Теорема 1: Одномерная формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}(\langle a,b\rangle),\ x, x_0 \in (a,b)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x-x_0)^i + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Теорема 2: Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Если $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R}),\ [x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0,1)$:

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \leqslant n} \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^\alpha}(x+\vartheta h).$$

Замечание. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$ — мультииндекс

Определение 1: Несобственный интеграл

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$. Тогда несобственным интегралом называется

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)dx.$$

Если предел существует, то $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, иначе расходится.

Замечание. Аналогично определяется $\int_{\to a}^{b} f(x)dx$.

Теорема 3: Критерий Больцано-Коши

$\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) \colon \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) \colon \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Определение 2: Путь

Путь в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C[a,b]$. Носители пути — $\gamma([a,b])$.
$\gamma \in C^n[a,b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a,b] \iff \gamma$ — r-гладкий путь.

Определение 3: Кривая

Кривая в $\mathbb{R}^n$ — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

Определение 4: Длина пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_\tau l_\tau$, где

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|,\ \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

Определение 5: Длина кривой

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

Теорема 4: Длина гладкого пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий путь. Тогда γ обязательно спр и

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots \gamma_n'(\tau)).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma_1'(t)^2 + \dots \gamma_n'(t)^2|}.$$

Определение 6

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \to X$. U называется сжимающим отображением, если

$$\forall \gamma < 1 \ \forall x_1, x_2 \in X\colon \rho(U(x_1), U(x_2)) \leqslant \gamma \rho(x_1, x_2).$$

Теорема 5: Принцип сжимающих отображений

(X, ρ) полно.

1. U — сжимающее отображение $\Longrightarrow \exists! x_*\colon U(x_1) = x_*$ — неподвижная точка
2. Если $\exists N\colon U^N$ — сжимающее отображение $\Longrightarrow \exists! x_*\colon U(x_* = x_*$

Определение 7: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$). $U : X \to Y$ называется линейным, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X\colon U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X,\ \lambda$ — скаляр$\colon U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Обозначение. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y.

Определение 8: Полилинейное отображение

$X_1, \dots X_n$ — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$ — полилинейное отображение, если оно линейно по каждому из аргументов.

Обозначение. $\mathrm{Poly}(X_1, \dots X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Определение 9: Операторная норма

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y.

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X,\ \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Замечание. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Замечание.

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Определение 10: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf\left\{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots x_n \in X_n\ \|U(x_1, \dots x_n) < C\|x_1\| \cdot \dots \|x_n\|\right\}.$$

Определение 11

X, Y — нормированные пространства, $E \subset X$, $x \in E$, x — внутренняя точка, $f : E \to Y$. f — дифференцируемо в точке x, если $\exists L \in L(X, Y)$:

$$f(x + h) - f(x) = L(h) + o(h), \qquad h \to 0, x + h \in E.$$

L — дифференциал f в точке x.

Правила дифференцирования

Линейность $f_1, f_2 : E \subset XtoY$, f_1, f_2 непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2$ — скаляры: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ дифференцируема в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

Дифференциал композиции X, Y, Z — линейные нормируемые пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$, U, V открыты, $f : UtoY, g : V \to Z$, $x \in U, f(x) inV$, f дифференцируема в точке x, g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x.

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)).$$

Дифференцирование обратного $x \in U \subset X$, U открыто, $f : U \to Y$, существует окрестность $V(f(x))$ в Y, в которой $\exists f^{-1}$. Предположим, что f дифференцируема в точке x, $\exists\,(df(x))^{-1} \in L(Y, X)$, f^{-1} непрерывна в точке $f(x)$. Тогда

f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y,X)} = (df(x))^{-1}.$$

Определение 12: Частные производные

Пусть $a \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. U — окрестность точки a. $f\colon U \to Y$. $f(x) = f(x_1, \ldots x_n)$.

Определим $\varphi_j\colon X_j \to Y,\ \varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \ldots x_j, a_{j+1}, \ldots a_n)$.

$d\varphi_j(a_j)$ называется частным дифференциалом (частной производной) f по x_j в точке a, если существует.

Определение 13: Производная по вектору

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R},\ v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v. Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v.

Свойства (Экстремальное свойство градиента). *В случае* $\mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle,$$

откуда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leqslant |\operatorname{grad} f(x)|\, |v|.$$

Функция растет быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right|.$$

Теорема 6: Теорема о конечном приращении

Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ непрерывно на $[x, x+t] \subset U$ и дифференцируемо на $(x, x+h)$. Тогда

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leqslant \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

Теорема 7: Теорема о конечном приращении для функций

Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x+h] \in U$ и дифференцируема на $(x.x+h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x+h)$, что

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Теорема 8: О неявном отображении

- Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, Y— полное, $(x_0, y_0) \in W \subset X \times Y$.
- Отображение непрерывно $F\colon W \to Z$ в точке (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$
- В W существует частный дифференциал F по y $(\exists \partial_y F\colon W \to L(Y, Z))$ и непрерывен в точке (x_0, y_0).
- Оператор обратим $(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$

Тогда существуют $U \subset X$ — окрестность точки x_0, $V \subset Y$ — окрестность точки y_0, $f\colon U \to V$ такие, что $U \times V \subset W$ и

$$\{F(x,y) = 0\} \cap (U \times V) = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Теорема 9: необходимое условие экструмума

Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Тогда

1. Если для какого-то h существует $\partial_h f(x_0)$, то она равна 0.
2. Если f дифференцируема в точке x_0, то $df(x_0) = 0$

Определение 14: сходимость ряда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется сходящимся, если

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n =: S.$$

Иначе ряд называется расходящимся.

Свойства.

$\boxed{1}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* $\Longleftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ *сходится ряд* $\sum_{k=k+1}^{\infty} x_k$ *и при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty}}_{остаток}.$$

$\boxed{2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* $\Longrightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k \overset{m\to\infty}{\to} 0$

Доказательство. Распишем формулу суммы ряда:

$$S = S_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k.$$

S_m стремиться к S при $m \to \infty$, поэтому

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k = S - S_m \overset{m\to\infty}{\to 0}.$$

□

$\boxed{\texttt{линейность}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *сходятся. Тогда*

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) \text{ сходится}$$

при этом

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Замечание. Если один ряд сходится, а второй расходится, то их сумма расходится.

$\boxed{x_k \in \mathbb{R}^m}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(m)} \right).$$

$\boxed{z_k \in \mathbb{C}.\ z_k = x_k + iy_k}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

$\boxed{\texttt{монотонность}}$ $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \leqslant b_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}{}_k$ *сходится (возможно с* $\pm\infty$*), тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

$\boxed{\texttt{необходимое условие сходимости}}$ $\{x_k\} \subset X$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится, тогда* $x_k \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\texttt{критерий Больцано-Коши}}$ *Пусть* X *полно.* $\{x_k\} \subset X$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ равносильна тому, что $\{S_n\}$ сходится, что равносильно тому, что S_n фундаментальна в X. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N : \|S_m - S_n\| < \varepsilon.$$

$$m > n \Longrightarrow m = n + p,\ p \in \mathbb{N} : S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k.$$

□