Действие группы на множестве

Тамарин Вячеслав

4 апреля 2020 г.

1 Действие группы на множестве

Definition 1

Пусть X — множество, G — группа. Группа действует на множество означает, что задан гомоморфизм из G в группу биекций с операцией композиции $Bij(X) = S_X$

Example 1.1. $X = \{1, 2, 3\}$, $G = \mathbb{Z}$. Группа биекций — S_3, гомоморфизм $f(x) = (123)^x$.

$$f(n) = \begin{cases} (123), & n = 1 \pmod 3 \\ (321), & n = 2 \pmod 3 \\ 1, & n = 0 \pmod 3 \end{cases}.$$

$(12) \notin \text{Im } (f)$, $\text{Im } (f) = C_3 \subsetneq S_3$, $\ker(f) = 3\mathbb{Z}$.

Example 1.2. $\{1, \tau\} = C_2 \curvearrowright X = \{1, 2, 3\}$ — симметрии треугольника.

Practice. Доказать, что это отношение эквивалентности: $x \sim y \iff \exists g \in G \colon gx = y$. То есть для гомоморфизма $f \colon G \to Bij(X)$, $(f(g))(x) = y$.

Definition 2

Орбита действия группы $G \curvearrowright X$ — класс эквивалентности отношения из упражнения **??**. Множество орбит — $X \diagup G \coloneqq X \diagup \sim$.

Practice. Рассмотрим кубик. Рассмотрим группу поворотов G. X — множество кубов, покрашенных в 2 цвета. $|X| = 2 \cdot 6 = 64$. $G \curvearrowright X$.

Definition 3

Стабилизатор — такие элементы из G, которые оставляют элемент на месте.

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Statement. $\forall x \in X \ \exists y \in G \colon \text{Stab}(x) = \{g^{-1}hg \mid h \in \text{Stab}(y)\}$

Theorem 1.1.

$$|O_x| \cdot |\text{Stab}(x)| = |G|.$$

Definition 4

Пусть $g \in G$. Множество неподвижных элементов относительно g — $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$.

Theorem 1.2.

$$\sum_{g\in G} |X^g| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)|.$$

Theorem 1.3.

$$|X \diagup G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} |X^g|.$$

2 Матричная интерпретация

Theorem 2.1. *$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ задает поворот вокруг некоторой оси, проходящей через 0 тогда и только тогда, когда*

- *A сохраняет скалярное произведение*
- $\det A = 1$

Theorem 2.2. *Пусть $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.*

$$\forall u, v\ \langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle \iff A \cdot A^T.$$

2.1 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Definition 5

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = 1,\ \det A = 1\}$

Пусть $G \leqslant \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $1 < |G| < \infty$. Пусть $g \in G$. Обозначим этот поворот l_g. Также рассмотрим единичную сферу S^2.

$$\left|S^2 \cap l_g\right| = 2.$$

Эти две точки называются полюсами g.

Рассмотрим множество всех полюсов по всем элементам $g \in G$. $X = \bigcup_{g\in G}(S^2 \cap l_g)$ — это конечное множество.

Пусть $N = |X \diagup G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x\in X} |X^g|$.

- $g = 1 \Longrightarrow |X^g| = |X|$
- $g \neq 1 \Longrightarrow |X^g| = |2|$

Тогда прошлое равенство можно переписать

$$|X \diagup G| = \frac{|X| + (|G| - 1) \cdot 2}{|G|}.$$

Предположим, что $X \diagup G = \bigsqcup_{i=1}^N Gx_i$. Тогда

$$|X| = \sum_{i=1}^N |Gx_i|.$$

Theorem 2.3.

$$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}\right).$$

Statement.

$$1 \leqslant 2\left(1-\frac{1}{|G|}\right) < 2.$$

$$\frac{1}{2} \leqslant 1-\frac{1}{|\mathrm{Stab}(x)|} < 1.$$

Statement. $N \in \{2,3\}$