

Конспект по матанализу в формате вопросов
коллоквиума
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 4, 2019

Contents

1	Введение	4
1.1	Простейшие свойства вещественных чисел	4
1.2	Множества в \mathbb{R}	5
1.3	Натуральные числа	5
1.3.1	Аксиома Архимеда	5
1.3.2	Аксиома индукции	6
1.3.3	Неравенство Бернулли	6
1.3.4	Аксиома Кантора-Дедекинда	6
1.3.5	Иррациональность корня из двух	7
1.3.6	Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке	8
1.3.7	Число e	8
1.4	Свойства подмножеств \mathbb{R}	9
1.4.1	Грани	9
1.4.2	Связность отрезка	10
1.4.3	Предельные и изолированные точки	10
1.4.4	Теорема о вложенных отрезках	11
1.4.5	Теорема о компактности	11
1.4.6	Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках	12
1.4.7	Десятичное разложение вещественного числа	12
2	Пределы	14
2.1	Основные свойства пределов функций	14
2.1.1	Определение предела	14
2.1.2	Единственность предела	14
2.1.3	Теорема о пределе сужения	15
2.1.4	Предел постоянной функции и предел тождественного отображения	15
2.1.5	Предельный переход в неравенстве	15
2.1.6	Принцип двух полицейских	15
2.1.7	Предел линейной комбинации	16
2.1.8	Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций	16
2.1.9	Предел произведения имеющих предел функций	17
2.1.10	Предел частного	17

2.1.11	Сумма геометрической прогрессии	18
2.1.12	Предел монотонной функции	19
2.2	Ряды	19
2.2.1	Понятие ряда. Теорема Лейбница	19

[section]

Chapter 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

(а) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

- i. $a + b = b + a$ (коммутативность)
- ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)
- iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

(б) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

- i. $xy = yx$ (коммутативность)
- ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)
- iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)
- v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на \mathbb{R}

Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

$$(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \text{ (антисимметричность)} \\ a < b \end{cases}$$

(b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

(c) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в \mathbb{R}

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты). $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (замкнутый отрезок)

$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (открытый слева отрезок)

$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (открытый справа отрезок)

$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (открытый отрезок)

Def 5 (Лучи). $a \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A .

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A .

// $\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Аксиома (Архимед). Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Proof. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. \square

1.3.2 Аксиома индукции

Аксиома (индукции). Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Statement (Обоснование метода математической индукции). Пусть P_1, P_2, \dots - последовательность суждений. Предположим, что

1. P_1 - верно

2. Для любого $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$

Тогда все условия P_i верны.

Proof. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \emptyset$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1$, $l - 1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. \square

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1.3.1 (Неравенство Бернулли). Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geq 1 + n(a - 1)$, $n \in \mathbb{N}$

Proof. Индукция:

База: $n = 1 : a \geq 1 + (a - 1)$

Переход: $n \rightarrow n + 1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a - 1)a = (a - 1) + 1 + n(a - 1)a = \\ &1 + (a - 1)(1 + na) \geq 1 + (a - 1)(1 + n) \end{aligned}$$

\square

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Proof. Пусть $a^n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a - 1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$. Противоречие \square

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B) , где $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, такая что всякое число из A не более любого из B .

Def 8. Число c лежит в щели (A, B) , если $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Аксиома (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

Statement. *Квадратный корень из 2 существует и единственный.*

Proof.

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, \quad B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \leq v \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

Lemma. *В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.*

Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

2. Единственность

Возьмем $c \geq 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c , для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 1.3.2. *Квадратный корень из двух иррационален.*

Proof. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q^2$$

□

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v \rangle$ - любой отрезок с концами в u, v ($u \leq v$). Его длина $|\langle u, v \rangle| := v - u$

Theorem 1.3.3. Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$ существует точка вида rc , где $r \in \mathbb{Q}$.

Proof. Заменим $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leq r \leq b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$. Среди таких p существует наименьший p_0 .

Возьмем $\frac{p_0-1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$ □

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 1.3.4. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует иррациональное число.

Proof. По следствию из теоремы 1.3.3 $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$. □

1.3.7 Число e

Def 12. Рассмотрим последовательность $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Число e - предел $\{a_n\}$.

Statement. $\{a_n\}$ - сходится.

Proof.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333 \end{aligned}$$

□

Theorem 1.3.5. e - иррационально.

Proof. $2 < e < 3$

Пусть $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $q > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right). \\ q!p &= S + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \right) = S + a. \end{aligned}$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$. Обозначим предел за a . Докажем, что $a \notin \mathbb{Z}$.

Statement. $0 < a < 1$

Proof.

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}.$$
$$0 < a \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1.$$

□

□

1.4 Свойства подмножеств \mathbb{R}

1.4.1 Грани

Def 13 (supremum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 14 (infimum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.

Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его нижних границ.

Theorem 1.4.1 (об описании точной верхней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \sup A$
2. x – верхняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Proof.

1 \Rightarrow 2

$x = \sup A \Rightarrow x$ – верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$. Тогда $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x . Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

2 \Rightarrow 1

x – верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x – наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ – верхняя граница A . Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x – не верхняя граница. □

Theorem 1.4.2 (об описании точной нижней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \inf A$
2. x – нижняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 15. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 1.4.3 (о связности отрезка). *Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Для любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$ – замкнуты $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$, то $E \cap F \neq \emptyset$.

Proof. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \emptyset$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x – предельная точка для E , с другой стороны, предельная точка для F . Так как E, F – замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \emptyset$. Противоречие. \square

1.4.3 Предельные и изолированные точки

Def 16. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 17. Проколота окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

Def 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

u называется предельной точкой для A , если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

Examples.

1. \mathbb{Z}, \mathbb{N} не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.
3. Для \mathbb{Q} все предельные точки – \mathbb{R} .

Def 19. Все точки множества A , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A \text{ – изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

Examples.

1. $[1, 2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1, 2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ ($y = \inf A$).

$$\left[\begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y \text{ – предельная точка } A \\ y \in A \end{array} \right.$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 1.4.4 (о вложенных отрезках). $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$.

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - последовательность замкнутых отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

Proof. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Proof. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geq k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.

В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 1.4.5 (о компактности). Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.

Proof. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$.

Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] \text{ - бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] \text{ - бесконечно} \end{cases}$

Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A .

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. □

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 1.4.6 (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

Proof. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. \square

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем

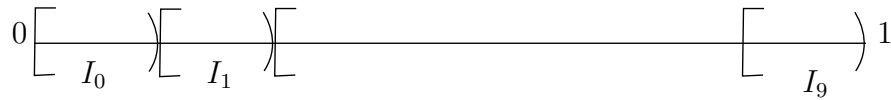


Figure 1.1: Decimal decomposition

собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей
3. И так далее

Получим $0.i_1i_2i_3\dots$ — десятичную запись числа x .

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 1.4.7. Пусть (j_1, j_2, \dots) - цифры от нуля до девяти. $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$. Тогда $\exists! x \in [0, 1)$ для которого $0.j_1j_2\dots$ - десятичное представление.

Proof. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме 1.4.6 существует непустое пересечение, равное одной точке - и есть наше число. \square

Chapter 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 20. b – предел функции f в точке x_0 , если для любой окрестности U в точке b существует такая проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 : $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 21. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 22. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 2.1.1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x - предельная точка для A .

Если a, b - предельные для f в точке x_0 , то $a = b$.

Proof. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Противоречие. □

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 23. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 2.1.2 (о пределе сужения). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$

Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. Тогда $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$.

Proof. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. □

Theorem 2.1.3 (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$, то $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Proof. $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.

$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0 . □

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 2.1.4 (Предельный переход в неравенстве). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$. Предположим, что существуют пределы у f, g в точке x_0 равные соответственно a, b . Пусть $a < b$.

Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Proof. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned} .$$

Возьмем $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. □

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 2.1.5 (Принцип двух полицейских). $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$

Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x_0} g = b$.

Proof. Рассмотрим $\overset{\circ}{U}(b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2 : \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

□

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 2.1.6 (Предел линейной комбинации). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \alpha a + \beta b$

Proof.

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ = |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| &\leq \\ \leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ &\exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned}.$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$:

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ и $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Proof. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

□

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$.

Proof.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$ в некоторой проколотой окрестности x_0 , а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0 . Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$, $b \neq 0$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Proof.

Lemma. В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$. То есть $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

Proof. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \quad . \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a)||g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \in \mathbb{R}$.

Statement. Если $|q| < 1$, то $f(n)$ имеет предел, иначе не имеет предела.

Proof.

$$|q| < 1$$

Lemma.

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Proof.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0 \ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$. \square

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

2. $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \text{ нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5. $q < 1$

$$|f(n)| = \left|\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right| \geq \frac{1}{|q-1|}(|q|^{n+1}-1).$$

Эта функция тоже не имеет предела. \square

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 24. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$

f – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ (f(x_1) < f(x_2)).$$

f – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

f – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 2.1.7 (о пределе монотонной функции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на $A, x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Proof. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leq M \ \forall x \in A$.
 $b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

Note. Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

2.2 Ряды

2.2.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

Def 25. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ряд – символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – последовательность $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} - \text{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 2.2.1 (Лейбниц). Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательность $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

Proof.

\Rightarrow
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

Заменим в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

\Leftarrow
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \leq a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□

Theorem 2.2.2. Пусть $s > 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$.