

Конспект по матанализу  
II семестр  
Современное программирование, факультет математики и  
компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

6 марта 2020 г.



# Оглавление



# Глава 1

## Интергирование

### 1.1

#### Лекция 1

14 feb

##### 1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i,$$

а  $R_{n,x_0}$  — остаток.

**Theorem 1** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме).  $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$ ,  $x, x_0 \in (a, b)$ . Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База:  $n = 1$ . По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ .

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

### 1.1.2 Теорема о среднем

**Theorem 2** (Хитрая теорема о среднем).  $f, g \in C[a, b]$ ,  $g \geq 0$ . Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

*Доказательство.* Найдем максимум и минимум  $f$  на  $[a, b]$ .

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$\begin{aligned} m \int_a^b g(x)dx &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \end{aligned}$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

**Corollary.** Если  $|f^{(n+1)}| \leq M$ , то существует понятно какая оценка сверху для  $|R_{n,x_0}f(x)|$ .

**Theorem 3.** Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

*Доказательство.* Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 2, где  $g(t) = (x-t)^n$ , получаем, что

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\Theta) \cdot \left( -\frac{((x-t)^n)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{x_0}^x.$$

□

## 1.2 Приближенное вычисление интеграла

### Definition 1: Дробление

Пусть  $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $a < x_0 < \dots < x_n < b$ . Тогда  $\tau$  называется дроблением отрезка  $[a, b]$ .

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

## Лекция 2

21 feb

### 1.2.1 Свойства

Property.

1  $c \in (a, b)$ :

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\rightarrow b} f dx.$$

2  $\int_a^{\rightarrow b} f dx$  — сходится  $\implies \lim_{A \rightarrow b} \int_A^{\rightarrow b} f = 0$

2' Если  $\int_A^{\rightarrow b} f \not\rightarrow_{A \rightarrow b} \implies \int_a^{\rightarrow b} f$  расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).

**линейность**  $f, g$  — функции на  $[a, b)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся} \implies \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g.$$

**МОНОТОННОСТЬ**  $f \leq g$ ,  $\int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$  сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g.$$

### Definition 2: Абсолютная сходимость

Говорят, что  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится абсолютно, если сходится  $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ .

Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится абсолютно, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится и верно неравенство

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f \right| \leq \int_a^{\rightarrow b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\rightarrow b} |f| \text{ сходится} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \implies \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого  $B$  :

$$\left| \int_a^B f \right| \leq \int_a^B |f| dx.$$

### Definition 3: Условная сходимость

$\int_a^{\rightarrow b} f$  называется условно сходящимся, если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, а  $\int_a^{\rightarrow b} |f|$  расходится.

**интегрирование по частям**  $f, g \in C^1[a, b]$

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g, \quad f g \Big|_a^{\rightarrow b} = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство.  $\square$

**замена переменной**  $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b), \varphi \in C^1[\alpha, \beta), f \in C[a, b)$ . Если существует предел, обозначим его так:  $\exists \lim_{x \rightarrow \beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$ .

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

*Доказательство.*  $D \in [\alpha, \beta)$ .

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y) dy.$$

Обычная формула замены переменной:  $\Phi = F(\varphi(x))$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy$ . Возьмем любую последовательность  $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \rightarrow \beta-$ .

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f.$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\exists \int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} (f \circ g) \varphi'$ . Надо проверить, что  $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ .

1.  $\varphi(\beta-) < b$  — очевидно.
2.  $\varphi(\beta-) = b$   $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b), c_n \rightarrow b - \exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = c_n$ .

Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к  $\beta$ , либо к числу меньшему  $\beta$ .

- $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \beta$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} f = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k} = c_{n_k})} f.$$

- $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta$

$$\varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\tilde{\beta}) \in [a, b) < b.$$

Но должно быть равно  $b$ . Противоречие.

Значит  $\gamma_n \rightarrow b$ .

$$\int_{\alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g) \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

$\square$



**Theorem 4** (Признаки сравнения). Пусть  $0 \leq f \leq g$ ,  $f, g \in C[a, b)$ . Тогда

1. если  $\int_a^{\rightarrow b} g$  сходится, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится,
2. если  $\int_a^{\rightarrow b} g$  расходится, то  $\int_a^{\rightarrow b} f$  расходится.

*Доказательство.*

1. Используем критерий Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \implies \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

**Theorem 5** (Признаки Абеля и Дирихле).  $f \in C[a, b)$ ,  $g \in C^1[a, b)$ ,  $g$  монотонна.

**Признак Дирихле** Если  $f$  имеет ограниченную первообразную на  $[a, b)$ ,  $g \rightarrow 0$ , то  $\int^{tb} fg$  сходится.

**Признак Абеля** Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится,  $g$  ограничена, то  $\int_a^{\rightarrow b} fg$  сходится.

*Доказательство.*  $F$  — первообразная  $f$ .  $F(B) = \int_a^B f$ .

$$\int_a^{\rightarrow b} f g dx = \int_a^{\rightarrow b} g dF = Fg \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} F g' dx.$$

**признак Даламбера**  $\lim_{B \rightarrow b-} F(B)g(B) = 0$

**признак Абеля**  $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть  $M = \max F$ , он существует, так как  $F$  ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\rightarrow b} F g' dx \leq M \cdot \int_a^{\rightarrow b} |g'| dx = M \cdot \left| \int_a^{\rightarrow b} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|.$$

□

**Example 1.**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta dx.$$

Рассмотрим случай  $\alpha > 1$ . Метод удавливания логарифма:  $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$ ,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \leq C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$  сходится.

Если  $\alpha < -1$ ,

$$\varepsilon > 0 \quad \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\rightarrow \infty}.$$

Тогда  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$  расходится.

Если  $\alpha = -1$ , сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln \frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходится.

**Example 2.**

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$ .

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2.  $0 < \alpha \leq 1$ . По признаку Дирихле:  $f(x) = \sin x$  – ограничена первообразная,  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  – убывает.

Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

**Example 3** (Более общий вид).

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$ ,  $f$  монотонна.

Если при  $x \rightarrow +\infty$   $f \rightarrow 0$ , то интегралы сходятся,

Если при  $x \rightarrow +\infty$   $f \not\rightarrow 0$ , то интегралы расходятся.

*Remark.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

*Practice.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 dx \text{ сходится?}$$

## 1.3 Вычисление площадей и объемов

### 1.3.1 Площади

1.  $f \in C[a, b]$ ,  $f \geq 0$ ,  $P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ . Тогда  $S(P_f) = \int_a^b f(x)dx$
2. Криволинейная трапеция.  $f, g \in C[a, b]$ ,  $f \geq g$ ,  $T_{f,g} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$ . Тогда  $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x)dx$

**Corollary** (Принцип Кавальери). Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ ,  $f \geq 0$ ,  $g$  непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [\alpha, \beta], r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть  $\tau$  — дробление  $[\alpha, \beta]$ ,  $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n$ ,  $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \beta$ . Пусть  $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$ ,  $m_j =$

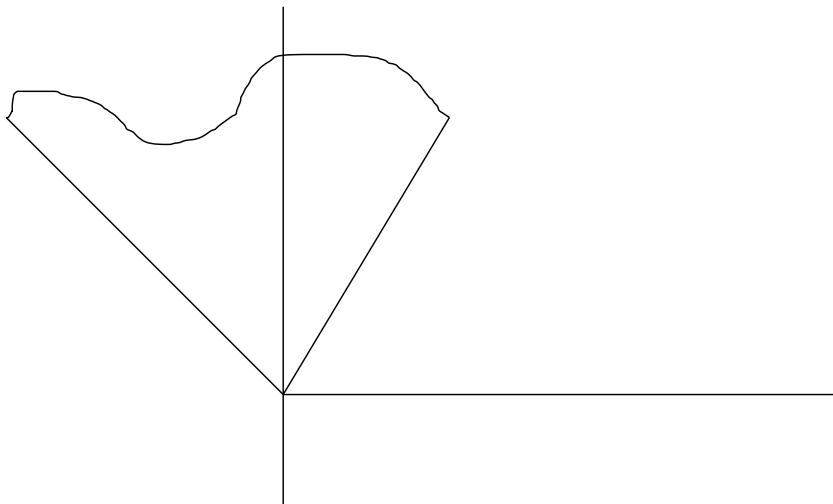


Рис. 1.1: sector

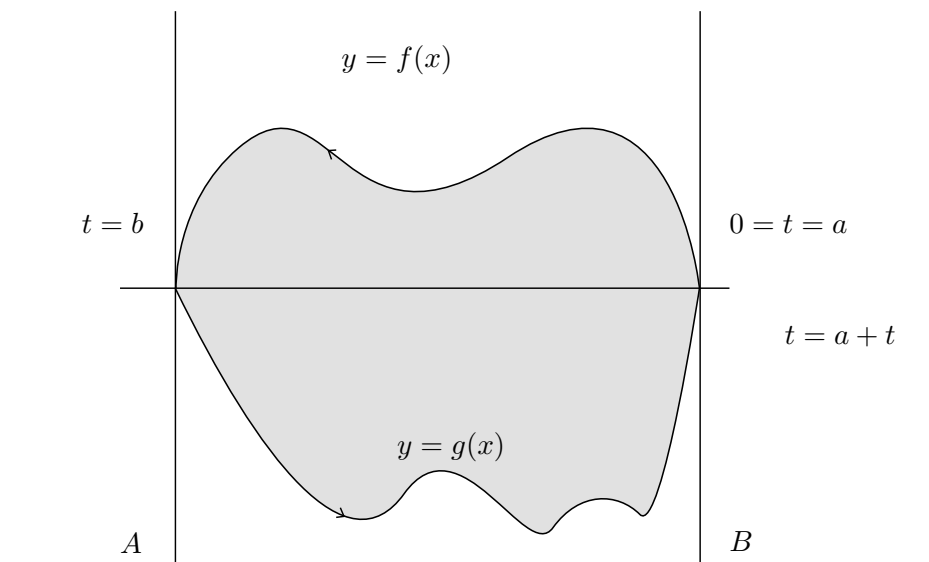
$$\min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$$

$$\sum \frac{m_j^2}{2} (\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leq S(\tilde{P}_f) \leq \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$ . Значит

$$S(\tilde{P}_f) \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\varphi) d\varphi.$$

4. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой.  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t)$ .  $x, y \in C^1(\mathbb{R})$



$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\int_A^B g(x) dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [b, a+T] \\ dx=x'(t)dt \\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t) dt$$

$$\int_A^B f(x) dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [a, b]}}{=} - \int_b^a y(t)x'(t) dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx = - \int_a^{a+T} y(t)x'(t) dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t) dt.$$

### 1.3.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура  $T \subset \mathbb{R}^3$ ,  $T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$ .

**Definition 4**

Сечение  $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$ .

$\forall x : T(x)$  имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение на  $T$ :

$$\forall \Delta \subset [a, b] \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

**Example 4.**  $T$  — тело вращения,  $f \in C[a, b]$ ,  $f \geq 0$ .

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

*Доказательство формулы.* Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием  $V = SH$ . Рассмотрим тело  $T$  и  $\tau$  дробление отрезка  $[a, b]$ . Поместим его между двумя цилиндрами.

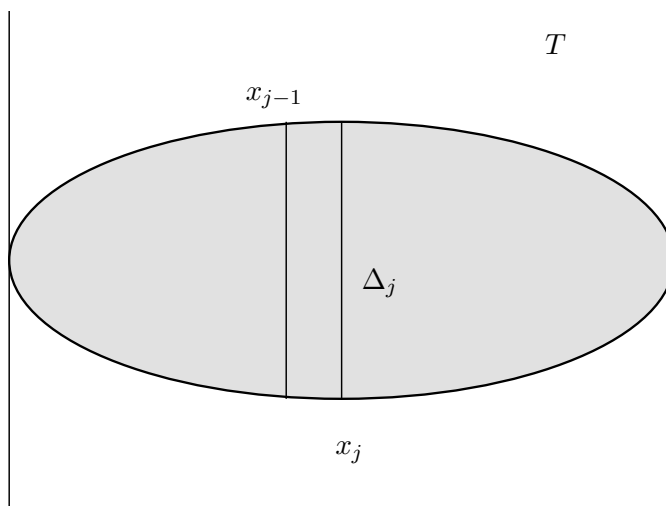


Рис. 1.2: cylinder

$$\sum (x_j - x_{j-1})S(T(x_*\Delta_j)) \leq V \leq (x_j - x_{j-1})S(T(x^*\Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к  $\int_a^b S(T(x))dx$  как интегральные суммы.

□

**Example 5** (Интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$T = \{0 \leq y \leq e^{-(x^2+y^2)}\}$$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = I e^{-x^2}.$$

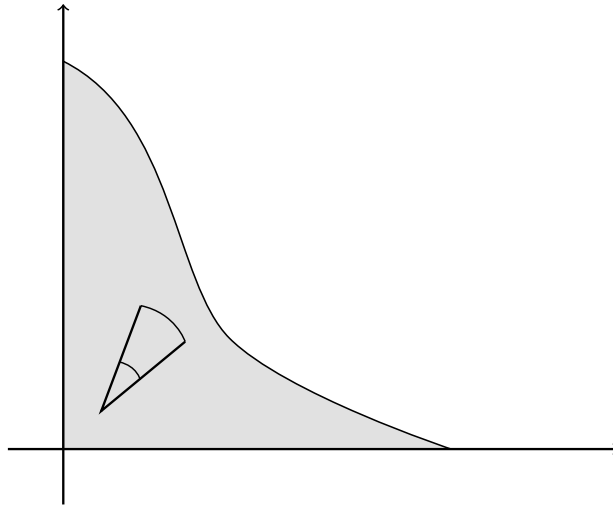


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона

### Лекция 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что  $V = I^2$ .

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где  $r(y) = \sqrt{-\ln y}$ . Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi (y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

## 1.4 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади

### Definition 5: Путь

Путь в  $\mathbb{R}^n$  — отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \in C[a, b]$ .

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad \gamma_i — координатные отображения для  $\gamma$ .$$

Начало пути —  $\gamma(a)$ , конец пути —  $\gamma(b)$ .

Носители пути —  $\gamma([a, b])$ .

$\gamma$  замкнут, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

$\gamma \in C^n[a, b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^n[a, b] \iff \gamma$  —  $r$ -гладкий путь.

$\gamma^{-1}$  — противоположный путь, если  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a - b + t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

*Note.* Разные пути могут иметь один общий носитель.

### Definition 6

Два пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  эквивалентны, если существует строго возрастающая сюръекция

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

**Statement.** Это отношение эквивалентности.

### Definition 7: Кривая

Кривая в  $\mathbb{R}^n$  — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

#### Example 6.

$$\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t).$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Можно определить:

начало кривой

- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривая  $r$ -гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

#### 1.4.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c \in (a, b)$ .

$$\gamma = \gamma|_{[a, c]}, \quad \gamma = \gamma|_{[c, b]} \implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$ , где  $\forall$  дробления  $[a, b]$   $\tau = \{x_j\}$

**Definition 8: Длина пути**

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — путь.  $l(\gamma) = \sup_{\tau} l_{\tau}$ , где

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \quad \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

*Practice.* Придумать пример бесконечно длинного пути.

**Definition 9**

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

**Definition 10**

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

**Property.**

1.  $\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

2. *Аддитивность*

$$\gamma : [a, b], c \in (ab) \quad \gamma = \gamma|_{[a, c]}, \quad \gamma|_{[c, b]}.$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}).$$

*Доказательство.*

1  $\implies$  2  $\tau$  — разбиение  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} \tau^l &= (\tau \cap [a, c] \cup \{c\}) \\ \tau^r &= (\tau \cap [c, b] \cup \{c\}) \end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| \leq l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \leq l(\gamma^l) + l(\gamma^r).$$

2  $\implies$  1  $\tau^l$  — разбиение  $[a, b]$ ,  $\tau^r$  — разбиение  $[c, d]$ .  $\tau = \tau^l \cup \tau^r$ .

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\leq l_{\tau}(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \\ \sup_{\tau^l} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^l \\ \sup_{\tau^r} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^r \end{aligned}$$

□

**Theorem 6** (Длина гладкого пути).  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкий путь. Тогда  $\gamma$  обязательно спрямляем и

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2}.$$



*Доказательство.* 1.  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок. Пусть  $m_j(\Delta) = \min_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$ ,  $M_j(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$ .

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (m_j(\Delta))^2}, \quad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех  $\Delta \subset [a, b]$  чему равно  $l(\gamma|_{\Delta})$ ?

Пусть  $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$ . Тогда

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1})|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$\begin{aligned} l_{\tau} &= \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} = \\ &= \sum_{j=1}^m (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(\dots)|^2} \end{aligned}$$

Выражение под корнем не превосходит  $M(\Delta)$  и не менее  $m(\Delta)$

$$|\Delta| m(\Delta) \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq |\Delta| M(\Delta).$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |\gamma'_k(t)| dt &= \int_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} dt. \\ m(\Delta) &\leq \max \sqrt{\dots} \leq M(\Delta). \\ |\Delta| m(\Delta) &\leq \int_{\Delta} |\gamma'(t)| dt \leq |\Delta| M(\Delta). \end{aligned}$$

3.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \quad \forall j \in [1, k] : |\gamma'_j(s) - \gamma'_j(t)| < \varepsilon.$$

$$|\Delta| < \delta \implies M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leq \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta)| \leq \varepsilon n$$

4. Теперь возьмем дробление  $[a, b]$  на кусочки длиной меньше  $\delta$ .

$$[a, b] = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq l(\gamma|_{\Delta_j}) \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \int_{\Delta_j} |\gamma'| \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq l(\gamma) \leq \sum_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \\ \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| &\leq \int_a^b |\gamma'| \leq \sum_{j=1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j| \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j) |\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_j| = \varepsilon n(b-a).$$

□

**Example 7.** Посчитаем длину окружности:  $\gamma = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$ ,  $|\gamma'| = 1$ . Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

### 1.4.2 Важные частные случаи общей формулы

1.  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  — путь в  $\mathbb{R}^3$ .

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt.$$

2. Длина графика функции.  $f \in C^1[a, b]$ ,  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ .

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах  $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

*Remark.*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Delta \subset [a, b]$  — отрезок.

$$l(\gamma|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{Дифференциал дуги}} dt.$$

Если  $f$  задана на носителе пути  $\gamma$  получаем «неравномерную длину»:  $\int_a^b f(t) |\gamma'(t)| dt$

## Глава 2

# Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

### 2.1 Нормированные пространства

**Example 8.**  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ .

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Если  $p = +\infty$ ,  $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leq j \leq m}$ .

*Note.* Все нормы в  $\mathbb{R}^m$  эквивалентны.

**Example 9.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт. Рассмотрим множество  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывна}\}$ , оно линейно над  $\mathbb{R}^m$ . Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

**Theorem 7.**  $C(K)$  — полно.

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность функций  $\{f_n\} \subset C(K)$ . Возьмем  $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальна, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим  $k \rightarrow \infty$ .  $f_k(x) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Возьмем  $n_0 > N$ .  $f_{n_0}$  — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \implies |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |f_{n_0}(x_2) - f(x_2)| \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно,  $f \in C(K)$ . Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon}_{\max_{x \in K} |f - f_n| \leq \varepsilon}.$$

□

**Example 10.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт. Рассмотрим множество  $l_\infty(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — ограниченна}\}$ , оно линейно над  $\mathbb{R}^m$ . Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

**Theorem 8.**  $l_\infty(X)$  — полно.

*Доказательство.* Аналогично.

□

*Note.*  $C(K) \subset l_\infty(K)$  — замкнутое подпространство.

*Note.* Замкнутое подпространство полного пространства полно.

**Example 11.**  $K = [a, b]$ ,  $C^1(K) = C^1[a, b]$ .

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\}.$$

Определим норму  $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

**Theorem 9.**  $(C^1[a, b], \varphi_3)$  полно.

*Доказательство.*  $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$  фундаментальна. Так как  $\varphi_3(f_n - f_k) \rightarrow_{n, k \rightarrow \infty} 0$ ,  $\varphi_1(f_n - f_k) \rightarrow 0$  и  $\varphi_2(f_n - f_k) \rightarrow 0$ . Тогда  $\|f_n - f_k\| \rightarrow 0$  и  $\|f'_n - f'_k\| \rightarrow 0$ . Получаем, что  $\{f_n\}$  фундаментальна в  $C[a, b]$  и  $\{f'_n\}$  фундаментальна в  $C[a, b]$ .

Докажем два пункта:

1.  $f \in C^1$ , тое есть  $\exists g = f'$ .
2.  $f_3(f_n - f) \rightarrow 0$

Докажем, что  $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \rightarrow 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max |f'_n - g| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$\begin{aligned} &= \left| f_n(x) - \left( \int_a^x f'_n(t)dt + f(a) \right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x (g(t) - f'_n(t)) dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x |g(t) - f'_n(t)| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2) \end{aligned}$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что  $f_n \rightarrow f \wedge f'_n \rightarrow g$ .

□

*Remark.*  $\|f_n - f\| \rightarrow 0, \quad f_n \in C(K) \implies f \in C(K).$

$$x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow f(x_0).$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f(n).$$

*Remark.* Из того, что  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  и  $\|f'_n - g\|$ , следует  $f' = g$ . То есть

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

*Practice.*  $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

## Лекция 4

6 march

### 2.1.1 Продолжение примеров

1.  $C_p[a, b] = \{f \in C[a, b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a,b]} = \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Это норма:

- Не меньше нуля
- $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- Неравенство треугольника  $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$  (сейчас доказывать не будем)

Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

**Theorem 10** (без доказательства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $\exists!(Y, \tilde{\rho})$  — полное метрическое пространство, такое что

- (a)  $X \subset Y$
- (b)  $\rho = \tilde{\rho}|_{X \times X}$
- (c)  $Y = \overline{dX}$

Такое пространство пополняется до  $L_p(a, b)$ .

2.  $l_p = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j|^p\}, \quad p \geq 1$  Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Practice.*  $l_p$  полно

*Note.* В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- $l_p$ . Возьмем шар  $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leq 1\}$

$$e^1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

*Practice.* Проверить не компактность  $B = \{f \in C[a, b] \mid \|f\| = 1\}$  в  $C[a, b]$ .

## 2.2 Сжимающие отображения

### Definition 11

$(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $U : X \rightarrow X$ .  $U$  называется **сжимающим отображением**, если

$$\forall \gamma < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in X : \rho(U(x_1), U(x_2)) \leq \gamma \rho(x_1, x_2).$$

**Theorem 11** (Принцип сжимающих отображений).  $(X, \rho)$  *полно*.

1.  $U$  — сжимающее отображение  $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$  — неподвижная точка
2. Если  $\exists N : U^N$  — сжимающее отображение  $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$

*Доказательство.*

1. Рассмотрим траекторию точки  $x_1$ .

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \dots, x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq$$

$$\dots$$

$$\leq \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n : \rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d (1 + \gamma + \dots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\{x_n\}$  фундаментальна. Так как наше пространство полно, существует предел этой последовательности.  $U(x_n) = x_{n+1}$ . Первое стремится к  $U(x_*)$ , второе — к  $x_*$ .

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2.  $\exists x_*$ , посмотрим на  $U^N(x_*)$ . Посмотрим на последовательное применение  $U$  несколько раз. На  $N$ -ом шаге мы придем в  $x_*$ .

Единственность уже доказали.



**Example 12** (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка).

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \quad a, b \in C[0, 1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти  $f \in C^1[0, 1]$ . То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt.$$

Заведем отображение  $U : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , что  $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt$ . Хотим найти неподвижную точку отображения  $U$  (то есть такую  $f$ ).

Пусть  $(U_0(f))(x) = - \int_0^x a(t)f(t)dt$ . Правда ли, что

1.  $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2.  $\exists n: U_0^n$  — сжимающее отображение из  $C[0, 1]$  в  $C[0, 1]$ .

Проверим

1. При  $n = 1$ , очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U(U^{n-1}(f)) - U(U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f)) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2.  $\|U_0^n(f - g)\|_\infty \leq \gamma \|f - g\|$

Пусть  $f - g = h$ .  $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma \|h\|$ . Пусть  $M = \max|a|$ ,  $\|h\|_\infty |h(x)|$ .

$$\begin{aligned} (U_0^1(h))(x) &= - \int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ (U_0^2(h))(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2) \left( \int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\ &\vdots \\ (U_0^n(h))(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\dots) dt_n \end{aligned}$$

Оценим

$$|(U_0^n(h))(x)| \leq M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leq \left( M^n \frac{x^n}{n!} \right) \|h\|_\infty.$$

Выражение в скобках стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Значит,  $U_0^n$  сжимающее.

*Note.* На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезаемого куба.

$f \in C[0, 1]$ . Так как  $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$ ,  $f \in C^1[a, b]$



*Practice.*  $X$  полно,  $U : X \rightarrow X$ ,  $\forall x, y: \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$ .

1. Верно ли, что  $U$  сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

### 2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

#### Definition 12: Линейное отображение

$X, Y$  — линейные пространства над одним полем скаляров (либо  $\mathbb{R}$ , либо  $\mathbb{C}$ ).  $U : X \rightarrow Y$  называется **линейным**, если

1.  $\forall x_1, x_2 \in X: U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2.  $\forall x \in X, \lambda - \text{скаляр}: U(\lambda x) = \lambda U(x)$

*Note.* Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейных отображений:  $U(x_1) = Ux_1$

**Designation.**  $\text{Hom}(X, Y)$  — множество всех линейных отображений из  $X$  в  $Y$ .

#### Definition 13

$X_1, \dots, X_n$  — линейные пространства,  $Y$  — линейное пространство над одним скаляром.  $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

**Designation.**  $\text{Poly}(X_1, \dots, X_n, Y)$  — множество всех полилинейных отображений.

#### Definition 14

Если  $Y$  — поле скаляров, линейное отображение  $U : X \rightarrow Y$  называется **линейным функционалом**.

**Example 13.**  $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \text{ лишь конечное число отлично от нуля}\}$   
 $U : X \rightarrow X, x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

**Example 14** ( $\delta$ -функция).  $\delta : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$ .

**Example 15.**  $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf = \int_a^b f(x)dx$

**Example 16.**  $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

**Example 17.**  $U \in \text{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}}_n; \mathbb{R}), U(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

**Example 18.**  $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), U(x, y) = (x, y)$

**Example 19.**  $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) = [x, y]$  — векторное произведение.

**Example 20.** Определитель, все возможные формы объема.

**Example 21.**  $U_j \in \text{Hom}(X, Y)$ . Можно сделать из этого полилинейное  $U \in \text{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$ ,  $U(x_1, \dots, x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n$

**Example 22.**  $U : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,  $Uf = f'$

**Theorem 12** (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения).  $X, Y$  — линейные нормированные пространства с одним полем скаляров,  $U \in \text{Hom}(X, Y)$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $U$  непрерывно
2.  $U$  непрерывно в  $\theta$
3.  $\exists C \forall x \in X: \|Ux\|_Y \leq C\|x\|_X$

### Definition 15

$U$  — непрерывное линейное отображение (оператор) из  $X$  в  $Y$ .

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X, \|Ux\| \leq C\|x\|\}.$$

$\|U\|$  — операторная норма.

*Note.* Если  $U$  — разрывное отображение, считаем, что  $\|U\| = \infty$ .

*Note.*

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

**Example 23.** Нормы в прошлых примерах

??  $\|U\| = \infty$

??  $\|U\| = 1$

??  $\|U\| = b - a$

??  $\|U\| = b - a$

??  $\|U\| = 1$

**Theorem 13** (Условие непрерывности полилинейного отображения).  $U \in \text{Poly}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $X_i, Y$  — линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $U$  непрерывно
2.  $U$  непрерывно в 0
3.  $\exists C \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n: \|U(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|$

*Note.* В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n}\}.$$

### Definition 16: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf \{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \ \|U(x_1, \dots, x_n)\| < C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|\}.$$

**Theorem 14** (эквивалентные способы вычисления оператора).  $U$  — линейное непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$ . Тогда

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\|.$$

*Доказательство.* Обозначим супремумы за  $A, B, C, D$ . Очевидно, что  $C \geq B$  и  $C \geq D$

$$C = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что  $B \geq A$ .  $x \neq 0$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$ .

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|U\tilde{x}\| \leq B.$$

Значит,  $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq B$ .

Теперь докажем, что  $D \geq A$ .

$$x \neq 0, \varepsilon > 0: \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - \varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leq D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \frac{D}{1-\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D.$$

□

*Remark.* В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

**Theorem 15** (эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора).  $U : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ .

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|} = \sup_{\|x_j\|=1} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\|x_j\| < 1} = \sup_{\|x_j\| \leq 1}.$$

### 2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

**Theorem 16** (О свойствах операторной нормы).  $U_1, U_2, U_3 : X \rightarrow Y$  — линейные непрерывные операторы,  $\lambda$  — скаляр. Тогда

$$1. \|U_1 + U_2\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$$

$$2. \|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$$

$$3. \|U\| = 0 \iff U = 0$$

$$4. U : X \rightarrow Y, V : Y \rightarrow Z \text{ — линейные отображения.}$$

$$\|VU\| \leq \|V\| \cdot \|U\|$$

$$VU = V \circ U$$

$$VUx = V(U(x))$$

**Designation.**  $L(X, Y) \subset \text{Hom}(X, Y)$  — пространство линейных операторов.