Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

27 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство.

1. Все пространство открыто
2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ *– замкнуто,* $B \cap Y$ *– замкнуто. Тогда* $A \times B$ *– замкнуто в* $X \times Y$*.*

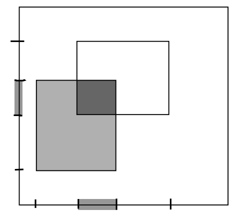

Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X,\ B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.
$$d((x, y), (x', y')) = max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$
d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \overset{?}{\geq} d(p, p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$
$$B_r((x, y)) = B^X_r(x) \times B^Y_r(y).$$
А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.
$$\exists A \subset X,\ B \subset Y\text{- открытые}, (x, y) \in A \times B \subset W.$$
$$\exists r_1 > 0 : B^X_{r_1}(x) \subset A.$$

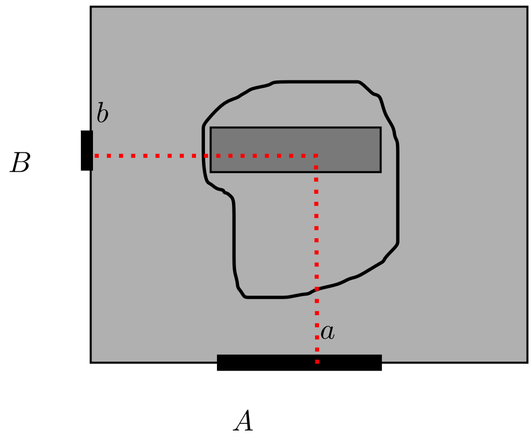

Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B^Y_{r_2}(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B^{X\times Y}_r((x,y)) = B^X_r(x) \times B^Y_r(y) \subset A \times B \subset W.$$

$\square$

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leq} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leq & \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

$\square$

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i\in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \to X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i.

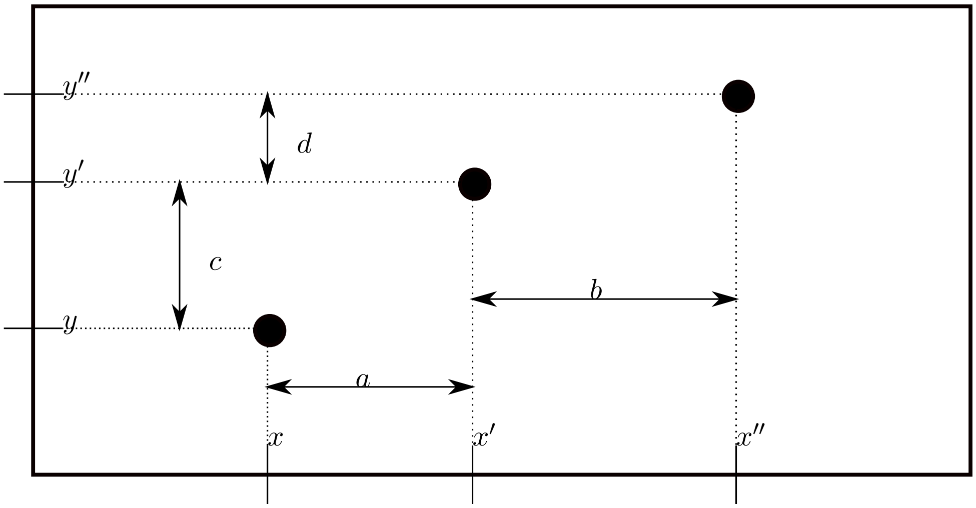

Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Def 2 (Тихоновская топология)**.** Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\ U \in \Omega_i\right\}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0,1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

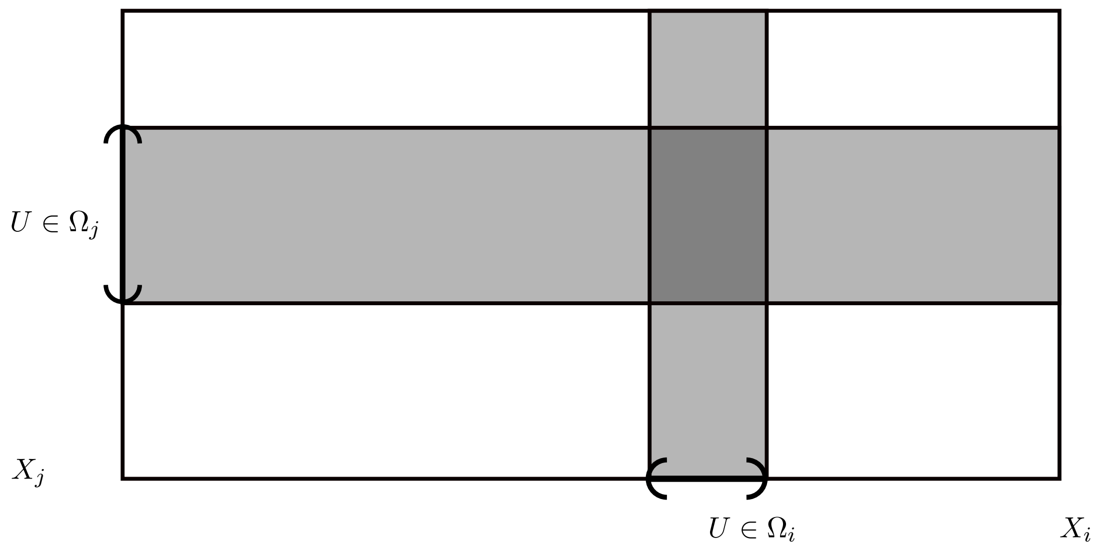

Рис. 1.4: Тихоновская топология

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y\ f$ непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

Theorem 4. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. $\Rightarrow$)
$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$)
$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$- внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.*
Тогда f – непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < d \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\Leftarrow$) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.
$f : X \to Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

1.9 Гомеоморфизм

Designation. X, Y — топологические пространства.

Def 6. Гомеоморфизм между X и Y — непрерывное биективное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f^{-1} : Y \to X$ тоже непрерывно.

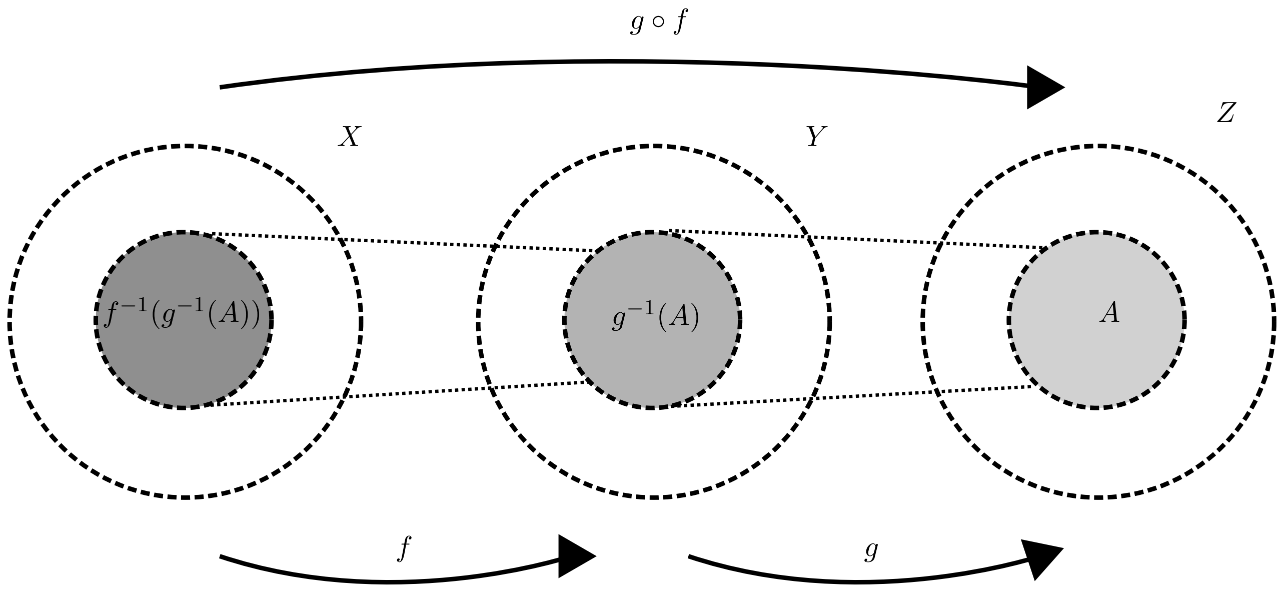

Рис. 1.5: Композиция отображений

Def 7. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. *Тождественное отображение — гомеоморфизм.*
2. *Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.*
3. *Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.*

Theorem 7. *Гомеоморфность — отношение эквивалентности.*

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y.
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \to S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f – биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1, f – непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке (1, 0).

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d: \ [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d: \ (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d: \ [a, b) \cong [c, d) \cong (c, d]$
- $\forall a, b: \ (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b: \ [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 8. *Открытый шар в* $\mathbb{R}^n$ *гомеоморфен* $\mathbb{R}^n$

Designation. D^n — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$

Designation. S^n — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$

Theorem 9. $S^n \setminus \{\text{\textit{точка}}\} \cong \mathbb{R}^n$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.10 Аксиомы

1.10.1 Аксиомы счетности

Def 8. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \not\ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 9. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сетности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 10. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 10. *$2AC \Rightarrow 1AC$*

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 11. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

Statement. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 12. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 13. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 11. Топологические свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 14. *Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in A$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.10.2 Сеперабельность

Def 12. Всюду плотное множество – множество, замыканние которого есть все пространство.

Def 13. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 14. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. *X, Y – сепарабельны $\Longrightarrow X \times Y$ тоже.*

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 15.

- *Счетная база* $\Longrightarrow$ *сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность* $\Longrightarrow$ *счетная база*

1.10.3 Аксиомы отделимости

Def 15. X обладает свойтсвом T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \land y \notin U$.

Theorem 16. $T_1 \Longleftrightarrow$ *любая точка является замкнутым множеством.*

Def 16. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \land V \ni y : U \cap V = \varnothing$.

Def 17. X хаусдорфово $\Longleftrightarrow$ Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 18. X – регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X$ $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U \land x \in V \land U \cap V = \varnothing$

  Другое название T_3-пространство

Def 19. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \varnothing)$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \land U \cap V = \varnothing$

Другое название T_4-пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.
Нормальность не наследственная.

Def 20. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.
$f : X \to Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. $\square$

Lemma (Урысон). *X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует непрерывна функция $f : X \to [0,1] :\ f\restriction_A = 0 \wedge f\restriction_B = 1$*

1.11 Связность

1.12 Линейная связность

1.13 Компактность

1.14 Полные метрические пространства

1.14.1 Компактность полных метрических пространств

1.15 Факторизация

Def 21. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство $X/\sim$ — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X.

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X.

1.15.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Def 22. Каноническая проекция X на $X/\sim$ или отображение факторизации — отображение

$$p : X \to X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 17. *Каноническая проекция непрерывна.*

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X.

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. *Следующие свойства наследуются факторпространством:*

- *Связность*
- *Линейная связность*
- *Компактность*
- *Сепарабельность*

1.15.2 Стягивание множества в точку

Def 23. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A, операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме **??**)

1.15.3 Несвязное объединение

Def 24. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологий: A открыто в $X \sqcup Y \Longleftrightarrow A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y.

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.15.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \to Y$ — непрерывное отображение.

Def 25. $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A : \; a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f.

Ex. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y, $A = \{x_0\}$, $f(x_{00} = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0).

Ex. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ex. Если склеить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, получилась **лента Мебиуса**.

Def 26. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X :

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство $X/\sim$ обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ex. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ параллельными переносами.

Theorem 18. *Пусть $p : X \to X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \to Y$ переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X : \; x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \overline{f} : X/\sim \to Y : f = \overline{f} \circ p$.
2. $\overline{f}$ *непрерывно тогда и только тогда, когда* f *непрерывно.*

Доказательство.

- Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- $\boxed{\Longrightarrow}$ По непрерывности композиции, если $\overline{f}$ непрерывна, то f тоже.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 19 (Склеивание концов отрезка)**.** $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [\,0, 1] \to S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$. Соответствующее $\overline{f} : [\,0, 1]/\{0, 1\} \to S^1$ — биекция. По теореме **??** $\overline{f}$ непрерывно. $[\,0, 1]/\{0, 1\}$ — компактно, S^t — хаусдорфово, следовательно, $\overline{f}$ — гомеоморфизм. □

Theorem 20. *X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \to Y$ – непрерывно и сюръективно. Тогда*

$$X/\sim \cong Y,$$

где $\sim$ определяется условием

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Theorem 21. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме 19 достаточно построить сюрьективный гомеоморфизм $f : B \to S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x|\right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}_{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

□

1.16 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 27. n-мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число n — размерность многообразия.

Theorem 22. *При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m.

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n-мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{RP}^n$.

Def 28. n-мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+ := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M.

Def 29. Поверхность – двумерное многообразие.

Ex. D^n — многообразие с краем, S^{n-1} — его край.

Theorem 23. $\mathbb{R}^n_+$ *не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в* $\mathbb{R}^n$.

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота $(aba^{-1}b^{-1})$ — тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом $(abab^{-1})$ — бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом $(abab)$ — проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

Theorem 24.

- *Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).*
- *Пусть в m-угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.*

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать из между собой.

1.16.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 25 (без доказательства). *Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда*

1. *M – компактно, без края $\Longrightarrow M \cong S^1$*
2. *M – некомпактно, без края $\Longrightarrow M \cong \mathbb{R}$*
3. *M – компактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0,1]$*
4. *M – некомпактно, $\partial M \neq \varnothing \Longrightarrow M \cong [0,+\infty)$*

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.16.2 Сферы

Def 30. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2, вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 31. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – $\mathbb{RP}^2$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.16.3 Классификация поверхностей

Statement. *Поверхность — связное двумерное многообразие.*

Theorem 26.

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.*

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.16.4 Эйлерова характеристика

Def 32. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенныам связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 27. *Эйлерова характеристика — топологический инвариант и не зависит от разбиения.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi($бутылки Клейна$) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi($сферы с n дырками$) = 2 - n, \chi($тора с дыркой$) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- $\chi($сферы с p ручками$) = 2 - 2p$
- $\chi($сферы с q пленками$) = 2 - q$