Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

31 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Глава 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифференцирования

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 1. *$f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leqslant M$
2. *f ограничена:* $|f(n)| \leqslant M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leqslant A \quad \forall n \leqslant N \forall x$

Доказательство. Очевидно □

Theorem 2. *$f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ на A. Пусть $\exists M : \forall x \in A\ \forall n |f_n(x)| \leqslant M$. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows fg$*

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leqslant |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leqslant M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 3 (Критерий Коши для равномерной сходимости)**.** *Пусть f_n — последовательность функций на множестве A. Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j > N\ \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leqslant |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть 3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Ex. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}) \colon f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 4 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n — функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \leqslant a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_0^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \leqslant |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \leqslant a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

□

Ex (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x + h_k) - f_j(x))h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k ($\pm$), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \ldots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

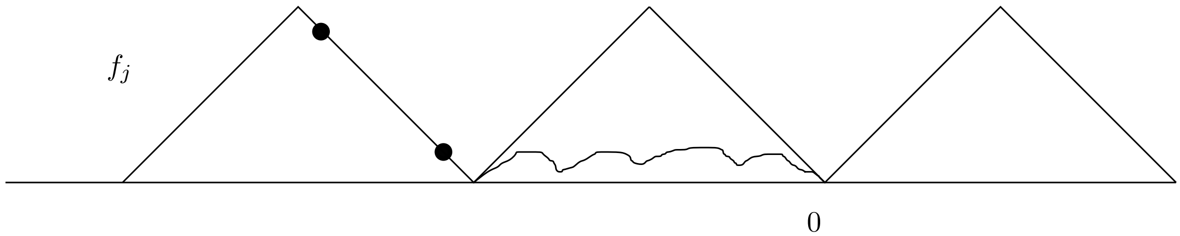

Рис. 2.1: График функции Ван дер Вардена

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{t}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geqslant 1|.$$

Theorem 5. $f_n, f, g_n : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a, b\rangle$ *и* $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k, l > N \to \forall x \in \langle a, b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a, b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - 1} = u'k, l(c), \quad c \text{ между } x, y..$$

$$\begin{array}{r} \forall x, y \in \langle a, b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x-y}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \forall x \in \langle a, b\rangle, \forall k, l > N : \\ \left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right| \end{array}.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - 1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

Оценим разность. Зафикируем x.

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \to |\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f_k'(x)| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x:

$$|y - x| < \delta, y \neq x \to |f_k'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x-y|<\delta \to |g(x)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant 3\varepsilon.$$

□

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a,b\rangle$. $g:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a,b\rangle y$ и $f'=g$ всюду.

Theorem 6 (Ньютон, Лейбниц)**.** *Если g непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f'=g$, то $(f+c)'=g$ для любой константы c.*

Theorem 7. *Если f_1, f_2 — первообразные для g, то $f_1 - f_2 = const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c,\ \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x)\cdot g' = f\circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция — это функция вида $\varphi(h)=ch$.

Линейная форма: $\langle a,b\rangle$; Φ — отображение отрезка $\langle a,b\rangle$ в множество линейных функций.

$x\in\langle a,b\rangle$, $\Phi(x)$ — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал)**.** f дифференцируема на $\langle a,b\rangle$

$$df(u,h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ — тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, *где* c *- некая функция на* $\langle a, b\rangle$

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$
Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdg.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos tdt = \int \cos^2(t)dt =$$
$$\int \tfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \tfrac{1}{2}\int((1+\cos 2t)dt =$$
$$\tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{2}\int \cos td(2t)) = \tfrac{1}{2}(t + \tfrac{\sin 2t}{2})$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2\arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -fdy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log xdx = x\log x - \int xd\log x = x\log x - \int 1dx = x\log x - x + C.$$

Ex.

$$\int e^x \sin xdx = \int \sin xde^x = \sin xe^x - \int \cos xe^x dx.$$

$$= \sin xe^x - \int xosxde^x = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A — множество произвольной природы. $\Phi : A \to \mathbb{R}$. Φ — функционал на A.

Def 5. Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
$f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(f) \geqslant 0.$$

$$\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle, f = \Phi(\chi)\langle c, d\rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. *Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число* ($f \mapsto I(\alpha)$)
2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) = I(\beta)$ *(Линейность)*
3. $f \leqslant g \Longrightarrow I(f) \leqslant I(g)$
4. $\langle a, b\rangle : I(\chi_{\langle a,b\rangle}) = b - a$

Def 6. Разбиение — ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b\rangle,\ a, b \in \mathbb{R}:$

$$\langle a, b\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, \beta_i\rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i\rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j\rangle \neq \varnothing.$$

Def 7. g на $\langle a, b\rangle$ — ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разиения нашего отрезка $\langle a, b\rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.5.1 Интеграл Дарбу

Def 8. J — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^{N}$, такой что J_k $capJ_s = \varnothing,\ k \neq s,\ \bigcup_{k=1}^{N} J_k = J_i$. (ДОпускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 9. Длина интервала $\langle a, b\rangle$ — это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\varnothing| = 0$

Lemma. *Если* $\{J_k\}_{k=1}^{N}$ *— разбиение* J*, то* $|J| = \sum\limits_{k=1}^{N} |J_k|$

Def 10. e — множетсво, f — ограниченная функция на .
Колебание f на e :

$$esc_e(f) = \sup_{x,y\in e} |f(x) - f(y)| =$$

$$= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y)) \right) =$$

$$= \sup_{x\in e} f(x) + \sup_{y\in e}(-f(x) = \sup_{x\in e} f(x) - \inf_{y\in e} f(y).$$

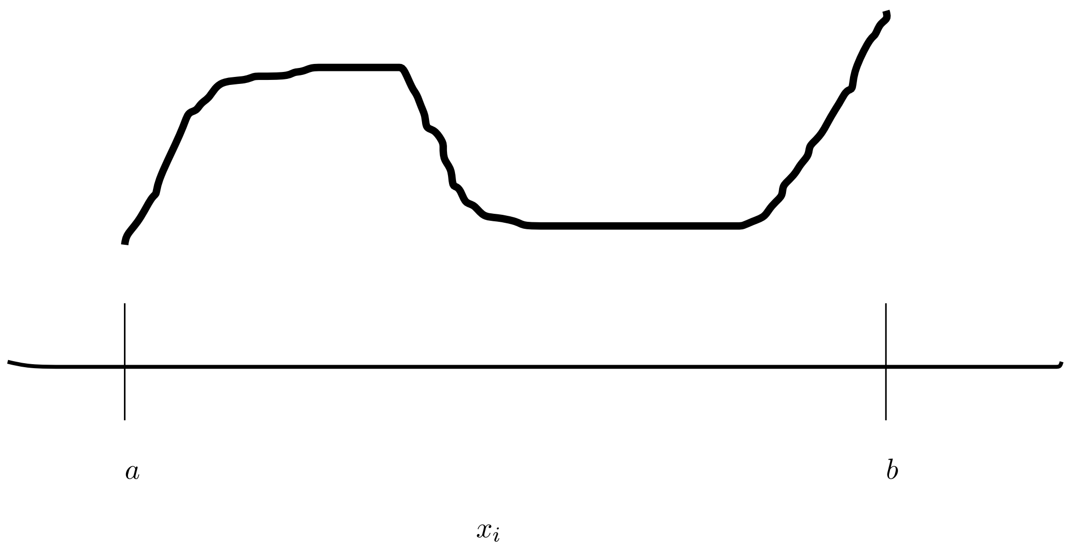

Рис. 2.2: График функции

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки $J_1, \dots J_N$ из разбиения отрезка J.

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

Designation. A — множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i
B — множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. *Пусть* $\{A, B\}$ *— щель. Тогда*

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \overline{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это $[\underline{I}(f), \overline{I}(f)]$ *(верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от* f*)*

Statement. $\{A, B\}$ *— щель.*

Доказательство. ε — разбиение отрезка J_i. $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leqslant \overline{S}(f)$
$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — разбиение $J_i : \mathcal{F}$ — измельчение $\mathcal{E}$, если $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. *Если* $\mathcal{F}$ *— измельчение для* $\mathcal{E}$*, то*

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geqslant \underline{S}_{\mathcal{E}}, \quad \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}}.$$

Lemma. *Рассмотрим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения отрезка J_i. Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)*

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения. $\mathcal{F}$ — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leqslant \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leqslant \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ — щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 11. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ex.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ— ступенчатая функция на J, Существует разбиение $\underline{S}$ отрезка на J. $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\} : \varphi(x) = \sum i = 1^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i \overline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}\varphi = I(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{k} |e_i| c_i$

Theorem 8. *Если J — замкнутый отрезок ($J = [a, b]$), f — непрерывная функция на J, то f интегрируема по Риману.*

Note. Пусть J — произвольный отрезок, f — ограниченная функция на J, $\mathcal{E}$ — разбиение отрезка J на непустое отрезки $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^{k} |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^{k} |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^{k} |e_i| \left(\sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \right) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f\end{aligned}$$

Note. f интегрируема по Риману $\iff$ щель (A, B) — узкая $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данный обозначениях измельчения можно считать, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ // возможно, здесь должно быть что-то другое

Theorem 9 (Критерий интегрируемости по Риману)**.** *f интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение $e_1, \dots, e_k$ Отрезка J, такое что*

$$\sum_{i=1}^{k} |e_k| \operatorname{osc}_{e_k} f < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию 8 f равномерно непрерывна по теореме Кантора **??**:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \Big(x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$

Пусть $e_1, \dots e_k$ — столь мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\forall i : |e_i| < \delta$. Тогда $\forall i : \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^{k} |e_i| \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

Property. 1. *f непрерывна на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ интегрируема.*

2. *Σ — разбиение,*

$$\overline{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$

3. *Если $\alpha > 0$,*

$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. *Если f интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$*

5. *$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ограничены. Σ разбиение.*

$$\overline{S}_\Sigma(f + g) \leqslant \overline{iS}_\Sigma(f) + \overline{S}_\Sigma(g).$$

6.

$$\underline{S}_\Sigma(f + g) \geqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$

7. *Если f, g интегрируемы на $\langle a, b\rangle$, то $f + g$ интегрируема и*

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. *f, g интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема и*

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. *Монотонность. $f \geqslant 0, f$ интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geqslant 0$.*

10. *f, g интегрируемы на $\langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot g$ интегрируема.*

Доказательство.

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leqslant C, |g| \leqslant D \text{ на } \langle a, b\rangle.$$

Пусть J — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y_| = |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(x)| =$$

$$\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$

$$= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \mathrm{osc}_J f.$$

f, g интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon\ \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leqslant \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{matrix} \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| \mathrm{osc}_J f \leqslant \varepsilon \\ \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| \mathrm{osc}_J g \leqslant \varepsilon \end{matrix}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : \mathrm{osc}_J(fg) \leqslant C \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \mathrm{osc}_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \mathrm{osc}_J fg \leqslant C \cdot \sum_J |J| \cdot \mathrm{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \mathrm{osc}_J f \leqslant (C + D)\varepsilon.$$

□

11. *f интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $J \subset \langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)*

    Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. *J_1, J_2 — два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \varnothing$. Тогда*

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. *Основная оценка интеграла. f интегрируема на $\langle a, b\rangle$. $|f| \leqslant M$ на $[c, d] \subset \langle a, b\rangle$*

$$\left| \int_c^d f \right| \leqslant M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \overset{def}{=} I(f\chi_{\langle c,d\rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

Statement. *f интегрируема на $\langle a, b\rangle$.*

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.5.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функция f, если F дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 10 (Ньютон-Лейбниц). *Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$ и непрерына в точке $t \in \langle a, b\rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b\rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$. Тогда F дифференцируема в точке tи $F'(t) = f(t)$.*

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left|\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)\right| = \left|\frac{\int_{t_0}^x f = \int_{t_0}^t f}{x-t}\right| = \left|\frac{\int_t^x}{x-t} - f(t)\right| =$$

$$\frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f - (x-t)f(x)\right| = \frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f(s) - f(t)ds\right| \leqslant \sup_{s\in[t,x]} |f(s) = f(t)|.$$

f непрерывна в t. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$. Если $|s-t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x-t| < \delta \Longrightarrow \forall s \in [t,x] : |s-t| < \varepsilon \to |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t,x] |f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x\to t} |\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)| = 0 \Longrightarrow F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a,b\rangle$, то $\forall t_0 \in [a,b] : F$ —первообразная f.

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница)**.** f непрерывна на $[a,b]$, F —первообразная f. Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 12. $f \in C^k\langle a,b\rangle, \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0,\infty\}$, если $f, f', \dots f^{(k)}$ непрерывны.

Theorem 11. *Если* $f, g \leqslant C^1(a,b)$ *, то*

$$\int_b^a fg' = f\cdot g\mid_a^b - \int_a^b f'g,$$

где $\Phi \mid_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

2.5.3 Формула интегрирования по частям

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f,g непрерывны на $[a,b]$ и f,g,f',g' непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ — первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(x)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x)\int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 12. *f_n, f — Заданы на $\langle a,b\rangle; n \in \mathbb{N}$ Пусть*

1. *все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a,b\rangle$*
2. *$f_n \rightrightarrows f$. Тогда f интегрируема по Риману*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. *E — множество, u, v — вещественные функции на E. $|u(x) - v(x)| \leqslant \lambda\ \forall E$. Тогда $|ose_E(u) - ose_E(v)| \leqslant 2\lambda$*

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\ \forall x \in \langle a,b\rangle.$$
$$|ose_{\langle a,b\rangle} - ose_{\langle a,b\rangle(f)}| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\exists\{I_1, \ldots I_N\}$ — отрезки $\langle a,b\rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| ose_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \mathrm{osc}_{I_j}(f) \leqslant \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a)+1).$$

Следовательно, f интегрируема.

$$\left|\int_a^b f_n(x_)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x) - f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon(b-a).$$
$$\varepsilon > 0\ \exists M : \forall n \geqslant M\ \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. *Если f интегрируема по Риману на $\langle a,b\rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.6 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0,a) = l(0) + l(a) \Longrightarrow l(0) = 0.$$

Будем искать l, заданную на $\mathbb{R}_+$.

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$
$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 13. Логарифм — строго монотонная функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. *Для* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \Longrightarrow l(1) = 0.$$

Statement. *Если* l *— логарифм,* $c \neq 0$*, то* cl *— тоже логарифм.*

Lemma. *Если* l *— логарифм, то* l *непрерывна на всей области определения.*

Доказательство. Пусть l — логарифм. Считаем, что fстрого возрастает.

$$t = \lim_{x \to 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 1l(1+x).$$

При $xto1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \to 1-$, получаем тое самое. Значит l непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. □

Lemma. *Если* l *— логарифм, то функция* l *дифференцируема.*

Доказательство.

$$\Phi(x) - \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{gathered} \Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ x \int_x^{2x} l(x \cdot \tfrac{t}{x}) d(\tfrac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y) dy = \\ \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y) dy \end{gathered} .$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. □

Theorem 13 (Производная логарифма)**.**
$l(xy) = l(x) + l(y)$*. Зафиксируем* y *и возьмем производную:*

$$yl'(xy) = l'(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 14. *Если* l *логарифм, то*

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 15. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ *— логарифм.*
Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 16. *Если* $C \neq 0$, *то*

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x}}{)} \frac{t}{x}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \; x \xrightarrow{to} 0 \; \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Statement. *Образ функции* log *есть все вещественные числа.*

Доказательство. При $x_1 > x$, $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$. □

Def 14 (Обратная функция к логарифму)**.** У функции log есть обратная функция, называющаяся экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Property. *1.* exp *строго возрастает*

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x+y).$$

Statement. *Экспонента дифференцируема:*

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}j!^j}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Theorem 17. *Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:*

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $epx(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leqslant R$ Применим:

$$\leqslant \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражена стремиться к нулю.

Lemma. *Пусть $a_0, a_1, a_2 \dots$ — положительные числа и $\exists N : a_j < \eta < 1\ \forall j > N$. Тогда $a_0 a_1 \dots a_j \to 0 \quad j \to \infty$*

Corollary. Если $a_j \geqslant 0,\ a_j \to 0$, то $a_0 \dots a_j \to 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. □

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n! = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leqslant (n+1)! \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad x \to \infty.$$

□

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример)**.**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j \text{ — полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geqslant 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

h — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b),\ a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{matrix} u(x) > 0 & x \in (a, b) \\ u(x) = 0 & x \notin (a, b) \end{matrix}.$$

Designation. l— логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

тТакое число называется основанием логарифма l.

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e.

Designation (общий случай)**.**

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a — ан для l.

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : \ u^v \overset{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \ldots \log u}_{n}) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$
Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

1. $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \exp u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$

2. $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$

3. $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_2 \log u) = u^{v_1 v_2}$

2.6.1 Показательная функция

Def 15. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 16. Пусть $\neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

2.6.2 Степенная функция

Def 17. Степенная функция $g(x) = x^b, \quad x \in (0, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. *Если* $a > 1$, *то* $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x, \quad x \to \infty$

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{blogx - xloga}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нолю при $x \to \infty$. □

Practice.
$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$
$\forall \alpha : \lim_{x \to 0} x^\alpha \log x = 0$

Statement. *Ранее доказали , что*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится при любых x. *Экспонента равномерна на любом конечном отрезка.*

Ряд для e^x *по степеням* $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0) \tag{2.2}$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leqslant 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}}{(2k)!} x^{2k} \tag{2.3}$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. *В 2.2 общий член стремиться к нулю, если* $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k}\right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

2.6.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 18 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0)**.**
$f(x) = \log(1+x),\ f'(x) = (1+x)^{-1},\ f^{(2)} = -(1+x)^{-2},\ f^{(3)} = 2(1+x)^{-3}\ \ldots$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)(1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{\log^{(n)} 1}{n!} x^n + \frac{\log^{k+1}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n\to 0}(1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n}\log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \to 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n\to 0}(1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. *Раскладывается ли логарифм ряд Тейлора:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \tag{2.4}$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n}|x|^n \longleftarrow +\infty, \quad |x|>1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $x\in(-1,1]$.

Theorem 19. $x\in(-1,1]$. *Тогда ряд 2.3 равномерно сходится равномерно на любом* $(r,1], \quad r>-1$.

Доказательство. 1. $x\in[0,1]$.

$$\left|\log(1+x)-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right| \leqslant \frac{1}{k+1}x^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}x^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}, \quad c\in lra \tag{2.5}$$

В частности, $\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$.

2. $-1<x\leqslant 0$

$$\left|\log(1+x)-\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\right| \leqslant \frac{1}{k+1}|x|^{k+1}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}|x|^{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{k+1} \tag{2.6}$$

Удачным случаем 2.5 будет $\frac{|x|}{1-|x|}<1 \iff |x|\leqslant\frac{1}{2},\ x\in(-\frac{1}{2},0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\ldots+x^n)=1-x^{n+1}$. Подставим $x=-x$:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^t\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k dt = \int_0^t\frac{1}{1+x}-(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

$$\log(1+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k+(-1)^{n+1}\int_0^t\frac{x^n}{1+x}dx \qquad -1<t\leqslant 0, t<x\leqslant 0.$$

$$\int_0^t\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^t(\frac{|x|^n}{1-|x|}dx\leqslant\frac{1}{1-|t|}\int_t^0|x|^n dx=\frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}|t|^{n+1}.$$

Это выражение стремится к нулю при $n\to\infty,\ t>-1$, если $t\in(-1,0], |t|\leqslant r<1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\leqslant\frac{1}{1+|t|}\frac{1}{n+1}|t|^n\leqslant\frac{1}{1-r}\frac{1}{n}r^n$.

□

Note. Логарифм — аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $\left|1-\frac{x}{x_0}\right|<1$.

$$\log x-\log x_0=\log\frac{x}{x_0}=\log(1-(1-\frac{x}{x_0}))=\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}(\frac{x}{x_0}-1)^n.$$

$$\log x=\log x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\frac{1}{x_0}(x-x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

2.6.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(x)d(x-t) = f'(x)(x-t)\mid_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x-t)dx =$$

$$= f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

И так далее

Theorem 20. *f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{n!}\int_a^t f^{(n+1)}(z)(t-x)^{n+1}dx.$$

Ex. $x \rightsquigarrow u$, $x = a(1-u) + tu$
$u \in [0,1]$, $dx = (t-a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1-u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t-a) = \\ &= (t-a)(1-u) \end{aligned}$$

$$r_n(a,t) = \frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a(1-u)+tu)(t-a)^n(1-u)^n(t-a)^n du.$$

Если $a = 0$:

.

$f(x) = (1+x)^m, \qquad m \in \mathbb{R}$
$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$
$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-1}$
$\vdots$
$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k-1)(1+x)^{m-k}$

Designation.

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}.$$

$|x| < 1$

$$(1+t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \ldots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\ldots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.$$

Theorem 21 (Ряд Ньютона)**.** *Ряд*

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}t^k$$

сходится к $(1+t)^m$*, при* $|t|<1$

Доказательство. $R_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.\ 0\leqslant t<1.$

$$|R_n(t)|\leqslant |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right|.$$

□

Theorem 22. $R_n(t)\to 0$ *при* $|t|<1$*, и сходится равномерно при* $|t|<\phi<1$.

Доказательство. Пусть $\int_0^1\left|\frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}}du\right|=I$

1. Сначала $0\leqslant t_0$:

$$I\leqslant\int_0^1(1-u)^n du=\frac{1}{n+1}\longleftarrow 0.$$

$$|R_n(t)|\leqslant t^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right|\frac{m}{n+1}=a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)}=\frac{n+1}{n+2}\frac{|m-n-1|}{n+2}t.$$

$t<1,\ t+\varepsilon<1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)(t)}<t+\varepsilon$

2. Следующий случай $-1<t<0$ Подынтегральное выражение:

$$\left|\frac{1-u}{1+tu}\right|^n\left|\frac{1}{1+tu}\right|^{m-1}.$$

$$1+|t|\geqslant|1+tu|\geqslant 1-|t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left|\frac{1-u}{1+tu}\right|\leqslant\frac{1-u}{1-|t|u}=\frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u}=1-\left(n\frac{1-|t|}{1-|t|u}\right).$$

Это не превосходит $1-n(1-|t|)$.

Второй множитель:

(a) $m\leqslant 1$

$$\left|\frac{1}{1+tu}\right|^{-m+1}\leqslant\left(\frac{1}{1-|t|u}\right)^{-m+1}\leqslant\left(\frac{1}{1-|t|}\right)^{-m+1}.$$

(b) $m>1$

$$|1+tu|^{m-1}\leqslant(1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку $C_m(t)$.

$$I \leqslant C_m(t)\int_0^1 (1-n(1-|t|))du = C_m(t)\left(-\frac{1}{1-|t|}\right)\frac{1}{n+1}(1-n(1-|t|))^{n+1}\,|_{n=0}^{n=1} =$$

$$= C_m(t)\frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}(1-|t|^{n+1}) \leqslant C_m(t)\frac{1}{n+1}.$$

Получили

$$R_n(t) \leqslant |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\frac{1}{n+1}\bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2}|t|\left|\frac{m-n+1}{n+2}\right| \longleftarrow |t|, \qquad n\to\infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leqslant \rho \quad \sigma_n(t) \leqslant A\rho^{n-1}, \quad |t| \leqslant \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

$x, x_0 > 0$

$$x^m = x_0^m\left(\frac{x}{x_0})\right)^m = x_0^m(1-(1-\frac{x}{x_0}))^m =$$

$$= x -^n (1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(-1)^n\left(1\frac{x}{x_0}\right)^m = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(x-x_0)^m.$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

Theorem 23 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** *Если f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке с концами a, t:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \tag{2.7}$$

Statement. *Если f дифференцируема $n+1$ раз:*

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t \ : R_n(t,a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{2.8}$$

Note. Если $f \in C^{(n+1)}$, то 2.7 можно вывести из 2.6.

Theorem 24 (о среднем)**.** *φ, ψ — функции на $[c,d]$, φ непрерывна, ψ - интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда*

$$\exists\psi \in [c,d] : \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\psi)\int_c^d \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Можно считать, что $\psi \geqslant 0$. Пусть $m = \min_{x\in[c,d]} \varphi(x), \quad M = \max_{x\in[c,d]}$.

$$m \int_c^d \varphi(x)dx \leqslant \int_c^d \varphi(x)\psi(x)x \leqslant M \int_x^d \varphi(x)dx.$$

$$m\psi(x) \leqslant \varphi(x)\psi(x) \leqslant M\psi(x).$$

Если $\int_c^d \psi(x)dx = 0$, теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leqslant \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx} \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\exists\, \zeta \in [c,d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx}.$$

□

Statement (оценка остатка)**.**

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists \zeta : R_n(t,a) = \frac{1}{n!} f(^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}\left[-(t-x)^{n+1}\Big|_{x=a}^{x=t}\right] = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}.$$

2.7 Дифференциальные уравнения

$$\Phi\big(f'(t), f(t), t\big) = 0.$$

Theorem 25. *Пусть f — непрерывная дифференцируемая функция на (a,b). Следующие условия эквивалентны:*

1. $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a,b)$
2. $\exists A : \ f(t) = Ae^{ct}$

Доказательство. $2 \Longrightarrow 1$ — очевидно
$1 \Longrightarrow 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда $g(t) \equiv A \in R$.

□