

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ.
ФАКУЛЬТЕТ МКН СПбГУ, I СЕМЕСТР, ОСЕНЬ 2019**

А.В.Степанов

1. Векторное пространство: определение, простейшие свойства, примеры.
 2. Подпространство, линейная оболочка.
 3. Матрицы (если в ответе фигурируют только конечные матрицы, то оценка не выше 4).
 4. Эквивалентные определения базиса.
 5. Существование базиса.
 6. Лемма о замене.
 7. Количество элементов в базисе (доказательство только для конечномерных пространств).
 8. Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений.
 9. Матрица перехода от одного базиса к другому. Замена координат и изменение матрицы оператора при замене базиса.
 10. Внешняя и внутренняя прямая сумма пространств, естественный изоморфизм между ними.
 11. Ядро и образ линейного отображения. Слои линейного отображения.
 12. Теорема о размерности ядра и образа. Теорема о размерности суммы и пересечения.
 13. Факторпространство и его универсальное свойство.
 14. Ранг набора элементов векторного пространства, ранг оператора, строчный и столбцовый ранг матрицы.
 15. PDQ-разложение. Равенство строчного и столбцового ранга матрицы.
 16. Разложение Брюа.
 17. Разложение Гаусса (непосредственное доказательство).
 18. Определение группы, подгруппы, прямое произведение групп.
 19. Подгруппа, порожденная множеством. Классификация циклических групп.
 20. Смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа.
 21. Порядок элемента группы (2 определения, порядок элемента делит порядок группы, порядок образа делит порядок элемента, порядок произведения элементов).
 22. Экспонента группы, критерий цикличности абелевой группы.
 23. Нормальные подгруппы. Гомоморфизмы групп. Свойства ядра и образа.
 24. Существование эпиморфизма групп с данным ядром, факторгруппа.
 25. Универсальное свойство факторгруппы и теорема о гомоморфизме.
 26. Сопряженные элементы, коммутаторы и коммутант.
 27. Соотношения между трансвекциями. Взаимные коммутанты верхнетреугольных групп. Порождение верхнетреугольной группы.
 28. Приведенное разложение Брюа. Соотношение между клетками Брюа и Гаусса.
 29. Симметрическая группа. Циклическая запись перестановки. Классы сопряженных элементов в S_n .
 30. Транспозиции и инверсии. Четность перестановки.
-
31. Определение кольца, подкольца, идеала, прямое произведение колец.
 32. Гомоморфизмы колец, ядро, образ, слой.
 33. Факторкольцо, существование эпиморфизма колец с данным ядром.
 34. Универсальное свойство факторкольца и теорема о гомоморфизме.
 35. Определение комплексных чисел, арифметические операции, геометрическое представление.
 36. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Операции в тригонометрической форме.
 37. Строение мультипликативной группы комплексных чисел, корни из 1, уравнение $z^n = w$.
 38. Евклидовы кольца и кольца главных идеалов.
 39. Взаимно простые идеалы, их пересечение и произведение.

40. Китайская теорема об остатках.
41. Существование максимальных идеалов.
42. Факторкольца по простым и максимальным идеалам. Прообразы простых и максимальных идеалов.
43. Неприводимые и простые элементы.
44. Нетеровы кольца (2 определения и их равносильность).
45. Существование разложения на неприводимые в нетеровых кольцах (на 4 можно доказывать только для областей целостности).
46. Факториальные кольца. Факториальность кольца главных идеалов.
47. Пример нефакториальной области целостности.
48. Наибольший общий делитель и его линейное представление. Алгоритм Евклида.
49. Локализация: универсальное свойство, примеры мультипликативных подмножеств.
50. Конструкция локализации.
51. Поле частных евклидова кольца и разложение на простейшие дроби.
52. Определение алгебры над кольцом. Алгебра многочленов и ее универсальное свойство.
53. Многочлены одной переменной над полем: деление с остатком, теорема Безу, количество корней многочлена.
54. Конечная подгруппа мультипликативной группы поля.
55. Функция Эйлера. Теорема Эйлера.
56. Экспонента группы $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ при $p \neq 2$.
57. Экспонента группы $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^*$. Теорема Кармайкла.
58. Интерполяция по Лагранжу и ее связь с Китайской теоремой об остатках.
59. Формальная производная и ее свойства.
60. Кратность корня и ее поведение при дифференцировании.