

Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1.1.1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$, $x, x_0 \in (a, b)$. Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n .

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Переход: $n - 1 \rightarrow n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 1.1.2 (Хитрая теорема о среднем). $f, g \in C[a, b]$, $g \geq 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a, b]$.

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$\begin{aligned} m \int_a^b g(x)dx &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \end{aligned}$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary. Если $|f^{(n+1)}| \leq M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 1.1.3. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \cdot \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x_0}^x.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Definition 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением** отрезка $[a, b]$.

Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$.

Θ называется **оснащением дробления** τ , если $\Theta = \{t_1, \dots, t_n\} : t_j = [x_{j-1}, x_j]$.

Пара (τ, Θ) называется **оснащенным дроблением**.

Definition 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a, b]$, (τ, Θ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, **интегральной суммой** называется

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Theorem 1.2.1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \Theta)$ — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \Theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] : \left(|s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_j)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{|b - a|} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла

Definition 3: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением отрезка** $[a, b]$.

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, Θ)

Definition 4

$f \in C[a, b]$, (Θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$. Тогда

$$S_{\tau, \Theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j+1})$$

называется интегральной суммой.

Theorem 1.3.1. $f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такие, что для любого оснащенного дробления (τ, Θ) отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \Theta}(t) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \Theta} \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $(\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(r_j)| (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$.

□