Лекция 4

6 march

0.0.1 Продолжение примеров

1. $C_p[a,b] = \{f \in C[a,b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a,b]} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

   Это норма:

   - Не меньше нуля
   - $\|f\| = 0 \iff f = 0$
   - $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
   - Неравенство треугольника $\|f\| + \|g\| \geqslant \|f + g\|$ (сейчас доказывать не будем)

   Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

   Theorem 1 (без доказательства)**.** *(X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $\exists!(Y, \tilde{\rho})$ — полное метрическое пространство, такое что*

   (a) $X \subset Y$
   (b) $\rho = \tilde{\rho}\,\big|_{X \times X}$
   (c) $Y = dX$

   Такое пространство пополняется до $L_p(a,b)$.

2. $l_p = \{x = (x_1, \ldots) \mid x_j \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\}, \qquad p \geqslant 1$ Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Practice. l_p полно

Note. В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- l_p. Возьмем шар $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leqslant 1\}$

$$\begin{aligned} e^1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ e^2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\ &\vdots \\ e^k &= (\underbrace{0, \ldots 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Practice. Проверить не компактность $B = \{f \in C[a,b] \mid \|f\| = 1\}$ в $C[a,b]$.

0.1 Сжимающие отображения

Definition 1

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \to X$. U называется сжимающим отображением, если

$$\forall \gamma < 1 \ \forall x_1, x_2 \in X \colon \rho(U(x_1), U(x_2)) \leqslant \gamma \rho(x_1, x_2).$$

Theorem 2 (Принцип сжимающих отображений)**.** (X, ρ) *полно.*

1. U *— сжимающее отображение* $\Longrightarrow \exists! x_* \colon U(x_1) = x_*$ *— неподвижная точка*
2. *Если* $\exists N \colon U^N$ *— сжимающее отображение* $\Longrightarrow \exists! x_* \colon U(x_* = x_*$

Доказательство.

1. Рассмотрим траекторию точки x_1.

   $$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \dots x_n = U(x_{n-1}).$$

   $$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \\ \gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \\ \dots \\ \leqslant \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d \end{aligned}$$

   Тогда по неравенству треугольника

   $$\forall m > n \colon \rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d(1 + \gamma + \dots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \longrightarrow 0.$$

   Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как наше пространство полно,существует предел этой последовательности. $U(x_n) = x_{n+1}$. Первое стремиться к $U(x_*)$, второе — к x_*.

   Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2. $\exists x_*$, посмотрим на $U^N(x_*)$. Посмотрим на последовательное применение U несколько раз. На N-ом шаге мы придем в x_*.

   Единственность уже доказали.

□

Example 1 (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка)**.**

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \qquad a, b \in C[0,1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти $f \in C^1[0,1]$. То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt.$$

Заведем отображение $U : C[0,1] \to C[0,1]$, что $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt$. Хотим найти неподвижную точку отображения U (то есть такую f).

Пусть $(U_0(f))(x) = -\int_0^x a(t)f(t)dt$. Правда ли, что

1. $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f-g)$
2. $\exists n\colon U_0^n$ — сжимающее отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Проверим

1. При $n = 1$, очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U\left(U^{n-1}(f)\right) - U\left(U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f)\right) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0\left(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2. $\|U_0^n(f-g)\|_\infty \leqslant \gamma\|f-g\|$

   Пусть $f - g = h$. $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma\|h\|$. Пусть $M = \max|a|,\ \|h\|_\infty\, |h(x)|$.

$$\begin{aligned} \left(U_0^1(h)\right)(x) &= -\int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ \left(U_0^2(h)\right)(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2)\left(\int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1\right) dt_2 \\ &\vdots \\ \left(U_0^n(h)\right)(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\ldots)\, dt_n \end{aligned}$$

   Оценим

$$|\left(U_0^n(h)\right)(x)| \leqslant M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \ldots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leqslant \left(M^n \frac{x^n}{n!}\right) \|h\|_\infty.$$

   Выражение в скобках стремиться к нулю при $n \to \infty$. Значит, U_0^n сжимающее.

   Note. На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

   $f \in C[0,1]$. Так как $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$, $f \in C^1[a,b]$

Practice. X полно, $U : X \to X$, $\forall x, y \colon \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$.

1. Верно ли, что U сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

0.1.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

Definition 2: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$). $U : X \to Y$ называется **линейным**, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X \colon U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X,\ \lambda$ — скаляр: $U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Note. Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейный отображений: $U(x_1) = Ux_1$

Designation. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y.

Definition 3

$X_1, \ldots X_n$ — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

Designation. $\mathrm{Poly}(X_1, \ldots X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Definition 4

Если Y — поле скаляров, линейное отображение $U : X \to Y$ называется **линейным функционалом**.

Example 2. $X = \{x = (x_1, \ldots) \mid x_j \in \mathbb{R},$ лишь конечное число отлично от нуля$\}$
$U : X \to X,\ x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$

Example 3 (δ-функция). $\delta : C[-1, 1] \to \mathbb{R},\ \delta(f) = f(0)$.

Example 4. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf = \int_a^b f(x)dx$

Example 5. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

Example 6. $U \in \mathrm{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \ldots \mathbb{R}}_{n}; \mathbb{R}),\ U(x_1, \ldots x_n) = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$

Example 7. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}),\ U(x, y) = (x, y)$

Example 8. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) - [x, y]$ — векторное произведение.

Example 9. Определитель, все возможные формы объема.

Example 10. $U_j \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Можно сделать из этого полилинейное $U \in \mathrm{Poly}(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y), U(x_1, \ldots x_n)$
$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots U_n x_n$

Example 11. $U : C^1[a, b] \to C[a, b],\ Uf = f'$

Theorem 3 (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения)**.** *X, Y — линейный нормированные пространства с одним полем скаляров, $U \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывно*
2. *U непрерывно в 0*
3. $\exists C\ \forall x \in X\colon \|Ux\|_Y \leqslant C\|x\|_X$

Definition 5

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y.

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X,\ \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Note. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Note.

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Example 12. Нормы в прошлых примерах

2 $\|U\| = \infty$

3 $\|U\| = 1$

4 $\|U\| = b - a$

5 $\|U\| = b - a$

?? $\|U\| = 1$

Theorem 4 (Условие непрерывности полилинейного отображения). $U \in \mathrm{Poly}(X_1, \ldots X_m; Y)$, X_i, Y — *линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывно*
2. *U непрерывно в* 0
3. $\exists C\ \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots x_n \in X_n \colon \|U(x_1, \ldots x_n)\| \leqslant X\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$

Note. В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \ldots x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \ldots \|x_n\|_{X_n}\}.$$

Definition 6: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf\left\{C \mid \forall x_1 \in X_1, \ldots x_n \in X_n\ \|U(x_1, \ldots x_n) < C\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|\right\}.$$

Theorem 5 (эквивалентные способы вычисления опереатора). U — *линейное непрерывное отображение* $X \to Y$. *Тогда*

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|U\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\|.$$

Доказательство. Обозначим супремумы за A, B, C, D. Очевидно, что $C \geqslant B$ и $C \geqslant D$

$$C = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \frac{\|Ux\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что $B \geqslant A$. $x \neq 0$, $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|Ux\| \leqslant B.$$

Значит, $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant B$.

Теперь докажем, что $D \geqslant A$.

$$x \neq 0,\ \varepsilon > 0 \colon \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - e\varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leqslant D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant \frac{D}{1-\varepsilon} \to 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D \implies \sup_{x \neq} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D.$$

□

Remark. В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

Theorem 6 (эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора). $U : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$.

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \ldots x_n)}{\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|}\| = \sup_{\|x_j=1\|\|U(x_1, \ldots x_n)\|} = \sup_{\|x_j\|<1} = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1}.$$

0.1.2 Пространство линейных непрерывных операторов

Theorem 7 (О свойствах операторной нормы)**.** *$U_1, U_2, U_3 : X \to Y$ — линейные непрерывные операторы, λ — скаляр. Тогда*

1. $\|U_1 + U_2\| \leqslant \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \iff U = 0$
4. $U : X \to Y, V : Y \to Z$ — *линейные отображения.*

$$\begin{aligned} &\|VU\| \leqslant \|V\| \cdot \|U\| \\ &VU = V \circ U \\ &VUx = V(U(x)) \end{aligned}$$

Designation. $L(X, Y) \subset \operatorname{Hom}(X, Y)$ — пространство линейных операторов.