Лекция 9: †

10 Apr

0.1 Поверхности и криволинейные координаты

Поверхность-график Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на открытом множестве, график функции, поверхность —

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in U\}.$$

Параметризация Отображение $F\colon U \to S$, такое что $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ — непрерывное, биектинвное отображениое

Пути на S Если $\gamma\colon [a, b] \to U$ — путь в U, то $F \circ \gamma$ – путь в S, и наоборот.

Криволинейные координаты на S (x, y) выполняют роль координат на S. Образы координатных линий — координатные кривые на S.

0.1.1 Касательная плоскость к графику функции

- Пусть f дифференцируемо в точке $(x_0, y_0) \in U$. Тогда
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \mathrm{o}(\ldots), \qquad (x, y) \to (x_0, y_0).$$
$$df(x_0, y_0) = \left(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)\right).$$
- Множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий уравнению
$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$
называется касательной плоскостью к S в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$.
- Эта плоскость единственна и
$$A = \partial_x f(x_0, y_0), \qquad B = \partial_y f(x_0, y_0).$$
- Нормаль к плоскости
$$n = \left(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)\right) = \left(\nabla f(x_0, y_0), -1\right).$$

0.1.2 Касательный вектор

- Если гладкий путь в $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то касательный вектор к нему это $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Если путь лежит на поверхности S, то есть $\Gamma = F \circ \gamma$, то
$$\Gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t), \partial_x f(x(t), y(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t)\big).$$
- Касательный вектор к пути на поверхности перпендикулярен нормали и лежит в касательной плоскости.

  Уравнение нормали
$$n = \left(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y (x_0, y_0), -1\right).$$
- Верно и обратное: любой вектор из касательной плоскости является касательным к некоторому пути на поверхности.
$$(u, v, w) \perp n \qquad x(t) = x_0 + ut,\ y(t) = y_0 + vt \text{ — путь в } U.$$
$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

  Продифференцировав это, мы получим равенство выше.

0.1.3 Чуть более общая ситуация

- Если $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, \dots f_m)$, то получим график отображения
$$S = \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y \in f(x)\}$$
— n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+m}$.
- $F\colon U \to S$, $F(x) - (x, f(x)$ — параметризация поверхности.
- Касательное пространство n-мерно и состоит из касательных векторов.
- Пространство нормалей m-мерное.

0.2 Теорема о неявном отображении (функции)

0.2.1 Мотивация

- Рассмотрим множество $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ — окружность на плоскости. Это не график функции $y = f(x)$, но почти для всех точек можем взять окрестность, которая будет графиком.
- Можно честно решить относительно y уравнение $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
TODO: Дописать ⥁

0.2.2 Подстановка

- Пусть задана система уравнений
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \end{cases}.$$
- Хотим разрешить относительно $y = (y_1, \dots y_n)$
$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots x_n) \end{cases}.$$
- Тем самым, получить задание m-мерной поверхности в $\mathbb{R}^{m+n}$.

0.3 Теорема о неявном отображении

Theorem 0.3.1 (О неявном отображении)**.**

- *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, Y — полное, $(x_0, y_0) \in W \subset X \times Y$.*
- *Отображение непрерывно $F\colon W \to Z$ в точке (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$*
- *В W существует частный дифференциал F по y ($\exists \partial_y F\colon W \to L(Y, Z)$) и непрерывно в точке (x_0, y_0).*
- *Оператор обратим $(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$*

Тогда существуют $U \subset X$ — окрестность точки x_0, $V \subset Y$ — окрестность точки y_0, $f\colon U \to V$ такие, что $U \times V \subset W$ и

$$\{F(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$

1. Пусть $g_x(y) = y - (\partial_y F(0,0))^{-1} F(x,y), \quad g_X : Y \to Y$.

   $$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y \text{ — неподвижная точка } g_X.$$

   Докажем это. Нужно выделить подмножество Y, где отображение действует.

   $$dg_x(y) = I_Y - (\partial_y F(0,0))^{-1} \partial_y F(x,y).$$

   Если (x,y) стремиться к $(0,0)$, то последнее слагаемое будет стремиться к тождественному отображению I_Y, то есть правая часть равенства стремиться к 0.

   $$\exists \Delta > 0 \colon \|x\| < \Delta, \|y\| < \Delta \Longrightarrow \|dg_x(y)\| < \frac{1}{2}.$$

   Возьмем $\Delta > \varepsilon > 0$. $g_0(0) = 0$

   $$\exists \delta > 0 \ \forall x, \|x\| < \delta \colon \|g_x(0)\| \leqslant \varepsilon/2.$$

2. **Ключевой момент:** так как производные меньше $\frac{1}{2}$, и $\|g_x(0)\| \leqslant \varepsilon/2$

   $$g_x(\{\|y\| \leqslant \varepsilon\}) \subset \{\|y\| \leqslant \varepsilon\}.$$

   Применим теорему о сжимающем отображении

   $$y \colon \|y\| \leqslant \varepsilon, \quad \|g_x(y) - g_y(x)\| \leqslant \sup_{0<\Theta<1} \|dg_x(\Theta)\| \cdot \|y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Так как Y полное, шар M, где действует g, является метрическим,отображение g_x сжимающее. Следовательно, существует единственная неподвижная точка

   $$\exists!\ y \colon \|y\| \leqslant \varepsilon, g_x(y) = y.$$

   Рассмотрим $U = B_\delta(0)$. Оно подойдет.

□

Note. Отображение f непрерывно в точке x_0.

Note. Если случай конечномерный, то достаточно требовать только обратимость (без непрерывности)

Note. $\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}\right)$ — обратимая матрица, то есть ее определитель не 0.

Theorem 0.3.2. *Если в условиях прошлой теоремы отображения F, $\partial_y F$ непрерывны не только в точке (x_0, y_0), но в целой окрестности, то f непрерывно в окрестности точки x_0*

Доказательство. Хотим проверить, что $\exists\ (d_y D(x,y))^{-1} \in L(Z,Y)$, при (x,y) близких к $(x0, y0)$. Уже знаем, что $\exists\ (\partial_y F(x_0,y_0))^{-1} \in L(Z,Y)$.

Lemma 1 (об обратимости оператора близкого к тождественному)**.** *Y — полное, $B \in L(Y,Y)$, $\|B\| \leqslant 1$. Тогда $\exists (I - B)^{-1} \in L(Y,Y)$.*

Доказательство. Докажем, что

$$\forall v \in \ \exists! \ u \in Y : (I - B)u = v.$$

Последнее утверждение равносильно тому, что

$$u = c + Bu \quad g_v(u) = v + Bu.$$

Это сжимающее отображение так как

$$\|g_v(u_1) - g_v(u_2)\| = \|Bu_1 - Bu_2\| \leqslant \|B\| \cdot \|u_1 - u_2\|.$$

Тогда по теореме сжимающем отображении существует неподвижная точка.

$$v_n \to v_0 j \Longrightarrow u_n \to u, \ u_n = v_n + Bu_n \wedge u_0 = v_0 + Bu_0.$$

$u_n - u_0 = v_n - v_0 + B\left(u_n - u_0\right)$

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \|v_n - v_0\| + \|B\| \cdot \|u_n - u_0\|.$$

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \frac{1}{1 - \|B\|}\|v_n - v_0\| \to 0.$$

□

Lemma 2 (об обратимости оберaтора близкого к обратимому)**. ??** *Y — полное пространство. $A, A_0 \in L(Y, Z)$, $\exists A_0^{-1} \in L(Z, Y)$. Если $\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, то $A^{-1} \in L(Z, Y)$*

Доказательство. Применяем лемму 1

$$\underbrace{A}_{L(Y,Z)} = A_0 + A - A_0 = \underbrace{A_0}_{\text{обратимо и } L(Y,Z)} \underbrace{(I_Y + A_0^{-1}(A - A_0))}_{\text{обратимо и } L(Y,Y)}, \quad \|B\| \leqslant \|A - A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1.$$

□

По лемме **??** получаем утверждение теоремы. □