Лекция 11: †

23 Apr

Definition 1

Рассмотрим $\sum_{k=}^{\infty} a_k$. $\sum_{k=1}^{A_k}$ — Группировка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если $A_1 = a_1 + \dots a_{n_1}$, $A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$, то есть n_j — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. $A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k$.

Theorem 0.0.1 (о группировке)**.**

1. *Если ряд сходится, его группировка тоже сходится, причем* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.
2. *Пусть* $a_n \to 0$ *и в каждом* A_k *не более* L *слагаемых. Тогда, если* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, то* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

   Доказательство. Рассмотрим $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $n_j < n \leqslant n_{j+1}$. Посмотрим на S_{n_j} и $S_{n_{j+1}}$.

   $$\exists \varepsilon.$$

   TODO: дописать доказательство □

3. *Пусть ряд числовой. Для любого* A_k *в сумме участвуют только слагаемые одного знака.*

   Доказательство. Если $n_i < n < n_j$, то S_n лежит между S_{n_j} и S_{n_i}. Можно добиться, чтобы расстояния были меньше ε, тогда и S_n будет отличаться на малую величину. □

0.1 Положительные ряды

Definition 2: положительный ряд

Числовой ряд называется положительным, если все его члены неотрицательны.

Property.

1 *Ряд сходится тогда и только тогда, когда* $\{S_n\}$ *ограничена (сверху).*

Признак сравнения $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *то*

1. $\sum_{=1}^{\infty} b_n$ *сходится, тогда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, тогда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *Тоже расходится.*

2' $0 \leqslant a_n, b_n$, $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ *и* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *сходится, тогда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2" $0 \leqslant a_n, b_n$, *если* a_n b_n, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*

Признак Коши *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *и* $q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. $q < 1$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*
2. $q > 1$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*

Доказательство.

1. Выберем $0 < \tilde{q} < 1$, с некоторого места мы не выходим сильно правее q, поэтому $\exists N\ \forall n > N\colon \sqrt[n]{a_n} < \tilde{q}$, тогда $a_n < (\tilde{q})^n$.
2. $\forall N \exists n > N\colon a_n > 1 \Longrightarrow a_n \not\to 0$, следовательно, ряд расходится.

□

Признак Даламбера *$a_n > 0$ и $\exists \lim_{nto+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда*

1. *$q > 1$, то ряд расходится*
2. *$q < 1$, то ряд сходится*

Доказательство.

1. $a_{n+1} > a_n$, пожтому ряд точно не сходится.
2. Возьмем $q < \tilde{q} < 1$, тогда $\exists N\ \forall n > N\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q}$. Запишем
$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N < (q)^{n-N+1} \cdot a_{N^2} = C(\tilde{q})^{n+1}.$$

□

Интегральный признак *Пусть $f \geqslant 0$, монотонно убывает $f :: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Тогда*
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ сходится } \Longleftrightarrow \int_1^n f(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство. Просто смотрим по определению интеграла. □

0.2 Числовые ряды с произвольными членами

Definition 3

$x_k \in X$ — нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Property.

1 *$\sum x_k, \sum y_k$ абсолютно сходятся, α, β — скаляры. Тогда ряд $\sum(\alpha x_k + \beta y_k)$ абсолютно сходится, так как*
$$\|\alpha x_k + \beta y_k\| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|x_k\| + \|\beta\| \cdot \|y_k\|.$$

2 *Если $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, то $\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, так как*
$$\|S\| \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \|S_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

3 *X — полное нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.*

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N, p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$, следовательно, $\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$. Получили, что $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. □

4 *В полном нормированном пространстве $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится условно, тогда $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ сходится условно.*

5 *X — полное, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}$*

Definition 4

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, он называется условно сходящимся.

Lemma 1 (преобразование Абеля). *Пусть* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *— последовательности. Пусть* $A_n = \sum_{k=1}^n a_n, \ A_0 = 0$. *Рассмотрим*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (Ak - A_{k+1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k + 1 = A_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Получили дискретный аналог интегрирования по частям.

Theorem 0.2.1 (Признаки Дирихле и Абеля). $\{a_n\}, \{b_n\}$ *— числовые последовательности.* b_n *— монотонная последовательность,* $b_n \in \mathbb{R}, a_n in \mathbb{C}$

Признак Дирихле $\{A_n\}$ *— ограниченная последовательность,* $b_n \to 0$.

Признак Абеля $\sum_{k=1}^n a_k$ *сходится,* b_n *ограничено*

тогда $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство.
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$
Первое слагаемое сходится при условии обоих признаков.

Для признака Абеля сразу все хорошо: второе слагаемое сходится.

Для признака Дирихле проверим $\sum_{k=1}^\infty |A_k (b_k - b_{k+1})| \leqslant X \sum_{k=1}^\infty |b_k - b_{k+1}|$ В атом случае сходится даже без модуля $\sum_{k=1}^\infty b_k - b_{k+1}$, так как $\sum_{k=1}^n b_{n+1} - b_1$. □

Theorem 0.2.2 (Признак Лейбница). b_n *убывает к нулю, тогда ряд* $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n$ *сходится.*

Доказательство. $a_n = (-1)^n$, $A_n \in \{1, 0\}$ — ограничено. По признаку Дирихле ряд произведения сходится. □

Note. $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$, S — сумма ряда. Тогда $|S - S_n| \leqslant b_{n+1}$.

Example 0.2.1 (Ряд Лейбница).

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \text{ сходится условно }.$$

Example 0.2.2.

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ тоже сходится условно.}$$

Example 0.2.3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} \text{ сходятся.}$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \sum_{k=1}^{n} \Im(x \cos k i \sin k) = \Im \sum_{k=1}^{n} e^{ik}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik} = e^i \frac{e^{n_i} - 1}{e^i - 1} = e^i (e^{\frac{ni}{i}} \frac{e^{\frac{ni}{2} - e^{-\frac{ni}{2}}} e^{i\frac{i}{2}(e^{i\frac{i}{2}} - e^{-i\frac{i}{2}})}}{=} e^{\frac{n+1}{2}i} \frac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

Для косинуса аналогично.

Theorem 0.2.3 (О перестановке сленов абсолютно сходящегося ряда). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — абсолютно сходящийся ряд. $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ сходится к той же сумме.*

Доказательство. 1. $a_k > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$

$$\forall n \ \exists n_1, n_2 \colon S_n \leqslant T_{n_1} \leqslant S_{n_2} \implies T_n \to S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

2. $a_k \in \mathbb{R}$. Запишем $a_k = (a_k)_+ - (a_k)_-$, $|a_k| = (a_k)_+ (a_k)_-$. Тогда

$$\sum |a_k| \text{ сходится } \implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+, \ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- \text{ сходятся..}$$

Применим прошлый пункт: $\sum (a_k)_\pm = \sum (a_{\varphi(k)})_\pm$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(t)}.$$

3. $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k = b_k + i c_k$. Применяем второй пункт.

□

Theorem 0.2.4 (Теорема Римана). *$a_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Тогда*

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}} \ \exists \varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$$

Theorem 0.2.5 (Коши об умножении рядов). *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ — абсолютно сходящиеся численные ряды. Тогда $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n$ сходится при любых порядках слагаемых, при этом $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*

Доказательство. Пусть $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_k, \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \overline{A_n}, \sum_{k=1}^{\infty} = A, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \overline{A}$, аналогично для b.
Зафиксируем на множестве пар некоторый порядок.
S_m — частичная сумма $\sum |a_k||b_n|$, N — максимальный из встречающихся индексов.

$$S_m \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k| \sum_{k=1}^{N} |b_k| \leqslant \overline{AB} \implies \text{ hряд } \sum |a_k||b_n| \text{сходится.}$$

Теперь просуммируем по квадратам

$$n^2 \leqslant m < (n+1)^2.$$

$$S \leftarrow S_{n^2} = A_n \cdot B_n \to A \cdot B.$$

$$|S_{n^2} - S_m| \leqslant |a_{n+1}| \cdot \overline{B} + |b_{n+1}| \cdot \overline{A} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Definition 5: Произведение рядов по Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды. $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots a_n b_1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется произведением рядов.

Theorem 0.2.6 (Мергенс). *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и равно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Theorem 0.2.7 (Абель). *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*

Example 0.2.4. $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow |a_n| \geqslant 1$

0.3 Бесконечные произведения

Definition 6

Частичные произведения $\prod_{k=1}^{n} p_k = P_n$. Частичные произведения сходятся к Pесли $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P$ и $P \neq 0, P \neq \infty$. Если $P = 0$, говорят, что расходится к 0, если к $\pm\infty$, говорят, что расходится к $\pm\infty$.

Example 0.3.1.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

Example 0.3.2.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}(\text{формула Ваниса}).$$

Property. *Будем считать, что $p_n \neq 0$.*

$\boxed{1}$ *$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, тогда $p_n \to 1$*

$\boxed{2}$ *Первые несколько слагаемых ряда можно отбросить, на сходимость это не повлияет*

$\boxed{3}$ *Всегда можно считать, что $p_n > 0$*

$\boxed{4}$ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \textit{ сходится} \Longleftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \ln p_n \textit{ сходится.}$$

$\ln P_n = S_n$

Example 0.3.3. Пусть p_n — n-ое простое число.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} \stackrel{?}{=}.$$

Оценим

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_k - 1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{p_k^m} = \sum_{0 \leqslant \alpha_j \leqslant n} \frac{1}{p_1^{\alpha_j} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right), \; \ln\left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится.

Следовательно,

$$\stackrel{?}{=} \sum \frac{1}{p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots p_s^{\alpha_s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to +\infty.$$