

Part I

Алгебра

# Chapter 1

## Линейная алгебра. Векторные пространства

### 1.1 Лекция 1

$X$  - множество

$*$  :  $X \times X \rightarrow X$

$(x, y) \mapsto x * y$

**Аксиомы:**

1.  $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$  (ассоциативность)
2.  $\exists e \in X \forall a \in X : e * a = a * e = a$  (нейтральный элемент)
3.  $\forall a \in X \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$  (обратный элемент)
4.  $\forall a, b \in X : a * b = b * a$  (коммутативность)

**Определение 1.** Множество  $X$  с операцией  $*$ , удовлетворяющее аксиоме 1, называется **полугруппой**

**Определение 2.** Множество  $X$  с операцией  $*$ , удовлетворяющее аксиомам 1-2, называется **моноидом**

**Определение 3.** Множество  $X$  с операцией  $*$ , удовлетворяющее аксиомам 1-3, называется **группой**

**Определение 4.** Множество  $X$  с операцией  $*$ , удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **коммутативной** или **абелевой группой**

**Примеры.**

1.  $(\mathbb{Z}, +)$  – группа
2.  $(\mathbb{N}, +)$  – полугруппа
3.  $(\mathbb{N}_0, +)$  – моноид

4.  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  – группа

5. Пусть  $A$  – множество

$X :=$  множество биективных отображений  $A \rightarrow A$

$id_A$  – нейтральный элемент

Если  $f(x) = y$ , то  $\tilde{f}(y) = x$  – обратная функция ( $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id_A$ ).

$f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = 2x$ ,  $id_A(x) = x$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1$

Следовательно,  $(X, \circ)$  – не коммутативная группа

### Обозначение.

- $\cdot$  – мультипликативность,  $1$ ,  $x^{-1}$
- $+$  – аддитивность,  $0$ ,  $-x$
- $\circ$  – относительно композиции,  $id$ ,  $x^{-1}$
- $*$  – абстрактная операция,  $e$ ,  $x^{-1}$

Пусть  $(R, +)$  – абелева группа

Определим отображение

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Для  $(R, +, \cdot)$  могут быть верны следующие аксиомы:

5.  $a(b + c) = ab + ac$

$(b + c)a = ba + ca$  (дистрибутивность)

6.  $a(bc) = (ab)c$  (ассоциативность)

7.  $\exists 1_R \forall a \in R : 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$  (нейтральный элемент)

8.  $ab = ba$  (коммутативность)

9.  $0_R \neq 1_R$

10.  $\forall a \neq 0_R \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$  (обратный элемент)

**Определение 5.**  $(R, +, \cdot)$ , удовлетворяющее аксиоме 5, называется **не ассоциативным кольцом без единицы**.

**Определение 6.**  $(R, +, \cdot)$ , удовлетворяющее аксиомам 5-6, называется **ассоциативным кольцом без единицы**.

**Определение 7.**  $(R, +, \cdot)$ , удовлетворяющее аксиоме 5-7, называется **ассоциативным кольцом с единицей**.

**Определение 8.**  $(R, +, \cdot)$ , удовлетворяющее аксиомам 5-8, называется **коммутативным кольцом**.

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}$  – коммутативное кольцо
2.  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – поля
3. Рассмотрим  $\mathbb{Z}_n = 0, \dots, n-1$  с операциями  $+_n, \cdot_n$  :  
 $a +_n b = (a + b) \% n$   
 $a \cdot_n b = (a \cdot b) \% n$   
 Обратимые элементы:  
 $ax = 1 + ny$   
 $ax - ny = 1$   
 Если  $(a, n) = 1$ , есть решение, иначе – нет.  $\mathbb{Z}_p$  – поле  $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$

**Определение 9.**  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ , если  $(V, +)$  – абелева группа, задано отображение  $V \times F \rightarrow V$

$(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$ , удовлетворяющее аксиомам  $\forall x, y \in V, \forall a, b \in F$ :

5.  $x \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$
6.  $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$   
 $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
7.  $x \cdot 1_F = x$

$$A \in M_n(F), \alpha \in F$$

$$(A, \alpha)_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$$

$$(AB)\alpha = A(B\alpha)$$

**Примеры.**

1. Множество векторов в  $\mathbb{R}^3$

$$2. F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

3.  $X$  – множество,  $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$   
 $f, g : X \rightarrow F$   
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$

4.  $F[t]$  – многочлены от одной переменной  $t$

5.  $V$  - абелева группа, в которой  $\forall a \in V : \underbrace{a + a + \dots + a}_{p \in \mathbb{P}} = 0$  Тогда  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{Z}_p$   $k \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_k$

## 1.2 Лекция 3

**Определение 10.** Алгебра  $A$  над полем  $F$  – кольцо, являющееся векторным пространством над  $F$  ("+" - операция в кольце и в векторном пространстве), такое что  $(ab)\alpha = a(b\alpha) \quad a, b \in A, \alpha \in F$

**Пример.**  $(\mathbb{R}^3, +, \times)$  - не ассоциативная алгебра на  $\mathbb{R}$

**Определение 11.** Матрица размера  $I \times J$  ( $I, J$  - множества индексов) над множеством  $X$  - это функция

$$A : I \times J \rightarrow X, \quad (i, j) \rightarrow a_{ij}.$$

Пусть определено умножение  $X \times Y \rightarrow Z, \quad (x, y) \rightarrow xy$   
( $Z$  - коммутативный моноид относительно "+")

**Определение 12.** Строка - матрица размера  $\{1\} \times J$   
Столбец - матрица размера  $J \times \{1\}$

$A$  - строка длины  $J$  над  $X$

$B$  - строка длины  $J$  над  $Y$

Тогда произведение  $AB = \sum_{j \in J} a_{1j} b_{j1} \in Z$

$x \rightarrow x_e$  - координаты вектора  $x$

$$\underbrace{x \cdot y}_{\text{скалярное произведение}} = x_e^T \cdot y_e$$

скалярное произведение

**Определение 13.** Транспонирование матрицы.

$D$  - матрица  $I \times J$  над  $X$

$D^T$  - матрица  $J \times I$  над  $X : (D^T)_{ij} = (D)_{ji}$

*Замечание.* Пусть в  $X$  есть элемент  $0 : 0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y$ . Все кроме конечного числа  $a_j = 0$ . Тогда  $AB$  имеет смысл, даже когда  $|J| = \infty$ .

"почти все" = кроме конечного количества

**Обозначение.**

$a_{i*}$  -  $i$ -я строка матрицы  $A$

$a_{*j}$  -  $j$ -й столбец матрицы  $A$

### 1.2.1 Произведение матриц

$A$  - матрица  $I \times J$  над  $X$ .

$B$  - матрица  $J \times K$  над  $Y$ .

$AB$  - матрица  $I \times K$  над  $Z = X \cdot Y$ ,  $(AB)_{ik} = a_{i*} \cdot b_{*k} = \sum_{j \in J} a_{ij} \cdot b_{jk}$ .

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = va, \quad v \in V, a \in F.$$

## 1.3 Лекция 4

**Определение 14.**  $(G, *)$ ,  $(H, \#)$ - группа

$\varphi : G \rightarrow H$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \# \varphi(g_2)$$

**Определение 15.**  $R, S$  -кольца

$\varphi : R \rightarrow S$  - гомоморфизм, если:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$$

Для колец с 1:  $\varphi(1) = 1$

**Определение 16.**  $U, V$  - векторные пространства над  $F$

$\varphi : U \rightarrow V$  - линейное отображение, если:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u\alpha) = \varphi(u)\alpha$$

*Замечание.* Изоморфизм – биективный гомоморфизм.

**Определение 17.**  $V$  - векторное пространство над полем  $F$

$v$  - строка элементов "длины"  $I$  над  $V$

$a$  - столбец "высоты"  $I$ , почти все элементы которого равны 0.

Тогда  $va$  - линейная комбинация набора  $v$  с коэффициентами .

*Замечание.*  $U \subset V$

$U$  является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в  $V$ . Тогда  $U$  - подпространство  $V$

**Лемма.**  $U \subseteq V$

$\forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in F :$

$u_1 + u_2 \in U, u_1\alpha \in U$  Тогда  $U$  - подпространство. Если  $U$  - подпространство в  $V$ , то пишут  $U \subseteq V$ .

**Определение 18.**  $v = \{v_i | i \in I\}$ , где  $v_i \in V \forall i \in I$

$\langle v \rangle$  - наименьшее подпространство, содержащее все  $v_i$

**Лемма.**  $\langle v \rangle = \{va | a - \text{столбец высоты } I \text{ над } F, \text{ где почти всюду элементы равны нулю}\} = U$

*Доказательство.*  $v_i \in \langle v \rangle \Rightarrow v_i a_i \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow v_{i_1} a_{i_1} + \dots + v_{i_k} a_{i_k} \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow \langle v \rangle$  содержит все варианты комбинаций.  $va + vb = v(a + b) \in U$

$(va)\alpha = v(a\alpha) \in U$

$\Rightarrow$  множество линейных комбинаций – подпространство  $U$  - подпространство, содержащее  $v_i \forall i \in I$

$\langle v \rangle$  – наименьшее подпространство, содержащее  $v_i$

$\Rightarrow \langle v \rangle \subseteq U$  тогда  $\langle v \rangle = U$  □

**Определение 19.** Если  $\langle v \rangle = V$ , то  $v$  – система образующих пространство  $V$

Базис – система образующих.

**Обозначение.**  $F^I$  – множество функций из  $I$  в  $F$  = множество столбцов высоты  $I$

${}^I V$  – множество строк длины  $I$

Набор элементов из  $V$ , заиндексированных множеством  $I$  – это функция  $f : I \rightarrow V$   
 $i \mapsto f_i$

**Определение 20.**  $v \in {}^I V$

$v$  – **линейно независим**, если  $\forall a \in F^I, a \neq 0 \Rightarrow va \neq 0$

**Теорема 1.3.1.**  $v \subseteq V$  (можно считать, что  $v$  – строка длины  $v$ )

Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $v$  – линейно независимая система образующих

2.  $v$  – максимальная линейно-независимая система

3.  $v$  – минимальная система образующих

4.  $\forall x \in V \exists! a \in F^v : x = va = \sum_{t \in v} t \cdot a_t$  (почти все элементы равны 0)

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (4) – доказали ранее (1)  $\Rightarrow$  (2)

$x \in V \setminus v$

$x = va (a \in F^v)$

$va = x \cdot 1 = 0$  – линейная зависимость набора  $v \cup x$

Т.о. любой набор, строго содержащий  $v$ , линейно зависим  $\Rightarrow v$  – максимальный.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$x \in V \setminus v$

$v \subseteq V \cup x$  – линейно зависим

$va + xa_x = 0$

$a \neq 0$

Если  $a_x = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow a = 0$  ?!

Значит  $a_x \neq 0$

$$va = c \cdot (-a_x)$$

$$x = v \cdot \frac{a}{-a_x} \Rightarrow v \text{ - система образующих.}$$

□

**Лемма.** (Цорн) Пусть  $\mathbb{A}$  – набор подмножеств (не всех) множества  $X$ .

Если объединение любой цепи из  $\mathbb{A}$ , принадлежащей  $\mathbb{A}$ , то в  $\mathbb{A}$  существует максимальный элемент.

$$M \in \mathbb{C} \text{ - максимальная, если } M \subseteq M' \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow M = M'$$

**Теорема 1.3.2.** (о существовании базиса)  $V$  – векторное пространства

$X$  – линейное независимое подмножество  $V$

$Y$  – система образующих  $V$

$$X \leq Y$$

Тогда существует базис  $Z$  пространства  $V : X \leq Z \leq Y$

*Доказательство.*  $\mathbb{A}$  – множество всех линейно независимых подмножеств, лежащих между

$X$  и  $Y$ .  $X \in \mathbb{A}$

$$\mathbb{C} \leq \mathbb{A}$$

$$X \leq \cup \mathbb{C} \in \mathbb{C} \leq Y$$

Пусть  $\cup \mathbb{C} \in \mathbb{C}$  – линейно зависимый. То есть  $\exists u_1, \dots, u_2 \in / \dots$

$\dots$

Пусть  $v$  – базис  $V$ .

$$\forall x \in V \exists! x_v \in F^v : x = v \cdot x_v$$

$$v = (v_1, \dots, v_n), \quad x_v = \text{матрица столцов альфа};$$

$$x = v_1 \alpha_1 + \dots = v \cdot x_v$$

□

## 1.4 Лекция 5

## 1.5 Лекция 6

## 1.6 Лекция 7

**Утверждение.**

$$U \leq W \quad \exists V \leq W : W = U \oplus V$$

*Доказательство.* Выберем базис  $u$  в  $U$ . Дополним до базиса  $u \cup v$  пространства  $W$  и положим  $V = \langle v \rangle$ .

$$\langle u \rangle = U \quad \langle v \rangle = V \quad \langle u \cup v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle = U \oplus V = W$$



$x \in U \cap V \Rightarrow x = ua = vb \Leftrightarrow ua - vb = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$  ( $u \cup v$  — линейно независимый

□

**Следствие.**

$u$  — базис  $U, v$  — базис  $V, U, V \leq W$

$u \cup v$  — базис  $W \Leftrightarrow U \oplus V$

25.09.2019

## 1.7 Лекция 8

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in n^V$$

$M_n(F)$  — алгебра матриц размера  $n \times n$  над  $F$

$GL_n(F) = M_n(F)^*$  — полная линейная группа степени  $n$  над  $F$

**Лемма.**

$$v \in n^V, A \in GL_n(F)$$

$v$  — линейно независимый  $\Leftrightarrow vA$  — линейно независимый

$$\langle v \rangle = \langle vA \rangle$$

*Доказательство.*  $(vA)A^{-1} = v(AA^{-1}) = vE = v$ , поэтому можно доказывать только в одну сторону.

$v$  — линейно независимый.

$vAb = 0 \Rightarrow A^{-1}Ab = 0 \Rightarrow b = 0$ , т.е.  $vA$  — линейно независимый.

$(vA)b = v(Ab) \in \langle v \rangle, \langle vA \rangle \leq \langle v \rangle$

□

**Утверждение.**  $u, v$  — два разных базиса пространства  $V$ .

Тогда  $\exists!$  матрица  $A \in GL_n(F) : u = vA$

При этом  $a_{*k} = (u_k)_v \quad \forall k = 1, \dots, n$ . Такая матрица обозначается  $C_{v \rightarrow u}$  и называется матрицей перехода от  $v$  к  $u$ .

$$C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = E$$

*Доказательство.* Положим  $a_{*k} = (u_k)_v \Rightarrow u_k = va_{*k} \Rightarrow u = vA$ .

$vA = vB \Leftrightarrow A = B$  то есть  $A$  — единственно.

Далее:

$$\left. \begin{aligned} u &= vC_{v \rightarrow u} \\ v &= uC_{u \rightarrow v} \end{aligned} \right\}$$

$$uE = uC_{v \rightarrow u}C_{u \rightarrow v}$$

$$E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

□

**Следствие.**  $v$  - базис  $V$

$f : GL_n(F) \rightarrow$  множество базисов пространства  $V$

$f(A) = vA$  - биекция.

*Доказательство.*

$$|F| = q \quad \dim V = u$$

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) - \text{количество базисов}$$

$\mathbb{F}$  - поле из  $q$  элементов. □

**Утверждение.** Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

**Следствие.**  $u, v$  - базисы  $V$

$$x = C_{u \rightarrow v} x_v$$

*Доказательство.*

$$x = ux_u = vx_v$$

$$v = uC_{u \rightarrow v}$$

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \Rightarrow x_u = C_{u \rightarrow v}x_v$$

□

**Следствие.** (Матричные линейные отображения)

$$L : U \rightarrow V, \quad u - \text{базис } U, v - \text{базис } V$$

Тогда  $\exists!$  матрица  $L_{v,u}(L_u^v : \forall x \in U L(x)_v = L_u^v x_u)$

При этом  $(L_u^v)_{*k} = L(u_k)_v$

*Замечание.*

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in n^U$$

$$L : U \rightarrow V$$

$$L(a) := (L(u_1), \dots, L(u_n))$$

$$L(ua) = L(u)a \quad a \in F^n$$

$$\varphi_v : V \rightarrow F^n$$

$$\varphi_v(g) = y_v \quad \forall g \in V$$

$\varphi_v$  - линейно  $\Rightarrow (L(u)a)_v = L(u)_v a$

$$L(u)_v := (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$$

Доказательство.

$$x = ux_u$$

$$L(x) = L(u)x_u$$

$$L(x)_v = L(u)_v x_u$$

Положим  $L_u^v := L(u)_v$ .

$$\forall x \in U : L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$\text{При } x = u_k : L(u_k)_v = L_u^v(u_k)_u = (L_u^v)_k$$

□

Замечание. Если  $Ax = Bx \quad \forall x \in F^n$ , то  $A = B$

26.09.2019

## 1.8 Лекция 9

Примеры.

1.  $V = \mathbb{R}[t]_3$  - многочлены степени не более 3

$$D(p) = p' \quad V \rightarrow V$$

$$v = (1, t, t^2, t^3).$$

$$D(1) = 0, D(t) = 1, D(t^2) = 2t.$$

$$D_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$v^{(1)} = (1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}).$$

2.  $V = \mathbb{R}[t]$

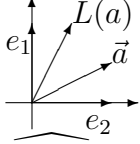
$$v = (1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots).$$

$$D(v_0) = 0, D(v_k) = v_{k-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots \\ & 0 & 1 & \dots \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

3.  $V = \mathbb{R}^3$

$$|L(a)| = |a|$$



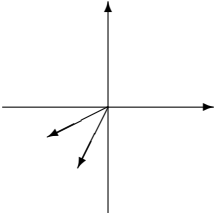
$$\widehat{a, L(a)} = \varphi$$

$e = (e_1, e_2)$ - базис

$$L(e_1)_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$L(e_2)_e = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$



$$a_e = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$L(a)_e = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \varphi) \\ \sin(\psi + \varphi) \end{pmatrix}.$$

$$L(a)_e = L_e \cdot a_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

**Утверждение.**  $L : U \rightarrow V$

$u, u'$  — базис  $U$

$v, v'$  — базис  $V$

Тогда  $L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} L_u^v C_{u \rightarrow u'}$

Доказательство.

$$L(x)_v = L_u^v x_u.$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v_1} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u.$$

$$\forall x_u \in F^{\dim U}$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_k.$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}.$$

□

*Замечание.*

Если  $U = V \quad u = v, u' = v'$ .

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

**Утверждение.** *Линейное отображение однозначно определяется образом базисных векторов.*

$u = (u_1, \dots, u_n)$  — базис  $U$

Для любого векторного пространства  $V$ :

$$\forall v_1, \dots, v_n = V$$

$$\exists! \text{ линейное отображение } ({}^*)L : U \rightarrow V : L(u_k) = v_k \quad \forall k$$

*Доказательство.*

$$L(ua) := va$$

$$\forall L^* : L(ua) = L(u)a = va$$

□

При этом  $L$  - инъективно тогда и только тогда, когда  $v$  - линейно независимый

$L$  - сюръективно тогда и только тогда, когда  $v$  - система образующих

$L$  - изоморфизм тогда и только тогда, когда  $v$  - базис.

**Утверждение.**  $V, \quad v, v' - \text{базис } V$

$L : V \rightarrow V - \text{линейно}$

$$L(v_k) = v'_k \quad \forall k$$

$$(L_v)_k = L(v_k)_v = (v'_k)_v$$

$$L_v = C_{v \rightarrow v'}.$$

по другому

$$(Id_{v'}^v)_k = Id(v'_k)_v = (v'_k)_v.$$

$$\text{Тогда } L_v = C_{v \rightarrow v'} = Id_{v'}^v$$

**Определение 21.**  $f : X \rightarrow Y$

$$Im f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

$L : U \rightarrow V$  - линейное отображение

$$Im L = \{L(x) \mid x \in U\}$$

$$Ker L = L^{-1}(0) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$$

**Лемма.**

$$Im L \leq V$$

$$Ker L \leq U$$

Пусть  $L(x) = y$

$$\forall y \in V : L^{-1} = x + Ker L$$

$$L^{-1}(y) = \{z \in U \mid L(z) = y\}$$

$$x + Ker L = \{x + z \mid z \in Ker L\}$$

## 1.9 Лекция 9

**Теорема 1.9.1.**  $L : U \rightarrow V$

$$\dim U = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L.$$

*Доказательство.*  $u = (u_1, \dots, u_k)$  – базис  $\text{Ker} L$

$v = (v_1, \dots, v_m)$  Дополним базис ядра до базиса  $U$ :  $u \cup v$  – базис  $U$

$L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$  – базис образа.  $\forall x \in \text{Im} L \exists y \in U : L(y) = x$ .  $y = ua + vb$ ,  $a \in F^k, b \in F^m$

$$x = L(y) = \underbrace{L(u)}_{(L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)} + L(v).$$

Следовательно,  $L(v)$  – система образующих.

$$L(v)c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \text{Ker} L \Rightarrow vc = ud \quad \text{для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда  $vc - ud = 0$ , но  $v$  и  $u$  – два базисных вектора. Следовательно,  $c = d = 0$  и  $L(v)$  – линейно независимый.  $\square$

**Теорема 1.9.2.** (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)  
 $U, V \subseteq W$

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

*Доказательство.*  $\forall$  внешней сумму  $U \oplus V$ ,  $L(u, v) = u + v$

Тогда  $\text{Im} L = U + V$ .  $(u, v) \in \text{Ker} L \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \subset U \cap V$

$\text{Ker} L = (u, -u) \mid u \in U \cap V \cong U \cap V$

$$\dim(U \oplus V) = \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L = \dim U \cap V + \dim U + V$$

$\square$

08.10.2019

## 1.10 Лекция 10

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Простейший базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = vx_v, \quad x = ex_e = Ex_e$$

$$eC_{e \rightarrow v} = v - \text{из столбцов } v.$$

$$C_{e \rightarrow v} = v - \text{матрица из столбцов } (v_1, \dots, v_n).$$

$$L : F^m \rightarrow F^n, \quad A \in M_{n \times m}(F) \quad L(x) = Ax$$

$$L(x)_e = L_0^e x_e, L(x)_e = L(x) = Ax = L_e^e x_e.$$

$Hom(F^n, F^m) \cong M_{m \times n}(F)$  - изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем  $A$  отождествляется с  $L$ , пишем  $A_u^v$  вместо  $L_u^v$  ( $A$  в базисе  $u - v$ ).

**Определение 22.** Линейный оператор из  $V$  в  $V$  называется эндоморфизмом  $V$ . Множество эндоморфизмов  $V = End(V)$  - ассоциативная алгебра над  $f$   
 $+$ ,  $\cdot$  - поточечные операции,  $\circ$  - композиция.

$$L, M, N \in End(V) : \quad L \circ (M + N) = L \circ M + L \circ N - \text{следует из линейности } L$$

$$v - \text{базис } V, \quad u = \dim V$$

$$\theta_v : End(V) \rightarrow M_n(F)$$

$$\theta_v = L_v$$

**Утверждение.**  $\theta_v$  - биективно.

*Упражнение.* Построить обратное  $\theta_v$

$$\textbf{Лемма.} \quad (M \circ L)_v = M_v \circ L_v$$

**Утверждение.**  $\theta_v$  - изоморфизм

$F$  - алгебра

$$EndV \cong M_n(F)$$

—

**Теорема 1.10.1.**  $U \leq V$

$$\forall L : V \rightarrow W, \quad U \leq Ker L, \exists ! \tilde{L} : V \setminus U \rightarrow W$$

$$\tau : \begin{array}{ccc} V \setminus U & \longrightarrow & W \\ \uparrow \pi_U & & \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}.$$

$$\tau \circ \pi_U = L$$

$L$  - эпиморфизм  $\Rightarrow \tau$  - эпиморфизм

$Ker L = U \Rightarrow \tau$  - мономорфизм

*Доказательство.* Диаграмма коммутативна, следовательно,  $\tilde{L}$  строится однозначно. Пусть  $\tilde{L}(x+U) := L(x).y \in U \in Ker L : L(x+y) = L(x) + L(y) = L(x)$   $\tilde{L}$  задано корректно (легко проверить, что оно линейно, единственность следует из коммутативности диаграммы).

$\tilde{L}(x+U) = L(x)$  - необходимо и достаточно коммутативности диаграммы.

$$\tilde{L}(x+U) = 0_W \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Ker L = U \Leftrightarrow x+U = 0+U = O_{V \setminus U}$$

Для инъективности :  $Ker \tilde{L} = 0_{V \setminus U}$

**Теорема 1.10.2** (О гомоморфизме).  $L : V \rightarrow W$

$$VKerL \cong ImL.$$

*Доказательство.* Возьмем  $U = KerL$  и заменим  $W$  на  $ImL$   $n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle \leq \dim F^m = m$ . Из линейной независимости строк следует, что  $m \leq n$  Таким образом  $m = n$ .

$n$  линейно независимых столбцов (строк) в  $n$ -мерном пространстве - базис и матрица  $A$  - матрица перехода  $C_{e \rightarrow a}$ , где  $a = (a_{*1}, \dots, a_{*n})$  - набор столбцов  $A$ . Следовательно,  $A \in GL_n(F)$  - множество обратных матриц.  $\square$

**Определение 23.** Ранг:

$$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

$$rkL = \dim ImL$$

$$u_1, \dots, u_n - \text{базис } U, L : U \rightarrow V$$

$$rkL = rk((L(u)) = \dim \langle L(u_1), \dots, L(u_n) \rangle$$

$$A \in M_{m \times n}(f)$$

$$\text{Столбцовый ранг } A : rkA = rk(a_{*1}, \dots, a_{*m})$$

$$\text{Строчный ранг} : rkA = rk(a_{1*}, \dots, a_{n*})$$

или наибольшее количество независимых столбцов (строк).

**Лемма.**  $A \in M_{m \times n}$

1. столбцы  $A$  линейно независимы  $\Leftrightarrow$  столбцовый  $rkA = n$
2. столбцы  $A$  - система образующих в  $F^m \Leftrightarrow$  столбцовый  $rkA = m$
3. строки  $A$  линейно независимы  $\Leftrightarrow$  строчной  $rkA = m$
4. строки  $A$  - система образующих в  ${}^mF \Leftrightarrow$  строчной  $rkA = n$
5. столбцы являются базисом  $F^n \Leftrightarrow m = n = \text{строчной } rkA$
6. если столбцы и строки  $A$  линейно независимы  $\Leftrightarrow n = m$ , строки и столбцы - базисы,  $A$  - обратима.

*Доказательство.* (6)

$$\text{из (1)} \Rightarrow c.rkA = n$$

$$n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle$$

$\square$