Конспект по матанализу I семестр
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 25, 2019

Contents

[section]

Chapter 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Chapter 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифф

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 2.3.1. $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leq M$
2. f *– ограничена:* $|f(n)| \leq M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Proof. Очевидно □

Theorem 2.3.2. $f_n \rightrightarrows f, g_n \to\to g$ *на* A. *Пусть* $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n)x)| \leq M$. *Тогда* $f_n g_n \rightrightarrows fg$

Proof.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 2.3.3. *Критерий Коши для равномерной сходимости Пусть* f_n *– последовательность функций на множестве* A. *Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Proof. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x in A.$

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть 2.3.3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 2.3.3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) \stackrel{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N.$ $\square$

Example. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): \ f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 2.3.4 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n – функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \ \text{где ряд} \ \sum a_n \ \text{сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Proof. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N.$

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

$\square$

Example (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

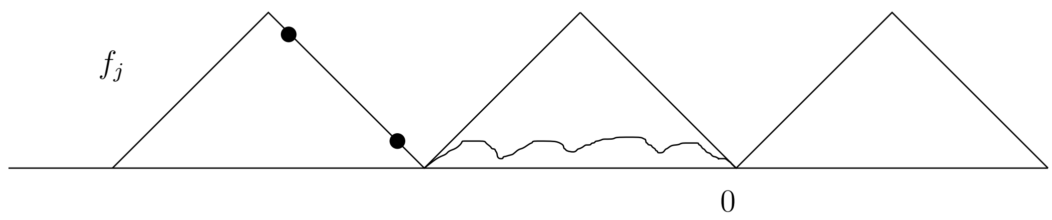

Figure 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}}: \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty}(f_j(x+h_k)-f_j(x))h_k = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{f_j(x+h_k)-f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k ($\pm$), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Name. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ – сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x)\dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Example. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{t}{n}+|x|}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+|x|}} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geq 1|.$$

Theorem 2.3.5. $f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a,b\rangle$ *и* $f' = g$.

Proof. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y_)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right|.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x) - f_l(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - 1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

$\square$