Оглавление

Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x),$$

где

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle)$, $x, x_0 \in (a, b)$. *Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде*

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0} f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) dt.$$

Переход: $n - 1 \to n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x - t)^{n-1} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n \Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt}_{R_{n,x_0} f(x)} \end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 2 (Хитрая теорема о среднем). $f, g \in C[a,b]$, $g \geqslant 0$. *Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary. Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 3. *Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.*

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме **??**, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\cdot\left(-\frac{((x-t)^n)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^x.$$

□

1.2 2