

Конспект по матанализу I семестр
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 27, 2019

Contents

1	Непрерывные функции	3
1.1	Определения, свойства	3
1.2	Теоремы	3
1.2.1	Теоремы Вейерштрасса	3
1.2.2	Теорема о промежуточном значении	3
1.3	Степени с рациональным показателем	3
1.4	Равномерная непрерывность	3
1.4.1	Теорема Кантора	3
2	Дифференцирование	4
2.1	Определения	4
2.2	Правила дифф	4
2.3	Сходимость последовательностей	4
2.4	Первообразные	7

[section]

Chapter 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Chapter 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифф

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 2.3.1. $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, f_n \rightarrow f$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \rightarrow |f(x)| \leq M$
2. f – ограничена: $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Proof. Очевидно □

Theorem 2.3.2. $f_n \Rightarrow f, g_n \rightarrow g$ на A . Пусть $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$. Тогда $f_n g_n \Rightarrow f g$

Proof.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 2.3.3. Критерий Коши для равномерной сходимости Пусть f_n – последовательность функций на множестве A . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Proof. Необходимость.

Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $\varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 2.3.3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 2.3.3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x , перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Example. Функция на \mathbb{R} , непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 2.3.4 (Вейерштрасс). Пусть f_n - функция на множестве A .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum_0^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Proof. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

Example (Ван дер Варден). $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

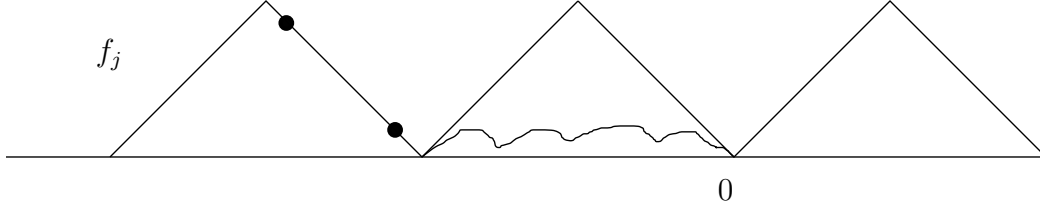


Figure 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k (\pm), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Name. Ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ – сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Example. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

Theorem 2.3.5. $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Предположим, что $f_n \rightarrow f$ поточечно. f_n дифференцируемы и $f_n \rightrightarrows g$ равномерно. Тогда f дифференцируемая на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$.

Proof. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a, b \rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad \text{с между } x, y..$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем $k, l \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - 1} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем x .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b \rangle$. $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g , если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 2.4.1 (Ньютон, Лейбниц). Если g – непрерывна, то у нее есть первообразная.

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c .

Theorem 2.4.2. Если f_1, f_2 – первообразные для g , то $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Name. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция – это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b \rangle$; Φ – отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b \rangle$, $\Phi(x)$ – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал). f – дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Example. $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ – тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, где c – некая функция на $\langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} f' &= g \\ df &= f'dx = gdx \end{aligned}$$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdx.$$

Example.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) &= \frac{1}{2} (t + \frac{\sin 2t}{2}) \end{aligned}$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям). $(fg)' = f'g + fg'$ Перепишем:

$$d(fg) = gdf + f dg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int f dg.$$

Example.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Example.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A – множество произвольной природы. $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Φ – функционал на A .

Def 5. Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

$$f \mapsto \Phi(f)$$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$