

Конспект по матанализу  
I семестр, часть 2  
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

2 января 2020 г.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Непрерывные функции</b>	<b>5</b>
1.1	Непрерывность в точке . . . . .	5
1.2	Свойства непрерывных функций . . . . .	5
1.2.1	Теорема об алгебраических операциях . . . . .	5
1.2.2	Теорема о композиции . . . . .	5
1.2.3	Теорема о пределе последовательности . . . . .	6
1.3	Непрерывность на множестве . . . . .	6
1.3.1	Теоремы Вейерштрасса . . . . .	7
1.3.2	Теорема о промежуточном значении . . . . .	7
1.4	Степени с рациональным показателем . . . . .	8
1.5	Равномерная непрерывность . . . . .	9
1.5.1	Теорема Кантора . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Дифференцирование</b>	<b>11</b>
2.1	Определения . . . . .	11
2.2	Правила дифференцирования . . . . .	12
2.3	Производная возрастающей функции . . . . .	13
2.4	Формулы Коши и Лагранжа . . . . .	14
2.5	Правило Лопиталья . . . . .	14
2.6	Формула Тейлора . . . . .	14
2.7	Достаточное условие экстремума . . . . .	14
2.8	Сходимость последовательностей . . . . .	14
2.9	Первообразные . . . . .	17
2.10	Интеграл . . . . .	19
2.10.1	Интеграл Дарбу . . . . .	19
2.10.2	Связь интеграла и производящей . . . . .	24
2.10.3	Формула интегрирования по частям . . . . .	24
2.11	Логарифм и экспонента . . . . .	26
2.11.1	Показательная функция . . . . .	31
2.11.2	Степенная функция . . . . .	31
2.11.3	Разложение Тейлора для логарифма . . . . .	32
2.11.4	Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора . . . . .	34
2.12	Дифференциальные уравнения . . . . .	37



# Глава 1

## Непрерывные функции

### 1.1 Непрерывность в точке

**Designation.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$

**Def 1.** Функция  $f$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если

для любой окрестности  $U$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $f(V \cap A) \subset U$ .

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \quad x \in A \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (1.1)$$

*Note.* Если  $x_0 \in A'$ , то условие 1.1 эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Note.* Если точка  $x_0$  является изолированной для  $A$ , то  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

### 1.2 Свойства непрерывных функций

#### 1.2.1 Теорема об алгебраических операциях

**Theorem 1** (об алгебраических операциях с непрерывными функциями). Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Если  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$ , то  $\alpha g + \beta f$  непрерывна в точке  $x_0$ .
- Если  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{g}{f}$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Если  $x_0$  — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. □

#### 1.2.2 Теорема о композиции

**Theorem 2** (о композиции).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(A) \subseteq B$ ,  $x_0 \in A$ . Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $g$  непрерывна в точке  $f(x_0) = y_0$ . Тогда  $g \circ f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Обозначим  $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$ . Пусть  $U$  — окрестность точки  $z_0$ . Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ :

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

### 1.2.3 Теорема о пределе последовательности

**Theorem 3.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$
2.  $\forall$  последовательности  $\{x_n\} \in A$ ,  $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

*Доказательство.*

$$1 \implies 2$$

Пусть  $W$  — окрестность точки  $f(x_0)$ . Так как  $f$  непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как  $x_n \rightarrow x_0$ :

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in V \implies f(x_n) \in W.$$

$$2 \implies 1$$

Пусть  $f$  не непрерывна в точке  $x_0$ , есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим  $\delta_n = \frac{1}{n}$ .

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Из этого следует, что  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Противоречие.

□

## 1.3 Непрерывность на множестве

**Def 2.** Говорят, что функция  $f$ , заданная на множестве  $A$ , непрерывна на некотором подмножестве  $A_1 \subset A$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $A_1$ .

### 1.3.1 Теоремы Вейерштрасса

**Theorem 4** (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть  $f$  задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве  $A$ . Тогда функция  $f$  ограничена на  $A$ .

*Доказательство.* От противного. Пусть  $f$  не ограничена на  $A$ . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$  — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность  $x_{n_j} \rightarrow x$ . Так как  $A$  замкнуто,  $x \in A$ . Следовательно,  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$ . Противоречие.  $\square$

**Theorem 5** (Вторая теорема Вейерштрасса).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве  $A$  функция. Если существуют конечные

$$M = \sup_{x \in A} f(x), \quad m = \inf_{x \in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

*Доказательство.*

- Для  $M$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

По теореме о компактности существует подпоследовательность  $x_{n_j} \rightarrow x$ . Так как  $A$  замкнуто,  $x \in A$ .

$$f(x_{n_j}) \rightarrow f(x) \wedge f(x_{n_j}) \rightarrow M \implies M = f(x).$$

Значит,  $M$  достигается.

- Для  $m$ : совершенно аналогично.

$\square$

### 1.3.2 Теорема о промежуточном значении

**Designation.** « $u$  между  $r$  и  $s$ » :=  $\begin{cases} u \in [r, s] & r \leq s \\ u \in [s, r] & r > s \end{cases}$

**Theorem 6** (о промежуточном значении). Пусть  $f$  задана и непрерывна на отрезке  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Пусть  $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $v$  находится между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Тогда существует  $x$  между  $a$  и  $b$  такой, что  $f(x) = v$ .

*Доказательство.* Если  $a = b$ , утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что  $a < b$ . Будем считать, что  $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$ .

Пусть нет точки  $x_0 : f(x_0) = v$ . Обозначим  $I = [a, b]$ . Пусть  $X = \{x \in I \mid f(x) \leq v\}$  и  $Y = \{x \in I \mid f(x) \geq v\}$ . Докажем, что  $X$  и  $Y$  замкнуты.

1.  $X$  замкнуто:

$x_0$  — предельная точка. Следовательно,  $\exists x_n \in X : x_n \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0)$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

$$f(x_n) \leq v \implies f(x) \leq v.$$

2. Аналогично  $Y$  замкнуто.

Следовательно,  $X \cap Y \neq \emptyset$ . □

**Theorem 7.** Пусть  $f$  задана и непрерывна на отрезке  $\langle a, b \rangle$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  — инъекция (то есть  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$  )
2.  $f$  — строго монотонная

*Доказательство.*

$2 \implies 1$  Очевидно.

$1 \implies 2$  Пусть  $f$  не строго монотонна. Тогда  $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ :

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{cases}.$$

Тогда  $\exists x'_1 \neq x'_2$ , но  $f(x'_1) = f(x'_2)$ . Противоречие. □

**Theorem 8.** Пусть  $g$  задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда  $g$  непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).

**Statement.** Если  $f$  непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то  $f^{-1}$  тоже задана на отрезке и непрерывна.

## 1.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z}, f(x) = x^m, x > 0$ .

$$x^0 \equiv 1, \quad x > 0.$$

$x^m$  строго возрастает, если  $m > 0$

$x^m$  строго убывает, если  $m < 0$

$$x^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-m}}$$

$f(x) = x^m$  — непрерывная функция. Обратная функция  $g(y) = f^{-1}(y)$  — корень  $m$ -й степени из  $y > 0$ .

**Def 3.**  $x > 0, r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}$

$x^r = \sqrt[q]{x^p}$  —  $x$  в рациональной степени.

*Note.*  $x \mapsto x^r$  — непрерывное отображение.

**Lemma.** Результат не зависит от представления  $r$  в виде дроби.



**Property.**

$$1. x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$$

$$2. (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$$

$$3. x^r \cdot y^r = (xy)^r$$

**1.5 Равномерная непрерывность**

**Def 4.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $f$  **равномерно непрерывна** на  $A$ , если

$$(|x - x_0| < \delta \wedge x \in A) \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

**Ex.**  $f(x) = x$ ,  $A = \mathbb{R}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 |x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies f \text{ равномерно непрерывна.}$$

**Ex.**  $f(x) = x^2$ ,  $A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y| < C\varepsilon \implies f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

**Ex.**  $h(x) = \sqrt{x}$  — равномерно непрерывна.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

**1.5.1 Теорема Кантора**

**Theorem 9** (Кантор). Пусть  $A$  замкнутое ограниченное множество.  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

*Доказательство.* От противного. Пусть  $f$  не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \delta > 0 \exists x'_1, x''_2 \in A : |x'_1 - x''_2| < \delta \wedge |f(x'_1) - f(x''_2)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ .

$$\exists x'_n, x''_n \in A : |x'_n - x''_n| < \delta \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Получили две последовательности  $\{x'_n\}$  и  $\{x''_n\}$ . Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности  $\exists x'_{n_j} \rightarrow x_0 \in A$ .

$$x''_{n_j} = x'_{n_j} + (x''_{n_j} - x'_{n_j}) \rightarrow x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})| \geq \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к  $f(x_0)$ , значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие.  $\square$



## Глава 2

# Дифференцирование

### 2.1 Определения

**Designation.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

**Def 5.** Функция  $f$  называется **дифференцируемой** в точке  $x_0$ , если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0),$$

где  $l(t) = kt$ ,  $k \in \mathbb{R}$  — дифференциал  $f$  в точке  $x_0$  (также обозначается  $df_{x_0}(t)$  или  $df(x_0, t)$ ).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0).$$

**Def 6.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , **производная**  $f$  в точке  $x_0$  определяется так:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Property.**

1. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $k$  единственное.
2. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .
3.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k, \quad df_{x_0}(t) = kt.$$

*Доказательство.*

$$\boxed{\implies} f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow k.$$

$\boxed{\impliedby}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0) = \\ &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

□

4.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует  $\beta$ , заданная в окрестности  $V \ni x$ :

(a)  $\beta$  непрерывна в точке  $x_0$

(b)  $f(x) - f(x_0) = \beta(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in V$

Доказательство.  $\Rightarrow$

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} & x = x_0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$   $\beta(x) = \beta(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$  Подставим

$$f(x) - \underbrace{\beta(x_0)}_k (x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0).$$

Получили определение.

□

## 2.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!

1.  $f(x) = ax + b$  дифференцируема и  $\forall x_0 : f'(x_0) = a$

2. Если  $f, g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ ,  $f \cdot g$  тоже дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то  $1/f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Если  $f, g$  дифференцируемы в  $x_0$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в  $x_0$  и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Если  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \langle c, d \rangle$ ,  $x_0 \in \langle c, d \rangle$ ,  $g(x_0) \in \langle a, b \rangle$  и  $f$  дифференцируема в точке  $g(x_0)$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f \circ g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

6. Производная обратной функции.  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и инъективна. Пусть  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\exists f'(x_0) \neq 0$ , обозначим  $g = f^{-1}$  — обратное отображение,  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда  $g$  дифференцируема в точке  $y_0$  и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$ . Если  $x_0 > 0$ , то  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8.  $x_0 > 0$ ,  $\alpha = \frac{l}{k} > 0$ .  $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$ . Тогда  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$\varphi'(x) = l \left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$

Аналогично для  $\alpha < 0$ .

9. Таблица еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

## 2.3 Производная возрастающей функции

**Def 7.** Пусть  $f : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Говорят, что  $f$  **возрастает в точке**  $x_0$ , если  $\exists$  окрестность  $U \ni x_0$ :

$$\begin{cases} f(y) \leq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \leq x_0 \\ f(y) \geq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \geq x_0 \end{cases}$$

*Note.* Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

**Theorem 10.** Пусть в условии определения  $f$  возрастает в точке  $x_0$ .

1. Если  $\exists f'(x)$ ,  $f'(x_0) \geq 0$
2. Пусть  $\exists f'(x_0) > 0$ , тогда  $f$  строго возрастает в точке  $x_0$

*Доказательство.*

1.

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0 \quad \forall x \geq x_0} \rightarrow f'(x_0) \implies f'(x_0) \geq 0.$$

$$2. \quad f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\gamma(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|).$$

$0 < \varepsilon < f'(x_0)$ . Разберем пару случаев:

(a)  $x > x_0$ .

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geq (f(x) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b)  $x < x_0$ .

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

**Def 8.**  $I = (\alpha, \beta)$ ,  $x \in I$ . Говорят, что  $f$  имеет **монотонный максимум**, если

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

*Note.* Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

*Note.* Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

**Theorem 11.**  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  — точка локального экстремума для  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $\exists f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  локальный максимум. Тогда  $f \upharpoonright_{(\alpha, x_0]}$  — возрастает в точке  $x_0 \implies f'(x_0) \geq 0$ . Также  $f \upharpoonright_{[x_0, \beta)}$  — убывает в точке  $x_0 \implies f'(x_0) \leq 0$ .

Для других случаев полностью аналогично. □

## 2.4 Формулы Коши и Лагранжа

**Theorem 12** (Ролль).  $I = [a, b]$ ,  $a \neq b$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, дифференцируема на  $(a, b)$ . Пусть  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса №2 ??  $\exists x, y \in [a, b] : \begin{cases} f(x) = \min_{t \in [a, b]} f(t) \\ f(y) = \max_{t \in [a, b]} f(t) \end{cases}$  Если  $x, y \in a, b$ , то  $f \equiv \text{const}$  и  $f'(a) = 0$ . Иначе либо  $x \in (a, b)$ , либо  $y \in (a, b)$ . Тогда в ней производная и равна нулю по прошлой теореме ?? □

**Corollary** (Формула Коши). Пусть  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Corollary** (Формула Лагранжа). Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , то  $\exists c \in (a, b)$ :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Note.* Если  $h$  дифференцируема на  $(a, b)$  непрерывна на  $[a, b]$ , при этом  $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  инъективна на  $[a, b]$ .

**Corollary.** В условии замечания производная  $h'$  сохраняет знак.

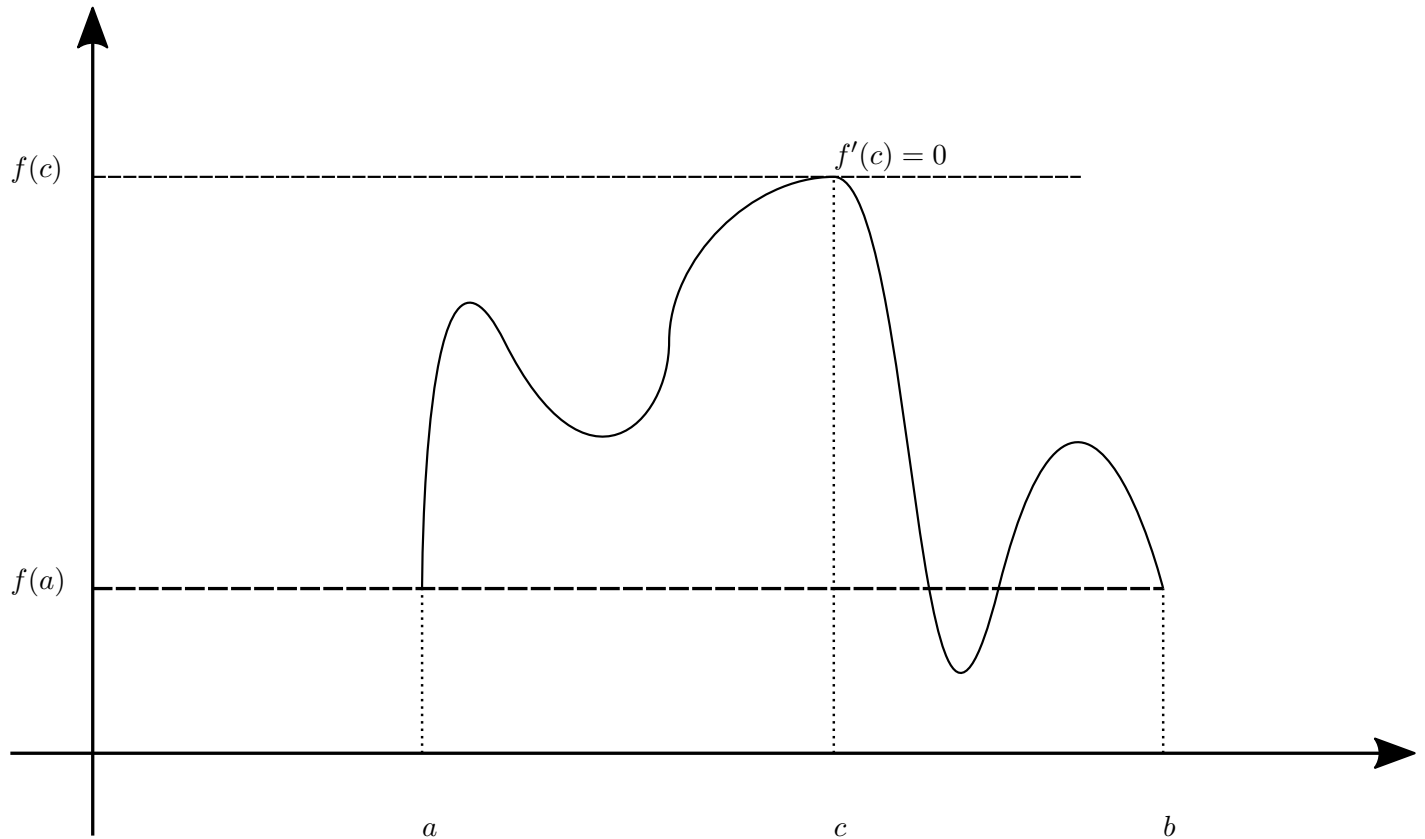


Рис. 2.1: Теорема Ролля

### Следствия из формулы Лагранжа

**Designation.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и дифференцируема на  $(a, b)$

1.  $f \equiv \text{const}$  тогда и только тогда, когда  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .
2. Связь знака производной и монотонности.

#### Theorem 13.

- (a) Если  $f$  возрастает (убывает) на  $[a, b]$ , то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .
- (b) Если  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f$  возрастает (убывает).
- (c) Если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго возрастает (убывает).

**Statement.** Если  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго монотонна.

3.  $f'(x_1) = u$ ,  $f'(x_2) = v$ ,  $w$  лежит между  $u$  и  $v$ . Тогда  $\exists y$  между  $x_1, x_2 : f'(y) = w$ .

**Theorem 14.** Если  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ , непрерывна в точке  $a$  и  $\exists \lim_{y \rightarrow a} f'(y) = d$ , то  $f$  дифференцируема в точке  $a$  и  $f'(a) = d$ .

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (0 < |y - a| < \delta \implies |f'(y) - d| < \varepsilon).$$

Если  $x > a$ , по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \quad c \in (a, x).$$

Пусть  $|x - a| < \delta$ , тогда  $|c - a| < \delta$ , следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - d \right| < \varepsilon.$$

□

## 2.5 Правило Лопиталья

**Theorem 15** (Правило Лопиталья).  $f, g$  заданы и непрерывны на  $[a, b]$ ,  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(y) \neq 0 \quad \forall y \in (a, b)$ ,  $\exists \lim_{y \rightarrow a+0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = d$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $x > u > a$ .

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \quad y \in (a, x).$$

$$\forall \varepsilon \exists \delta : (|y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - d \right| < \varepsilon).$$

Если  $|x - a| < \delta$ , то  $|y - a| < \delta$ .

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(a) - g(x)} - d \right| < \varepsilon \xrightarrow{u \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| \leq \varepsilon \quad \text{при } |x - a| < \delta.$$

□

**Theorem 16** (Вариант правила Лопиталья).  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

*Доказательство.*  $x, u \in (a, a + \delta)$ ,  $x \neq u$ .  $\exists y$  между  $x$  и  $u$ :

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \quad (2.1)$$



Зафиксируем  $u$  вблизи  $x$  :  $\left| \frac{g(u)}{g(x)} \right| < 1$ . Тогда модуль правой части в уравнении ?? не более  $\varepsilon$ . Воспользуемся тем, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ :

$$d - \varepsilon \leq \left| \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \right|.$$

Домножим на знаменатель:

$$(d - \varepsilon)(1 - \frac{g(u)}{g(x)}) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)} \leq (d + \varepsilon) \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right).$$

$x$  близок к  $a$ :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\leq d + \varepsilon \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\geq d - \varepsilon \end{aligned}$$

**Statement.** Если  $v(x) < w(x)$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$  и  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$ .

Применим утверждение.

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) &= \inf_{\delta > 0} \sup_{|x-a| < \delta} v(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} v(x). \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) &= \sup_{\delta > 0} \inf_{|x-a| < \delta} v(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} v(x). \end{aligned}$$

Значит

$$d + \varepsilon \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq d - \varepsilon.$$

□

## 2.6 Формула Тейлора

## 2.7 Достаточное условие экстремума

## 2.8 Сходимость последовательностей

**Theorem 17.**  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \rightarrow f$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \rightarrow |f(x)| \leq M$
2.  $f$  ограничена:  $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A :$   
 $|f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Доказательство. Очевидно

□

**Theorem 18.**  $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$  на  $A$ . Пусть  $\exists M : \forall x \in A \quad \forall n |f_n(x)| \leq M$ . Тогда  $f_n g_n \rightrightarrows f g$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - g_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

**Theorem 19** (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть  $f_n$  — последовательность функций на множестве  $A$ . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Необходимость.

Пусть  $f_n \Rightarrow f$ ,  $\varepsilon > 0$  найдем  $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$ .

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 14 выполнено.  $x \in A$  — фиксировано. Тогда  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  есть последовательность Коши (см 14). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$ . Нашли  $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$  Зафиксируем  $k, x$ , перейдем к пределу по  $j$  :

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для  $\forall x \in A, \forall k > N$ . □

**Ех.** Функция на  $\mathbb{R}$ , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

**Theorem 20** (Вейерштрасс). Пусть  $f_n$  — функция на множестве  $A$ .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда  $\sum_0^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно.

*Note.* Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$ .

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

**Ех** (Ван дер Варден).  $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$  ; продолжим с периодом 1.  $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

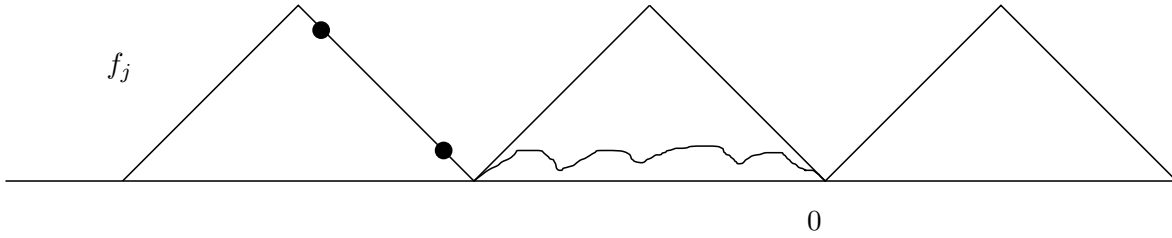


Рис. 2.2: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в  $h_k$  ( $\pm$ ), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном  $j$  значение будет разных знаков.

**Designation.** Ряд из функций  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$  сходится обозначает, что функции  $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$  сходятся в соответствующем смысле.

**Ex.**  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

**Theorem 21.**  $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  Предположим, что  $f_n \rightarrow f$  поточечно.  $f_n$  дифференцируемы и  $f_n \rightrightarrows g$  равномерно. Тогда  $f$  дифференцируемая на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$ .

*Доказательство.* Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для  $xy \in \langle a, b \rangle$  :

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad c \text{ между } x, y.$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем  $k, l \rightarrow \infty$ .

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - 1} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем  $x$ .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных  $k, x$ :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

## 2.9 Первообразные

Пусть все происходит на  $\langle a, b \rangle$ .  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Def 9.** Говорят, что  $f$  есть первообразная для  $g$ , если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$  всюду.

**Theorem 22** (Ньютон, Лейбниц). Если  $g$  непрерывна, то у нее есть первообразная.

*Note.* К этой теореме мы еще вернемся.

**Statement.** Если  $f' = g$ , то  $(f + c)' = g$  для любой константы  $c$ .

**Theorem 23.** Если  $f_1, f_2$  — первообразные для  $g$ , то  $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
$e^x$	$e^x + c$

**Designation.** Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x) dx.$$

**Statement.**  $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

**Def 10.** Линейная функция — это функция вида  $\varphi(h) = ch$ .

Линейная форма:  $\langle a, b \rangle$ ;  $\Phi$  — отображение отрезка  $\langle a, b \rangle$  в множество линейных функций.  
 $x \in \langle a, b \rangle$ ,  $\Phi(x)$  — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

**Def 11** (дифференциал).  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

**Ex.**  $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  — тождественная.  $dx(u, h) = h$

**Statement.**  $\Phi = c \cdot dx$ , где  $c$  — некая функция на  $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма  $\varphi = gdx$ ; найти функцию  $f : df = \varphi$

**Statement.**

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dx.$$

**Ex.**

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену  $x = \sin t$ , пусть  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t) \right) &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \end{aligned}$$

Тогда  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

**Statement** (Формула интегрирования по частям).  $(fg)' = f'g + fg'$  *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

**Ex.**

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

**Ex.**

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

## 2.10 Интеграл

**Def 12.**  $A$  — множество произвольной природы.  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Phi$  — функционал на  $A$ .

**Def 13.** Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ .  
 $f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

**Statement.** Каким должен быть интеграл?

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ( $f \mapsto I(f)$ )
2.  $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$  (Линейность)
3.  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
4.  $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

**Def 14.** Разбиение — ступенчатая функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

**Def 15.**  $g$  на  $\langle a, b \rangle$  — ступенчатая, если при  $i \neq j$  она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка  $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

### 2.10.1 Интеграл Дарбу

**Def 16.**  $J$  — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов  $\{J_k\}_{k=1}^N$ , такой что  $J_k \cap J_s = \emptyset$ ,  $k \neq s$ ,  $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$ . (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

**Def 17.** Длина интервала  $\langle a, b \rangle$  — это  $b - a$  Обозначается  $|J| = b - a$ ,  $|\emptyset| = 0$

**Lemma.** Если  $\{J_k\}_{k=1}^N$  — разбиение  $J$ , то  $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

**Def 18.**  $e$  — множество,  $f$  — ограниченная функция на  $e$ .

Колебание  $f$  на  $e$  :

$$\begin{aligned} esc_e(f) &= \sup_{x,y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left( \sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left( \sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

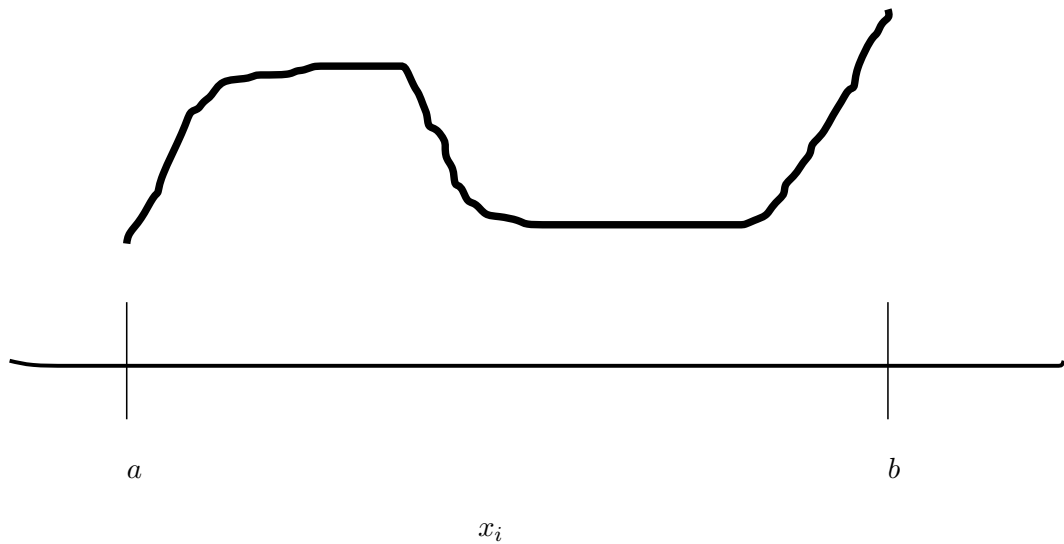


Рис. 2.3: График функции

Пока предполагаем, что  $f$  ограничена. Просуммируем отрезки  $J_1, \dots, J_N$  из разбиения отрезка  $J$ .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \bar{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

**Designation.**  $A$  — множество всех нижних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

$B$  — множество всех верхних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

**Statement.** Пусть  $\{A, B\}$  — щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это  $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$  (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от  $f$ )

**Statement.**  $\{A, B\}$  — щель.

*Доказательство.*  $\varepsilon$  — разбиение отрезка  $J_i$ .  $\underline{S}_{\varepsilon}(f)$ ,  $\overline{S}_{\varepsilon}(f)$  — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что  $\underline{S}_{\varepsilon}(f) \leq \overline{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$  — разбиение  $J_i$  :  $\mathcal{F}$  — измельчение  $\mathcal{E}$ , если  $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$ .

**Lemma.** Если  $\mathcal{F}$  — измельчение для  $\mathcal{E}$ , то

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geq \underline{S}_{\mathcal{E}}(f), \quad \overline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{E}}(f).$$

**Lemma.** Рассмотрим  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — разбиения отрезка  $J_i$ . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — разбиения.  $\mathcal{F}$  — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f).$$

Следовательно,  $\{A, B\}$  — щель. □

*Note.* Определенные величины  $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$  законны.

**Def 19.**  $f$  называется интегрируемой по Риману, если  $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

**Ex.**

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману.  $\varphi$  — ступенчатая функция на  $J$ , Существует разбиение  $\underline{S}$  отрезка на  $J$ .  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда  $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}(\varphi) = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

**Theorem 24.** Если  $J$  — замкнутый отрезок ( $J = [a, b]$ ),  $f$  — непрерывная функция на  $J$ , то  $f$  интегрируема по Риману.

*Note.* Пусть  $J$  — произвольный отрезок,  $f$  — ограниченная функция на  $J$ ,  $\mathcal{E}$  — разбиение отрезка  $J$  на непустые отрезки  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^k |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^k |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^k |e_i| \left( \sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \right) = \sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f \end{aligned}$$

*Note.*  $f$  интегрируема по Риману  $\iff$  щель  $(A, B)$  — узкая  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данных обозначениях измельчения можно считать, что  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$  // возможно, здесь должно быть что-то другое



**Theorem 25** (Критерий интегрируемости по Риману).  $f$  интегрируема по Риману на  $J$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $e_1, \dots, e_k$  Отрезка  $J$ , такое что

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f < \varepsilon. \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Проверим, что  $f$  удовлетворяет условию 2.1  $f$  равномерно непрерывна по теореме Кантора 9:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — столь мелкое разбиение отрезка  $[a, b]$ , что  $\forall i : |e_i| < \delta$ . Тогда  $\forall i : \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon$ .

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon \sum_{i=1}^k |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

**Property.** 1.  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle \implies f$  интегрируема.

2.  $\Sigma$  — разбиение,

$$\bar{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$

3. Если  $\alpha > 0$ ,

$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если  $f$  интегрируема и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f$  интегрируема и  $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5.  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены.  $\Sigma$  разбиение.

$$\bar{S}_\Sigma(f + g) \leq \bar{S}_\Sigma(f) + \bar{S}_\Sigma(g).$$

6.

$$\underline{S}_\Sigma(f + g) \geq \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$

7. Если  $f, g$  интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f + g$  интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8.  $f, g$  интегрируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность.  $f \geq 0$ ,  $f$  интегрируема по Дарбу. Тогда,  $I(f) \geq 0$ .

10.  $f, g$  интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot g$  интегрируема.

*Доказательство.*

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть  $J$  — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

$f, g$  интегрируемы, тогда  $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда  $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$ .

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11.  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $J \subset \langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot \chi_J$  интегрируема. ( $\chi_J$  равна единице на  $J$  и нулю на остальных точках)

Если  $J = \{c\}$ , то  $I(f\chi_J) = 0$ .

12.  $J_1, J_2$  — два подотрезка, такие что  $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$ . Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла.  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $|f| \leq M$  на  $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

**Designation.**  $I(f\chi_J)$  не зависит от того, включает ли  $J$  концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{\langle c, d \rangle}).$$

**Designation.** Если  $d < c$  :

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

**Statement.**  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

### 2.10.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная функция  $f$ , если  $F$  дифференцируема и  $F' = f$ .

**Theorem 26** (Ньютон-Лейбниц). Пусть  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$  и непрерывна в точке  $t \in \langle a, b \rangle$ . Пусть  $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$ . Тогда  $F$  дифференцируема в точке  $t$  и  $F'(t) = f(t)$ .

*Доказательство.*  $x \neq t$ .

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t) ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

$f$  непрерывна в  $t$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ . Если  $|s - t| < \delta$ ,  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

**Corollary.** Если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $\forall t_0 \in [a, b] : F$  — первообразная  $f$ .

**Corollary** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $F$  — первообразная  $f$ . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Def 20.**  $f \in C^k \langle a, b \rangle$ ,  $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$ , если  $f, f', \dots, f^{(k)}$  непрерывны.

**Theorem 27.** Если  $f, g \in C^1(a, b)$ , то

$$\int_a^b f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

$$\text{где } \Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

### 2.10.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и  $f, g, f', g'$  непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть  $\Phi$  — первообразная для  $f'g$ . Запишем первообразную для  $fg'$

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим  $u|_y^x = u(x) - u(y)$ .

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

**Theorem 28.**  $f_n, f$  — заданы на  $\langle a, b \rangle$ ;  $n \in \mathbb{N}$  Пусть

1. все  $f_n$  интегрируемы по Риману на  $\langle a, b \rangle$
2.  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

*Доказательство.*

**Lemma.**  $E$  — множество,  $u, v$  — вещественные функции на  $E$ .  $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \forall x \in E$ . Тогда  $|\text{osc}_E(u) - \text{osc}_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|\text{osc}_{\langle a, b \rangle} - \text{osc}_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$  — отрезки  $\langle a, b \rangle$ :

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно,  $f$  интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \exists M : \forall n \geq M \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

**Statement.** Если  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$ , то  $|f|$  тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

## 2.11 Логарифм и экспонента

Пусть функция  $l$  удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать  $l$ , заданную на  $\mathbb{R}_+$ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

**Def 21.** Логарифм — строго монотонная функция, заданная на  $\mathbb{R}_+$ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

**Statement.** Для  $n \in \mathbb{N}$ :

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

**Statement.** Если  $l$  — логарифм,  $c \neq 0$ , то  $cl$  — тоже логарифм.

**Lemma.** Если  $l$  — логарифм, то  $l$  непрерывна на всей области определения.

*Доказательство.* Пусть  $l$  — логарифм. Считаем, что  $f$  строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что  $t = l(1) = 0$ . Пусть  $t > 0$ .

$$l((1+x)^2) = 2l(1+x).$$

При  $x \rightarrow 1+$  получаем, что  $t = 0$ . Если  $x \rightarrow 1-$ , получаем то же самое. Значит  $l$  непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке.  $\square$

**Lemma.** Если  $l$  — логарифм, то функция  $l$  дифференцируема.

*Доказательство.*

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

$\Phi$  дифференцируема.

$$\Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) =$$

$$x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x})d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy =$$

$$\Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$ . А  $\Phi$  дифференцируема, следовательно,  $f$  тоже дифференцируема.  $\square$

**Theorem 29** (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$ . Зафиксируем  $y$  и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

**Theorem 30.** Если  $l$  логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

*Доказательство.* Только что доказали. □

**Theorem 31.**  $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$  — логарифм.

Сама  $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

**Theorem 32.** Если  $C \neq 0$ , то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

*Доказательство.* Достаточно доказать теорему для  $C = 1$ .

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если  $x_1 > x$ ,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно,  $\varphi$  строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

□

**Designation.** Натуральный логарифм —

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

**Property.**  $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

**Statement.** Образ функции  $\log$  есть все вещественные числа.

*Доказательство.* При  $x_1 > x$ ,  $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$ . Рассмотрим  $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$ :

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$ . □

**Def 22** (Обратная функция к логарифму). У функции  $\log$  есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

**Property.** 1.  $\exp$  строго возрастает

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

**Statement.** Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

**Statement.**

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть  $f$  имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Ряд Тейлора для  $f$  в окрестности точки  $x$ :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

**Theorem 33.** Ряд Тейлора для экспоненты,  $x_0 = 0$ :

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого  $x$  этот ряд сходится к  $\exp(x)$ , сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

*Доказательство.*

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем  $R > 0$ , пусть  $|x| \leq R$ . Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

**Лемма.** Пусть  $a_0, a_1, a_2 \dots$  — положительные числа и  $\exists N : a_j < \eta < 1 \quad \forall j > N$ . Тогда  $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

**Corollary.** Если  $a_j \geq 0$ ,  $a_j \rightarrow 0$ , то  $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме  $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$  стремится к нулю. Доказали равномерную сходимость.  $\square$

*Note.*

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

**Corollary** (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

*Доказательство.*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

$\square$

*Note.*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

**Corollary.**

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Ex** (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

$g$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

Если  $x \neq 0$ ,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2 \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$



$g$  дифференцируема в нуле и  $g'(0) = 0$ .

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j - \text{полином.}$$

Значит,  $g$  бесконечно дифференцируемая функция и  $g^{(j)}(0) = 0$ .

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к  $g$ .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

$h$  — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

**Corollary.** Пусть  $I = (a, b)$ ,  $a < b$ . Существует бесконечно дифференцируемая функция  $u$  :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$

**Designation.**  $l$  — логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

Такое число называется основанием логарифма  $l$ .

*Note.*  $l = \log$ . Тогда основание равно  $e$ .

**Designation** (общий случай).

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

$a$  — ан для  $l$ .

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием  $a$  так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

**Designation.** Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

*Note.* Натуральная степень:  $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \dots \log u}_n) = u^n$

$$\text{Целая отрицательная степень: } \exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$$

$$\text{Рациональная степень: } v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

**Property.**

1.  $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \log u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$
2.  $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$
3.  $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_1 \log u) = u^{v_1 v_2}$

### 2.11.1 Показательная функция

**Def 23.** Показательная функция  $f(x) = a^x$ .

**Property.**  $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

**Property.**  $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

**Def 24.** Пусть  $a \neq 1$ .

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

### 2.11.2 Степенная функция

**Def 25.** Степенная функция  $g(x) = x^b$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Statement.**

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

**Statement.** Если  $a > 1$ , то  $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x)$ ,  $x \rightarrow \infty$

*Доказательство.*

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{b \log x - x \log a}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Practice.*

$$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

**Statement.** Ранее доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится при любых  $x$ . Экспонента равномерна на любом конечном отрезке.

Ряд для  $e^x$  по степеням  $(x - x_0)$ :

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0)^n \quad (2.3)$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

**Ex.**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$  — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную:  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$  сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз.  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad (2.4)$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

**Statement.** В 2.3 общий член стремиться к нулю, если  $|x| > 0$ .

*Доказательство.*

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим  $n = 2k$  :

$$\left( \frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

### 2.11.3 Разложение Тейлора для логарифма

**Theorem 34** (разложение Тейлора для  $\log(1+x)$  центром в 0).

$$f(x) = \log(1+x), \quad f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f^{(2)} = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) (1+x)^{-n}.$$

*Запишем локальную формулу Тейлора:*

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^k \frac{\log^{(n)}(1)}{n!} x^n + \frac{\log^{(k+1)}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

*Тогда*

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

**Statement.**  $e^x = \lim_{n \rightarrow 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

*Доказательство.*  $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \rightarrow 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

**Statement.** Ракскладывается ли логарифм ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (2.5)$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n} |x|^n \leftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только  $x \in (-1, 1]$ .

**Theorem 35.**  $x \in (-1, 1]$ . Тогда ряд 2.4 равномерно сходится равномерно на любом  $(r, 1]$ ,  $r > -1$ .

*Доказательство.* 1.  $x \in [0, 1]$ .

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \leq \frac{1}{k+1}, \quad c \in lra \quad (2.6)$$

В частности,  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

2.  $-1 < x \leq 0$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \leq \left( \frac{1}{1-|x|} \right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \left( \frac{|x|}{1-|x|} \right)^{k+1} \quad (2.7)$$

Удачным случаем 2.6 будет  $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $x \in (-\frac{1}{2}, 0]$ . Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой:  $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$ . Подставим  $x = -x$ :

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dx &= \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}. \\ \log(1+t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \quad -1 < t \leq 0, t < x \leq 0. \\ \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^t \left( \frac{|x|^n}{1-|x|} \right) dx \leq \frac{1}{1-|t|} \int_0^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1}. \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ,  $t > -1$ , если  $t \in (-1, 0]$ ,  $|t| \leq r < 1$ , равномерно сходится. Удачный случай:  $\leq \frac{1}{1+|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1} \leq \frac{1}{1-r} \frac{1}{n} r^n$ . □

*Note.* Логарифм — аналитическая функция.

*Доказательство.* Выберем  $\left| 1 - \frac{x}{x_0} \right| < 1$ .

$$\log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right)^n.$$

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \frac{1}{x_0} (x - x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

### 2.11.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

$f$  имеет  $n + 1$  производную на отрезке  $I$ ,  $t, a \in I$ .

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \int_a^t f'(x) d(x - t) = f'(x)(x - t) \Big|_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x - t) dx = \\ &= f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx. \end{aligned}$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx.$$

И так далее

**Theorem 36.**  $f$  имеет  $n + 1$  производную на отрезке  $I$ ,  $t, a \in I$ .

$$f(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t - a)^j + \frac{1}{n!} \int_a^t f^{(n+1)}(z)(t - x)^{n+1} dx.$$

**Ех.**  $x \rightsquigarrow u$ ,  $x = a(1 - u) + tu$   
 $u \in [0, 1]$ ,  $dx = (t - a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1 - u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t - a) = \\ &= (t - a)(1 - u) \end{aligned}$$

$$r_n(a, t) = \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(a(1 - u) + tu)(t - a)^n (1 - u)^n (t - a)^n du.$$

Если  $a = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m, \quad m \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m - 1)(1 + x)^{m-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m - 1) \dots (m - k + 1)(1 + x)^{m-k} \end{aligned}$$

**Designation.**

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m - 1) \dots (m - k + 1)}{k!}.$$

$$|x| < 1$$

$$(1 + t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m - 1) \dots (m - n)(1 + tu)^{m-n-1}(1 - u)^n du.$$

**Theorem 37** (Ряд Ньютона). Ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} t^k$$

сходится к  $(1+t)^m$ , при  $|t| < 1$

*Доказательство.*  $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1) \dots (m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$ .  $0 \leq t < 1$ .

$$|R_n(t)| \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right|.$$

□

**Theorem 38.**  $R_n(t) \rightarrow 0$  при  $|t| < 1$ , и сходится равномерно при  $|t| < \phi < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right| = I$

1. Сначала  $0 \leq t_0$ :

$$I \leq \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \leftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \leq t^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| \frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|m-n-1|}{n+2} t.$$

$t < 1$ ,  $t + \varepsilon < 1$ , следовательно, рано или поздно  $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} < t + \varepsilon$

2. Следующий случай  $-1 < t < 0$  Подынтегральное выражение:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right|^n \left| \frac{1}{1+tu} \right|^{m-1}.$$

$$1 + |t| \geq |1+tu| \geq 1 - |t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right| \leq \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1 - \left( n \frac{1-|t|}{1-|t|u} \right).$$

Это не превосходит  $1 - n(1-|t|)$ .

Второй множитель:

(a)  $m \leq 1$

$$\left| \frac{1}{1+tu} \right|^{-m+1} \leq \left( \frac{1}{1-|t|u} \right)^{-m+1} \leq \left( \frac{1}{1-|t|} \right)^{-m+1}.$$

(b)  $m > 1$

$$|1+tu|^{m-1} \leq (1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку  $C_m(t)$ .

$$\begin{aligned} I &\leq C_m(t) \int_0^1 (1 - n(1 - |t|)) du = C_m(t) \left( -\frac{1}{1 - |t|} \right) \frac{1}{n+1} (1 - n(1 - |t|))^{n+1} \Big|_{n=0}^{n=1} = \\ &= C_m(t) \frac{1}{1 - |t|} \frac{1}{n+1} (1 - |t|^{n+1}) \leq C_m(t) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Получили

$$R_n(t) \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \frac{1}{n+1} \bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} |t| \left| \frac{m-n+1}{n+2} \right| \leftarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leq \rho \quad \sigma_n(t) \leq A\rho^{n-1}, \quad |t| \leq \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

$x, x_0 > 0$

$$\begin{aligned} x^m &= x_0^m \left( \frac{x}{x_0} \right)^m = x_0^m \left( 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) \right)^m = \\ &= x_0^m \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right) = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

**Theorem 39** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). Если  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз на отрезке с концами  $a, t$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \quad (2.8)$$

**Statement.** Если  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз:

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t : R_n(t, a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (2.9)$$

*Note.* Если  $f \in C^{(n+1)}$ , то 2.8 можно вывести из 2.7.

**Theorem 40** (о среднем).  $\varphi, \psi$  — функции на  $[c, d]$ ,  $\varphi$  непрерывна,  $\psi$  — интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда

$$\exists \psi \in [c, d] : \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\psi) \int_c^d \varphi(x) dx.$$

*Доказательство.* Можно считать, что  $\psi \geq 0$ . Пусть  $m = \min_{x \in [c, d]} \varphi(x)$ ,  $M = \max_{x \in [c, d]} \varphi(x)$ .

$$m \int_c^d \varphi(x) dx \leq \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx \leq M \int_c^d \varphi(x) dx.$$

$$m\psi(x) \leq \varphi(x)\psi(x) \leq M\psi(x).$$

Если  $\int_c^d \psi(x) dx = 0$ , теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leq \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx} \leq M.$$

Следовательно,

$$\exists \zeta \in [c, d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx}.$$

□

**Statement** (оценка остатка).

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists \zeta : R_n(t, a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} \left[ -(t-x)^{n+1} \Big|_{x=a}^{x=t} \right] = f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

## 2.12 Дифференциальные уравнения

$$\Phi(f'(t), f(t), t) = 0.$$

**Theorem 41.** Пусть  $f$  — непрерывная дифференцируемая функция на  $(a, b)$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a, b)$
2.  $\exists A : f(t) = Ae^{ct}$

*Доказательство.*  $2 \implies 1$  — очевидно

$1 \implies 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда  $g(t) \equiv A \in R$ .

□