Конспект по матанализу I семестр (лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 27, 2019

Contents

[section]

Chapter 1

Непрерывные функции

1.1 Определения, свойства

1.2 Теоремы

1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

1.2.2 Теорема о промежуточном значении

1.3 Степени с рациональным показателем

1.4 Равномерная непрерывность

1.4.1 Теорема Кантора

Chapter 2

Дифференцирование

2.1 Определения

2.2 Правила дифф

2.3 Сходимость последовательностей

Theorem 2.3.1. $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leq M$
2. f *– ограничена:* $|f(n)| \leq M \forall x \to \exists N \exists A :$
   $|f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Proof. Очевидно □

Theorem 2.3.2. $f_n \rightrightarrows f, g_n \to\to g$ *на* A*. Пусть* $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n)x)| \leq M$*. Тогда* $f_n g_n \rightrightarrows fg$

Proof.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 2.3.3. *Критерий Коши для равномерной сходимости Пусть* f_n *– последовательность функций на множестве* A*. Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Proof. Необходимость.
Пусть $f_n \rightrightarrows f, \quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall xinA.$

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.
Пусть 2.3.3 выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см 2.3.3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N.$ □

Example. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс): } f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 2.3.4 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n – функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Proof. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N.$

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

□

Example (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

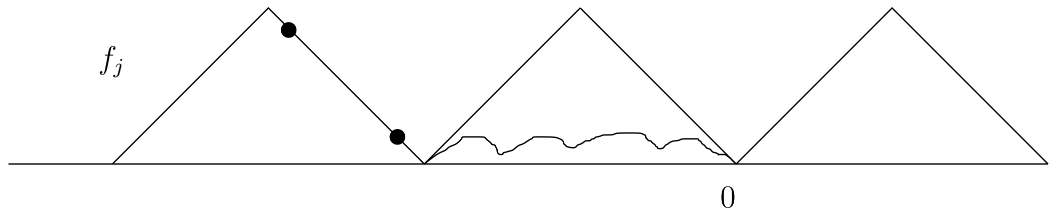

Figure 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}}: \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty}(f_j(x+h_k)-f_j(x))h_k = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{f_j(x+h_k)-f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k ($\pm$), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Name. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ – сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x)\dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Example. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{t}{n}+|x|}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+|x|}} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geq 1|.$$

Theorem 2.3.5. $f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a,b\rangle$ *и* $f' = g$.

Proof. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y_)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right|.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y}-\frac{f(x)-f(y)}{x-1}\right|<\varepsilon,\quad \forall x,y\in\langle a,b\rangle.$$

Оценим разность. Зафикируем x.

$$\exists\delta>0:|x-y|<\delta\wedge x\neq y\to|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y}f_k'(x)|<\varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k,x:

$$|y-x|<\delta,y\neq x\to|f_k'(x)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|\leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x-y|<\delta\to|g(x)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|\leq 3\varepsilon.$$

$\square$

2.4 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a,b\rangle$. $g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$

Def 1. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a,b\rangle y$ и $f'=g$ всюду.

Theorem 2.4.1 (Ньютон, Лейбниц)**.** *Если g – непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f'=g$, то $(f+c)'=g$ для любой константы c.*

Theorem 2.4.2. *Если f_1,f_2 – первообразные для g, то $f_1-f_2=const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha\neq-1$
$\frac{1}{x}$	$\log x+c,\ \alpha\neq-1$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$arctgx+c$
e^x	e^x+c

Name. Пишут:

$$f=\int g \text{ или } f(x)=\int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 2. Линейная функция – это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b \rangle$; Φ – отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b \rangle$, $\Phi(x)$ – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 3 (дифференциал)**.** f – дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Example. $x : \langle a, b \rangle \to \langle a, b \rangle$ – тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, *где* c *- некая функция на* $\langle a, b \rangle$

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdg.$$

Example.

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{gathered} \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos t dt = \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) = \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) \end{gathered}$$

Тогда $\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -fdy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Example.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Example.

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx.$$

$$= \sin x e^x - \int xosxde^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.5 Интеграл

Def 4. A – множество произвольной природы. $\Phi : A \to \mathbb{R}$. Φ – функционал на A.

Def 5. Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
$f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \Longrightarrow \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle, f = \Phi(\chi)\langle c, d\rangle = d - c.$$