

Конспект по матанализу
I семестр
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

5 января 2020 г.

Оглавление

1	Введение	7
1.1	Простейшие свойства вещественных чисел	7
1.2	Множества в \mathbb{R}	8
1.3	Натуральные числа	8
1.3.1	Аксиома Архимеда	8
1.3.2	Аксиома индукции	8
1.3.3	Неравенство Бернулли	9
1.3.4	Аксиома Кантора-Дедекинда	9
1.3.5	Иррациональность корня из двух	10
1.3.6	Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке	10
1.3.7	Число e	11
1.4	Свойства подмножеств \mathbb{R}	11
1.4.1	Грани	11
1.4.2	Связность отрезка	12
1.4.3	Предельные и изолированные точки	13
1.4.4	Теорема о вложенных отрезках	13
1.4.5	Теорема о компактности	14
1.4.6	Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках	14
1.4.7	Десятичное разложение вещественного числа	14
2	Пределы	17
2.1	Основные свойства пределов функций	17
2.1.1	Определение предела	17
2.1.2	Единственность предела	17
2.1.3	Теорема о пределе сужения	18
2.1.4	Предел постоянной функции и предел тождественного отображения	18
2.1.5	Предельный переход в неравенстве	18
2.1.6	Принцип двух полицейских	18
2.1.7	Предел линейной комбинации	19
2.1.8	Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций	19
2.1.9	Предел произведения имеющих предел функций	19
2.1.10	Предел частного	20
2.1.11	Сумма геометрической прогрессии	20
2.1.12	Предел монотонной функции	21
2.1.13	Предел композиции	22
2.2	Критерий Коши	22
2.2.1	Критерий Коши	22
2.3	Ряды	23

2.3.1	Понятие ряда. Теорема Лейбница	23
2.4	Верхние и нижние пределы	24
2.4.1	Определение и свойства	24
2.4.2	Теорема об описании верхнего и нижнего предела	25
2.5	Последовательности	26
2.5.1	Сходящиеся последовательности и их пределы	26
2.5.2	Вторая форма теоремы о компактности	27
2.5.3	Предел функции в терминах последовательности	27
2.6	Бесконечные пределы	28
2.6.1	Бесконечные пределы	28
2.7	Бесконечно большие и бесконечно малые	29
2.7.1	О и о. Соотношения транзитивности	29
2.7.2	Эквивалентные функции	29
2.7.3	Отношение эквивалентности и вычисление пределов	30
3	Непрерывные функции	31
3.1	Непрерывность в точке	31
3.2	Свойства непрерывных функций	31
3.2.1	Теорема об алгебраических операциях	31
3.2.2	Теорема о композиции	31
3.2.3	Теорема о пределе последовательности	32
3.3	Непрерывность на множестве	32
3.3.1	Теоремы Вейерштрасса	33
3.3.2	Теорема о промежуточном значении	33
3.4	Степени с рациональным показателем	34
3.5	Равномерная непрерывность	35
3.5.1	Теорема Кантора	35
4	Дифференцирование	37
4.1	Определения	37
4.2	Правила дифференцирования	38
4.3	Производная возрастающей функции	39
4.4	Формулы Коши и Лагранжа	40
4.5	Правило Лопиталья	42
4.6	Старшие производные	43
4.6.1	Полином с заданными производными	43
4.6.2	Полином Тейлора	44
4.7	Формула Тейлора	45
4.7.1	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано	45
4.7.2	Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа	46
4.8	Достаточное условие экстремума	47
4.9	Сходимость последовательностей	47
4.10	Первообразные	51
4.11	Интеграл	52
4.11.1	Интеграл Дарбу	53
4.11.2	Связь интеграла и производящей	57
4.11.3	Формула интегрирования по частям	58
4.12	Логарифм и экспонента	59
4.12.1	Показательная функция	65
4.12.2	Степенная функция	65

4.12.3	Разложение Тейлора для логарифма	66
4.12.4	Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора	68
4.13	Дифференциальные уравнения	71

Глава 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

- (а) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом
 - i. $a + b = b + a$ (коммутативность)
 - ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
 - iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)
 - iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)
- (б) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом
 - i. $xy = yx$ (коммутативность)
 - ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)
 - iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)
 - iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)
 - v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на \mathbb{R}

Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

- (а) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \\ a < b \end{cases}$ (антисимметричность)
- (б) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)
- (с) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$
- (d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- (е) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в \mathbb{R}

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты). $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ (замкнутый отрезок)}$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (открытый слева отрезок)}$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (открытый справа отрезок)}$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (открытый отрезок)}$$

Def 5 (Лучи). $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A .

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A .

// $\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Axiom 1 (Архимед). *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Доказательство. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. \square

1.3.2 Аксиома индукции

Axiom 2 (индукции). *Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

Statement (Обоснование метода математической индукции). *Пусть P_1, P_2, \dots - последовательность суждений. Предположим, что*

1. P_1 - верно
2. Для любого $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$

Тогда все условия P_i верны.

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n - \text{верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \emptyset$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1, l-1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. \square

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1 (Неравенство Бернулли). Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geq 1 + n(a - 1)$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство. Индукция:

База: $n = 1$: $a \geq 1 + (a - 1)$

Переход: $n \rightarrow n + 1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a - 1)a = (a - 1) + 1 + n(a - 1)a = \\ &1 + (a - 1)(1 + na) \geq 1 + (a - 1)(1 + n) \end{aligned}.$$

\square

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Доказательство. Пусть $a^n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a - 1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$. Противоречие \square

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B) , где $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, такая что всякое число из A не более любого из B .

Def 8. Число c лежит в щели (A, B) , если $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Axiom 3 (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

Statement. Квадратный корень из 2 существует и единственный.

Доказательство.

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \leq v \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

Lemma. В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.

Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

2. Единственность

Возьмем $c \geq 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c , для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 2. Квадратный корень из двух иррационален.

Доказательство. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q$$

□

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v \rangle$ – любой отрезок с концами в u, v ($u \leq v$). Его длина $|\langle u, v \rangle| := v - u$

Theorem 3. Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$ существует точка вида rc , где $r \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Заменим $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leq r \leq b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$. Среди таких p существует наименьший p_0 .

Возьмем $\frac{p_0 - 1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$

□

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 4. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует иррациональное число.

Доказательство. По следствию из теоремы 3 $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$.

□

1.3.7 Число e

Def 12. Рассмотрим последовательность $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Число e – предел $\{a_n\}$.

Statement. $\{a_n\}$ - сходится.

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333 \end{aligned}$$

□

Theorem 5. e - иррационально.

Доказательство. $2 < e < 3$

Пусть $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $q > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right). \\ q!p &= S + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \right) = S + a. \end{aligned}$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$. Обозначим предел за a . Докажем, что $a \notin \mathbb{Z}$.

Statement. $0 < a < 1$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} &\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}. \\ 0 < a &\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1. \end{aligned}$$

□

□

1.4 Свойства подмножеств \mathbb{R}

1.4.1 Грани

Def 13 (supremum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 14 (infimum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.
Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его верхних границ.

Theorem 6 (об описании точной верхней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \sup A$
2. x – верхняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$

$x = \sup A \Rightarrow x$ – верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$. Тогда $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x . Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

$2 \Rightarrow 1$

x – верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x – наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ – верхняя граница A . Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x – не верхняя граница. \square

Theorem 7 (об описании точной нижней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \inf A$
2. x – нижняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 15. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 8 (о связности отрезка). Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

Для любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$ – замкнуты $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$, то $E \cap F \neq \emptyset$.

Доказательство. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \emptyset$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x – предельная точка для E , с другой стороны, предельная точка для F . Так как E, F – замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \emptyset$. Противоречие. \square

1.4.3 Пределные и изолированные точки

Def 16. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 17. Проколота окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

Def 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

u называется предельной точкой для A , если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

Exs.

1. \mathbb{Z}, \mathbb{N} не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.
3. Для \mathbb{Q} все предельные точки - \mathbb{R} .

Def 19. Все точки множества A , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A - \text{изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

Exs.

1. $[1, 2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1, 2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ ($y = \inf A$).

$$\begin{cases} y \notin A \Rightarrow y - \text{предельная точка } A \\ y \in A \end{cases}$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 9 (о вложенных отрезках). $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$.

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - последовательность замкнутых отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Доказательство. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geq k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.

В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 10 (о компактности). *Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$. Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] - \text{бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] - \text{бесконечно} \end{cases}$ Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках $\exists \forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A .

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. □

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 11 (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. □

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей

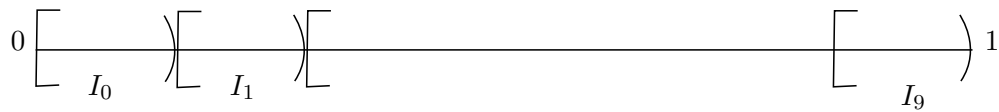


Рис. 1.1: Decimal decomposition

3. И так далее

Получим $0.i_1i_2i_3\dots$ – десятичную запись числа x .

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 12. Пусть (j_1, j_2, \dots) – цифры от нуля до девяти. $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$.
Тогда $\exists! x \in [0, 1)$ для которого $0.j_1j_2\dots$ – десятичное представление.

Доказательство. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме 11 существует непустое пересечение, равное одной точке – и есть наше число. \square

Глава 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 20. b – предел функции f в точке x_0 , если для любой окрестности U в точке b существует такая проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 : $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 21. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 22. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 13. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x - предельная точка для A .

Если a, b - предельные для f в точке x_0 , то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Противоречие. \square

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 23. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 14 (о пределе сужения). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$
Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. Тогда $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$.

Доказательство. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. □

Theorem 15 (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$, то $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Доказательство. $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.
 $\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0 . □

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 16 (Предельный переход в неравенстве). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$. Предположим, что существуют пределы у f, g в точке x_0 равные соответственно a, b . Пусть $a < b$.
Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Доказательство. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned}$$

Возьмем $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. □

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 17 (Принцип двух полицейских). $f, g, k : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$
Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x_0} g = b$.

Доказательство. Рассмотрим $\overset{\circ}{U}(b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2 : \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

□

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 18 (Предел линейной комбинации). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \alpha a + \beta b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ &= |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leqslant \\ &\leqslant |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ &\exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned}$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$:

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leqslant |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ и $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leqslant c \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Доказательство. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

□

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leqslant \\ &\leqslant |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leqslant c$ в некоторой проколотой окрестности x_0 , а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0 . Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$, $b \neq 0$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Доказательство.

Lemma. В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$.

То есть $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

Доказательство. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b| |f(x)| + |f(x) - a| |g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \in \mathbb{R}$.

Statement. Если $|q| < 1$, то $f(x)$ имеет предел, иначе не имеет предела.

Доказательство.

$$|q| < 1$$

Lemma.

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Доказательство.*

$$\left(\frac{1}{|q|} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1 \right)^n \geq 1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0 \ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)}$.

□

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

2. $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5. $q < 1$

$$|f(n)| = \left| \frac{q^n - 1}{q - 1} \right| \geq \frac{1}{|q - 1|} (|q|^n - 1).$$

Эта функция тоже не имеет предела.

□

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 24. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \cap \mathbb{R}$

f - (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

f - (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

f - (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 19 (о пределе монотонной функции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на A , $x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Доказательство. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

Note. Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

2.1.13 Предел композиции

Def 25. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subset B$. Тогда задана функция композиции $h = g \circ f$.

Theorem 20. Пусть $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y \rightarrow b} g(y) = d$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = d$, если хотя бы одно условие выполнено:

1. $f(x) \neq b, \quad x \neq x_0$
2. $b \in B, g$ - непрерывна в точке $b : d = g(b)$

Доказательство. Пусть U окрестность точки d ; $\exists V(b)$:

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W}(x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \rightarrow f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) \in U$. Пусть выполнено второе условие. Либо $f(x) \neq b$, тогда $g(f(x)) \in U$, либо $f(x) = b$, тогда $g(f(x)) = d \in U$ \square

2.2 Критерий Коши

2.2.1 Критерий Коши

Theorem 21 (Критерий Коши). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A'$. x - либо число, либо $\pm\infty$.
Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$.

Lemma. Если выполнено условие Коши, то f ограничено вблизи x_0 .

Доказательство. Применим условие : зафиксируем какую-то точку y из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности x_0 выполнено $f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$, то есть $f(x)$ ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности, f - ограничена.

Def 26. Пусть $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на $B, E \subset B$. Колебание f на E - это $\sup_{x \in E} g(x) - \inf_{x \in E} g(x) = \text{osc}_E(g)$

Если $\forall x, y \in E |g(x) - g(y)| \leq \rho \Rightarrow \text{osc}_E(g) \leq \rho$: $\forall x, y \in E - \rho < g(x) - g(y) \leq g \Rightarrow g(x) \leq g(y) + \rho \Rightarrow \sup_E g \leq g(y) + \rho, \sup_E g - \rho \leq g(y) \forall y \in E \Rightarrow \sup_E g - \rho$ - нижняя граница, $\inf_E g \geq \sup_E g - \rho$.
 $/\text{sup} - \text{inf} \leq \text{sup} - (\text{sup} - \rho) = \rho$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$\text{osc}_B(f) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что $|f(x) - f(y)| \leq \rho \forall x, y \in B \Rightarrow \text{osc}_B(f) \leq \rho$. Пусть $d = \text{osc}_B(f)$; $x, y \in B$

$$m = \inf_{z \in B} f(z) \leq f(x) \leq \sup_{z \in B} f(x) = M$$

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq f(y) \leq \sup_{z \in B} f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = \text{osc}_B(f) = d$$

d - верхняя граница для множества чисел $|f(x) - f(y)|$, доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо. \square

f удовлетворяет условию Коши в x_0 : $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A$. По лемме f ограничена.

Заведем вспомогательную функцию $g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$ - предельная точка для g , g ограничена на A . $\mathring{V}(x_0); m = m_{\mathring{V}}^{\circ} = m_{\mathring{V},g}^{\circ} = \inf_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x); M = \sup_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x)$. Всегда $m \leq M$, заведем еще $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\mathring{V}}^{\circ}$ - множество \inf по всем проколотым окрестностям, аналогично заведем множество \sup .

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$ образует щель. Если $\mathring{W} \subset \mathring{V} \Rightarrow m_{\mathring{W}}^{\circ} \geq m_{\mathring{V}}^{\circ}; M_{\mathring{W}}^{\circ} \leq M_{\mathring{V}}^{\circ}$. Пусть $a \in \Gamma, b \in \Delta, \exists \mathring{V}, \mathring{W}$: $a = m_{\mathring{V}}^{\circ}, b = M_{\mathring{W}}^{\circ}$. Пусть $\mathring{V} \subset \mathring{W}$; $a \leq M_{\mathring{V}}^{\circ} \leq b$. Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей f это щель. $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$ узкая щель. $\varepsilon > 0$; $\exists \mathring{V} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow M_{\mathring{V},f}^{\circ} - m_{\mathring{V},f}^{\circ} \leq \varepsilon$, то есть там только одно число c .

$$\forall \mathring{V}(x_0) m_{\mathring{V},f}^{\circ} \leq c \leq M_{\mathring{V},f}^{\circ}. x \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow m_{\mathring{V},f}^{\circ} \leq f(x) \leq M_{\mathring{V},f}^{\circ} \Rightarrow |f(x) - c| \leq |M - m| \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : \text{osc}_{\mathring{V} \cap A}^{\circ}(f - c) \leq \varepsilon. \quad \square$$

2.3 Ряды

2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

Def 27. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ряд - символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда - последовательность $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} - \text{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 22 (Лейбниц). Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательность $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

Доказательство.

\Rightarrow
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n$$

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n})$$

Заменяем в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

\Leftarrow
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□

Theorem 23. Пусть $s > 0$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$.

2.4 Верхние и нижние пределы

2.4.1 Определение и свойства

Def 28. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x)$$

$$b = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x).$$

Число a называется верхним пределом f в точке x_0 .

Число b называется нижним пределом f в точке x_0 .

Property. 1. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. Сумма двух функций $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq \overline{\lim}_{x_0}f + \overline{\lim}_{x_0}g.$$

Рассмотрим $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$.

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g). \end{aligned}$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim}_{x_0}(f, g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

Theorem 24 (Теорема об описании верхнего предела). Пусть f - ограниченная функция на множестве A . $x_0 \in A$. Число a является верхним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть 1 и 2 выполнены. $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и найдем для него $\overset{\circ}{V}$.

$$\overline{\lim}_{x_0} f \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq a + \varepsilon.$$

Тогда $\overline{\lim}_{x_0} f \leq a$.

$$\forall \overset{\circ}{U} : M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{x_0} f \geq a + \varepsilon.$$

Так как ε любое, $\overline{\lim}_{x_0} f \geq a$

Теперь в обратную сторону. Пусть $a = \overline{\lim}_{x_0} f$.

$$a = \overline{\lim}_{x_0} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} : a \leq M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Рассмотрим произвольную проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 .

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

□

Theorem 25 (Теорема об описании нижнего предела). Пусть f - ограниченная функция на множестве A . $x_0 \in A$. Число b является нижним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$
2. $\forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично □

2.5 Последовательности

2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Def 29. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Statement. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, $b \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N}$ - конечное : $\forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$

Доказательство. Запишем определение того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad (2.1)$$

1 \Rightarrow 2. Пусть 2.1 верно. Возьмем $A = \{1, \dots, N\}$ - конечно. Следовательно, верно 2.

2 \Rightarrow 1. Возьмем $N = \max\{A\}$, получим 1. □

Def 30. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция. $y_n = x_{\varphi(n)}$ - перестановка $\{x_n\}$.

Corollary. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

Def 31. Пусть $\{n_k\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. $\{y_k\} : y_k = x_{n_k}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$

Statement. Если $\{x_n\}$ сходится к b , то любая подпоследовательность тоже сходится к b .

Доказательство. Аналогично 2.1.3. □

2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

Lemma. $\{x_n\} = X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

1. x_0 - предельная точка для X .
2. $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 : x_n \in X, x_n \neq x_0$. Более того $\{x_n\}$ можно выбрать так, что $x_k \neq x_j, i \neq j$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. Возьмем любую проколотую окрестность точки x_0 . Хотим: $\overset{\circ}{V} \cap X \neq \emptyset$.

$$\overset{\circ}{V} = (x - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x + \varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$. Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. По принципу двух полицейских $|x_n - x_0| \rightarrow 0$. Теперь сделаем все неравными: $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$, дальше возьмем $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$ и скажем, что $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X, x_2 \neq x_1$ и так далее, $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \dots, |x_0 - x_{n-1}|, x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$ \square

Theorem 26 (Вторая форма теоремы о компактности). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\exists M : |x_n| \leq M, \forall n$. Разберем два случая:

1. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.
2. A - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для A . Тогда по лемме 2.5.2 существует $\{a_k\} \in A, a_k \rightarrow b, a_k \neq a_l, k \neq l$.

Тогда $\forall k \exists! n_k : a_k = x_{n_k}$, где номера n_k попарно различны, но не упорядочены. То есть $\{x_{n_k}\}$ - перестановка $\{x_n\}$, а значит тоже сходится. \square

2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

Theorem 27. Пусть $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$
2. $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow a$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Берем последовательность $a_n \in A, a_n \neq x_0$. Надо $f(a_n) \rightarrow b$.

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\exists N : a_n \in V \forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} (a_n \neq x_0).$$

Получаем

$$|f(a_n) - b| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$. От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\neg "a = \lim_{x_0} f" : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0, x \in A, \quad |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Возьмем

$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, x \in A.$$

Получаем, что $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. С другой стороны, по принципу двух полицейских:

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Противоречие.

Случай $x_0 = \infty$.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Возьмем $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$. □

2.6 Бесконечные пределы

2.6.1 Бесконечные пределы

Def 32. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$. Говорят, что f имеет предел $+\infty(-\infty)$ в точке x_0 , если: $\forall U(\pm\infty)$ существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

На языке неравенств: $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Def 33. Говорят, что f стремиться к бесконечности в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$. То есть $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$.

Statement. Пусть $f(x) \neq 0$ в проколота окрестности x_0 . Следующие условия эквивалентны:

1. f - стремиться к бесконечности в точке x_0
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ (тогда дополнительное условие 2.6.1 можно не накладывать).

$$\varepsilon > 0 M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ (здесь условие 2.6.1 необходимо). $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$. Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 :

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \iff |f(x)| > M.$$

□

2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

2.7.1 О и о. Соотношения транзитивности

Def 34. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$.

f называется бесконечно малой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

f называется бесконечно большой в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

Def 35. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что g доминирует функцию f вблизи x_0 и пишут $f = O(g)$ ($x \rightarrow x_0$), если $\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$.

Def 36. Функции f, g называются сравнимым вблизи x_0 , если $f = O(g) \wedge g = O(f)$. Обозначение: $f \asymp g$.

Property. $f = O(g) \wedge g = O(h) \implies f = O(h)$

Доказательство.

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leq c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$$

$$\exists \overset{\circ}{V}(x_0), \exists c_2 : |g(x)| \leq c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$:

$$|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq c|h(x)|.$$

□

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0 , то $f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f}{g}$ - ограниченная функция.

Def 37. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что $f(x) = o(g(x))$ вблизи x_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) :$

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0 , то $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ - ограниченная функция.

2.7.2 Эквивалентные функции

Def 38. $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что f, g эквивалентны вблизи x_0 , если $f - g = o(g)$, при $x \rightarrow x_0$. Обозначение: $f \sim g$.

Note. Определение асимметрично!

Lemma. $f \sim g$, при $x \rightarrow x_0 \implies g \sim f$ при $x \rightarrow x_0$

Доказательство. Проверим, что $g = O(f)$ вблизи x_0 :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|.$$

$$\frac{1}{2}|g(x)| \leq |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leq 2|f(x)|.$$

□

Note. Если $g(x) \neq 0$ вблизи x_0 , $f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

Statement. Полезные преобразования для вычисления пределов:

1. $p(x) = \sum_{i=1}^n a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$ При $x \rightarrow +\infty : p(x) \sim a_n x^n$
2. $p(x) = (x - x_0)^l (b + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0.$ Тогда $p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$
3. $f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \dots + 1} \sim \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$

Theorem 28. f, g не обращаются в нуль вблизи x_0 , $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$ вблизи x_0 . Тогда $fg, f_1 g_1$ одновременно имеют или не имеют предел в точке x_0 . Если пределы существуют, то они равны.

Note. Аналогичная теорема верна для $\frac{f}{g}$ и $\frac{f_1}{g_1}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} fg = f_1 g_1 \quad & \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен 1}}. \\ \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \quad & \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен 1}}. \end{aligned}$$

□

Глава 3

Непрерывные функции

3.1 Непрерывность в точке

Designation. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

Def 39. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0 , если

для любой окрестности U точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(V \cap A) \subset U$.

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \quad x \in A \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (3.1)$$

Note. Если $x_0 \in A'$, то условие 3.1 эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note. Если точка x_0 является изолированной для A , то f непрерывна в x_0 .

3.2 Свойства непрерывных функций

3.2.1 Теорема об алгебраических операциях

Theorem 29 (об алгебраических операциях с непрерывными функциями). Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Если f и g непрерывны в точке x_0 , то $\alpha g + \beta f$ непрерывна в точке x_0 .
- Если f и g непрерывны в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Если x_0 — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. □

3.2.2 Теорема о композиции

Theorem 30 (о композиции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, $x_0 \in A$. Пусть f непрерывна в точке x_0 , g непрерывна в точке $f(x_0) = y_0$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Обозначим $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$. Пусть U — окрестность точки z_0 . Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как f непрерывна в точке x_0 :

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

3.2.3 Теорема о пределе последовательности

Theorem 31. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Следующие условия эквивалентны:

1. f непрерывна в точке x_0
2. \forall последовательности $\{x_n\} \in A$, $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Доказательство.

$$1 \implies 2$$

Пусть W — окрестность точки $f(x_0)$. Так как f непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как $x_n \rightarrow x_0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in V \implies f(x_n) \in W.$$

$$2 \implies 1$$

Пусть f не непрерывна в точке x_0 , есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Из этого следует, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Противоречие.

□

3.3 Непрерывность на множестве

Def 40. Говорят, что функция f , заданная на множестве A , **непрерывна на некотором подмножестве** $A_1 \subset A$, если она непрерывна в каждой точке множества A_1 .

3.3.1 Теоремы Вейерштрасса

Theorem 32 (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть f задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве A . Тогда функция f ограничена на A .

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на A . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \rightarrow x$. Так как A замкнуто, $x \in A$. Следовательно, $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$. Противоречие. \square

Theorem 33 (Вторая теорема Вейерштрасса). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве A функция. Если существуют конечные

$$M = \sup_{x \in A} f(x), \quad m = \inf_{x \in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

Доказательство.

- Для M :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \rightarrow x$. Так как A замкнуто, $x \in A$.

$$f(x_{n_j}) \rightarrow f(x) \wedge f(x_{n_j}) \rightarrow M \implies M = f(x).$$

Значит, M достигается.

- Для m : совершенно аналогично.

\square

3.3.2 Теорема о промежуточном значении

Designation. « u между r и s » $:= \begin{cases} u \in [r, s] & r \leq s \\ u \in [s, r] & r > s \end{cases}$

Theorem 34 (о промежуточном значении). Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle$. Пусть $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$, v находится между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует x между a и b такой, что $f(x) = v$.

Доказательство. Если $a = b$, утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что $a < b$. Будем считать, что $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$.

Пусть нет точки $x_0 : f(x_0) = v$. Обозначим $I = [a, b]$. Пусть $X = \{x \in I \mid f(x) \leq v\}$ и $Y = \{x \in I \mid f(x) \geq v\}$. Докажем, что X и Y замкнуты.

1. X замкнуто:

x_0 — предельная точка. Следовательно, $\exists x_n \in X : x_n \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0)$. Тогда $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

$$f(x_n) \leq v \implies f(x) \leq v.$$

2. Аналогично Y замкнуто.

Следовательно, $X \cap Y \neq \emptyset$. □

Theorem 35. Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle a, b \rangle$. Следующие условия эквивалентны:

1. f — инъекция (то есть $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$)
2. f — строго монотонная

Доказательство.

$2 \implies 1$ Очевидно.

$1 \implies 2$ Пусть f не строго монотонна. Тогда $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle$:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{cases}.$$

Тогда $\exists x'_1 \neq x'_2$, но $f(x'_1) = f(x'_2)$. Противоречие. □

Theorem 36. Пусть g задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда g непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).

Statement. Если f непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то f^{-1} тоже задана на отрезке и непрерывна.

3.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z}, f(x) = x^m, x > 0$.

$$x^0 \equiv 1, \quad x > 0.$$

x^m строго возрастает, если $m > 0$

x^m строго убывает, если $m < 0$

$$x^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-m}}$$

$f(x) = x^m$ — непрерывная функция. Обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$ — корень m -й степени из $y > 0$.

Def 41. $x > 0, r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}$

$x^r = \sqrt[q]{x^p}$ — x в рациональной степени.

Note. $x \mapsto x^r$ — непрерывное отображение.

Lemma. Результат не зависит от представления r в виде дроби.

Property.

$$1. x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$$

$$2. (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$$

$$3. x^r \cdot y^r = (xy)^r$$

3.5 Равномерная непрерывность

Def 42. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что f **равномерно непрерывна** на A , если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \ x_0 \in A : (|x - x_0| < \delta \wedge x \in A) \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ех. $f(x) = x$, $A = \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ |x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies f \text{ равномерно непрерывна.}$$

Ех. $f(x) = x^2$, $A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y| < \varepsilon \implies f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

Ех. $h(x) = \sqrt{x}$ — равномерно непрерывна.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

3.5.1 Теорема Кантора

Theorem 37 (Кантор). Пусть A замкнутое ограниченное множество. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного. Пусть f не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \ \delta > 0 \ \exists x'_1, x''_2 \in A : |x'_1 - x''_2| < \delta \wedge |f(x'_1) - f(x''_2)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$.

$$\exists x'_n, x''_n \in A : |x'_n - x''_n| < \delta \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Получили две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$. Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности $\exists x'_{n_j} \rightarrow x_0 \in A$.

$$x''_{n_j} = x'_{n_j} + (x''_{n_j} - x'_{n_j}) \rightarrow x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})| \geq \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к $f(x_0)$, значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие. \square

Глава 4

Дифференцирование

4.1 Определения

Designation. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Def 43. Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0),$$

где $l(t) = kt$, $k \in \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x_0 (также обозначается $df_{x_0}(t)$ или $df(x_0, t)$).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0).$$

Def 44. Если f дифференцируема в точке x_0 , **производная** f в точке x_0 определяется так:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Property.

1. Если f дифференцируема в точке x_0 , то k единственное.
2. Если f дифференцируема в точке x_0 , то f непрерывна в точке x_0 .
3. f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k, \quad df_{x_0}(t) = kt.$$

Доказательство.

$$\boxed{\implies} f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow k.$$

$\boxed{\impliedby}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0) = \\ &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

□

4. f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует β , заданная в окрестности $V \ni x$:

(a) β непрерывна в точке x_0

(b) $f(x) - f(x_0) = \beta(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in V$

Доказательство.

⇒

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} & x = x_0 \end{cases}$$

⇐ $\beta(x) = \beta(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$ Подставим

$$f(x) - \underbrace{\beta(x_0)}_k (x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0).$$

Получили определение.

□

4.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!

1. $f(x) = ax + b$ дифференцируема и $\forall x_0 : f'(x_0) = a$

2. Если f, g дифференцируемы в точке x_0 , $f \cdot g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Если f, g дифференцируемы в x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Если $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \langle c, d \rangle$, $x_0 \in \langle c, d \rangle$, $g(x_0) \in \langle a, b \rangle$ и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, g дифференцируема в точке x_0 , то $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

6. Производная обратной функции. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна. Пусть $x_0 \in (a, b)$, $\exists f'(x_0) \neq 0$, обозначим $g = f^{-1}$ — обратное отображение, $y_0 = f(x_0)$. Тогда g дифференцируема в точке y_0 и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. $m \in \mathbb{N}$, $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Если $x_0 > 0$, то g дифференцируема в точке x_0 и

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8. $x_0 > 0$, $\alpha = \frac{l}{k} > 0$. $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$. Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и

$$\varphi'(x) = l \left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$

Аналогично для $\alpha < 0$.

9. Тайная таблице еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

4.3 Производная возрастающей функции

Def 45. Пусть $f : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Говорят, что f **возрастает в точке** x_0 , если \exists окрестность $U \ni x_0$:

$$\begin{cases} f(y) \leq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \leq x_0 \\ f(y) \geq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \geq x_0 \end{cases}$$

Note. Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

Theorem 38. Пусть в условии определения f возрастает в точке x_0 .

1. Если $\exists f'(x_0)$, $f'(x_0) \geq 0$
2. Пусть $\exists f'(x_0) > 0$, тогда f строго возрастает в точке x_0

Доказательство.

- 1.

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0 \quad \forall x \geq x_0} \rightarrow f'(x_0) \implies f'(x_0) \geq 0.$$

$$2. f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\gamma(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|).$$

$0 < \varepsilon < f(x_0)$. Разберем пару случаев:

(a) $x > x_0$.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geq (f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b) $x < x_0$.

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

Def 46. $I = (\alpha, \beta)$, $x \in I$. Говорят, что f имеет **монотонный максимум**, если

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

Note. Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

Note. Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

Theorem 39. $x_0 \in (\alpha, \beta)$ — точка локального экстремума для $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 локальный максимум. Тогда $f \upharpoonright_{(\alpha, x_0]}$ — возрастает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \geq 0$. Также $f \upharpoonright_{[x_0, \beta)}$ — убывает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \leq 0$.

Для других случаев полностью аналогично.

□

4.4 Формулы Коши и Лагранжа

Theorem 40 (Ролль). $I = [a, b]$, $a \neq b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a, b) .

Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса №2 33 $\exists x, y \in [a, b] : \begin{cases} f(x) = \min_{t \in [a, b]} f(t) \\ f(y) = \max_{t \in [a, b]} f(t) \end{cases}$ Если $x, y \in a, b$, то $f \equiv \text{const}$ и $f'(a) = 0$. Иначе либо $x \in (a, b)$, либо $y \in (a, b)$. Тогда в ней производная и равна нулю по прошлой теореме 39.

□

Corollary (Формула Коши). Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Corollary (Формула Лагранжа). Если f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , то $\exists c \in (a, b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Note. Если h дифференцируема на (a, b) непрерывна на $[a, b]$, при этом $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f инъективна на $[a, b]$.

Corollary. В условии замечания производная h' сохраняет знак.

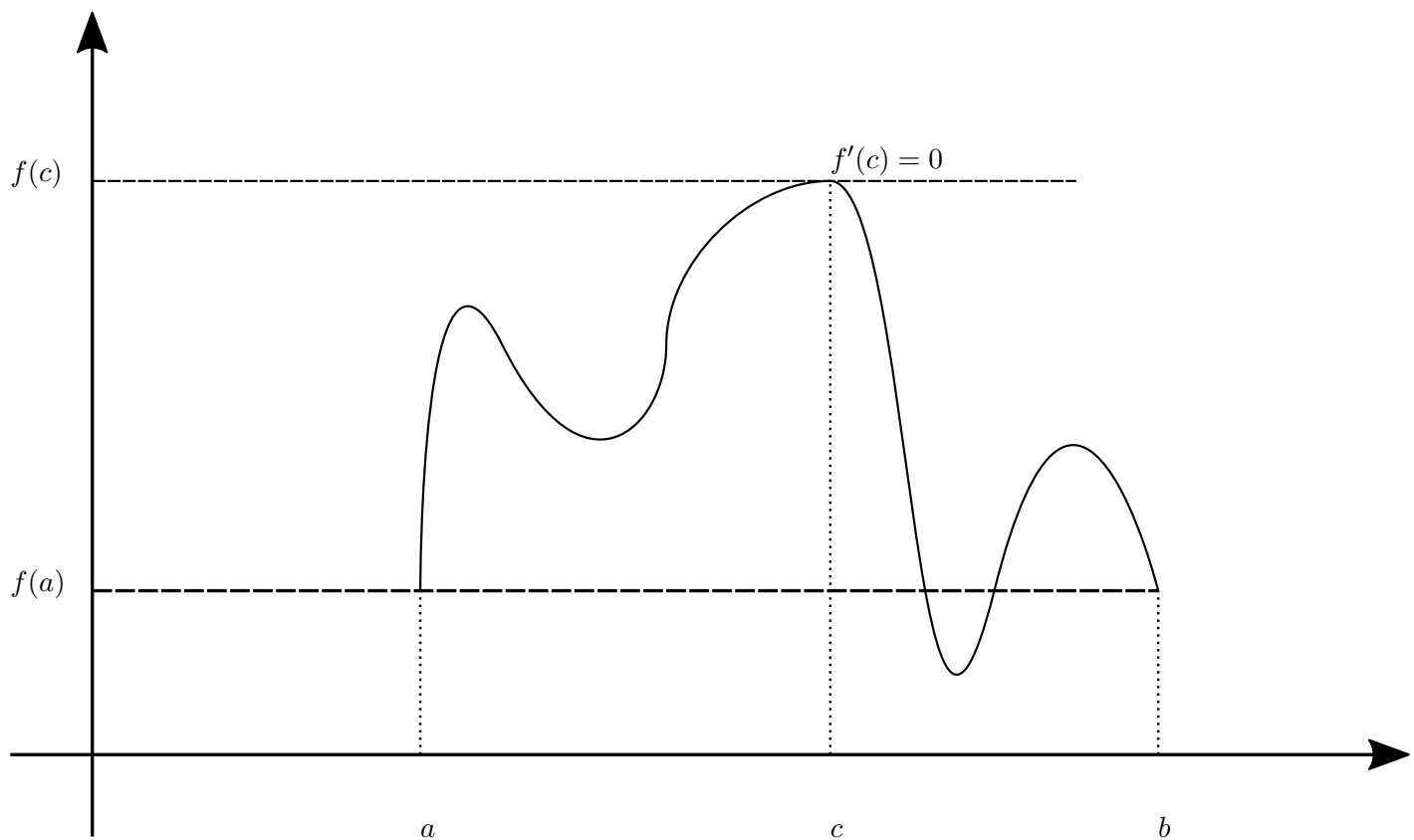


Рис. 4.1: Теорема Ролля

Следствия из формулы Лагранжа

Designation. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на (a, b)

1. $f \equiv \text{const}$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
2. Связь знака производной и монотонности.

Theorem 41.

- (a) Если f возрастает (убывает) на $[a, b]$, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$.
- (b) Если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$, то f возрастает (убывает).
- (c) Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a, b)$, то f строго возрастает (убывает).

Statement. Если $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f строго монотонна.

3. $f'(x_1) = u$, $f'(x_2) = v$, w лежит между u и v . Тогда $\exists y$ между $x_1, x_2 : f'(y) = w$.

Theorem 42. Если f дифференцируема на (a, b) , непрерывна в точке a и $\exists \lim_{y \rightarrow a} f'(y) = d$, то f дифференцируема в точке a и $f'(a) = d$.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (0 < |y - a| < \delta \implies |f'(y) - d| < \varepsilon).$$

Если $x > a$, по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \quad c \in (a, x).$$

Пусть $|x - a| < \delta$, тогда $|c - a| < \delta$, следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - d \right| < \varepsilon.$$

□

4.5 Правило Лопиталья

Theorem 43 (Правило Лопиталья для $0/0$). f, g заданы и непрерывны на $[a, b]$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$. f, g дифференцируемы на (a, b) , $g'(y) \neq 0 \quad \forall y \in (a, b)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

Доказательство. Рассмотрим $x > u > a$.

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \quad y \in (a, x).$$

$$\forall \varepsilon \exists \delta : (|y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - d \right| < \varepsilon).$$

Если $|x - a| < \delta$, то $|y - a| < \delta$.

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - d \right| < \varepsilon \xrightarrow{u \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| \leq \varepsilon \quad \text{при } |x - a| < \delta.$$

□

Theorem 44 (Правило Лопиталья для ∞/∞). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

Доказательство. $x, u \in (a, a + \delta)$, $x \neq u$. $\exists y$ между x и u :

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \quad (4.1)$$

Зафиксируем u вблизи x : $\left| \frac{g(u)}{g(x)} \right| < 1$. Тогда модуль правой части в уравнении 4.1 не более ε . Воспользуемся тем, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$:

$$d - \varepsilon \leq \left| \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \right|.$$

Домножим на знаменатель:

$$(d - \varepsilon)(1 - \frac{g(u)}{g(x)}) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)} \leq (d + \varepsilon) \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right).$$

x близок к a :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\leq d + \varepsilon \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\geq d - \varepsilon \end{aligned}$$

Statement. Если $v(x) < w(x)$, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$ и $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$.

Применим утверждение.

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{|x-a| < \delta} v(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} v(x).$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{|x-a| < \delta} v(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} v(x).$$

Значит

$$d + \varepsilon \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq d - \varepsilon.$$

□

4.6 Старшие производные

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a).$$

Рассмотрим множество $A = \{x \mid f'(x) \text{ существует}\}$ Тогда можно смотреть на f' как на функцию, заданную на A .

Def 47. Если f' определена в точке $x \in A$, то $(f')'(x) = f''(x)$ — вторая производная в точке x .
 $f^{(n)}(x)$ — n -я производная в функции f .

$$f^{(n+1)} \equiv (f^{(n)})', \text{ если такая существует.}$$

4.6.1 Полином с заданными производными

Def 48. $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ — полином степени не выше n .

Его можно разложить по степеням $x - x_0, x_0 \in \mathbb{R}$: $p = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n$, где b_i — некоторые другие коэффициенты.

Как вычислить коэффициенты b_j , зная p ? Нулевой — $p(x_0)$, дальше можно взять производную и посчитать следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(x_0) \\ b_1 &= p'(x_0) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p''(x_0) \\ b_3 &= \frac{1}{3!}p^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0) \\ p(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j. \end{aligned}$$

Ех. Отсюда можно просто вывести формулу Бинома Ньютона: $q(x) = (x - a)^n$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \frac{q^{(j)}(0)}{j!}x^j.$$

Одно слагаемое будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{q^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-j+1) \cdot a^{n-j}}{j!} = \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!}(-1)^{n-j}a^{n-j}. \end{aligned}$$

4.6.2 Полином Тейлора

Def 49. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$. Пусть p — полином степени не выше n . Говорят, что он есть **полином Тейлора** для f порядка n в точке x_0 , если

$$f(x) - p(x) \leq o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

Ех. $n = 0$.

$$f(x) - c = o_{x \rightarrow x_0}(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c.$$

Существует тогда и только тогда, когда действительно есть предел в точке x_0 .

Ех. $n = 1$

$$p(x) = a + b(x - x_0).$$

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \iff b = f'(x_0), \text{ если } f'(x_0) \text{ существует.}$$

Theorem 45. Если полином Тейлора порядка n существует для f в точке x_0 , то он единственный.

Доказательство. Пусть p, q — два различных полинома Тейлора. Тогда $p(x) - q(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n$.

$$p(x) - p(y) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_n)^n.$$

Докажем, что $c_j = 0 \forall j$. Пусть $k = \min\{j \mid c_j \neq 0\}$.

$$r(x) = c_k(x - x_0)^k + \dots + c_n(x - x_0)^n = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

По определению

$$c_k(x - x_0)^k + c_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + c_n(x - x_0)^n < \varepsilon(x - x_0)^n.$$

$$c_k + c_{k+1}(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-k} < \varepsilon(x - x_0)^{n-k} \quad x \rightarrow x_0 \implies c_k \rightarrow 0.$$

Противоречие. Значит все коэффициенты равны нулю. □

4.7 Формула Тейлора

4.7.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Theorem 46 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет $n - 1$ производную и $x_0 \in (a, b)$, $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

является полиномом Тейлора функции f в точке x_0 .

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

Доказательство.

Lemma. Пусть g — дифференцируемая $n - 1$ раз на (a, b) и n раз в точке $x_0 \in (a, b)$ функция.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда

$$g(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

Доказательство. Индукция. База $n = 1$. Действительно, $g(x_0) = 0 \implies g(x) = o(1)$.

Переход ($n \rightarrow n + 1$). По теореме Лагранжа

$$g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x, x_0).$$

По предположению индукции $g'(y) = o_{y \rightarrow x_0}(y - x_0)^n$. Это равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|y - x_0| < \delta \implies |g'(y)| \leq \varepsilon |y - x_0|^n).$$

Выберем x : $|x - x_0| < \delta$. Тогда

$$|\xi - x_0| < \varepsilon \implies g'(\xi) < \varepsilon |\xi - x_0|^n \leq \varepsilon |x - x_0|^n.$$

$$|g(x)| \leq |x - x_0| \cdot \varepsilon |x - x_0|^n = \varepsilon |x - x_0|^{n+1}, \quad |x - x_0| < \delta.$$

□

Доказав лемму, мы доказали и теорему. □

4.7.2 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Theorem 47 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет n производных на (a, b) и $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ непрерывны на (a, b) . Пусть $x, x_0 \in (a, b)$ и $f^{(n+1)}(y)$ существует на открытом интервале между x и x_0 . Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ между } x \text{ и } x_0.$$

Доказательство.

Lemma. Пусть g — дифференцируемая $n-1$ раз на (a, b) и n раз в точке $x_0 \in (a, b)$ функция.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда $\exists \xi$ между x и x_0 :

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Индукция. База: $n = 0$. По формуле Лагранжа

$$\exists \xi \in (a, b) : g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0} = g'(\xi)(x - x_0).$$

Переход: $n-1 \rightarrow n$. Рассмотрим $h(t) = (t - x_0)^{n+1}$, $t \in (a, b)$.

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} &= \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}, \quad \text{при некотором } \xi \text{ между } x, x_0 \\ \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n}. \end{aligned}$$

g' удовлетворяет условию леммы для $n-1$. Тогда по предположению индукции

$$g'(\xi) = \frac{(g')^{(n)}(\eta)(\xi - x_0)^n}{n!}, \quad \eta \text{ между } \xi, x_0.$$

Тогда

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n} = \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

□

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

По лемме $\exists \xi$ между x и x_0 :

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{g(x)}.$$

□

4.8 Достаточное условие экстремума

Theorem 48. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, $\exists f''(x_0)$. Тогда

- если $f''(x_0) > 0$, то f имеет локальный минимум в точке x_0
- если $f''(x_0) < 0$, то f имеет локальный максимум в точке x_0 .

Note. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, можно сказать, что f имеет локальный экстремум в точке x_0 .

Доказательство. Запишем формулу Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{нет нулевых}} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \underbrace{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^2}_{\alpha(x)}.$$

Пусть $f''(x_0) < 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|^2).$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \varepsilon(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon\right)}_t(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Если взять $\varepsilon = \left|\frac{1}{4}f''(x_0)\right|$, то t все еще менее нуля. Тогда во всех точках кроме x_0 : $f(x) < f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0)$ — максимум.

Аналогичные рассуждения для $f''(x_0) > 0$. □

4.9 Сходимость последовательностей

Designation. A — множество произвольной природы. $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность функций.

Def 50. Говорят, что f_n **поточечно сходится к функции** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Пишут « $f_n \rightarrow f$ ».

Def 51. Говорят, что последовательность функций f_n **сходится равномерно к функции** f , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in A : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Designation. Обозначается: $f_n \rightrightarrows f$.

Theorem 49 (Стокс-Зайдель). $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, f_n *равномерно сходится к* $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Если все f_n непрерывны в $x_0 \in A$, то f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Используем условие равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Зафиксируем $n_0 > N$. Тогда

$$\exists \delta : (|x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

$|x - x_0| < \delta$, следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + \\ &\quad + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \\ &\quad + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Получили, что f непрерывна в точке x_0 . □

Theorem 50. $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \rightarrow f$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\exists M : (|f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \implies |f(x)| \leq M)$
2. f ограничена: $|f(x)| \leq M \quad \forall x \implies \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \geq N \quad \forall x$

Theorem 51. $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ на A . Пусть $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows f g$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - g_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 52 (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть f_n — последовательность функций на множестве A . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad (4.2)$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $\varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 4.2 выполнено. $x \in A$ — фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 4.2). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x , перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$.

□

Ех. Функция на \mathbb{R} , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс): } f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 53 (Вейерштрасс). Пусть f_n — функция на множестве A .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем N : $\sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

Ех (Ван дер Варден). $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

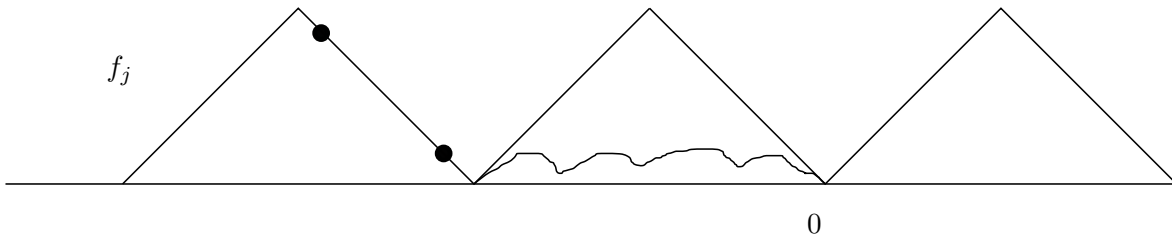


Рис. 4.2: График функции Ван дер Вардена

непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k (\pm), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

Theorem 54. $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Предположим, что $f_n \rightarrow f$ поточечно. f_n дифференцируемы и $f_n \Rightarrow g$ равномерно. Тогда f дифференцируемая на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a, b \rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad \text{с между } x, y..$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем $k, l \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем x .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

4.10 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b \rangle$. $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Def 52. Говорят, что f есть первообразная для g , если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 55 (Ньютон, Лейбниц). Если g непрерывна, то у нее есть первообразная.

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c .

Theorem 56. Если f_1, f_2 — первообразные для g , то $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 53. Линейная функция — это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b \rangle$; Φ — отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в множество линейных функций.
 $x \in \langle a, b \rangle$, $\Phi(x)$ — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 54 (дифференциал). f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ — тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, где c — некая функция на $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dg.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t) \right) &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \end{aligned}$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям). $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Ex.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

4.11 Интеграл

Def 55. A — множество произвольной природы. $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Φ — функционал на A .

Def 56. Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
 $f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ($f \mapsto I(\alpha)$)
2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) = I(\beta)$ (Линейность)
3. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
4. $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

Def 57. Разбиение — ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle \neq \emptyset.$$

Def 58. g на $\langle a, b \rangle$ — ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

4.11.1 Интеграл Дарбу

Def 59. J — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^N$, такой что $J_k \cap J_s = \emptyset$, $k \neq s$, $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$. (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 60. Длина интервала $\langle a, b \rangle$ — это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\emptyset| = 0$

Lemma. Если $\{J_k\}_{k=1}^N$ — разбиение J , то $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

Def 61. e — множество, f — ограниченная функция на e .

Колебание f на e :

$$\begin{aligned} esc_e(f) &= \sup_{x, y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки J_1, \dots, J_N из разбиения отрезка J .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \bar{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

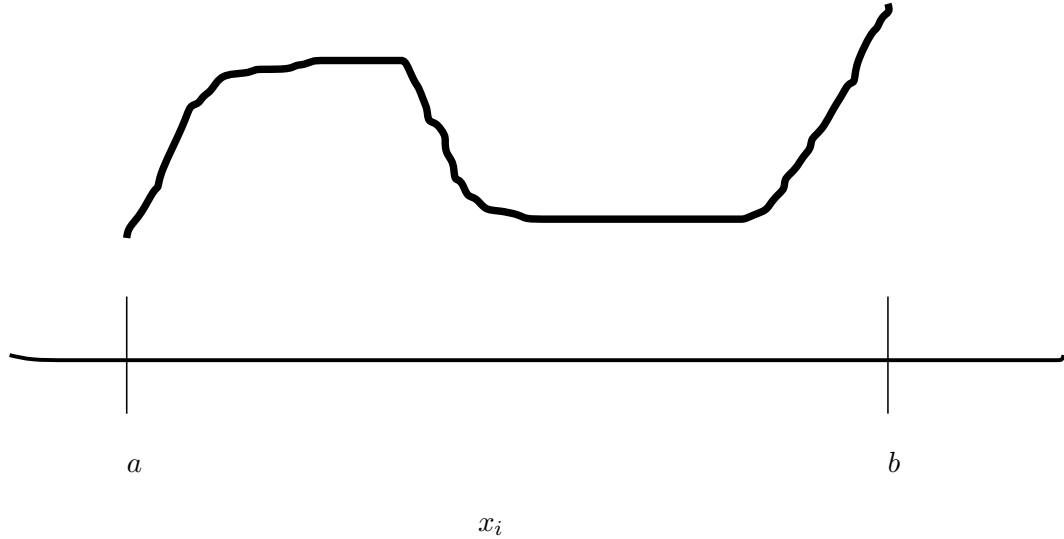


Рис. 4.3: График функции

Designation. A — множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i
 B — множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. Пусть $\{A, B\}$ — щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$ (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от f)

Statement. $\{A, B\}$ — щель.

Доказательство. ε — разбиение отрезка J_i . $\underline{S}_\varepsilon(f)$, $\bar{S}_\varepsilon(f)$ — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_\varepsilon(f) \leq \bar{S}_\varepsilon(f)$

\mathcal{E}, \mathcal{F} — разбиение J_i : \mathcal{F} — измельчение \mathcal{E} , если $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. Если \mathcal{F} — измельчение для \mathcal{E} , то

$$\underline{S}_\mathcal{F}(f) \geq \underline{S}_\mathcal{E}(f), \quad \bar{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{E}(f).$$

Lemma. Рассмотрим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения отрезка J_i . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения. \mathcal{F} — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{E}_2}(f).$$

Следовательно, $\{A, B\}$ — щель. □

Note. Определенные величины $\bar{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 62. f называется интегрируемой по Риману, если $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ех.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ — ступенчатая функция на J , Существует разбиение \underline{S} отрезка на J . $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \bar{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \bar{I}\varphi = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

Theorem 57. Если J — замкнутый отрезок ($J = [a, b]$), f — непрерывная функция на J , то f интегрируема по Риману.

Note. Пусть J — произвольный отрезок, f — ограниченная функция на J , \mathcal{E} — разбиение отрезка J на непустые отрезки $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^k |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^k |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^k |e_i| \left(\sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \right) = \sum_{i=1}^k |e_i| \text{osc}_{e_i} f \end{aligned}$$

Note. f интегрируема по Риману \iff щель (A, B) — узкая \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \bar{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данных обозначениях измельчения можно считать, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ // возможно, здесь должно быть что-то другое

Theorem 58 (Критерий интегрируемости по Риману). f интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение e_1, \dots, e_k Отрезка J , такое что

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \text{osc}_{e_i} f < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию 4.3 f равномерно непрерывна по теореме Кантора 37:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Пусть e_1, \dots, e_k — столь мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\forall i : |e_i| < \delta$. Тогда $\forall i : \text{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \text{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon \sum_{i=1}^k |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

Property. 1. f непрерывна на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ интегрируема.

2. Σ — разбиение,

$$\bar{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$

3. Если $\alpha > 0$,

$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если f интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5. $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены. Σ разбиение.

$$\bar{S}_\Sigma(f + g) \leq \bar{S}_\Sigma(f) + \bar{S}_\Sigma(g).$$

6.

$$\underline{S}_\Sigma(f + g) \geq \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$

7. Если f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. f, g интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность. $f \geq 0$, f интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geq 0$.

10. f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot g$ интегрируема.

Доказательство.

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть J — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

f, g интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \bar{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \bar{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $J \subset \langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)

Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. J_1, J_2 — два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$. Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $|f| \leq M$ на $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{\langle c, d \rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

Statement. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$.

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

4.11.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная функция f , если F дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 59 (Ньютон-Лейбниц). Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$ и непрерывна в точке $t \in \langle a, b \rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$. Тогда F дифференцируема в точке t и $F'(t) = f(t)$.

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t)ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

f непрерывна в t . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$. Если $|s - t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t, x] |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$, то $\forall t_0 \in [a, b] : F$ — первообразная f .

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница). f непрерывна на $[a, b]$, F — первообразная f . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 63. $f \in C^k \langle a, b \rangle$, $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$, если $f, f', \dots, f^{(k)}$ непрерывны.

Theorem 60. Если $f, g \in C^1(a, b)$, то

$$\int_b^a f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

$$\text{где } \Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

4.11.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g непрерывны на $[a, b]$ и f, g, f', g' непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ — первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u \Big|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg \Big|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg \Big|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 61. f_n, f — заданы на $\langle a, b \rangle$; $n \in \mathbb{N}$ Пусть

1. все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b \rangle$
2. $f_n \Rightarrow f$. Тогда f интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. E — множество, u, v — вещественные функции на E . $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \forall E$. Тогда $|\operatorname{osc}_E(u) - \operatorname{osc}_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|\operatorname{osc}_{\langle a, b \rangle} - \operatorname{osc}_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$ — отрезки $\langle a, b \rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \operatorname{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \operatorname{osc}_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j| (2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно, f интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x) dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \exists M : \forall n \geq M \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4.12 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать l , заданную на \mathbb{R}_+ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 64. Логарифм — строго монотонная функция, заданная на \mathbb{R}_+ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. Для $n \in \mathbb{N}$:

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

Statement. Если l — логарифм, $c \neq 0$, то cl — тоже логарифм.

Lemma. Если l — логарифм, то l непрерывна на всей области определения.

Доказательство. Пусть l — логарифм. Считаем, что f строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 2l(1+x).$$

При $x \rightarrow 1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \rightarrow 1-$, получаем то же самое. Значит l непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. \square

Lemma. Если l — логарифм, то функция l дифференцируема.

Доказательство.

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{aligned} \Phi(2x) &= \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ &= x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x})d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy = \\ &= \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy \end{aligned}$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. \square

Theorem 62 (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$y l'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 63. Если l логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. \square

Theorem 64. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ — логарифм.
 Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 65. Если $C \neq 0$, то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x) + \varphi(y). \\ \in \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} &= \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x} t)}{\frac{t}{x} t}. \\ \varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

□

Designation. Натуральный логарифм —

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

Statement. Образ функции \log есть все вещественные числа.

Доказательство. При $x_1 > x$, $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$.

□

Def 65 (Обратная функция к логарифму). У функции \log есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Property. 1. \exp строго возрастает

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Statement. Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c) j!^j}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{с между 0 и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Theorem 66. Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $\exp(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad \text{с между 0 и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leq R$ Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

Lemma. Пусть $a_0, a_1, a_2 \dots$ — положительные числа и $\exists N : a_j < \eta < 1 \quad \forall j > N$. Тогда $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

Corollary. Если $a_j \geq 0$, $a_j \rightarrow 0$, то $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. \square

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{x^n}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

\square

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на \mathbb{R} .

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2 \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j - \text{полином}.$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

h — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b)$, $a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$

Designation. l — логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

Такое число называется основанием логарифма l .

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e .

Designation (общий случай).

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a — ан для l .

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \dots \log u}_n) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$

Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}$, $a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

$$1. \quad u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \exp u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$$

$$2. \quad (u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$$

$$3. \quad (u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_1 \log u) = u^{v_1 v_2}$$

4.12.1 Показательная функция

Def 66. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 67. Пусть $a \neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

4.12.2 Степенная функция

Def 68. Степенная функция $g(x) = x^b$, $x \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. Если $a > 1$, то $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x)$, $x \rightarrow \infty$

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{b \log x - x \log a}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. \square

Practice.

$$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

Statement. Ранее доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится при любых x . Экспонента равномерна на любом конечном отрезке.

Ряд для e^x по степеням $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0)^n \quad (4.4)$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ сходится равномерно. Далее будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad (4.5)$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. В 4.5 общий член стремиться к нулю, если $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

4.12.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 67 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0).

$$f(x) = \log(1+x), \quad f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f^{(2)} = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) (1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^k \frac{\log^{(n)}(1)}{n!} x^n + \frac{\log^{(k+1)}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n \rightarrow 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \rightarrow 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. Ракскладывается ли логарифм ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (4.6)$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n} |x|^n \longleftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $x \in (-1, 1]$.

Theorem 68. $x \in (-1, 1]$. Тогда ряд 4.6 равномерно сходится равномерно на любом $(r, 1]$, $r > -1$.

Доказательство. 1. $x \in [0, 1]$.

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \left(\frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \leq \frac{1}{k+1}, \quad c \in [0, x] \quad (4.7)$$

В частности, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

2. $-1 < x \leq 0$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \left(\frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \leq \left(\frac{1}{1-|x|} \right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{k+1} \quad (4.8)$$

Удачным случаем 4.8 будет $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$, $x \in (-\frac{1}{2}, 0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$. Подставим $x = -x$:

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dx &= \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}. \\ \log(1+t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \quad -1 < t \leq 0, t < x \leq 0. \\ \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^t \left(\frac{|x|^n}{1-|x|} \right) dx \leq \frac{1}{1-|t|} \int_0^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1}. \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, $t > -1$, если $t \in (-1, 0]$, $|t| \leq r < 1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\leq \frac{1}{1+|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1} \leq \frac{1}{1-r} \frac{1}{n} r^n$. □

Note. Логарифм — аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $\left| 1 - \frac{x}{x_0} \right| < 1$.

$$\begin{aligned} \log x - \log x_0 &= \log \frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right)^n. \\ \log x &= \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \frac{1}{x_0} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

А это ряд Тейлора. □

4.12.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n + 1$ производную на отрезке I , $t, a \in I$.

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \int_a^t f'(x) d(x - t) = f'(x)(x - t) \Big|_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x - t) dx = \\ &= f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx. \end{aligned}$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx.$$

И так далее

Theorem 69. f имеет $n + 1$ производную на отрезке I , $t, a \in I$.

$$f(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t - a)^j + \frac{1}{n!} \int_a^t f^{(n+1)}(z)(t - x)^{n+1} dx.$$

Ех. $x \rightsquigarrow u$, $x = a(1 - u) + tu$
 $u \in [0, 1]$, $dx = (t - a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1 - u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t - a) = \\ &= (t - a)(1 - u) \end{aligned}$$

$$r_n(a, t) = \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(a(1 - u) + tu)(t - a)^n (1 - u)^n (t - a)^n du.$$

Если $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m, \quad m \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m - 1)(1 + x)^{m-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m - 1) \dots (m - k + 1)(1 + x)^{m-k} \end{aligned}$$

Designation.

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m - 1) \dots (m - k + 1)}{k!}.$$

$$|x| < 1$$

$$(1 + t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m - 1) \dots (m - n)(1 + tu)^{m-n-1}(1 - u)^n du.$$

Theorem 70 (Ряд Ньютона). Ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} t^k$$

сходится к $(1+t)^m$, при $|t| < 1$

Доказательство. $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1) \dots (m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$. $0 \leq t < 1$.

$$|R_n(t)| \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right|.$$

□

Theorem 71. $R_n(t) \rightarrow 0$ при $|t| < 1$, и сходится равномерно при $|t| < \phi < 1$.

Доказательство. Пусть $\int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right| = I$

1. Сначала $0 \leq t_0$:

$$I \leq \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \leftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \leq t^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| \frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|m-n-1|}{n+2} t.$$

$t < 1$, $t + \varepsilon < 1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} < t + \varepsilon$

2. Следующий случай $-1 < t < 0$ Подынтегральное выражение:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right|^n \left| \frac{1}{1+tu} \right|^{m-1}.$$

$$1 + |t| \geq |1+tu| \geq 1 - |t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right| \leq \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1 - \left(n \frac{1-|t|}{1-|t|u} \right).$$

Это не превосходит $1 - n(1-|t|)$.

Второй множитель:

(a) $m \leq 1$

$$\left| \frac{1}{1+tu} \right|^{-m+1} \leq \left(\frac{1}{1-|t|u} \right)^{-m+1} \leq \left(\frac{1}{1-|t|} \right)^{-m+1}.$$

(b) $m > 1$

$$|1+tu|^{m-1} \leq (1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку $C_m(t)$.

$$\begin{aligned} I &\leq C_m(t) \int_0^1 (1 - n(1 - |t|)) du = C_m(t) \left(-\frac{1}{1 - |t|} \right) \frac{1}{n+1} (1 - n(1 - |t|))^{n+1} \Big|_{n=0}^{n=1} = \\ &= C_m(t) \frac{1}{1 - |t|} \frac{1}{n+1} (1 - |t|^{n+1}) \leq C_m(t) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Получили

$$R_n(t) \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \frac{1}{n+1} \bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} |t| \left| \frac{m-n+1}{n+2} \right| \leftarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leq \rho \quad \sigma_n(t) \leq A\rho^{n-1}, \quad |t| \leq \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

$x, x_0 > 0$

$$\begin{aligned} x^m &= x_0^m \left(\frac{x}{x_0} \right)^m = x_0^m \left(1 - \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) \right)^m = \\ &= x_0^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right) = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

Theorem 72 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). Если f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке с концами a, t :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \quad (4.9)$$

Statement. Если f дифференцируема $n+1$ раз:

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t : R_n(t, a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (4.10)$$

Note. Если $f \in C^{(n+1)}$, то 4.10 можно вывести из 4.9.

Theorem 73 (о среднем). φ, ψ — функции на $[c, d]$, φ непрерывна, ψ — интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда

$$\exists \psi \in [c, d] : \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\psi) \int_c^d \varphi(x) dx.$$

Доказательство. Можно считать, что $\psi \geq 0$. Пусть $m = \min_{x \in [c, d]} \varphi(x)$, $M = \max_{x \in [c, d]} \varphi(x)$.

$$m \int_c^d \varphi(x) dx \leq \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx \leq M \int_c^d \varphi(x) dx.$$

$$m\psi(x) \leq \varphi(x)\psi(x) \leq M\psi(x).$$

Если $\int_c^d \psi(x) dx = 0$, теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leq \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx} \leq M.$$

Следовательно,

$$\exists \zeta \in [c, d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx}.$$

□

Statement (оценка остатка).

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists \zeta : R_n(t, a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} \left[-(t-x)^{n+1} \Big|_{x=a}^{x=t} \right] = f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

4.13 Дифференциальные уравнения

$$\Phi(f'(t), f(t), t) = 0.$$

Theorem 74. Пусть f — непрерывная дифференцируемая функция на (a, b) . Следующие условия эквивалентны:

1. $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a, b)$
2. $\exists A : f(t) = Ae^{ct}$

Доказательство. $2 \implies 1$ — очевидно

$1 \implies 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда $g(t) \equiv A \in R$.

□