

Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

16 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Глава 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифференцирования

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 1. $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, f_n \rightarrow f$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \rightarrow |f(x)| \leq M$
2. f – ограничена: $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Доказательство. Очевидно □

Theorem 2. $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$ на A . Пусть $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$. Тогда $f_n g_n \Rightarrow f g$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 3 (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть f_n – последовательность функций на множестве A . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f_n \Rightarrow f$, $\varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x , перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Ех. Функция на \mathbb{R} , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 4 (Вейерштрасс). Пусть f_n - функция на множестве A .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

Ех (Ван дер Варден). $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в $h_k (\pm)$, чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ - сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ех. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

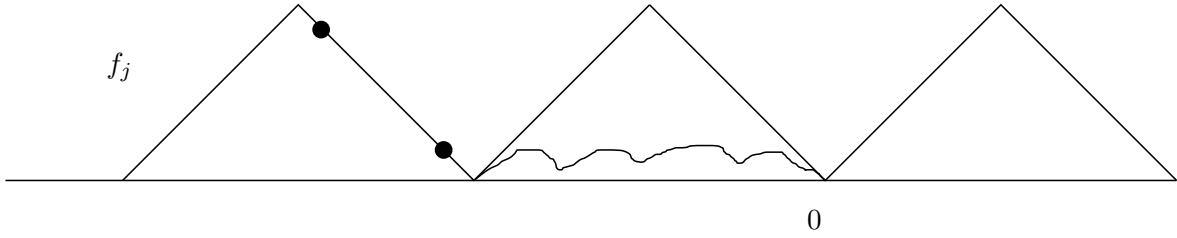


Рис. 2.1: График функции Ван дер Вардена

Theorem 5. $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Предположим, что $f_n \rightarrow f$ поточечно. f_n дифференцируемы и $f_n \rightrightarrows g$ равномерно. Тогда f дифференцируемая на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} = f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $x, y \in \langle a, b \rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad c \text{ между } x, y.$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем $k, l \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем x .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b \rangle$. $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g , если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 6 (Ньютон, Лейбниц). Если g – непрерывна, то у нее есть первообразная.

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c .

Theorem 7. Если f_1, f_2 – первообразные для g , то $f_1 - f_2 = \text{const}$

| Функция | Первообразная |
|-------------------|---|
| x^α | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\log x + c, \alpha \neq -1$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\arctan x + c$ |
| e^x | $e^x + c$ |

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция – это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b \rangle$; Φ – отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в множество линейных функций.
 $x \in \langle a, b \rangle$, $\Phi(x)$ – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал). f – дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, где c – некая функция на $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dg.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) &= \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) \end{aligned}$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям). $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Ex.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A – множество произвольной природы. $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Φ – функционал на A .

Def 5. Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

$$f \mapsto \Phi(f)$$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число $(f \mapsto I(\alpha))$

2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ (Линейность)

3. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$

4. $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

Def 6. Разбиение – ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

Def 7. g на $\langle a, b \rangle$ – ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.5.1 Интеграл Дарбу

Def 8. J – конечный интервал, если его разбиение – это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^N$, такой что $J_k \cap J_s = \emptyset$, $k \neq s$, $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$. (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 9. Длина интервала $\langle a, b \rangle$ – это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\emptyset| = 0$

Lemma. Если $\{J_k\}_{k=1}^N$ – разбиение J , то $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

Def 10. e – множество, f – ограниченная функция на e .
Колебание f на e :

$$\begin{aligned} osc_e(f) &= \sup_{x, y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки J_1, \dots, J_N из разбиения отрезка J .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) = \underline{S}.$$

– нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

– верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

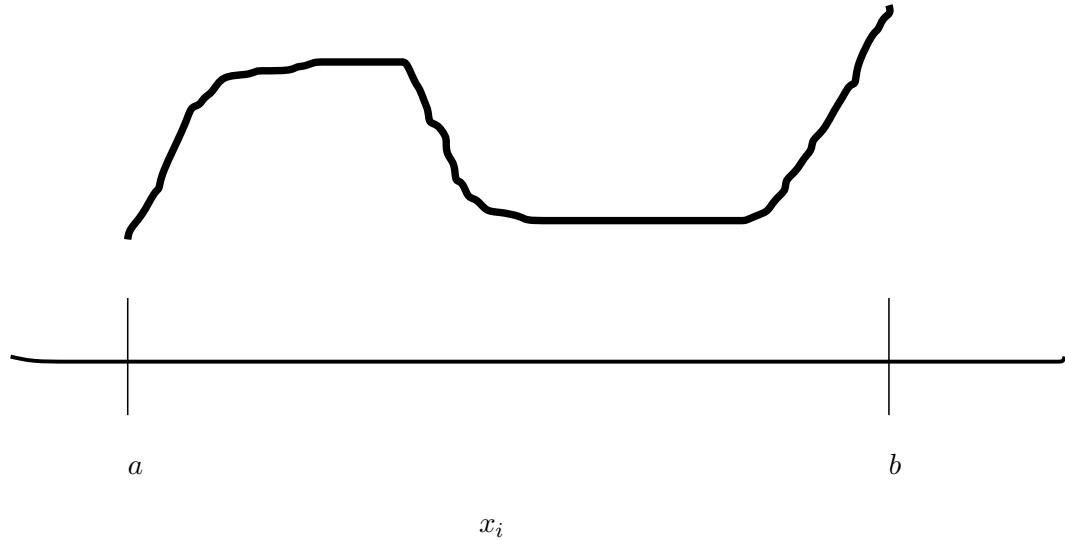


Рис. 2.2: График функции

Designation. A – множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i
 B – множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. Пусть $\{A, B\}$ – щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели – это $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$ (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от f)

Statement. $\{A, B\}$ – щель.

Доказательство. ε – разбиение отрезка J_i . $\underline{S}_\varepsilon(f)$, $\bar{S}_\varepsilon(f)$ – верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_\varepsilon(f) \leq \bar{S}(f)$

\mathcal{E}, \mathcal{F} – разбиение $J_i : \mathcal{F}$ – измельчение \mathcal{E} , если $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. Если \mathcal{F} – измельчение для \mathcal{E} , то

$$\underline{S}_\mathcal{F}(f) \geq \underline{S}_\mathcal{E}, \quad \bar{S}_\mathcal{F} \leq \bar{S}_\mathcal{E}.$$

Lemma. Рассмотрим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – разбиения отрезка J_i . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ – разбиения. \mathcal{F} – общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{F} \leq \bar{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ – щель. □

Note. Определенные величины $\bar{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 11. f называется интегрируемой по Риману, если $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ех.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ – ступенчатая функция на J , Существует разбиение \underline{S} отрезка на J . $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \bar{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \bar{I}\varphi = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

Note. Пусть J – произвольный отрезок, f – ограниченная функция на J , \mathcal{E} – разбиение отрезка J на непустые отрезки $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Theorem 8. Критерий интегрируемости по Риману f – интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение e_1, \dots, e_k Отрезка J , такое что $\sum_{i=1}^k |e_k| \text{osc}_{e_k} f < \varepsilon$.

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию 8 □

Property. 1. f – непрерывна на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$ – интегрируема.

2. Σ – разбиение,

$$\bar{S}_{\Sigma}(-f) = -\underline{S}_{\Sigma}(f).$$

3. Если $\alpha > 0$,

$$\bar{S}_{\Sigma}(\alpha f) = \alpha \bar{S}_{\Sigma}(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если f – интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf – интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5. $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – ограничены. Σ – разбиение.

$$\bar{S}_{\Sigma}(f + g) \leq \bar{S}_{\Sigma}(f) + \bar{S}_{\Sigma}(g).$$

6.

$$\underline{S}_{\Sigma}(f + g) \geq \underline{S}_{\Sigma}(f) + \underline{S}_{\Sigma}(g).$$

7. Если f, g – интегрируемы на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ – интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. f, g – интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ – интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность. $f \geq 0$, f – интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geq 0$.

10. f, g – интегрируемы на $\langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot g$ – интегрируема.

Доказательство.

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть J – отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

f, g – интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \bar{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \bar{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11. f – интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $J \subset \langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ – интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)

Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. J_1, J_2 – два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$. Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла. f – интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $|f| \leq M$ на $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{(c,d)}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

Statement. f – интегрируема на $\langle a, b \rangle$.

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.5.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная функция f , если F – дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 9 (Ньютон-Лейбниц). Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$ и непрерывна в точке $t \in \langle a, b \rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$. Тогда F – дифференцируема в точке t и $F'(t) = f(t)$.

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t) ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

f – непрерывна в t . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$. Если $|s - t| < \delta$, $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$, то $\forall t_0 \in [a, b] : F$ – первообразная f .

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница). f – непрерывна на $[a, b]$, F – первообразная f . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 12. $f \in C^k \langle a, b \rangle$, $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$, если $f, f', \dots, f^{(k)}$ – непрерывны.

Theorem 10. Если $f, g \leq C^1(a, b)$, то

$$\int_a^b f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

где $\Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

2.5.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g – непрерывны на $[a, b]$ и f, g, f', g' – непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Пусть Φ – первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 11. f_n, f – заданы на $\langle a, b \rangle$; $n \in \mathbb{N}$ Пусть

1. все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b \rangle$
2. $f_n \Rightarrow f$. Тогда f интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. E – множество, u, v – вещественные функции на E . $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \forall E$. Тогда $|ose_E(u) - ose_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|ose_{\langle a, b \rangle} - ose_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$ – отрезки $\langle a, b \rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| ose_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| osc_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно, f – интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \exists M : \forall n \geq M \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.6 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать l , заданную на \mathbb{R}_+ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 13. Логарифм – строго монотонная функция, заданная на \mathbb{R}_+ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. Для $n \in \mathbb{N}$:

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

Statement. Если l – логарифм, $c \neq 0$, то cl – тоже логарифм.

Lemma. Если l – логарифм, то l – непрерывна на всей области определения.

Доказательство. Пусть l – логарифм. Считаем, что f строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 2l(1+x).$$

При $x \rightarrow 1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \rightarrow 1-$, получаем то же самое. Значит l – непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. \square

Lemma. Если l – логарифм, то функция l – дифференцируема.

Доказательство.

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t) dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{aligned} \Phi(2x) &= \int_1^{2x} l(t) dt = \int_1^x l(t) dt + \int_x^{2x} l(t) dt = \Phi(x) = \\ &= x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x}) d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y) dy = \\ &= \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y) dy \end{aligned}$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. \square

Theorem 12 (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 13. Если l логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 14. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ – логарифм.

Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 15. Если $C \neq 0$, то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ – есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

Statement. Образ функции \log есть все вещественные числа.

Доказательство. При $x_1 > x$, $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$. □

Def 14 (Обратная функция к логарифму). У функции \log есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Property. 1. \exp строго возрастает

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Statement. Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Theorem 16. Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $\exp(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leq R$ Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

Lemma. Пусть $a_0, a_1, a_2 \dots$ – положительные числа и $\exists N : a_j < \eta < 1 \quad \forall j > N$. Тогда $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

Corollary. Если $a_j \geq 0$, $a_j \rightarrow 0$, то $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремится к нулю. Доказали равномерную сходимость. \square

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

\square

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на \mathbb{R} .

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2 \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема в нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j - \text{полином}.$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

h – бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b)$, $a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$

Designation. l -логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

Такое число называется основанием логарифма l .

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e .

Designation (общий случай).

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a – ан для l .

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \dots \log u}_n) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$

Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}$, $a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

1. $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \log u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$
2. $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$
3. $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_1 \log u) = u^{v_1 v_2}$

2.6.1 Показательная функция

Def 15. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 16. Пусть $a \neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

2.6.2 Степенная функция

Def 17. Степенная функция $g(x) = x^b$, $x \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. Если $a > 1$, то $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x)$, $x \rightarrow \infty$

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{b \log x - x \log a}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. \square

Practice.

$$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

Statement. Ранее доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится при любых x . Экспонента равномерна на любом конечном отрезке.

Ряд для e^x по степеням $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0) \quad (2.1)$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ – непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ – сходится равномерно. Далее будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad (2.2)$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. В ?? общий член стремиться к нулю, если $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

2.6.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 17 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0).

$$f(x) = \log(1+x), f'(x) = (1+x)^{-1}, f^{(2)} = -(1+x)^{-2}, f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) (1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{(n)}(1)}{n!} x^n + \frac{\log^{k+1}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n \rightarrow 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \rightarrow 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. Ракскладывается ли логарифм ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (2.3)$$