.** Ненулевой необратимый элемент  $a$  неприводим тогда и только тогда, когда  $aR$  — максимальный в множестве главных идеалов.

**Lemma 40.** Простой элемент неприводим.

*Доказательство.*  $pR$  — простой идеал, следовательно,

$$ab = p \Rightarrow \begin{cases} a \in pR \\ b \in pR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aR \subset pR \\ bR \subset pR \end{cases}.$$

Но  $pR \subset aR \cap bR$ . Тогда

$$\begin{cases} aR = pR \\ bR = pR \end{cases}.$$

Получаем, что  $p$  — неприводим. □

**Lemma 41.** Пусть  $R$  — область главных идеалов,  $p \in R \setminus \{0\}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $pR$  — максимальный идеал;
2.  $pR$  — простой идеал;
3.  $p$  неприводим.

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$  По следствию 4

$2 \Rightarrow 3$  По лемме 40

$3 \Rightarrow 1$  Если  $p$  неприводим, то по лемме 39  $pR$  максимальный в множестве собственных главных идеалов, так как любой идеал в  $R$  является главным, то и в множестве собственных всех собственных идеалов. □

## Вопрос 44 Нёторовы кольца (два определения и их равносильность)

**Def 79.** Кольцо  $R$  называется **нётеровым**, если любое линейно упорядоченное по включению множество идеалов содержит наибольший элемент.

ACC — ascending chain condition (условие обрыва возрастающих цепей)

**Lemma 42.**  $R$  — нётерово тогда и только тогда, когда любой идеал в  $R$  конечно порожден.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Пусть  $R$  — нётерово,  $I \triangleleft R$ . Возьмем  $a_1 \in I$ .

$$a_1 R = I_1 \neq I \Rightarrow \exists a_2 \in I \setminus I_1.$$

Пусть  $I_2 := a_1 R + a_2 R$ . Аналогично получим  $I_3, \dots$ . Получаем цепочку, которая не может быть бесконечной, значит она где-то оборвется и мы получим, что любой идеал порожден этим набором.

$\Leftarrow$   $\mathcal{A}$  — линейно упорядоченное множество идеалов. Так как оно конечно порождено:

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I = a_1 R + \dots + a_n R.$$

$\exists I_1, \dots, I_n \in \mathcal{A}$ , такие что  $a_k \in I_k$ . Так как  $\mathcal{A}$  — линейно упорядочено, существует наибольший из  $I_k$ , пусть  $I_j$ .

$$a_1, \dots, a_n \in I_j \Rightarrow a_1 R + \dots + a_n R = I_j.$$

Значит  $I_j$  — наибольший из  $\mathcal{A}$

□

## Вопрос 45 Существование разложения на неприводимые в неторовых кольцах

**Theorem 34.** Любой необратимый элемент неторова кольца раскладывается в произведение неприводимых.

*Доказательство.* Пусть  $r = r_1 \in R$  — необратимый элемент. Если  $r_1$  приводим, то  $\exists r_2, r_3 \in R : r_1 = r_2 r_3$ , причем  $r_1 R \subsetneq r_2 R$  и  $r_1 R \subsetneq r_3 R$ .

По индукции найдем для каждого приводимого  $r_i$  такие  $r_{2i}, r_{2i+1}$ , что  $r_i = r_{2i} r_{2i+1}$ , причем  $r_i R \subsetneq r_{2i} R$  и  $r_i R \subsetneq r_{2i+1} R$ .

Получили бинарное дерево, каждая ветка которого конечна, так как кольцо  $R$  неторово. Следовательно, и все дерево конечно (иначе можно было бы выбирать ветку, которая еще не закончилась бесконечно). Кроме того, листья неприводимы, а  $r$  равно их произведению. □

## Вопрос 46 Факториальные кольца. Факториальность кольца главных идеалов

**Def 80.** Область целостности  $R$  называется **факториальным кольцом**, если любой ненулевой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых единственным образом с точностью до ассоциированности.

**Theorem 35.** Пусть  $R$  — область целостности, в которой любой элемент раскладывается в произведение неприводимых и любой неприводимый элемент порождает простой идеал. Тогда  $R$  — факториально.

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon p_1 \cdot p_2 \dots p_n = \theta q_1 \dots q_m$ , где все  $p_k \nmid q_l$  неприводимы,  $\varepsilon, \theta$  — обратимы.

Индукция по  $\min(n, m)$ . Докажем, что  $n = m$  и существует перестановка  $S_n$  такая, что  $p_k$  ассоциирован с  $q_{\sigma(k)}$  для всех  $k \in [1, n]$ .

База  $m = 0$ : правая часть обратима, значит  $n = 0$ .

Переход:  $\min(n, m) > 1$ . По условию идеал  $p_n R$  простой. Поэтому  $\exists l : q_l \in p_n R$ . Так как  $q_l$  неприводим, то  $q_l = \delta p_n$ , где  $\delta$  обратимо. Тогда

$$\varepsilon \cdot p_1 \dots p_n = \theta \cdot q_1 \dots \delta p_n \cdot q_m.$$

Сокращаем  $p_n$ :

$$\varepsilon p_1 \dots p_{n-1} = \theta q_1 \dots q_{l-1} q_{l+1} \dots q_m.$$

По индукционному предположению  $n-1 = m-1$  и существует биекция  $\tau : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, l-1, l+1, \dots, m\}$  такая, что  $p_k$  ассоциирован с  $q_{\tau(k)}$  для всех  $k \in [1, n-1]$ . Пусть  $\forall k \in [1, n-1] : \sigma(k) = \tau(k)$  и  $\sigma(n) = l$ . Такая перестановка подойдет.

□

*Note.* Верно и обратное

**Corollary 5.** Область главных идеалов является факториальным кольцом.

## Вопрос 47 Пример нефакториальной области целостности

**Ex** (пример нефакториальной области целостности). Кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  не является факториальным кольцом, так как

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3}) \cdot (1 - \sqrt{-3}).$$

## Вопрос 48 Наибольший общий делитель и его линейное представление. Алгоритм Евклида

### i НОД

**Def 81.** Пусть  $R$  — область главных идеалов,  $a, b \in R$ . Элемент  $d$  называется **наибольшим общим делителем** элементов  $a$  и  $b$ , если он делит и  $a$ , и  $b$ , и делится на любой другой делитель  $a$  и  $b$ .

Другими словами,  $d$  — наибольший общий делитель, если  $dR$  — наименьший главный идеал, содержащий  $a$  и  $b$ .

**Designation.**  $d = \gcd(a, b)$  — наибольший общий делитель.

**Theorem 36.** Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов. Тогда  $\forall a, b \in R \exists x, y \in R : ax + by = \gcd(a, b)$ .

*Доказательство.* Идеал  $aR + bR$  является минимальным идеалом, содержащим  $a, b$ . По условию он является главным. Значит  $aR = bR = dR$ , тогда (по определению)  $d = \gcd(a, b)$ . □

**Corollary 6.** Пусть  $R$  — кольцо главных идеалов. Идеалы  $aR$  и  $bR$  являются взаимно простыми, если у элементов  $a$  и  $b$  нет обратимых общих делителей (такие элементы называются **взаимно простыми**).



**Lemma 43.**  $\forall a, b, c \in R : \gcd(a, b) = \gcd(a - bc, b)$ .

*Доказательство.*  $a - bc$  и  $b$  содержатся в идеале  $aR + bR$ , поэтому  $(a - bc)R + bR \subseteq aR + bR$ . С другой стороны,

$$a = (a - bc) + bc \in (a - bc)R + bR.$$

Тогда  $aR + bR \subseteq (a - bc)R + bR$ .

Так как  $(a - bc)R + bR = aR + bR$ , то наименьший главный идеал, содержащий эти идеалы одинаковый.  $\square$

## ii Алгоритм Евклида

Обозначим  $r_0 = a$ ,  $r_1 = b$ . Пусть  $i = 1$ . Алгоритм Евклида состоит из следующих шагов:

1. Разделить  $r_{i-1}$  на  $r_i$  с остатком:  $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$ ;
2. Если  $r_{i+1} \neq 0$ , увеличить  $i$  на 1 и вернуться к первому шагу;
3. Если на  $k$ -ом круге  $r_{k+1} = 0$ , то  $\gcd(a, b) = r_k$ .

Для нахождения линейного представления НОД пройдем алгоритм Евклида в обратную сторону:

$$\gcd(a, b) = r_k = r_{k-2}x_{k-2} + r_{k-1}y_{k-2}, \text{ где } x_{k-2} = 1, y_{k-2} = -q_{k-1}$$

. Далее подставим в равенство  $r_{k-1} = r_{k-3} - r_{k-2}q_{k-2}$  :

$$\gcd(a, b) = r_{k-3}x_{k-3} + r_{k-2}y_{k-3}.$$

Продолжаем далее и получаем:

$$\gcd(a, b) = r_0x_0 + r_1y_0 = ax_0 + by_0.$$

## iii НОК

**Def 82.** Пусть  $a, b \in R$ . Элемент  $c$  кольца  $R$  называется **наименьшим общим кратным** элементов  $a$  и  $b$ , если он делится на  $a$  и на  $b$ , и делит любое другое общее кратное  $a$  и  $b$ .

Другими словами,  $c$  — НОК, если  $cR$  — наибольший главный идеал, содержащийся в  $aR \cap bR$ .

**Designation.**  $\text{lcm}(a, b)$  — наименьшее общее кратное.

**Lemma 44.** Если  $R$  — область главных идеалов,  $a, b \in R \setminus \{0\}$ , то  $\text{lcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\gcd(a, b)}$

*Доказательство.* Пусть  $d = \gcd(a, b)$ ,  $a = a'd$ ,  $b = b'd$ . По теореме о линейном представлении НОД существуют  $x, y \in R : ax + by = d$ . Так как  $R$  — область целостности, а  $d \neq 0$ , можем сократить:

$$a'x + b'y = 1.$$

Если  $c \in aR \cap bR$ , то  $c = ca'x + cb'y \in ba'R + ab'R = a'b'dR$ . Следовательно,  $aR \cap bR \subseteq a'b'dR$ . Обратное включение очевидно. Значит  $a'b'd = \frac{ab}{\gcd(a, b)}$ .  $\square$