

ddhead

1 venhead

1

Конспект по алгебре за I семестр бакалавриата
Чебышёва СПбГУ (лекции Степанова Алексея
Владимировича)

Тамарин Вячеслав

December 13, 2019

Contents

Chapter 1

Линейная алгебра. Векторные пространства

1.1 Лекция 1

X - множество

$*$: $X \times X \rightarrow X$

$(x, y) \mapsto x * y$

Аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)
2. $\exists e \in X \forall a \in X : e * a = a * e = a$ (нейтральный элемент)
3. $\forall a \in X \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$ (обратный элемент)
4. $\forall a, b \in X : a * b = b * a$ (коммутативность)

Def 1. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется **полугруппой**

Def 2. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-2, называется **моноидом**

Def 3. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-3, называется **группой**

Def 4. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **коммутативной** или **абелевой группой**

Exs.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – группа
2. $(\mathbb{N}, +)$ – полугруппа

3. $(\mathbb{N}_0, +)$ – моноид

4. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ – группа

5. Пусть A – множество

$X :=$ множество биективных отображений $A \rightarrow A$

id_A – нейтральный элемент

Если $f(x) = y$, то $\tilde{f}(y) = x$ – обратная функция ($f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id_A$).

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $id_A(x) = x$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1$

Следовательно, (X, \circ) – не коммутативная группа

Designation.

- \cdot – мультипликативность, 1 , x^{-1}
- $+$ – аддитивность, 0 , $-x$
- \circ – относительно композиции, id , x^{-1}
- $*$ – абстрактная операция, e , x^{-1}

Пусть $(R, +)$ – абелева группа

Определим отображение

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Для $(R, +, \cdot)$ могут быть верны следующие аксиомы:

5. $a(b + c) = ab + ac$
 $(b + c)a = ba + ca$ (дистрибутивность)
6. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность)
7. $\exists 1_R \forall a \in R : 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ (нейтральный элемент)
8. $ab = ba$ (коммутативность)
9. $0_R \neq 1_R$
10. $\forall a \neq 0_R \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$ (обратный элемент)

Def 5. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5, называется **не ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 6. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-6, называется **ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 7. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5-7, называется **ассоциативным кольцом с единицей**.

Def 8. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-8, называется **коммутативным кольцом**.

Exs.

1. \mathbb{Z} – коммутативное кольцо
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поля
3. Рассмотрим $\mathbb{Z}_n = 0, \dots, n-1$ с операциями $+_n, \cdot_n$:
 $a +_n b = (a + b) \% n$
 $a \cdot_n b = (a \cdot b) \% n$
 Обратимые элементы:
 $ax = 1 + ny$
 $ax - ny = 1$
 Если $(a, n) = 1$, есть решение, иначе – нет. \mathbb{Z}_p – поле $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$

1.2 Лекция 2

Def 9. V – векторное пространство над полем F , если $(V, +)$ – абелева группа, задано отображение $V \times F \rightarrow V$

$(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$, удовлетворяющее аксиомам $\forall x, y \in V, \forall a, b \in F$:

5. $x \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$
6. $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$
 $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
7. $x \cdot 1_F = x$

$$A \in M_n(F), \alpha \in F$$

$$(A, \alpha)_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$$

$$(AB)\alpha = A(B\alpha)$$

Exs.

1. Множество векторов в \mathbb{R}^3

$$2. F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

3. X - множество, $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$
 $f, g : X \rightarrow F$
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ - многочлены от одной переменной t
5. V - абелева группа, в которой $\forall a \in V : \underbrace{a + a + \dots + a}_{p \in \mathbb{P}} = 0$ Тогда V - векторное пространство над \mathbb{Z}_p $k \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_k$

1.3 Лекция 3

Def 10. Алгебра A над полем F – кольцо, являющееся векторным пространством над F ("+" - операция в кольце и в векторном пространстве), такое что $(ab)\alpha = a(b\alpha) \quad a, b \in A, \alpha \in F$

Ex. $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ - не ассоциативная алгебра на \mathbb{R}

Def 11. Матрица размера $I \times J$ (I, J - множества индексов) над множеством X - это функция

$$A : I \times J \rightarrow X, \quad (i, j) \rightarrow a_{ij}.$$

Пусть определено умножение $X \times Y \rightarrow Z, \quad (x, y) \rightarrow xy$
 $(Z$ - коммутативный моноид относительно "+")

Def 12. Строка - матрица размера $\{1\} \times J$

Столбец - матрица размера $J \times \{1\}$

A - строка длины J над X

B - строка длины J над Y

Тогда произведение $AB = \sum_{j \in J} a_{1j} b_{j1} \in Z$

$x \rightarrow x_e$ - координаты вектора x

$$\underbrace{x \cdot y}_{\text{скалярное произведение}} = x_e^T \cdot y_e$$

Def 13. Транспонирование матрицы.

D - матрица $I \times J$ над X

D^T - матрица $J \times I$ над $X : (D^T)_{ij} = (D)_{ji}$

Note. Пусть в X есть элемент $0 : 0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y$. Все кроме конечного числа $a_j = 0$.

Тогда AB имеет смысл, даже когда $|J| = \infty$.

"почти все" = кроме конечного количества

Designation.

a_{i*} - i -я строка матрицы A

a_{*j} - j -й столбец матрицы A

1.3.1 Произведение матриц

A - матрица $I \times J$ над X .

B - матрица $J \times K$ над Y .

AB - матрица $I \times K$ над $Z = X \cdot Y$, $(AB)_{ik} = a_{i*} \cdot b_{*k} = \sum_{j \in J} a_{ij} \cdot b_{jk}$.

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = va, \quad v \in V, a \in F.$$

1.4 Лекция 4

Def 14. $(G, *)$, $(H, \#)$ - группа

$\varphi : G \rightarrow H$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \# \varphi(g_2)$$

Def 15. R, S - кольца

$\varphi : R \rightarrow S$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$$

Для колец с 1: $\varphi(1) = 1$

Def 16. U, V - векторные пространства над F

$\varphi : U \rightarrow V$ - линейное отображение, если:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u\alpha) = \varphi(u)\alpha$$

Note. Изоморфизм – биективный гомоморфизм.

Def 17. V - векторное пространство над полем F

v - строка элементов "длины" I над V

a - столбец "высоты" I , почти все элементы которого равны 0.

Тогда va - линейная комбинация набора v с коэффициентами.

Note. $U \subset V$

U является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V . Тогда U - подпространство V

Lemma. $U \subseteq V$

$\forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in F :$

$u_1 + u_2 \in U, u_1 \alpha \in U$ Тогда U - подпространство. Если U - подпространство в V , то пишут $U \subseteq V$.

Def 18. $v = \{v_i | i \in I\}$, где $v_i \in V \forall i \in I$

$\langle v \rangle$ - наименьшее подпространство, содержащее все v_i

Lemma. $\langle v \rangle = \{va | a - \text{столбец высоты } I \text{ над } F, \text{ где почти всюду элементы равны нулю}\} = U$

Proof. $v_i \in \langle v \rangle \Rightarrow v_i a_i \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow v_{i_1} a_{i_1} + \dots + v_{i_k} a_{i_k} \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ содержит все варианты комбинаций. $va + vb = v(a + b) \in U$

$(va)\alpha = v(a\alpha) \in U$

\Rightarrow множество линейных комбинаций – подпространство U - подпространство, содержащее $v_i \forall i \in I$

$\langle v \rangle$ – наименьшее подпространство, содержащее v_i

$\Rightarrow \langle v \rangle \subseteq U$ тогда $\langle v \rangle = U$ □

Def 19. Если $\langle v \rangle = V$, то v – система образующих пространство V

Базис – система образующих.

Designation. F^I – множество функций из I в F = множество столбцов высоты I
 ${}^I V$ – множество строк длины I

Набор элементов из V , заиндексированных множеством I – это функция $f : I \rightarrow V$
 $i \mapsto f_c$

Def 20. $v \in {}^I V$

v – линейно независим, если $\forall a \in F^I, a \neq 0 \Rightarrow va \neq 0$

Theorem 1.4.1. $v \subseteq V$ (можно считать, что v – строка длины v)

Следующие утверждения эквивалентны:

1. v – линейно независимая система образующих
2. v – максимальная линейно-независимая система
3. v – минимальная система образующих
4. $\forall x \in V \exists! a \in F^v : x = va = \sum_{t \in v} t \cdot a_t$ (почти все элементы равны 0)

Proof. (1) \Rightarrow (4) – доказали ранее (1) \Rightarrow (2)

$$x \in V \setminus v$$

$$x = va(a \in F^v)$$

$$va = x \cdot 1 = 0 \text{ – линейная зависимость набора } v \cup x$$

Т.о. любой набор, строго содержащий v , линейно зависим $\Rightarrow v$ – максимальный.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$x \in V \setminus$$

$$v \subseteq V \cup x \text{ – линейно зависим}$$

$$va + xa_x = 0$$

$$a \neq 0$$

$$\text{Если } a_x = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ?!}$$

$$\text{Значит } a_x \neq 0$$

$$va = c \cdot (-a_x)$$

$$x = v \cdot \frac{a}{-a_x} \Rightarrow v \text{ – система образующих.}$$

□

Lemma. (Цорн) Пусть \mathbb{A} – набор подмножеств (не всех) множества X .

Если объединение любой цепи из \mathbb{A} , принадлежащей \mathbb{A} , то в \mathbb{A} существует максимальный элемент.

$$M \in \mathbb{C} \text{ – максимальная, если } M \subseteq M' \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow M = M'$$

Theorem 1.4.2. (о существовании базиса) V – векторное пространства

X – линейное независимое подмножество V

Y – система образующих V

$$X \leq Y$$

Тогда существует базис Z пространства $V : X \leq Z \leq Y$

Proof. \mathbb{A} – множество всех линейно независимых подмножеств, лежащих между X и Y .

$$X \in \mathbb{A}$$

$$\mathbb{C} \leq \mathbb{A}$$

$$X \leq \cup C \in \mathbb{C} \leq Y$$

Пусть $\cup C \in \mathbb{C}$ – линейно зависимый. То есть $\exists u_1, \dots, u_2 \in / \dots$

...

Пусть v – базис V .

$$\forall x \in V \exists! x_v \in F^v : x = v \cdot x_v$$

$$v = (v_1, \dots, v_n), x_v = \text{матрица столцов альфа};$$

$$x = v_1 \alpha_1 + \dots = v \cdot x_v$$

□

1.5 Лекция 5

1.6 Лекция 6

1.7 Лекция 7

Statement.

$$U \leq W \quad \exists V \leq W : W = U \oplus V$$

Proof. Выберем базис u в U . Дополним до базиса $u \cup v$ пространства W и положим $V = \langle v \rangle$.

$$\langle u \rangle = U \quad \langle v \rangle = V \quad \langle u \cup v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle = U \oplus V = W$$

$$x \in U \cap V \Rightarrow x = ua = vb \Leftrightarrow ua - vb = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0 \quad (u \cup v - \text{линейно независимый})$$

□

Corollary.

$$u - \text{базис } U, v - \text{базис } V, U, V \leq W$$

$$u \cup v - \text{базис } W \Leftrightarrow U \oplus V$$

25.09.2019

1.8 Лекция 8

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in n^V$$

$$M_n(F) - \text{алгебра матриц размера } n \times n \text{ над } F$$

$$GL_n(F) = M_n(F)^* - \text{полная линейная группа степени } n \text{ над } F$$

Lemma.

$$v \in n^V, A \in GL_n(F)$$

$$v - \text{линейно независимый} \Leftrightarrow vA - \text{линейно независимый}$$

$$\langle v \rangle = \langle vA \rangle$$

Proof. $(vA)A^{-1} = v(AA^{-1}) = vE = v$, поэтому можно доказывать только в одну сторону.
 v - линейно независимый.

$$vAb = 0 \Rightarrow A^{-1}Ab = 0 \Rightarrow b = 0, \text{ т.е. } vA - \text{линейно независимый.}$$

$$(vA)b = v(Ab) \in \langle v \rangle, \langle vA \rangle \leq \langle v \rangle$$

□

Statement. u, v - два разных базиса пространства V .

Тогда $\exists!$ матрица $A \in GL_n(F) : u = vA$

При этом $a_{*k} = (u_k)_v \quad \forall k = 1, \dots, n$. Такая матрица обозначается $C_{v \rightarrow u}$ и называется матрицей перехода от v к u .

$$C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = E$$

Proof. Положим $a_{*k} = (a_k)_v \Rightarrow u_k = va_{*k} \Rightarrow u = vA$.

$vA = vB \Leftrightarrow A = B$ то есть A - единственно.

Далее:

$$\left. \begin{aligned} u &= vC_{v \rightarrow u} \\ v &= uC_{u \rightarrow v} \end{aligned} \right\}$$

$$uE - uC_{v \rightarrow u}C_{v \rightarrow u}$$

$$E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

□

Corollary. v - базис V

$f : GL_n(F) \rightarrow$ множество базисов пространства V

$f(A) = vA$ - биекция.

Proof.

$$|F| = q \quad \dim V = u$$

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) - \text{количество базисов}$$

\mathbb{F} - поле из q элементов.

□

Statement. Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

Corollary. u, v - базисы V

$$x = C_{u \rightarrow v} x_v$$

Proof.

$$x = ux_u = vx_v$$

$$v = uC_{u \rightarrow v}$$

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \Rightarrow x_u = C_{u \rightarrow v}x_v$$

□

Corollary. (Матричные линейные отображения)

$$L : U \rightarrow V, \quad u - \text{базис } U, v - \text{базис } V$$

Тогда $\exists!$ матрица $L_{v,u}(L_u^v : \forall x \in UL(x)_v = L_u^v x_u$

При этом $(L_u^v)_{*k} = L(u_k)_v$

Note.

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in n^U$$

$$L : U \rightarrow V$$

$$L(a) := (L(u_1), \dots, L(u_n))$$

$$L(ua) = L(u)a \quad a \in F^n$$

$$\varphi_v : V \rightarrow F^n$$

$$\varphi_v(g) = y_v \quad \forall g \in V$$

$$\varphi_v - \text{линейно} \Rightarrow (L(u)a)_v = L(u)_v a$$

$$L(u)_v := (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$$

Proof.

$$x = ux_u$$

$$L(x) = L(u)x_u$$

$$L(x)_v = L(u)_v x_u$$

Положим $L_u^v := L(u)_v$.

$$\forall x \in U : L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$\text{При } x = u_k : L(u_k)_v = L_u^v(u_k)_u = (L_u^v)_k$$

□

Note. Если $Ax = Bx \quad \forall x \in F^n$, то $A = B$

26.09.2019

1.9 Лекция 9

Exs.

1. $V = \mathbb{R}[t]_3$ - многочлены степени не более 3

$$D(p) = p' \quad V \rightarrow V$$

$$v = (1, t, t^2, t^3).$$

$$D(1) = 0, D(t) = 1, D(t^2) = 2t.$$

$$D_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$v^{(1)} = (1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}).$$

2. $V = \mathbb{R}[t]$

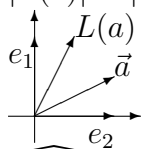
$$v = (1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots).$$

$$D(v_0) = 0, D(v_k) = v_{k-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ & 0 & 1 & \cdots \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

3. $V = \mathbb{R}^3$

$$|L(a)| = |a|$$



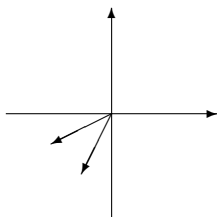
$$a, L(a) = \varphi$$

$e = (e_1, e_2)$ - базис

$$L(e_1)_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$L(e_2)_e = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$



$$a_e = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$L(a)_e = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \varphi) \\ \sin(\psi + \varphi) \end{pmatrix}.$$

$$L(a)_e = L_e \cdot a_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Statement. $L : U \rightarrow V$

$u, u' - \text{базис } U$

$v, v' - \text{базис } V$

Тогда $L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} \quad L_u^v C_{u \rightarrow u'}$

Proof.

$$L(x)_v = L_u^v x_u.$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v_1} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u.$$

$$\forall x_u \in F^{\dim U}$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_k.$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}.$$

□

Note.

$$\text{Если } U = V \quad u = v, u' = v'.$$

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

Statement. Линейное отображение однозначно определяется образом базисных векторов.

$u = (u_1, \dots, u_n) - \text{базис } U$

Для любого векторного пространства V :

$$\forall v_1, \dots, v_n = V$$

$$\exists! \text{ линейное отображение } (*)L : U \rightarrow V : L(u_k) = v_k \quad \forall k$$

Proof.

$$L(ua) := va$$

$$\forall L^* : L(ua) = L(u)a = va$$

□

При этом L - инъективно тогда и только тогда, когда v - линейно независимый
 L - сюръективно тогда и только тогда, когда v - система образующих
 L - изоморфизм тогда и только тогда, когда v - базис.

Statement. $V, \quad v, v' - \text{базис } V$

$L : V \rightarrow V - \text{линейно}$

$$L(v_k) = v'_k \quad \forall k$$

$$(L_v)_k = L(v_k)_v = (v'_k)_v$$

$$L_v = C_{v \rightarrow v'}.$$

по другому

$$(Id_{v'}^v)_k = Id(v'_k)_v = (v'_k)_v.$$

$$\text{Тогда } L_v = C_{v \rightarrow v'} = Id_{v'}^v$$

Def 21. $f : X \rightarrow Y$

$$Imf = \{f(x) \mid x \in X\}$$

$L : U \rightarrow V$ - линейное отображение

$$ImL = \{L(x) \mid x \in U\}$$

$$KerL = L^{-1}(0) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$$

Lemma.

$$ImL \leq V$$

$$KerL \leq U$$

$$\text{Пусть } L(x) = y$$

$$\begin{aligned}\forall y \in V : L^{-1} = x + KerL \\ L^{-1}(y) = \{z \in U \mid L(z) = y\} \\ x + KerL = \{x + z \mid z \in KerL\}\end{aligned}$$

1.10 Лекция 10

Theorem 1.10.1. $L : U \rightarrow V$

$$\dim U = \dim KerL + \dim ImL.$$

Proof. $u = (u_1, \dots, u_k)$ - базис $KerL$

$v = (v_1, \dots, v_m)$ Дополним базис ядра до базиса U : $u \cup v$ - базис U

$L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$ - базис образа. $\forall x \in ImL \exists y \in U : L(y) = x$.

$$y = ua + vb, \quad a \in F^k, b \in F^m$$

$$x = L(y) = \underbrace{L(u)}_{(L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)} + L(v).$$

Следовательно, $L(v)$ - система образующих.

$$L(v)c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in KerL \Rightarrow vc = ud \quad \text{для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u - два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ - линейно независимый. \square

Theorem 1.10.2. (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)

$$U, V \leq W$$

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

Proof. \triangleleft внешнюю сумму $U \oplus V$, $L(u, v) = u + v$

Тогда $ImL = U + V$. $(u, v) \in KerL \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \subset U \cap V$

$$KerL = (u, -u) \mid u \in U \cap V \cong U \cap V$$

$$\dim(U \oplus V) = \dim KerL + \dim ImL = \dim U \cap V + \dim U + V \quad \square$$

08.10.2019

1.11 Лекция 11

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Простейший базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = vx_v, \quad x = ex_e = Ex_e$$

$$eC_{e \rightarrow v} = v - \text{из столбцов } v.$$

$$C_{e \rightarrow v} = v - \text{матрица из столбцов } (v_1, \dots, v_n).$$

$$L : F^m \rightarrow F^n, \quad A \in M_{n \times m}(F) \quad L(x) = Ax$$

$$L(x)_e = L_0^e x_e, L(x)_e = L(x) = Ax = L_e^e x_e.$$

$Hom(F^n, F^m) \cong M_{m \times n}(F)$ - изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем A отождествляется с L , пишем A_u^v вместо L_u^v (A в базисе $u - v$).

Def 22. Линейный оператор из V в V называется эндоморфизмом V . Множество эндоморфизмов $V = End(V)$ - ассоциативная алгебра над f

$+, * \alpha$ - поточечные операции, $*$ - композиция.

$L, M, N \in End(V) : L \circ (M + N) = L \circ M + L \circ N$ - следует из линейности L

v - базис V , $u = \dim V$

$$\theta_v : End(V) \rightarrow M_n(F)$$

$$\theta_v = L_v$$

Statement. θ_v - биективно.

Practice. Построить обратное θ_v

Lemma. $(M \circ L)_v = M_v \circ L_v$

Statement. θ_v - изоморфизм

F - алгебра

$$EndV \cong M_n(F)$$

—

Theorem 1.11.1. $U \leq V$

$\forall L : V \rightarrow W, \quad U \leq \text{Ker} L, \exists ! \tilde{L} : V \setminus U \rightarrow W$

$$\tau : \begin{array}{ccc} V \setminus U & \longrightarrow & W \\ \uparrow \pi_U & & \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}.$$

$$\tau \circ \pi_U = L$$

L - эпиморфизм $\Rightarrow \tau$ - эпиморфизм

$\text{Ker} L = U \Rightarrow \tau$ - мономорфизм

Proof. Диаграмма коммутативна, следовательно, \tilde{L} строится однозначно. Пусть $\tilde{L}(x + U) := L(x).y \in U \in \text{Ker} L : L(x + y) = L(x) + L(y) = L(x)$ \tilde{L} задано корректно (легко проверить, что оно линейно, единственность следует из коммутативности диаграммы. $\tilde{L}(x + U) = L(x)$ - необходимо и достаточно коммутативности диаграммы.

$$\tilde{L}(x + U) = 0_W \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker} L = U \Leftrightarrow x + U = 0 + U = 0_{V \setminus U}$$

Для инъективности : $\text{Ker} \tilde{L} = 0_{V \setminus U}$

□

Theorem 1.11.2 (О гомоморфизме). $L : V \rightarrow W$

$$V / \text{Ker} L \cong \text{Im} L.$$

Proof. Возьмем $U = \text{Ker} L$ и заменим W на $\text{Im} L$ $n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle \leq \dim F^m = m$. Из линейной независимости строк следует, что $m \leq n$ Таким образом $m = n$.

n линейно независимых столбцов (строк) в n -мерном пространстве - базис и матрица A - матрица перехода $C_{e \rightarrow a}$, где $a = (a_{*1}, \dots, a_{*n})$ - набор столбцов A . Следовательно, $A \in GL_n(F)$ - множество обратных матриц. □

Def 23. Ранг:

$$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

$$rk L = \dim \text{Im} L$$

u_1, \dots, u_n - базис U , $L : U \rightarrow V$

$$rk L = rk((L(u)) = \dim \langle L(u_1), \dots, L(u_n) \rangle$$

$$A \in M_{m \times n}(F)$$

Столбцовый ранг $A : rk A = rk(a_{*1}, \dots, a_{*m})$

Строчный ранг : $rk A = rk(a_{1*}, \dots, a_{n*})$

или наибольшее количество независимых столбцов (строк).

Lemma. $A \in M_{m \times n}$

1. столбцы A линейно независимы \Leftrightarrow столбцовый $rk A = n$

2. столбцы A - система образующих в $F^m \Leftrightarrow$ столбцовый $rk A = m$

3. строки A линейно независимы \Leftrightarrow строчной $rk A = m$

4. строки A - система образующих в ${}^mF \Leftrightarrow$ строчной $rkA = n$
5. столбцы являются базисом $F^n \Leftrightarrow m = n =$ строчной rkA
6. если столбцы и строки A линейно независимы $\Leftrightarrow n = m$, строки и столбцы - базисы, A - обратима.

Proof. (6)

из (1) $\Rightarrow c.rkA = n$

$n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle$

□

10.10.2019

1.12 Лекция 12

Lemma. $L : U \rightarrow V$ - линейное отображение.

$rkL = c.L_U^V$

Для любых базисов u, v пространств U, V .

Proof.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V \\ \downarrow \varphi_u & & \downarrow \varphi_v \\ F^n & \xrightarrow{L_U^V} & F^m \end{array}$$

$A \in M_{m \times n}(F)$

$$ImA = \{Ax \mid x \in F^n\} = \{a_{*1}x_1 + \dots + a_{*n}x_n \mid x_i \in F\} = \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle.$$

$rkA = c.rkA$ - ранг оператора умножения на A . Из диаграммы $ImL \cong ImL_U^V \Rightarrow rkL = c.rkL_U^V$ □

Lemma. $A \in M_{m \times n}(F)$

$B \in GL_m(F), C \in GL_n(F)$

$rkA = rkBAC$ - строчной или столбцовый.

Proof. $L : F^n \rightarrow F^m$ - оператор умножения на A . $A = L_e^e$.

$B = C_{e \rightarrow v}, C = C_{e \rightarrow u}$, где u, v - базисы пространств F^m, F^n .

$BAC = L_v^u$ Тогда $c.rkA = c.rkBAC = rkL$. Со столбцами все хорошо. Теперь со строками: $r.rkA^T = c.rkA$

$$r.rk(BAC)^T = r.rk(A^T B^T C^T) \quad r.rk(BAC)^T = c.rkBAC$$

Тогда $r.rkA^T = r.rkC^T A^T B^T$. (Заметим, что $(B^T)^{-1} = ((B^{-1})^T)$ Следовательно, B^T, C^T - произвольные обратимые матрицы. □

Practice. $(AB)^T = B^T A^T$

Theorem 1.12.1 (PDQ- разложение, равенство базисов). $L : U \rightarrow V$ - линейное отображений,

1. Существуют базисы u, v пространств U, V такие что

$$L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размер $E = rkL$.

2. $\forall A \in M_{m \times n}(F) \exists P \in GL_m(F), Q \in GL_n(F) : A = PDQ$, где $D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $c.rkA = r.rkA$

Proof. (f_1, \dots, f_k) - базис $KerL$. Дополним до базиса на пространства $U : g \cup f = u$. Тогда (см. Теорему о ядре и образе). $L(g)$ - базис $Im L$. Дополним его до базиса v пространства V .

$$v = (L(g_1), \dots, L(g_l), v_{l+1}, \dots, v_n).$$

$$L(g_1)_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vdots

$$L(g_l)_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

\vdots

$$L(f_i) = 0 \text{ таким образом } L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Def 24. W - множество матриц-перестановок (группа Вейля).

$$a_{*i} = e_{\sigma(k)}, \quad \text{где } \sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ -биекция.}$$

$B =$ - множество обратимых верхнетреугольных матриц. (борелевская подгруппа) B^- - множество обратимых нижнетреугольных матриц.

Theorem 1.12.2 (разложение Брюа).

$$GL_n(F) = BWB = \{b_1 w b_2 \mid b_1, b_2 \in B, w \in W\}.$$

$w \in W : BwB$ - клетка Брюа.

Proof. $a \in GL_n(F)$

$$\exists b, c \in B : bac \in W.$$

Индукция по n

В первом столбце a выберем низший ненулевой элемент.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

$$ua = ()$$

Пусть a' - матрица, полученная из uav вычеркиванием i -ого столбца и j -строки. Легко видеть, что ее столбцы линейно независимы. Следовательно, a' - обратима. Тогда по ПИ $\exists b', c' : b'a'c' \in W_{n-1}$. Все получилось!

□

Proof. см конспект $GL_n(F) = BWB$

$a \in GL_n(F)$

□

Theorem 1.12.3 (разложение Гаусса).

$$GL_n(F) = WB^-B.$$

$w \in W : wB^-B$ - клетка Гаусса.

Proof. Докажем, что $\forall w \in W : BwB \subset wB^-B$

$$BWB = \bigcup_{w \in W} BwB \subset \dots$$

Lemma (1). $D = D_n(F)$ - множество обратимых диагональных матриц. $U = U_n(F)$ - множество унитарных матриц. Тогда $B = DU = UD$.

Practice. $a = \begin{pmatrix} \alpha_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \text{ если } i \neq j \Rightarrow ab = ba \Rightarrow b \in D$

Proof.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

□

Lemma (2). $U = \prod_{i < j} X_{ij}$, причем произведение берется в любом наперед заданном порядке.

Proof. Будет в теории групп

□

Designation. $w \in W : U_w := \prod_{i < j, \sigma(i) > \sigma(j)} X_{ij}$, где σ - перестановка соответствующая w . То есть $w^{-1}X_{ij}w = X_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Theorem 1.12.4 (Приведенной разложение Брюа). $B = \bigcup_{w \in W} U_w w D U$ При этом w , a также элементны из U_w, D, U определены по элементам из B из единственным образом.

Proof. □

Corollary. $BwB \subset wB^{-1}B = w(w^{-1}U_w w)B \subset wU^{-}B \subset wB^{-}B$

Proof. $BwB = U_w w B$ □

□

Statement.

$$BwB \cap Bw'B = \emptyset, \forall w \neq w'.$$

1.13 Лекция 13

15.10.2019 Доказательство теорем

1.14 Лекция 14

17.10.2019

Разложение Гаусса. Идея доказательства: $a \in GL_n(F)$, $wa \in U^{-}B$. Найдем такое w .

Def 25. Главная подматрица матрицы A - подматрица $k \times k$ стоящая в левом верхнем углу матрицы A .

Lemma. Обратимость любой главной подматрицы не зависит от умножения на U^{-} слева и на U справа.

Proof. $a^{(k)}$ - главная подматрица $k \times k$ в a .

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где $b \in U^{-}F$ Обратимость $a^{(k)}$ равносильно обратимости $ba^{(k)}$, так как b - обратима. □

Lemma. $a \in U^{-}B \Leftrightarrow$ все главные подматрицы обратимы.

Proof. Доказываем следствие влево. Индукция по n . База: $n = 1$ - очевидно
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к $a^{(n-1)}$. Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. \square

Lemma. $\forall a \in GL_n(F) \exists w \in W : \text{все подматрицы в } wa \text{ обратимы. По условию } a^{(n-1)} \text{ обратима,}$

Proof. Индукция по k . Докажем, что существует перестановка $a \in GL_n(F)$ такая, что главные подматрицы размера не более $k \times k$ обратимы.

$k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем i - строку с первой.

Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

По индукционному предположению все главные подматрицы в $a^{(k)}$ обратимы. Все столбцы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k+1} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk+1} \end{pmatrix} =$

$k+1$ $k+1$ - мерное подпространство U в ^{k+1}F . А первые k строк этой матрицы линейно независимы. $X = b_1, \dots b_k, Y = b_1, \dots b_n, \quad b_i = (a_{i1}, \dots a_{ik+1})$.

X - линейно независимый, $\langle y \rangle = U, \dim U = k+1$.

$$\exists Z : X \geq X \geq Y, \text{ где } Z - \text{ базис } U..$$

$$|Z| = k+1 \Rightarrow Z = b_1, \dots b_k, b_i, i > k..$$

Переставляем i -ю строку на $k+1$ место. У получившейся матрицы первые k главных подматриц равны главным подматрицам в a , а строки $k+1$ -й строки главной подматрицы линейно независимы. Следовательно, она независима. \square

$wa \in B^-B$. Домножая на B, B^- , получим, что хотели. \square

Theorem 1.14.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений $Ax = b$ Имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $rkA = rk(Ab)$, где (Ab) - расширенная матрица.

Proof.

$$rkA = rk(Ab) \Leftrightarrow \langle a_{*1}, \dots \rangle = \langle a_{*1}, \dots a_{*n}, b \rangle \Leftrightarrow b \in \langle a_{*1}, \dots a_{*n} \rangle \Leftrightarrow \text{система имеет решение.}$$

\square

Chapter 2

Начала теории групп

2.1 Лекция 15

Def 26. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если H – группа относительно операции, заданной в G .

$$H \leq G.$$

Lemma. $H \subset B$ H - подгруппа $\Leftrightarrow \forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$.

Statement. G, H - группы.

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \cdot g', h \cdot h').$$

Def 27. $\varphi: X \rightarrow Y, (X, *), (Y, \cdots) -$.

φ - гомоморфизм групп, если:

$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Изоморфизм - биективный гомоморфизм.

Lemma. $G, H \leq F$

1. $G \cap H = \{1\}$

2. $G \cdot H = F$

3. $\forall g \in G, h \in H : gh = hg$

Тогда $F \cong G \times H$.

Proof. $\varphi : G \times H \rightarrow F$

$$\varphi(g, h) = g \cdot h$$

$$\varphi((g, h) \cdot (g', h')) = \varphi(gg', hh') = gg'hh'.$$

$$\varphi(g, h) \cdot \varphi(g', h') = ghg'h'.$$

(1) $\Leftrightarrow \varphi$ - сюръективно.

$$\varphi(g, h) = \varphi(g', h') \Leftrightarrow gh = g'h' \Leftrightarrow g'^{-1}g = h'h^{-1} = 1 \Rightarrow g' = g, h' = h.$$

□

2.2 Лекция 16

22.10.2019

Ex. $\ln : \mathbb{R}_{>0}^* \rightarrow (\mathbb{R}, +)$

$\ln ab = \ln a + \ln b$ - гомоморфизм.

Def 28.

$\varphi G \rightarrow H$ - гомоморфизм.

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}1 = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}.$$

Lemma. $\text{Im}\varphi$ и $\text{Ker}\varphi$ - подгруппы.

Proof.

$$a, b \in \text{Ker}\varphi.$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 1 \Leftrightarrow ab \in \text{Ker}\varphi.$$

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker}\varphi.$$

□

Lemma.

$\varphi(g) = h, \quad \varphi : G \rightarrow H$ - гомоморфизм.

$$\varphi^{-1}h = \underbrace{g\text{Ker}\varphi}_{\text{левый смежный класс по ядру}\varphi} = \underbrace{\text{Ker}\varphi g}_{\text{правый}}.$$

Proof. $\varphi(x) = h = \varphi(g) \Leftrightarrow \varphi\varphi^{-1}h = 1 \Leftrightarrow \varphi(xy^{-1}) = 1 \Leftrightarrow xg^{-1} \in \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow x \in \text{Ker}\varphi g$

□

Def 29. $H \leq G$

H называется нормальной подгруппой, если $gH = Hg \quad g \in G. (H \trianglelefteq G)$

Note. $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G \Leftrightarrow g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall g \in G$

Lemma. $H \leq G$

$$g_1H \cap g_2H \neq 0 \Leftrightarrow g_1H = g_2H.$$

Proof. $x \in g_1H \cap g_2H \Rightarrow x = g_1h_1 = g_2h_2, \quad h_1, h_2 \in H$. Тогда $g_1 = g_2(h_2h_1^{-1}) \Rightarrow g_1H = g_2(h_2h_1^{-1})H$. \square

Corollary. $G = \bigsqcup_{g \in X} gH$, где X - множество представителей левых смежных классов по

$$h. \\ g_1 \stackrel{H}{\sim} g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$$

Lemma.

$$|g_1H| = |g_2H|, \quad \forall g_1, g_2 \in G, H \leq G.$$

Proof.

$$\left(\begin{array}{c} g_1H \rightarrow g_2H \\ x \mapsto g_2g_1^{-1}x \end{array} \right).$$

Обратная $y \mapsto g_1g_2^{-1}y$ \square

Theorem 2.2.1 (Лагранж). G - конечна группа. Тогда $|G| = |H||G : H|$, где $|G : H|$ - количество левых смежных классов G по H . $|G : H|$ - индекс H в G .

Proof. Из прошлой леммы и следствия \square

Corollary. Если $p = |G| \in \mathbb{P}$, то $\forall g \in G \setminus 1 : G = \{1, g, \dots, g^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}_p$

Proof. $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G = \langle g \rangle$.

$|\langle g \rangle|$ делит p и больше единицы, так как содержит единицу и $g \neq 1$. Следовательно, $|\langle g \rangle| = p$.

Докажем, что все элементы $1, g, \dots, g^{p-1}$ различны. Рассмотрим $0 \leq k, l \leq p-1$. Пусть $g^k = g^l \Rightarrow g^{k-l} = 1$. При $k-l \neq 0$, $g^n = g^{m(k-l)+r} = g^r, \quad r < k-l \leq p-1$. Тогда бы $\{1, g, \dots, g^{k-l-1}\} = \langle g \rangle$. Из чего следует $|\langle g \rangle| < p$. Противоречие.

Рассмотрим $k \in [0, p-1]$. $g^p = g^k \Leftrightarrow g^{p-k} = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow g^p = 1$.

Теперь проверим изоморфность. $\varphi : \mathbb{Z}_p \rightarrow G, \varphi(k) = g^k$ \square

Def 30. Группа, порожденная одним элементом, называется циклической.

Statement. Любая циклическая группа изоморфна \mathbb{Z} или \mathbb{Z}_n .

Proof. $G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Разберем два случая:

$$1. \quad g^m \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow g^m \neq 1 \quad \forall m \neq 0.$$

$$\varphi \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad \varphi(m) = g^m.$$

$$\varphi(m+k) = g^{m+k} = g^m g^k = \varphi(m)\varphi(k).$$

2. Пусть n - наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$.

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad \varphi(m) = g^m \text{ сюръективно ..}$$

$$g^m = 1 \Leftrightarrow g^{nk+r} = 1 \Leftrightarrow g^r = 1 \Rightarrow r = 0$$

$$\text{Ker}\varphi = \{m \mid g^m = 1\} = n\mathbb{Z}.$$

□

Def 31. Порядок $g \in G$ - наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$. $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$

Statement (из теоремы Силова). $|G| = p^m$, $p \nmid m$. Тогда $\exists H \leq G : |H| = p^k \forall k \in H \setminus 1$.
 $\text{ord}(h \mid p^k)$, следовательно, $h^{p^l} = 1 \Rightarrow (h^{p^{l-1}})^p = 1$

2.3 Лекция 17

24.10.2019

G - группа.

Def 32. $S \subseteq G$

$\langle S \rangle$ - наименьшая подгруппа содержащая S .

Statement. $\langle S \rangle = \{S_1^{n_1} \cdot \dots \cdot S_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, S_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}$, для абелевой : $s_i \neq s_j$ при $j \neq i$.

Def 33. $s^g := g^{-1}sg$

Note. $(s^g)^h = s^{gh}$

$h(gS) = {}^h g S$

Property.

$$1. (s_1 s_2)^g = s_1^g s_2^g$$

$$2. (s^g)^{-1} = (s^{-1})^g$$

$s \mapsto s^g$ - автоморфизм G .

Def 34. $H \leq G$

$$H^G = \langle h^g \mid h \in H, g \in G \rangle - \text{нормальное замыкание } H \text{ в } G.$$

Нормальное замыкание равно наименьшей нормальной подгруппе в G , содержащей H .

$\langle S \rangle^G$ - наименьшая нормальная подгруппа, содержащая S .

$s^g = g^{-1}sg$ - сопряженный с s при помощи g .

$$H^g = \langle h^g \mid h \in H \rangle - \text{подгруппа, сопряженная с } H \text{ при помощи } g.$$

Def 35. $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$ – коммутатор элементов a, b .

Note. $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$

Statement. $\varphi : G \rightarrow A$ – гомоморфизм в абелеву группу.

$$\varphi([g, h]) = 1$$

Тогда $[G, G] = \langle [g, h] \mid h, g \in G \rangle \subseteq \text{Ker} \varphi$ – коммутант G .

$$[g, h]^f = [g^f, h^f]$$

Statement. $[a, b]^{-1} = [a, b]$

Def 36. Центр группы – $\text{Center}(G) = Z(G) := \{c \in G \mid cg = gc \forall g \in G\}$

Designation.

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$ – множество левых смежных классов.

$H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\}$ – множество левых смежных классов.

$$H \trianglelefteq G \quad (H^g = H \forall g \in G)$$

Def 37. Фактор-группа G/H – множество смежных классов по H с операцией $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$.

корректность определения.

$$g'_1 \in g_1H \Rightarrow g'_1h_1.$$

$$g'_2 \in g_2H \Rightarrow g'_2h_1.$$

$$g_1 \mid + g_2 \mid = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2g_2^{-1} = (g_1g_2)(g_2^{-1}h_1g_2)h_2 \in g_1g_2H.$$

□

Def 38. $\pi_H : G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$

π_H – эпиморфизм, $\text{Ker} \pi_H = H$

Theorem 2.3.1 (универсальное свойство факторгруппы). $H \trianglelefteq G$

Для любого гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow F$, такого что $H \leq \text{Ker} \varphi \exists! \bar{\varphi} : G/H \rightarrow F$ коммутативна для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_H} & G/H \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \exists! \bar{\varphi} \\ F & & F \end{array}$$

Theorem 2.3.2. $\varphi G \rightarrow F$

$$G/\text{Ker} \varphi \cong \text{Im} \varphi.$$

Proof. Заменим F на $Im\varphi$.

$$\varphi' \rightarrow Im\varphi \quad Ker\varphi' = Ker\varphi.$$

По прошлой теореме существует единственное:

$$\hat{\varphi}: \begin{array}{ccc} G/Ker\varphi & \rightarrow & Im\varphi \\ \uparrow \pi & & \uparrow \varphi' \\ G & & G \end{array}.$$

φ - сюръективно. Следовательно, φ' - сюръективно.

□

$gKer\varphi \in Ker\hat{\varphi} \Leftrightarrow \hat{\varphi}(gKer\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi(g) = 1 \Leftrightarrow gKer\varphi = Ker\varphi = 1_{G/Ker\varphi}$. Следовательно, $\hat{\varphi}$ - инъективно.

Ex. $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \varphi(x) = x \mod n$.

$$Ker\varphi = n\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

2.4 Лекция 18

Ex.

$$U_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим

$$U_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{a \mid a_{ij} = 1, a_{ij} = 0, \forall i \neq j, j - i < k\}.$$

Матрица трансвекций:

$$t_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $U_n^{(k)}(F) = U_n^{(k)} = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j - i \geq k, \alpha \in F \rangle$ - группа.

Lemma. $U_n^{(k)} \setminus U_n^{(k-1)} \cong \underbrace{F \times \dots \times F}_{n-k}, \quad F = (F, +)$. Проверим, что есть гомоморфизм,

и применим теорему о гомоморфизме.

Proof.

$$\varphi : U_n^k \rightarrow F^{n-k}, \quad \varphi(a) = (a_{i-k+1}, \dots, a_{n-k+1})^T.$$

Заметим, что φ - сюръективна, $\varphi^{-1}(e) = U_n^{k+1}$.

$$a, b \in U_n^{(k)}, \quad (a, b)_{i-k+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{i-k+1+j} = b_{i-k+1} + a_{i-k+1}.$$

Тогда $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Следовательно, φ - гомоморфизм. □

Def 39. $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ - коммутатор.

$H, K \leq G$, $[H, K] := \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$ - коммутант.

Statement. $[h, k]^g = [h^g, k^g] \Rightarrow [G, G] \trianglelefteq G$.

Statement. $\varphi : G \rightarrow A$ - гомоморфизм.

A - абелева $\Rightarrow [G, G] \subseteq \text{Ker} \varphi$.

Proof.

$$\varphi([g, h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1.$$

Тогда

$$[g, h] \in \text{Ker} \varphi, \quad \forall g, h \in G.$$

Из этого следует, что $[G, G] \subseteq \text{Ker} \varphi$. □

Corollary. $[U_n^{(k)}, U_n^{(k)}] \leq U_n^{(k+1)}$

Lemma. $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] = U_n^{(m+k)}, (\text{если } l \geq n, \text{ то } U_n^l := e)$.

Proof.

$$[t_{ij}(\alpha), t_{jh}(\beta)] = t_{ih}(\alpha\beta), \quad i, j, h - \text{различны.}$$

$\forall i, h : h - i \geq m :$

$$\exists j : j - i \geq k, h - j \geq m.$$

Следовательно, любая образующая (и сама группа) содержится: $U_n^{(m+k)} \subseteq [U_n^{(m)}, U_n^{(k)}]$.

В обратную сторону:

$$\begin{aligned} [xy, z] &= xyz y^{-1} x^{-1} z^{-1} = x(yzy^{-1} z^{-1} z x^{-1} z^{-1} = \\ &= x[y, z] x^{-1} x z x^{-1} z^{-1} = [y, z]^{x^{-1}} \cdot [x, z] \end{aligned}$$

Заметим, что

$$[t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] = e, \quad \text{если } j \neq l, h \neq i.$$

Тогда

$$t_{ij}(\alpha) \in U_n^{(k)}, \quad t_{hk}(\beta) \Rightarrow [t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] \in U^{(m+k)n}.$$

Посчитаем

$$\underbrace{[t_{ij}(\alpha), t_{li}(\beta)]}_{j \neq l} = [t_{li}(\beta), t_{ij}(\alpha)]^{-1} = t_{lj}(\beta\alpha)^{-1} = t_{lj}(-\beta\alpha).$$

Так как $U_n^{(k+m)}$ - нормальная подгруппа, то есть трансвекцию во включении 2.4 можно заменить на произведение трансвекций, то есть на любые элементы $U_n^{(k)}, U_n^{(m)}$. Доказали обратное утверждение. □

2.5 Лекция 19

2.5.1 Поговорим о коммутаторах

Lemma.

$$H = \langle X \rangle \leq G = \langle Y \rangle.$$

Тогда

$$H \trianglelefteq G \iff x^y \in H \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Proof. В правую сторону очевидно (по определению), обратно: нужно доказать, что $h^g \in H \quad \forall h \in H, g \in G$. Разложим $g = y_1 \cdot \dots \cdot y_m$, $y_i = U \cup Y^{-1}$.

Индукция по m . При $m = 0 : g = 1 \wedge h^1 = h \in H$.

Переход: $m \geq 1$. По ИП $h^{y_1 \dots y_{m-1}} \in H$, $h = x_1 \dots x_n$, $x_i \in X \cup X^{-1}$.

$$h^y = (h^{y_1 \dots y_{m-1}})^y = x_1^{y_m} \dots x_n^{y_m}.$$

$x_i \in X \Rightarrow x_i \in H$ по условию.

$$x_i \in X^{-1} \Rightarrow ((x_i)^{-1})^{y_m} = ((x^{-1})^{y_m})^{-1} \in H.$$

□

Note. В определении нормальной подгруппы вместо h^g также можно написать $[g, h]$, так как для $h \in H, g \in G$

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = h^{g^{-1}}h \in H \iff h^{g^{-1}} \in H.$$

g^{-1} можно заменить на g .

Аналогично в лемме можно заменить x^y на $[x, y]$.

Property (Формулы для коммутаторов). 1. $[x, y] = [y, x]^{-1}$

$$2. [xy, z] = {}^x[y, z] \cdot [x, z]$$

$$3. [x, y]^z = [x^z, y^z]$$

Lemma. $H, K \leq G$, $[H, K] \trianglelefteq \langle H \cup K \rangle$

$$h \in H, k \in K, x \in H \text{ (для } x \in K \text{ аналогично)}.$$

$$[h, k]^x = {}^{x^{-1}}[h, k] = [h^{-1}h, k]^{-1} \cdot [x^{-1}, k]^{-1} \in [H, K].$$

2.5.2 Возвращаемся к матрицам

$$U_n^{(k)}(F) = U_n^{(k)} = \{a \in M_n(F) \mid a_{ii} = 1, a_{ij} \forall i \neq j, j - i < k\} = \langle t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in F, j - i \geq k \rangle.$$

Lemma. $U_n^{(k)} \trianglelefteq U_n = U_n^{(1)}$

Proof. Докажем, что $a = [t_{ij}(\alpha), t_{hl}(\beta)] \in U_n^{(k)} \quad \forall j - i \geq k. \quad l > h$

Первый случай $i \neq h, i \neq l \Rightarrow a = e \in U_n^{(k)}$.

Второй случай $j = h \Rightarrow i \neq j : \quad a = t_{il}(\alpha\beta), l - i \geq k + 1$. Тогда $a \in U_n^{(k+1)} \leq U_n^{(k)}$.

Третий случай $j \neq h, i = l : \quad a = [t_{hj}(\beta), t_{ij}(\alpha)]^{-1} = t_{hj}(\beta\alpha)^{-1} = t_{hj}(-\beta\alpha). \quad j - h \geq k + 1 \Rightarrow t_{hj}(-\beta\alpha) \in U_n^{(k+1)}.$ \square

Lemma. Пусть \preceq - отношение линейного порядка на $P = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

$$U_n(F) = \left\{ \prod_{(i,j) \in P} t_{ij}(\alpha_{ij}) \mid \alpha_{ij} \in F \right\}.$$

Note. $H \trianglelefteq G, \quad x, y \in G : \quad xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{H}$

Proof. Рассмотрим элемент $h \in U_n(F)$. Докажем по индукции (по k), что

$$h \equiv \prod_{\substack{(i,j) \in P \\ 0 \leq j - i < k}} t_{ij}(\alpha_{ij}) \pmod{U_n^{(k)}}.$$

При $k = 1$ утверждение очевидно, доказывать нечего.

Переход: $k - 1 \rightarrow k$

По предположению индукции

$$h \equiv \prod_{0 < j - i < k - 1} t_{ij}(\alpha_{ij}) \pmod{U_n^{(k-1)}} = \prod_{0 < j - i < k - 1} t_{ij}(\alpha_{ij}) \cdot \prod_{j - i = k - 1} t_{ij}(\alpha_{ij}) U_n^{(k)}$$

Так как коммутатор $[u, t_{i \ i+k-1}(\alpha)] \in U_n^{(k)} \quad \forall u \in U_n$. То есть $[u, t_{i \ i+k-1}(\alpha)] \equiv 1 \pmod{U_n^{(k)}}$. Это равносильно

$$ut_{i \ i+k-1}(\alpha) \equiv t_{i \ i+k-1} \cdot u \pmod{U_n^{(k)}}.$$

Получаем

$$h \equiv \prod_{0 < j - i < k} t_{ij}(\alpha_{ij}) \pmod{U_n^{(k)}}.$$

\square

Введем обозначения: w - матрица перестановки.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bullet \end{pmatrix} \in D.$$

$$B_n = D_n U_n = U_n D_n \quad (\forall d \in D_n : U_n^d = U_n).$$

$B_n w B_n = U_n D_n w B_n$, где $U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in F, j > i, t_{ij}(\alpha)^w \in U_n^- \rangle$ - ниже треугольные.

$$U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j > 1, \alpha \in F, t_{ij}(\alpha)^w \in U_n \rangle.$$

Corollary. Матрица U_n представляется в виде произведения трансвекций в любом порядке. $U_n = U_w \cdot \bar{U}_w$

Proof. □

Corollary (приведенное разложение Брюа). $B_n w B_n \subseteq w B_n^- B_n$

Proof. $B_n w B_n = U_n w B_n = w U_w w^{-1} \bar{U}_w w B_n = w \underbrace{U_w^w}_{\subseteq U_n^-} \underbrace{\bar{U}_w^w B_n}_{\subseteq U_n} \subseteq w U_n^- B_n = w B_n^- B_n$ □

2.6 Лекция 20

2.6.1 Симметрическая группа

Def 40 (Перестановка). $\sigma \in S_n \iff \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ Табличная запись перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j \neq i_k (j \neq k).$$

Циклическая запись перестановки:

$$\tau = (j_1, \dots, j_n) \iff \tau(j_1) = j_2, \tau(j_2) = j_3, \dots, \tau(j_{n-1}) = j_n, \tau(j_n) = j_1, \quad \tau(i) = i, \forall i \neq j_k.$$

Def 41. $(j_1 \dots j_n)$ и $(k_1 \dots k_m)$ независимы, если $j_h \neq j_l \quad \forall h, l$.

Lemma. Любая перестановка равна произведению независимых (композиции) циклов.

Def 42. Циклический (цикленный) тип перестановки – набор из длин независимых циклов, в произведение которых раскладывается перестановка.

Note. В определении слово "набор" подразумевает мультимножество, то есть порядок не важен, но элементы повторяются.

Ex. $(12)(345) \in S_6$ записывают $2 + 3$.

Lemma.

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)).$$

Следовательно, сопряжение не меняет циклический тип.

Proof. $\sigma(i_1 \dots i_k) \sigma^{-1}(\sigma(t_j)) = \sigma \circ (i_1 \dots i_k) \sigma(i_{l+1 \bmod m})$, где $\bmod m$ - почти модуль (вместо 0 будет m). \square

Def 43. Отношение на группе G :

$$x \sim_c y \Leftrightarrow \exists z : x = y^z.$$

$$x = y^z \wedge y = ab \Rightarrow x = (a^b)^z = a^{bz}.$$

Класс эквивалентности " \sim_c " - класс сопряженных элементов.

Theorem 2.6.1. Класс сопряженных элементов в S_n состоит из всех перестановок фиксированного циклического типа.

Proof. Следует из леммы 2.6.1 \square

Ex. Рассмотрим группу S_4 и перестановки циклического типа $2 + 2$:

$$\begin{aligned} &(12)(34) \\ &(13)(24) \\ &(14)(32) \end{aligned}$$

$$\sigma(12)(34) \sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$$

Еще есть нейтральный класс e и 2, 3, 4. Двумерная группа Клейна

$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

- единственная нормальная подгруппа в S_n для любого n , индекс которой более 2.

Practice. Найти S_4/K_4 . Там 6 элементов.

Statement. $\text{ord}(ab) \mid \text{НОК}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$.

Порядок перестановки равен НОКу порядков независимых циклов.

2.7 Лекция 21

2.7.1 Продолжаем возиться с перестановками. Четность.

Def 44 (Инверсия). $\sigma \in S_n$.

Инверсия в σ - пара $(i, j) : i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$.

Ex. Четыре инверсии:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Def 45 (Четность перестановки).

$$\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\sigma \mapsto$ количество инверсий по модулю 2.

Def 46. Транспозиция – цикл длины 2.

$$\tau(i) = \tau(j), \tau(j) = \tau(i), \tau(k) = k.$$

Lemma. Любая перестановка σ раскладывается в произведении транспозиций соседних индексов.

$$S_n = \langle (12), (23) \dots (n-1 \ n) \rangle.$$

Proof. Индукция по количеству инверсий I в $\sigma \in S_n$.

База: $I = 0$ Это $\sigma = id$.

Переход: $I > 0$. Заметим, что

$$\exists i : \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

Тогда рассмотрим $\tau = \sigma \circ (i, i+1)$.

$$\tau(i) = \sigma(i+1) < \tau(i+1) = \sigma(i).$$

Так как $\tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k \notin \{i, i+1\}$, количество инверсий стало на одну меньше, чем количество инверсий в σ . Теперь по предположению индукции полученная перестановка раскладывается, а тогда и σ раскладывается. \square

Lemma. $\tau = \sigma(i \ i+1) \Rightarrow |I(\tau) - I(\sigma)| = 1$

Lemma. Если $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \dots \tau_k$, $\forall i : \tau_i$ - транспозиция соседних индексов, то

$$\varepsilon(\sigma) = k \pmod{2}.$$

Theorem 2.7.1. $\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - гомоморфизм группы.

Proof.

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_1 \cdot \dots \tau_k \\ \rho &= \tau_{k+1} \cdot \dots \tau_n \quad \forall i : \tau_i = (j \ j+1). \\ \sigma \cdot \rho &= \tau_1 \cdot \dots \tau_n \end{aligned}$$

Проверим требуемые свойства:

$$\varepsilon = k \pmod{2}, \quad \varepsilon(\rho) = n - k \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\sigma\rho) = m \pmod{2} = \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho) \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\rho^{-1}\sigma\rho) = -\varepsilon(\rho) + \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho)$$

$$\varepsilon((i_1, \dots i_k)) = \varepsilon((1, \dots k)) = k - 1 \pmod{2} \quad \square$$

Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. \mathbb{Z}_n^* - множество обратимых элементов.

$x \in \mathbb{Z}_n$ - обратимо тогда и только тогда, когда $\gcd(x, n) = 1$.

$\varphi|\mathbb{Z}_n^*|$ - количество чисел от 1 до $n-1$ взаимно простых с n . Из теоремы Лагранжа очевидно следует, что:

$$x^{\varphi(n)} \pmod{n} = 1.$$

Statement. A – абелева группа. $a, b \in A$, $\text{ord}(a) = m$, $\text{ord}(b) = n$, $h = \text{lcm}(m, n)$

$$(ab)^k = a^k b^k = (a^m)^x (b^n)^y = 1.$$

Тогда $\text{ord}(ab) \mid k$.

Lemma. $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\} \Rightarrow \text{ord}(ab) = \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$

Proof.

$$(ab)^l = 1 \Rightarrow \underbrace{a^l}_{\in \langle b \rangle} = \underbrace{b^{-l}}_{\in \langle b \rangle} = 1.$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \text{ord}(a) \mid l \\ \text{ord}(b) \mid l \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) \mid l.$$

□

Corollary.

$$a \in A, b \in B, \quad A, B \leq A \times B.$$

Тогда $\text{ord}(ab) = \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$

Corollary.

$$\text{lcd}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1.$$

Тогда $\text{ord}(ab) = \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$

Proof. $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = h$

$$h \mid |\langle a \rangle| \wedge h \mid |\langle b \rangle| \Rightarrow h \mid \gcd(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1 \Rightarrow h = 1.$$

Следовательно, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$.

□

Corollary. Порядок перестановки равен наибольшему общему делителю порядков независимых циклов, в произведение которых она раскладывается.

Def 47 (Экспонента (показатель)). $\exp(A)$ – наименьшее натуральное число, такое что $a^n = 1 \quad \forall a \in A$.

Lemma. $\exp(A) = \text{lcm}_{a \in A}(\text{ord}(a))$

Theorem 2.7.2. A – абелева группа. $\exp(A) < \infty$.

Тогда $\exists a \in A : \text{ord}(a) = \exp(A)$

Proof. Разложим экспоненту на простые множители:

$$\exp A = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}, \quad \forall i \in [1, m] : p_i \in \mathbb{P}, k_i \in \mathbb{NN}.$$

Так как $\exp(A) = \text{lcm}_{x \in A}(\text{ord} x)$, существует $\forall i \in [1, m] x_i : p_i^{k_i} \mid \text{ord}(x_i)$.

$$\text{ord} x_i - p_i^{k_i} \cdot n_i = \text{ord}(x_i^{n_i}) = p_i k_i.$$

Так как порядки всех $x_i^{n_i}$ взаимно просты, то

$$\text{ord}\left(\prod_{i=1}^m x_i^{n_i}\right) = \prod_{i=1}^m \text{ord}(x_i^{n_i}) = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i} = \exp(A).$$

□

2.8 Лекция 22

Statement. $\varphi : G \rightarrow h$ -гомоморфизм. $g \in G$. Тогда $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord} g$.

Proof. Рассмотрим сужение $\tilde{\varphi} : \langle g \rangle \rightarrow \varphi(\langle g \rangle) = \langle \varphi(g) \rangle$.

$$\langle \varphi(g) \rangle \cong \langle g \rangle / \text{Ker} \tilde{\varphi}.$$

$$\text{ord} \varphi(g) = |\langle \varphi(g) \rangle| = \frac{|\langle g \rangle|}{|\text{Ker} \tilde{\varphi}|}.$$

Note. Можно использовать одну из доказанных лемм, тогда решение будет проще. □

Theorem 2.8.1. $p \in \mathbb{P}$

$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$ - циклическая, если $p \neq 2$ или $k \leq 2$. Иначе $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^* \cong C_2 \times C_{2^{k-2}}$

Proof. Обозначим $G = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$

$$|(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1).$$

Рассмотрим множество чисел вида $1+px$. Они не делятся на p . Чтобы эти числа были меньше $|G^*|$, ограничим x .

$$H = \{1+px \mid x \in \{0, \dots, p^{k-1}-1\}\}.$$

Statement. H - подгруппа.

$$(1+px)(1+py) = 1+pz \in H.$$

Если

$$(1+px)(1+py) \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

$$a+apx+py+p^2xy \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Следовательно, $a = 1+pz$. Обратный элемент:

$$(1+px)^{-1} = (1+pz+py) \in H.$$

$$|H| = p^{k-1}, |G/H| = p-1 \text{ - циклическая (докажем позже).}$$

$$\exists b \in G : \text{ord}(bH) = p-1, \quad \pi(b) = bH, \pi : G \rightarrow G/H.$$

То есть $p-1 \mid \text{ord} b$. Получаем $\exists l \in \mathbb{N} : \text{ord} b^l = p-1$. (или можно сказать, $p-1 \mid \exp(G)$).

По следствию из теоремы Лагранжа $|H| \cdot p \cdot p^{k-1} \wedge 1+p \in H \Rightarrow (1+p)^{p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}$.
Тогда $\text{ord}(1+p) \mid p^{k-1}$.

Осталось доказать, что

$$(1+p)^{p^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Будем доказывать по индукции. Для $k = 2$ - очевидно. При $k > 2$:

$$(1+p)^{p^{k-3}} = 1 + p^n x, \quad p \nmid p.$$

По предположению индукции $1 \leq n < k - 1$.

$$(1+p)^{p^{k-2}} = \left((1+p)^{p^{k-3}}\right)^p = (1+p^n x)^p = 1 + p \cdot p^n + \sum_{i=2}^p C_p^i p^{ni} x^i \equiv 1 + p^{n+1} x + p^{n+2} y \pmod{p^{n+2}},$$

так как

$$(1+p)^{p^{k-2}} = 1 + p^{n+1} \underbrace{(x + py)}_{\text{не делится на } p}.$$

$$n+1 < k \Rightarrow p^k \nmid (1+p)^{p^{k-2}} - 1$$

Remark.

$$C_p^i = \frac{p(p-1)!}{(p-1)! i!} \vdots p.$$

Remark. Если $p = 2$, то при $i = 2, n = 1$

$$C_p^i = 1 \Rightarrow C_p^i p^2 \not\vdots p^3.$$

Поэтому для $p = 2$ эти рассуждения не работают.

Теперь разберем случай $p = 2$.

$$|G| = 2^{k-1}, k \geq 3.$$

1. Любой элемент имеет порядок не более 2^{k-1} , то есть $(1+2x)^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}$.

Индукция по k . База $k = 3$.

$$(1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 1 + 4x(x+1) \equiv 1 \pmod{2^3},$$

так как либо x , либо $x+1$ четное.

Переход. По индукционному предположению

$$(1+2x)^{2^{k-3}} = 1 + 2^{k-1} y.$$

Дальше

$$(1+2x)^{2^{k-2}} = (1+2^{k-1} y)^2 = 1 + 2^k y + 2^{2k-2} y^2 \equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Доказано.

$ord_G 5 = 2^{k-2}$, то есть

$$5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Индукция по k . База $k = 3$.

$$5 \not\equiv 1 \pmod{8}.$$

Переход: по индукционному предположению

$$5^{2^{k-4}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k-1}}.$$

$$5^{2^{k-1}} = 1 + 2^n z, \quad 1 < n < k-1, \quad 2 \nmid z.$$

Remark. $n > 1$, так как $5 \equiv 1 \pmod{2^2}$

Тогда

$$\begin{aligned} 5^{2^{k-3}} &= (1 + 2^n \cdot z)^2 = 1 + 2 \cdot 2^n \cdot z + 2^{2n} \cdot z^2 = \\ &= 1 + 2^{n+1}(z + z^2 \cdot 2^{n-1}) \not\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

□

2.9 Лекция 23

2.9.1 Теорема о гомоморфизме для колец

Note. Воспоминания R, R' – кольца с 1 (не обязательно коммутативные).

$\varphi : R \rightarrow R'$ – гомоморфизм, если

$$\begin{aligned} \varphi(r + s) &= \varphi(r) + \varphi(s) \\ \varphi(r \cdot s) &= \varphi(r) \cdot \varphi(s) \\ \varphi(1) &= 1 \end{aligned}$$

$$Im \varphi = \{\varphi(r) \mid r \in R\} \text{ – подкольцо в } R'.$$

$$Ker \varphi = \{r \mid \varphi(r) = 0\} \text{ – аддитивная подгруппа в } R.$$

Def 48. I – аддитивная подгруппа в R . I называется двусторонним (правым, левым) идеалом в R тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in R, t \in I : ar, ra \in I \quad (\text{соответственно для правого и левого } ra \in I, ar \in I).$$

Lemma. $Ker \varphi$ – двусторонний идеал.

Def 49. I – двусторонний идеал, R – кольцо. Аддитивная факторгруппа R/I является кольцом относительно операции $(r + I)(s + I) = rs + I$

Proof. Если $x, y \in I : (r + x)(s + y) = rs + \underbrace{xs + sy + xy}_{\in I} \in rs + I$ □

Ex. $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$$4\mathbb{Z} \stackrel{\text{как множества}}{=} (0 + 2\mathbb{Z}) \cdot (0 + 2\mathbb{Z}) \stackrel{def}{=} 0 + 2\mathbb{Z}.$$

Designation. $\pi : R \rightarrow R/I \quad \pi(r) = r + I$

Theorem 2.9.1. Универсальное свойство I – идеал в R . $\varphi R \rightarrow R', \quad I \subseteq \text{Ker} \varphi \exists! \psi : R/I \rightarrow R' :$

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R' \\ \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\ R/I & & \end{array}$$

– коммутативна. $\text{Ker} \varphi = I \Rightarrow \psi$ – инъективна. φ – сюръективна $\Rightarrow \phi$ – сюръективна.

Note. Далее считаем кольца коммутативными.

Def 50. $X \subseteq R$ – кольцо. Идеал, порожденный X – наименьший идеал, содержащих X . Он равен

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Обозначается: $\sum_{x \in X} xR = \langle X \rangle_R$

$xR = (x)$ – главный идеал, порожденный x .

Ех. В \mathbb{Z} любой идеал главный.

$$I \subseteq \mathbb{Z},$$

$$0 < r < I, \quad r \leq |s| \forall s \in I.$$

Рассмотрим $x \in I$.

$$x = rs + y, \quad 0 \leq y < r.$$

$$y = x - rs \in I.$$

Так как r – наименьший, то $y = 0$.

Ех.

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}) = 2 \cdot 2.$$

Идеал, порожденный $1 + \sqrt{-3}$ и 2 ($(1 + \sqrt{-3})R + 2R$), не является главным идеалом.

2.9.2 Комплексные числа

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

$$i := x + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x].$$

$$i^2 + 1 = x^2 + 1 + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x] = 0_{\mathbb{C}} \implies i^2 = -1.$$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ – инъективное отображение. Отождествляем $r \in R \longleftrightarrow r + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x]$ и считаем, что $\mathbb{R} = \mathbb{C}$.

$$p \in \mathbb{R}[x]$$

$$p = (x^2 + 1) \cdot f + (a + bx) \in a + bx + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x].$$

$$p + (x^2 + 1)\mathbb{R}[x] = a + bi.$$

Таким образом

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc).$$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$\forall w, z \in \mathbb{C} :$$

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} . \\ \overline{\bar{z}} &= z\end{aligned}$$

$\bar{} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ - автоморфизм.

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z$$

\mathbb{C} - векторное пространство над \mathbb{R} с базисом $\{1, i\}$

2.10 Лекция 24

2.10.1 Окончание комплексных чисел

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x] / (x^2 + 1).$$

$$i := x + x^{(2+1)}\mathbb{R}[x]$$

Любое комплексное число представляется в виде $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, сопряжение: $\overline{a + bi} = a - bi$. Умножение на сопряженное: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Сложение с сопряженным: $(a + bi) + (a - bi) = 2a$. Получили, что $z \cdot \bar{z}, z + \bar{z} \in \mathbb{R}$.

Statement. *Существует ровно два автоморфизма на комплексных числах, оставляющие вещественные на месте.*

Proof. $f \in \mathbb{R}[x]$.

$$f(\varphi(i)) = \varphi(f(i)), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

так как $\varphi(\alpha^2) = \varphi(\alpha)^2$

$\varphi(a\alpha^n) = a\varphi(\alpha)^n, a \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = x^2 + 1$, $f(i) = 0$. $f(\varphi(i)) = \varphi(f(i))$, то есть корень переходит в корень. Значит, нетривиальный только один. А второй — тривиальный. \square

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

$$\operatorname{Arg} z := \alpha \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}.$$

Можно выразить через аргумент:

$$a = |z| \cdot \cos \alpha$$

$$b = |z| \cdot \sin \alpha$$

$$z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) - \text{тригонометрическая формула}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z}, & a > 0 \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z}, & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(b), & a = 0 \end{cases} .$$

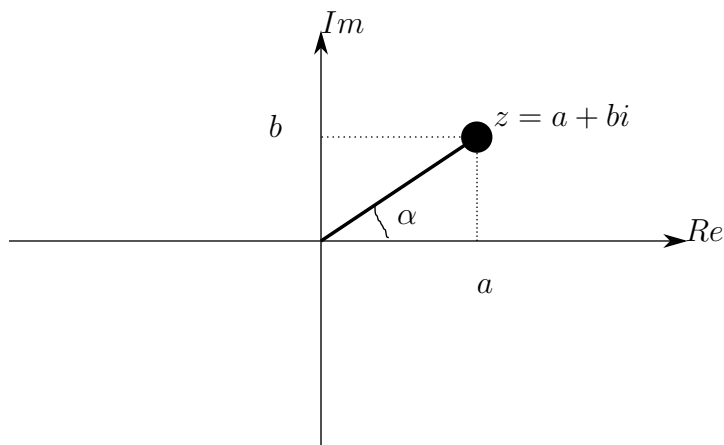


Figure 2.1: Комплексное число на плоскости

Statement.

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Statement. $\varepsilon : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\varepsilon(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ – это гомоморфизм.

$$\text{Im} \varepsilon = S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Так же:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha + \beta) &= \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \\ \varepsilon(-\alpha) &= \varepsilon(\alpha)^{-1} \\ \varepsilon(\beta - \alpha) &= \frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(\beta)} \\ \varepsilon(n\alpha) &= \varepsilon(\alpha)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \cos n\alpha + i \sin n\alpha - \text{формула Муавра} \end{aligned}$$

Несколько слов о комплекснопеременных функциях

Def 51. Дифференциал:

$$f(x + \delta x) = f(x) + df(\delta x) + \overline{o(\delta x)}.$$

В случае дифференцирования функции от двух переменных, x – столбец, а df – матрица 2×2 .

Note. Для комплексных коэффициентов: умножение на $\lambda + \mu i \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

Statement. Напишем степенные ряды для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ \sin t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &= \sum_{n=2k} \frac{(i\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=2k+1} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &:= \cos \alpha + i \sin \alpha. \\ \varepsilon(\alpha) &= e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Note (Показательная форма комплексного числа).

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \text{Arg} z}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

2π – период для экспоненты.

$$e^{\alpha+2\pi i} = e^{\alpha}.$$

$$a, b \in \mathbb{R} : e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^{a(\cos b + i \sin a)}.$$

На языке теории групп:

$$r \in \mathbb{R}_{>0}^*, \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : (r, \alpha) \mapsto r \cdot e^{i\alpha}.$$

То есть $\mathbb{R}_{>0}^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ – изоморфизм.

$$\mathbb{C}^* \cong \underbrace{\mathbb{R}_{>0}^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}_{\ln} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}.$$

$$Ln : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}/3\pi\mathbb{Z}.$$

$$Ln : (r, e^{i\alpha+2\pi\mathbb{Z}} = \ln r + i(\alpha + 2\pi\mathbb{Z}) = \ln r + i\alpha + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Statement (вычисление корня n -й степени). Вычисление корня в аддитивной группе $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ – решение уравнения:

$$\begin{aligned} xn &= 0 \mod 2\pi i\mathbb{Z} \\ xn &= 2\pi i n, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2\pi i k}{n} \mod 2\pi i\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$z^n = 1, \quad z = Ln z, \text{ далее}$$

$$nx = 0 \mid 2\pi i\mathbb{Z}.$$

$$z = e^x = e^{\frac{2\pi i k}{n}}.$$

2.11 Лекция 25

$$z^n \iff z = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$\Theta_n(Z) = z^k - \text{гомеоморфизм } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

$$\mu_n = \text{Ker} \Theta_n = \{e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}.$$

Эти числа делят окружность на n равных частей.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mu_n$$

$$k + n\mathbb{Z} \mapsto e^{\frac{2\pi i k}{n}} - \text{изоморфизм}.$$

Def 52. Образующие элементы μ_n называются превообразными корнями из 1.

Corollary. $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ – превообразный корень тогда и только тогда, когда $\gcd(k, n) = 1$.

Statement. $z^n = w = re^{i\varphi}$. Одно из решений этого уравнения: $\left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}\right)^n$.

А все решения можно записать:

$$\sqrt[n]{w} = \{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}, \quad z^n = w.$$

Theorem 2.11.1 (Основная теорема алгебры). $p \in \mathbb{C}[x]$, $\deg p \geq 1$

Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$.

Theorem 2.11.2 (Лиувилль). Любая ограниченная дифференцируемая функция $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – константа.

2.11.1 Кольца главных идеалов

Евклидовы кольца

Def 53. Область целостности – коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Designation. R – коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля.

Def 54. $f : R \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ Обладает свойствами:

1. $f(0) < f(r), \quad \forall r \in R$
2. $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists c, r \in R : a = bc + r \wedge f(r) < f(b)$

Тогда R – евклидова кольцо с евклидовой нормой f .

Theorem 2.11.3. Любой идеал евклидова кольца главный.

Proof. Пусть $I \triangleleft R$.

$$a \in I \setminus \{0\} : f(a) \leq f(b) \quad \forall b \in I \setminus \{0\}.$$

$$b = ac + r, \quad f(r) < f(a).$$

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{ac}_{\in I} \in I.$$

Если $r \neq 0$, то $f(a) \leq f(r) < f(a)$. Противоречие. □

Note. На практике ищется с помощью алгоритма Евклида.

Statement. $b = ac + r_1$

$$a = r_1c_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2c_2 + r_3$$

\vdots

$$f(r_{i+1}) < f(r_i)$$

\vdots

$$f(r_n) \leq f(d) \quad \forall d \in I \quad aR + bR = r_nR$$

Statement. R – область главных идеалов. $a_i \in R$

$$\sum_{i=1}^m a_i R = dR.$$

Тогда $d := \gcd(a_i)$.

	Кольцо	Норма
Exs.	\mathbb{Z}	$ \cdot $
	$F[x]$, F – поле	\deg
	Гауссовы целые числа: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$ \cdot $

Ex (не евклидово число). $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$ – не евклидово кольцо главных идеалов.

2.11.2 Китайская теорема об остатках

Theorem 2.11.4. КТО для целых чисел $x \equiv x_1 \pmod{n_1}$

$$x \equiv x_2 \pmod{n_2}$$

\vdots

$$x \equiv x_m \pmod{n_m}$$

Существует единственное x по модулю произведения $n_1 \dots n_m$, удовлетворяющее данным сравнениям.

Theorem 2.11.5. КТО R – коммутативное кольцо с 1. I_1, \dots, I_m – идеалы в R .

$I_i + I_k = R \quad \forall j \neq k$. Тогда

$$R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_m \cong R/I_1 \dots I_m.$$

Remark. A, B – кольца. Декартово произведение

$$A \oplus B = A \times B.$$

с покомпонентными операциями.

$$(a_1, b_1) + \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + \cdot a_2, b_1 + \cdot b_2).$$

Statement. Идеалы I, J взаимно простые, если $I + J = R$.

Proof. $I \cap J$ – идеал. $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ – идеал. $I \cdot J = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i b_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$ □

Lemma. $I \cdot J \subseteq I \cap J$ верно всегда.

Lemma. $I + J = R \implies I \cdot J = I \cap J$

Proof. $I \cap J = (I \cap J) \cdot R = (I \cap J)(I + J) = \underbrace{(I \cap J) \cdot I}_{\in I \cdot J} + \underbrace{(I \cap J) \cdot J}_{\in I \cdot J} \subseteq I \cdot J$ □

2.12 Лекция 26

I, J – идеалы в R

$I + J = R \Leftrightarrow I, J$ взаимно простые.

Lemma. $I + J = R$. Тогда

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

Proof.

$$\varphi : R \rightarrow R/I \oplus R/J.$$

$$r \mapsto (r + I, r + J).$$

$$\text{Ker} \varphi \ni r \Leftrightarrow \begin{cases} r + I = I \\ r + J = J \end{cases} \Leftrightarrow r \in I \cap J$$

$$\text{Ker} \varphi = I \cdot J.$$

$$\exists a \in I, b \in J : a + b = 1.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_1 \pmod{I}.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_2 \pmod{J}.$$

То есть $\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J)$, следовательно, φ – сюръективно.

По теореме о гомоморфизме колец

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

□

Lemma. J, I_1, \dots, I_n – идеалы в R .

$$J + I_n = R \forall k \implies J + I_1 \cdot \dots \cdot I_n = R.$$

Proof. Индукция. База для $k = 1$. Очевидно. Переход:

По предположению индукции $J + \underbrace{I_1 + \dots + I_{n-1}}_I = R$. Нужно доказать, что $J + I \cdot I_n = R$.

$$\begin{aligned} R &= J + I \cdot R = J + I(J + I_n) = \\ &= J + IJ + II_n = J + II_n \end{aligned} \quad .$$

□

Theorem 2.12.1 (Китайская теорема об остатках). I_1, \dots, I_n – попарно взаимно простые идеалы, то есть $\forall j \neq k : I_j + I_k = R$. Тогда

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I} \oplus \dots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Note. Здесь дробью обозначается фактор кольцо.

Proof. Индукция по n . Так как I_k взаимно просто с $I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}$

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}} \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Дальше по предположению индукции получаем то, что хотим.

□

Statement. $x \equiv x_k \pmod{I_k}, \quad k = 1, \dots, n$ равносильно тому, что

$$x \equiv \sum_{k=1}^n x_k c_k \pmod{I_1 \cdot \dots \cdot I_n}, \quad c_k \in \prod_{j \neq k} I_j \cap (1 + I_k).$$

Note. В целых числах:

$$x \equiv x_k \pmod{m_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Чтобы найти c_k , нужно решить диофантово уравнение:

$$y \cdot m_k + z \cdot \underbrace{\prod_{j \neq k} m_j}_{=c_k} = 1.$$

Statement (применение КТО). В $F[t]$:

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, \dots, n, x_i \neq x_k \quad \forall i \neq k$$

равносильно

$$\begin{aligned} p &\equiv y_k \pmod{(t - x_k)}. \\ p(t) &\equiv \sum_{k=1}^n y_k \prod \frac{t - x_i}{x_k - x_i} \pmod{(t - x_1) \dots (t - x_n)}. \end{aligned}$$

2.12.1 Простые и максимальные идеалы

Все кольца будут коммутативные с единицей.

Def 55. Простой идеал $P \neq R$ кольца R называется простым, если $ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

Note. Другими словами $R \setminus P$ замкнуто относительно умножения

Ех. В \mathbb{Z} идеал $n\mathbb{Z}$ – простой тогда и только тогда, когда n – простое.

Ех. В $F[t]$ идеал $f \cdot F[t]$ простой тогда и только тогда, когда f – неприводимый многочлен.

Ех. Однако в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = R$ идеал $2R$ – не простой, хотя 2 не приводимо.

$$(1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}) = 4 \in 2R.$$

Докажем, что элементы $2, 1 \pm \sqrt{-3}$ неприводимы. Обозначим их за $\alpha = \beta\gamma$. Квадраты равны 4.

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= 4 = |\beta|^2 \cdot |\gamma|^2. \\ |a + b\sqrt{-3}|^2 &= a^2 + 3b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Либо $|\beta|^2 = 1$, либо $|\gamma|^2 = 1$, то есть β или γ обратимы.

Ех. $F[x, y] = R$

$$I = xR + yR.$$

– простой.

Def 56. Максимальны идеал – максимальный собственный идеал. Что равносильно тому, что это максимальный из идеалов, не содержащих единицу.

Note. Другими словами, M – максимальный идеал, если $M \neq R$ и $M \subseteq I \subset R \Rightarrow I = M$

Theorem 2.12.2. Любой собственный идеал содержится в каком-то максимальном.

Proof. $J \leq R$.

\mathcal{X} – множество всех идеалов, содержащих J и не содержащих единицу.

\mathcal{Y} – линейно упорядоченное подмножество \mathcal{X} , то $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \in \mathcal{X}$

$$a, b \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \Rightarrow \exists I_1, I_2 \in \mathcal{Y} : a \in I_1, b \in I_2 \wedge (I_1 \subseteq I_2 \vee I_2 \subseteq I_1),$$

так как \mathcal{Y} – линейно упорядочено.

$$a, b \in I_k \ (k = 1, 2) : a + b \in I_k \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I.$$

$$a \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \Rightarrow ra \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I, r \in R.$$

Следовательно, $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I$ – идеал.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \subseteq J \wedge \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \not\subseteq 1.$$

По лемме Цорна \mathcal{X} содержит максимальный элемент. Пусть это M . Если $M \subset N \subset R$, $N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = M$ □

2.13 Лекция 27

2.13.1 Фактор кольцо по максимальному идеалу

Statement. P – простой идеал в R тогда и только тогда, когда R/P – область целостности.

\mathfrak{M} – максимальный тогда и только тогда, когда R/M – поле.

Proof. $ab \in P \Leftrightarrow a \in P \vee b \in P$.

Пусть $\bar{\cdot} : R \rightarrow R/P$.

Тогда предыдущее утверждение равносильно

$$\bar{a}\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = 0 \vee \bar{b} = 0.$$

Обозначим $L(I, \mathfrak{R})$ – множество идеалов в R , содержащих I .

$$\bar{\cdot} : R \rightarrow R/P.$$

Докажем, что

$$\bar{\cdot} : L(R/\mathfrak{M}), I \mapsto \bar{I}.$$

– Образ этого идеала в R/\mathfrak{M} При эпиморфизме идеал отображается в идеал. $\bar{a} \in \bar{I}$, где $a \in I$. $\bar{r} \in R/\mathfrak{M}$, $\bar{r}\bar{a} \in \bar{I}$

Обратное: $L(0, R/\mathfrak{M}) \rightarrow L(\mathfrak{M}, R)$. Взятие полного прообраза $\bar{I} \mapsto I + \mathfrak{M} \triangleleft R$.

$L(M, R) = \{\mathfrak{M}, R\} \Leftrightarrow L(\{0\}, R/M) = \{\{0\}, R/M\} \Leftrightarrow R/M$ – поле.

$$\bar{\alpha} \in R/M \wedge \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}R/M = R/M \Leftrightarrow \bar{\alpha} - \text{обратим.}$$

□

Corollary. Любой максимальный идеал является простым.

Theorem 2.13.1. В R любой ненулевой простой идеал является максимальным.

Proof. Обозначим простой идеал pR и предположим, что он содержится в каком-то идеале $mR \neq R$. Тогда $p = mr \Rightarrow m \in pR \vee r \in pR$. В первом случае $mR = pR$, а втором $r = pa$, то есть $p = tar \Rightarrow 1 = ta \Rightarrow mR = R$. Противоречие. □

2.13.2 Единственность разложения

R – кольцо с 1.

Def 57. $p \in R$ – простой, если pR – простой.

Def 58. $a, b \in R$ ассоциированные тогда и только тогда, когда $aR = bR$

Lemma. R – область целостности. a, b – ассоциированные тогда и только тогда, когда $a = b\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in R^*$

Proof. $aR = bR \Rightarrow a = b \cdot \varepsilon, b = a\delta \Rightarrow a = a\delta\varepsilon \Leftrightarrow a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \Rightarrow \varepsilon$ обратим \square

Def 59. $a \in R$ приводим, если $a = bc \wedge aR \neq bR \wedge aR \neq cR$. Иначе a называется неприводимым.

Lemma. Простой элемент неприводим. В ОГИ неприводимый является простым.

Proof. pR – простой идеал, следовательно,

$$ab = p \Rightarrow \begin{bmatrix} a \in pR \\ b \in pR \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} aR \subset pR \\ bR \subset pR \end{bmatrix}.$$

Но $pR \subset aR \cap bR$. Тогда

$$\begin{bmatrix} aR = pR \\ bR = pR \end{bmatrix}.$$

Получаем, что p – неприводим.

Теперь в обратную сторону.

R – область главных идеалов, p – неприводим. $ab \in pR$.

$aR + bR = cR \Rightarrow p = cd \Rightarrow c, d \in R^*$

Если $d \in R^* \Rightarrow cR = pR \Rightarrow aR \subset pR$, если $c \in R^* \Rightarrow aR + pR = R$, домножим на b : $\underbrace{abR + pbR}_{\subset pR} = bR \Rightarrow bR \subset pR$ \square

Def 60. Для колец $\dim R$ – размерность Крулля кольца или максимальная длина цепочки строго вложенных простых идеалов.

Ех. $\dim F[x_1, \dots, x_n] = n$

2.13.3 Нётеровы кольца

Def 61. R – нётерово тогда и только тогда, когда любое линейно упорядоченное множество идеалов содержит наибольший элемент.

ACC – ascending chain condition (условие обрыва возрастающих цепей)

Def 62. Артиново кольцо – аналогично, но заменить наибольший, на наименьший.

DCC – descending chain condition (условие обрыва убывающих цепей)

Lemma. R – нётерово тогда и только тогда, когда любой идеал в R конечно порожден.

Proof. Пусть R – нётерово, $I \triangleleft R$. Возьмем $a_1 \in I$.

$$a_1R = I_1 \neq I \Rightarrow \exists a_2 \in I \setminus I_1, I_2 := a_1R + a_2R \dots$$

Получаем цепочку, которая не может быть бесконечной, значит она где-то оборвется и мы получим, что любой идеал порожден этим набором.

В обратную сторону.

\mathcal{A} – линейно упорядоченное множество идеалов.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I = a_1 R + \dots + a_n R.$$

(так как оно конечно порожден) $\exists I_1, \dots, I_n \in \mathcal{A}$, такие что $a_k \in I_k$. Так как \mathcal{A} – линейно упорядочено, существует наибольший из I_k , пусть I_j .

$$a_1, \dots, a_n \in I_j \implies a_1 R + \dots + a_n R = I_j.$$

I_j – наибольший из \mathcal{A}

□

Theorem 2.13.2. R – нётерово. Тогда любой элемент раскладывается в произведение неприводимых.

2.14 Лекция 28

Отступление

p – неприводим тогда и только тогда, когда pR – максимальный среди собственных главных идеалов.

R – область целостности.

$$pR \subseteq aR \implies p = ar \implies \begin{cases} a \in R^* \\ r \in R^* \end{cases}$$

Тогда либо $aR = R$ или $aR = pR$.

Если R не область целостности, из $p = ar$ следует, что

$$\begin{cases} aR = pR \\ rR = pR \end{cases}$$

Тогда $r = px \wedge p = arx$, дальше $p(ax - 1)$.

Теперь придумаем контрпример:

$$R = \mathbb{Z}[a, p, x] / (p(ax-1)).$$

Хотим доказать, что p неприводим и $\bar{p}R \subsetneq \bar{a}R \subsetneq R$. Профакторизуем: \bar{p} – образ p в R ,

$$R / (\bar{p}) \cong \mathbb{Z}[a, p, x] / (p, p(ax-1)).$$

Это изоморфно

$$\mathbb{Z}[a, p, x] / (p) \cong \mathbb{Z}[a, x].$$

Statement. $I, J \triangleleft R$, $\pi_I : R \rightarrow R/I$

$$R / (I + J) \cong (R/I) / \pi_{I(J)} \cong (R/J) / \pi_{J(I)}.$$

Тогда $\bar{p}R$ – простой идеал, следовательно, p – неприводим. В фактор кольце $R/(\bar{p})$: $\bar{p}R \rightarrow 0$, $\bar{a}R \rightarrow$ не 0 и не все кольцо

Ех. $\mathbb{Z}[i]/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1))/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]/(7))/(x^2 + 1) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]/(x^2 + 1)$.
 $x^2 + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ Значит, $\mathbb{Z}[i]/(7) \cong \mathbb{F}_{49}$.

Statement. Рассмотрим кольцо R , A – R -алгебра. Тогда

$$\forall a_1, \dots, a_n \in A : \exists! \varphi_{a_1, \dots, a_n} : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A : \varphi_{a_1, \dots, a_n}(x_i) = A.$$

Это гомоморфизм подстановки ("eval").

2.14.1 Продолжение нёторовых колец

Theorem 2.14.1 (Теорема Гильберта о базисе). R – нётерово (коммутативное кольцо с единицей). Тогда $R[x]$ – нётерово.

Note. $b \mid a \Leftrightarrow aR \subseteq bR$

Theorem 2.14.2. R – неторова область целостности. Любой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых.

Proof. $a \in R \setminus R^*$

1. Докажем, что существует такое p , что $p \mid a$ для неприводимого p . Если a неприводим, все отлично, иначе он представляется в виде $a = r_1 a_1$. При этом $a_1 R \neq aR$ и тогда $aR \subsetneq a_1 R \subsetneq a_2 R \subsetneq \dots \subsetneq a_n R$. Эта цепочка точно оборвется, так как R – неторово. Причем $p = a_n$ – неприводим, иначе он не может быть последним. Значит $p \mid a$.

2. $p = p_1$ – неприводим. $a = p_1 c_1$

Если $c_1 \in R^*$, то $p_1 c_1$ – неприводим. Иначе $p_1 c_1 = p_1 p_2 c_2 = \dots = p_1 p_2 \dots p_m c_m$.

$c_m \mid c_{m-1} \dots \mid c_1$ и $c_1 R \subsetneq c_2 R \subsetneq \dots \subsetneq c_m R$

$$c_i = p_{i+1} c_{i+1}.$$

Так как p_i необратим, то $c_i R \neq c_{i+1} R$. Цепочка обрывается, так как R неторово.

□

2.14.2 Факториальное кольцо

Def 63. Кольцо называется факториальным, если любой необратимый элемент единственным образом раскладывается в произведение неприводимых с точностью до ассоциированности.

Lemma. Факториальное кольцо – область целостности.

Proof. Если $p_1 \cdot \dots \cdot p_m = 0$, то $p_1^2 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = 0$ – другое разложение.

Единственность означает: $p_1 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot \dots \cdot q_n$, где p_i, q_j – необратимые $\implies m = n \wedge \exists \sigma \in S_m : p_i$ ассоциировано с $\sigma(i)$. \square

Theorem 2.14.3. В R любой элемент раскладывается в произведение неприводимых и любой неприводимый элемент является простым. Тогда R – факториально.

Note. Верно и обратное

Proof. Пусть $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot \dots \cdot q_n$.

Индукция по $\max(n, m)$.

База $m = n = 1$.

Переход: $\max(n, m) > 1$

Пусть $n > 1$.

$$q_1 \cdot \dots \cdot q_n \in p_1 R \xrightarrow{p_1 R - \text{простое}} p_1 \mid q_i \text{ для некоторого } i.$$

тогда $q_i \in p_i R \implies q_i = p_i r_i$. Так как q_i неприводим, r_i – обратим, следовательно, q_i ассоциирует с p_1 .

$$q_1 \cdot \dots \cdot q_{i-1} r_1 q_{i+1} \cdot \dots \cdot q_n = p_1 \cdot \dots \cdot p_m.$$

По предположению индукции p_i ассоциировано с сомножителями левой части (и $m-1 = n-1$). \square

Corollary. Область главных идеалов является факториальным кольцом.

Theorem 2.14.4. R – факториальное кольцо. Тогда $R[x]$ – тоже факториально.