Конспект по матанализу
II семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

20 марта 2020 г.

Оглавление

1 Интергирование **2**

1.1 . . . 2

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме . . . 2

1.1.2 Теорема о среднем . . . 3

1.2 Приближенное вычисление интеграла . . . 3

1.3 Приближенное вычисление интеграла . . . 4

1.3.1 Свойства . . . 5

1.4 Вычисление площадей и объемов . . . 9

1.4.1 Площади . . . 9

1.4.2 Объемы . . . 10

1.5 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади . . . 13

1.5.1 Поговорим о длине . . . 13

1.5.2 Важные частные случаи общей формулы . . . 16

2 Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных **17**

2.1 Нормированные пространства . . . 17

2.1.1 Продолжение примеров . . . 19

2.2 Сжимающие отображения . . . 20

2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы) . . . 23

2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов . . . 26

2.3 Дифференциальные отображения . . . 27

2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования . . . 29

2.5 Частные производные . . . 31

2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m,\ Y = \mathbb{R}^n$ . . . 31

2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа) . . . 33

Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x-x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1.1.1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1}(\langle a,b \rangle),\ x, x_0 \in (a,b)$*. Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде*

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Переход: $n-1 \to n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x-t)^{n-1}dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 1.1.2 (Хитрая теорема о среднем)**.** $f, g \in C[a,b]$, $g \geqslant 0$. *Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary. Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 1.1.3. *Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.*

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \Theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 1.1.2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\Theta)\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^x.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Definition 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a,b]$.
Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1}x_i)$.
Θ называется оснащением дробления τ, если $\Theta = \{t_1, \dots t_n\} : t_j = [x_{j-1}, x_j]$.

Пара (τ, Θ) называется оснащенным дроблением.

Definition 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a,b]$, (τ, Θ) — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$, интегральной суммой называется

$$S_{\tau,\Theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Theorem 1.2.1. *$f \in C[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (\tau, \Theta)$ — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$, $|\tau| < \delta :$*

$$\left| S_{\tau,\Theta}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau| \to 0} = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall s, t \in [a,b] : \left(|s - t| < \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_i)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big| f(t_j) - f(c_j) \Big| (x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{|b-a|} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла

Definition 3: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}, \ a < x_0 < \ldots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a,b]$.

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \ldots t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, Θ)

Definition 4

$f \in C[a,b]$, (Θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$. Тогда

$$S_{\tau,\Theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j+1})$$

называется **интегральной суммой**.

Theorem 1.3.1. $f \in C[a,b]$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такие, что для любого оснащенного дробления* (τ, Θ) *отрезка* $[a,b]$, $|\tau| < \delta$ *:*

$$\left| S_{\tau,\Theta}(t) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \to 0} S_{\tau,\Theta} \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. По теореме Канторая о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\big(\forall s,t \in [a,b], |s-t| < S \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}\big)$.

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(r_j)| \, (x_j - x_{j-1}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$. □

Лекция 2

21 feb

1.3.1 Свойства

Property.

1 $c \in (a,b)$:

$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b}.$$

2 $\int_a^{\to b} f dx$ *— сходится* $\Longrightarrow \lim_{A \to b} \int_A^{\to b} f = 0$

2' *Если* $\int_A^{\to b} f \not\to_{A \to b-} \Longrightarrow \int_a^{\to b}$ *расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).*

линейность f, g *— функции на* $[a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{\to b}, \int_a^{\to b} g \text{ сходятся } \Longrightarrow \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} + \beta \int_a^{\to b} g.$$

монотонность $f \leqslant g, \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$ *сходятся.*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

Definition 5: Абсолютная сходимость

Говорят, что $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, *если сходится* $\int_a^{\to b} |f|$.

Если $\int_a^{\to b} f$ *сходится абсолютно, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится и верно неравенство*

$$\left|\int_a^{\to b} f\right| \leqslant \int_a^{\to b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ сходится } \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \Longrightarrow \left|\int_{B_1}^{B_2} f dx\right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left|\int_a^B\right| \leqslant \int_a^B |f| dx.$$

Definition 6: Условная сходимость

$\int_a^{\to b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} |f|$ расходится.

$\boxed{\text{интегрирование по частям}}$ $f, g \in C^1[a,b)$

$$\int_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g, \quad fg\Big|_a^{\to b} = \lim_{x \to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. □

$\boxed{\textbf{замена переменной}}$ $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b),\ \varphi \in C^1[\alpha,\beta), f \in C[a,b)$. *Если существует предел, обозначим его так:* $\exists \lim_{x \to \beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.

$$\int_\alpha^{\to beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy.$$

Доказательство. $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y)dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \to \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_\alpha^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} \to \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\exists \int_\alpha^{\to \beta} (f \circ g)\varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.
2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b),\ c_n \to b-\ \ \exists \gamma_{n\in[\alpha,\beta)} : \varphi(\gamma_n) = c_n$.
   Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β, либо к числу меньшему β.
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \beta$
   $$\int_\alpha^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k} = c_{n_k}}.$$
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \tilde{\beta} < \beta$
   $$\varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$
   Но должно быть равно b. Противоречие.

   Значит $\gamma_n \to b$.
   $$\int_{alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{phi(alpha)}^{phi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

Theorem 1.3.2 (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $0 \leqslant f \leqslant g,\ \ f, g \in C[a, b)$*. Тогда*

1. *если* $\int_a^{\to b} g$ *сходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,*
2. *если* $\int_a^{\to b} g$ *расходится, то* $\int_a^{\to b} f$ *расходится.*

Доказательство.

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) :\ \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Longrightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

Theorem 1.3.3 (Признаки Абеля и Дирихле)**.** $f \in C[a, b),\ \ g \in C^1[a, b)$*,* g *монотонна.*

Признак Дирихле *Если* f *имеет ограниченную первообразную на* $[a, b), g \to 0$*, то* $\int^{tb} fg$ *сходится.*

Признак Абеля *Если* $\int_a^{\to b} f$ *сходится,* g *ограничена, то* $\int_a^{\to b} fg$ *сходится.*

Доказательство. F — первообразная f. $F(B) = \int_a^B f$.
$$\int_a^{\to b} fgdx = \int_a^{\to b} gdF == Fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} Fg'dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B\to b-} F(B)g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.
$$\int_a^{\to b} Fg'dx \leqslant M \cdot \int_a^{\to b} |g|dx = M \cdot \left|\int_a^{\to b} g'dx\right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|.$$

□

Example 1.3.1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \leqslant C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \ \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^b = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\to\infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln\frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходтся.

Example 1.3.2.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{s^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leqslant 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ – ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ – убывает.

   Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

Example 1.3.3 (Более общий вид)**.**

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$, f монотонна.

Если при $x \to +\infty$ $f \to 0$, то интегралы сходятся,
Если при $x \to +\infty$ $f \not\to 0$, то интегралы расходятся.

Remark.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \to 0, \text{ при } x \to +\infty.$$

Practice.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится}, \ f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 \, dx \text{ сходится?}$$

1.4 Вычисление площадей и объемов

1.4.1 Площади

1. $f \in C[a, b], \ f \geqslant 0, \ P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \ y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x)dx$
2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b], \ f \geqslant g, \ T_{f,g} = \{(x, y) \mid xin[a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x)dx$

   Corollary (Принцип Кавальери)**.** Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

   Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \ \beta - \alpha \leqslant 2\pi, \ f \geqslant 0$, g непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [a, b], \ r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

Пусть τ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n, \quad \alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}}$, $m_j =$

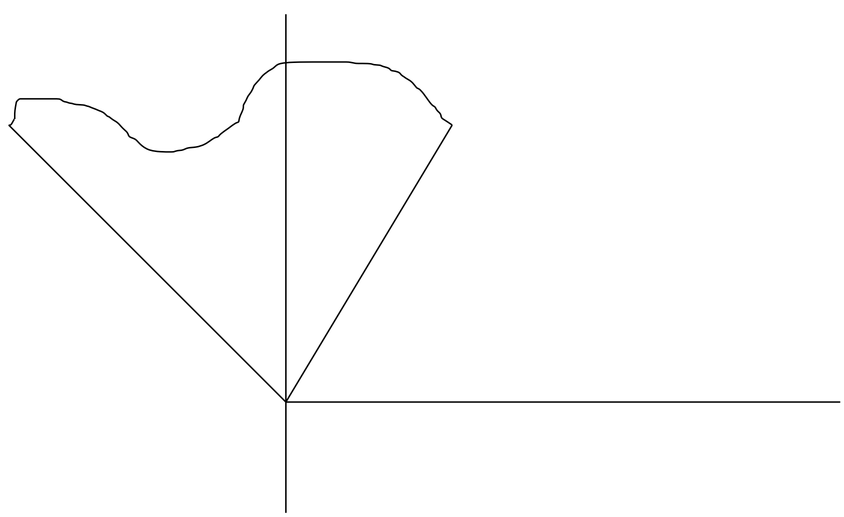


Рис. 1.1: sector

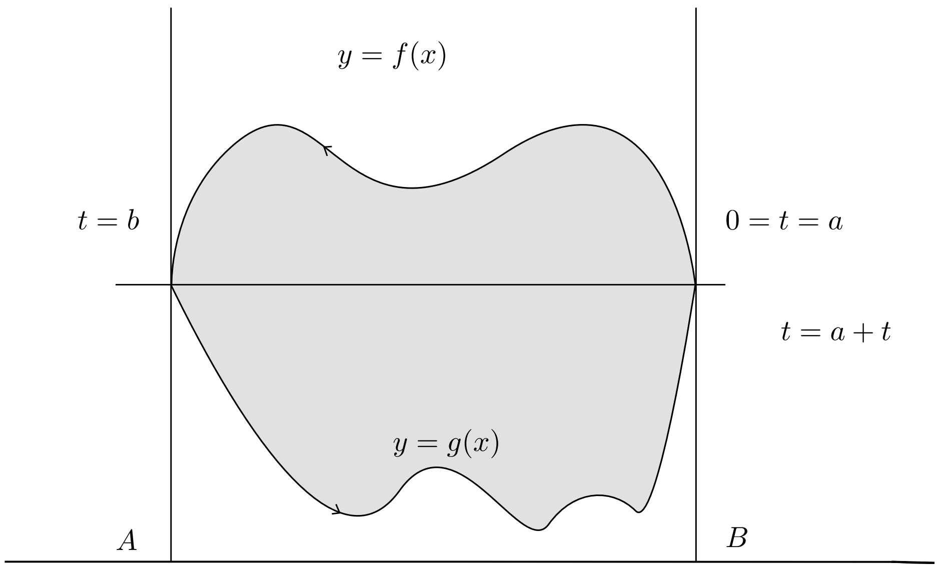
$\min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$.

$$\sum \frac{m_j^2}{2}(\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leqslant S(\tilde{P}_f) \leqslant \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$. Значит

$$S(\tilde{P}_f)\frac{1}{2}\int_a^b fst(\varphi)d\varphi.$$

4. Площадь фигуры, ограниченной праметрически заданной кривой. $x, y : \mathbb{R} to \mathbb{R}$. $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(T)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$



$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx.$$

$$\int_A^B g(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[b,a+T]\\ dx=x'(t)dt\\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t)dt$$

$$\int_A^B f(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[a,b]}}{=} -\int_b^a y(t)x'(t)dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx = -\int_a^{a+T} y(t)x'(t)dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t)dt.$$

1.4.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3,\ T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

Definition 7

Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

$\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение не T:

$$\forall \Delta \subset [a, b] \; \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta \; T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

Example 1.4.1. T — тело вращения, $f \in C[a, b]$, $f \geqslant 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x)\}.$$

Доказательство формулы. Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело T и τ дробление отрезка $[a, b]$. Поместим его между двумя цилиндрами.

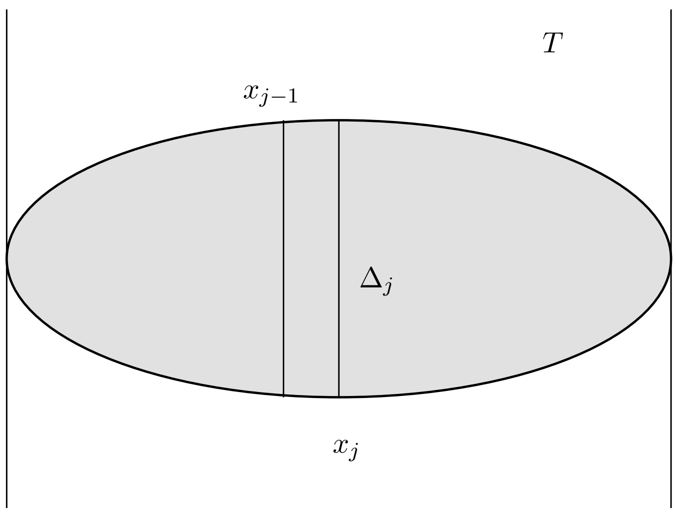


Рис. 1.2: cilinder

$$\sum (x_j - x_{j-1}) S(T(x_* \Delta_j)) \leqslant V \leqslant (x_j - x_{j-1}) S(T(x^* \Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы. □

Example 1.4.2 (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$T = \{0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+y^2)}\}$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} = Ie^{-x^2}.$$

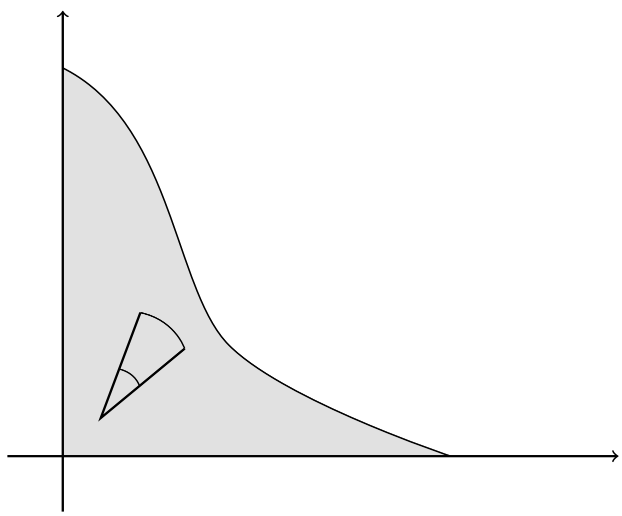


Рис. 1.3: Интеграл Эйлера-Пуассона

Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi(y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

1.5 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади

Definition 8: Путь

Путь в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C[a, b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),\ \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути — $\gamma(a)$, конец пути — $\gamma(b)$.
Носители пути — $\gamma([a, b])$.
γ замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.
$\gamma \in C^n[a, b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a, b] \iff \gamma$ — r-гладкий путь.
γ^{-1} — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a - b - t),\ \forall t \in [a, b]$.

Note. Разные пути могут иметь один общий носитель.

Definition 9

Два пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если существует строго возрастающая сюрьекция

$$\varphi : [a, b] \to [c, d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Statement. *Это отношение эквивалентности.*

Definition 10: Кривая

Кривая в $\mathbb{R}^n$ — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

Example 1.5.1.

$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t_0).$$

$$\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Можно определить:

начало кривой
- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривя r-гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

1.5.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ c \in (a, b)$.

$$\gamma = \gamma\,|_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma\,|_{[c,b]} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geqslant |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geqslant \sum_1^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$, где $\forall$ дробления $[a, b]$ $\tau = \{x_j\}$

Definition 11: Длина пути

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_\tau l_\tau$, где

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \ \tau = \{x_j\}_{j=0}^m .$$

Practice. Придумать пример бесконечно длинного пути.

Definition 12

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

Definition 13

Длина крвивой — длина любой из ее параметризаций.

Property.

$\boxed{1.}$ $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

$\boxed{2.}$ *Аддитивность*

$$\gamma : [a, b], c \in (ab) \qquad \gamma = \gamma \Big|_{[a,c]}, \ \gamma\gamma \Big|_{[c,b]} .$$

Тогда $l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma)$.

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ τ — дробление $[a, b]$.

$$\tau^l \left(\tau \cap [a, c] \cup \{c\}\right)$$
$$\tau^r = \left(\tau \cap [c, b] \cup \{c\}\right)$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1}| \leqslant l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{tau^r}(\gamma^r) \leqslant l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ τ^l — дробление $[a, b]$, τ^r — дробление $[c, d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$l(\gamma) \leqslant l_\tau(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r)$$
$$\sup_{\tau^l} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^l$$
$$\sup_{\tau^r} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^r$$

□

Theorem 1.5.1 (Длина гладкого пути)**.** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *— гладкий путь. Тогда* γ *обязательно спр и*

$$l(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt.$$

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \ldots \gamma_n'(\tau)\right).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma_1'(t)^2 + \ldots \gamma_n'(t)^2|}.$$

Доказательство. 1. $\Delta \subset [a,b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(m_j(\Delta))^2}, \qquad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a,b]$ чему равно $l(\gamma \big|_{\Delta})$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$. Тогда

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1}|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_\tau = \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k'(...)\right|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(x_j - x_{j-1})\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\gamma_k'(...)\right|^2}$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant l(\gamma \big|_{\Delta} \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

2.

$$\int_\Delta \left|\gamma_k'(t)\right| dt = \int_\Delta \sqrt{|\gamma_1'(t)|\, sr + \ldots |\gamma_n'(t)|}dt.$$

$$m(\Delta) \leqslant \max\sqrt{...} \leqslant M(\Delta).$$

$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant \int_\Delta \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

3.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : s,t \in [a,b],\ |s-t| < \delta \quad \forall j \in [1,k] : \left|\gamma_j'(s) - \gamma_j'(t)\right| < \varepsilon.$$

$$|\Delta| < \delta \Longrightarrow M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leqslant \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta) \leqslant \varepsilon n|$$

4. Теперь возьмем дробление $[a,b]$ на кусочки длиной меньше δ.

$$[a,b] = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant l(\gamma \big|_{\Delta_j} \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant \int_{\Delta_j}\left|\gamma'\right| \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$\sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{j=1}^{k} M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \int_a^b \left|\gamma'\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} M_{j=1}^{k} M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^{k} M(\gamma_j)\,|\Delta_j| - \sum_{j=1}^{k} m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^{k} |\Delta_i| = \varepsilon n(b-a).$$

□

Example 1.5.2. Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ \gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$$

1.5.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в $\mathbb{R}^3$.

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2| + |y'(t)^2| + |z'(t)^2|}.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a,b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a,b]\}$.

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha h}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Remark. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m,\ \Delta \subset [a,b]$ — отрезок.

$$l(\gamma\,\big|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{\left|\gamma'(t)\right| dt}_{\text{Дифференциал дуги}}.$$

Если f задана на носителе пути γ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t)\,|\gamma'(t)|\,dt$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

2.1 Нормированные пространства

Example 2.1.1. $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

Если $p = +\infty$, $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m}$.

Note. Все нормы в $\mathbb{R}^m$ эквивалентны.

Example 2.1.2. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ — непрервна}\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.1. *$C(K)$— полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундментальную последовательность функций $|f_n| \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальны, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \; \forall x \in K \;\; |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \to \infty$. $f_k(x) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. f_{n_0} — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| \, |f_{n_0}(x_1 - f(x_2)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K\ \ |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon}_{\max_{x \in K}|f - f_n| \leqslant \varepsilon}.$$

□

Example 2.1.3. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — ограничена$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.2. $l_\infty(X)$ — *полно.*

Доказательство. Аналогично. □

Note. $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

Note. Замкнутое подпространство полного пространства полно.

Example 2.1.4. $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b] \right\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Theorem 2.1.3. $(C^1[a, b], \varphi_3)$ *полно.*

Доказательство. $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \to_{n,kro\infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \to 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \to 0$. Тогда $\|f_n - f_k\| \to 0$ и $\|f'_n - f'_k\| \to 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f'_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, тое есть $\exists g = f'$.

2. $f_3(f_n - f) \to 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \to 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max \left|f'_n - g\right| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$= \left| f_n(x) - \left(\int_a^x f'_n(t)dt + f(a) \right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x \left(g(t) - f'_n(t)\right) dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x \left|g(x) - f'_n(t)\right| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2)$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \to f \wedge f'_n \to g$. □

Remark. $\|f_n - f\| \to 0, \quad f_n \in C(K) \Longrightarrow f \in C(k).$

$$x_k \to x_0 \Longrightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}(x_k) = f(n).$$

Remark. Из того, что $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ и $\|f_n' - g\|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Practice. $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$

Лекция 4

6 march

2.1.1 Продолжение примеров

1. $C_p[a,b] = \{f \in C[a,b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a,b]} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

   Это норма:

   - Не меньше нуля
   - $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
   - $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
   - Неравенство треугольника $\|f\| + \|g\| \geqslant \|f+g\|$ (сейчас доказывать не будем)

   Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

   Theorem 2.1.4 (без доказательства)**.** (X,ρ) *— метрическое пространство. Тогда* $\exists!(Y,\tilde\rho)$ *— полное метрическое пространство, такое что*

   (a) $X \subset Y$
   (b) $\rho = \tilde\rho\,\big|_{X\times X}$
   (c) $Y = dX$

   Такое пространство пополняется до $L_p(a,b)$.

2. $l_p = \{x = (x_1,\dots) \mid x_j \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n |x_j|^p\}, \qquad p \geqslant 1$ Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Practice. l_p полно

Note. В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- l_p. Возьмем шар $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leqslant 1\}$

$$\begin{aligned}
e^1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\
e^2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\
&\vdots \\
e^k &= (\underbrace{0, \ldots 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Practice. Проверить не компактность $B = \{f \in C[a,b] \mid \|f\| = 1\}$ в $C[a,b]$.

2.2 Сжимающие отображения

Definition 14

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \to X$. U называется сжимающим отображением, если

$$\forall \gamma < 1\ \forall x_1, x_2 \in X\colon \rho(U(x_1), U(x_2)) \leqslant \gamma\rho(x_1, x_2).$$

Theorem 2.2.1 (Принцип сжимающих отображений)**.** (X, ρ) *полно.*

1. U *— сжимающее отображение* $\Longrightarrow \exists! x_*\colon U(x_1) = x_*$ *— неподвижная точка*
2. *Если* $\exists N\colon U^N$ *— сжимающее отображение* $\Longrightarrow \exists! x_*\colon U(x_* = x_*$

Доказательство.

1. Рассмотрим траекторию точки x_1.

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \ldots x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \gamma\rho(x_n, x_{n-1}) &\leqslant \\
\gamma^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) &\leqslant \\
&\ldots \\
\leqslant \gamma^{n-1}\rho(x_2, x_1) &= \gamma^{n-1}d
\end{aligned}$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n\colon \rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1}d(1 + \gamma + \ldots) = \frac{\gamma^{n-1}d}{1-\gamma} \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как наше пространство полно,существует предел этой последовательности. $U(x_n) = x_{n+1}$. Первое стремиться к $U(x_*)$, второе — к x_*.

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2. $\exists x_*$, посмотрим на $U^N(x_*)$. Посмотрим на последовательное применение U несколько раз. На N-ом шаге мы придем в x_*.

   Единственность уже доказали.

□

Example 2.2.1 (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка).

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \qquad a, b \in C[0,1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти $f \in C^1[0,1]$. То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt.$$

Заведем отображение $U : C[0,1] \to C[0,1]$, что $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt$. Хотим найти неподвижную точку отображения U (то есть такую f).

Пусть $(U_0(f))(x) = -\int_0^x a(t)f(t)dt$. Правда ли, что

1. $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2. $\exists n \colon U_0^n$ — сжимающее отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Проверим

1. При $n = 1$, очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U\left(U^{n-1}(f)\right) - U\left(U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f)\right) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0\left(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2. $\|U_0^n(f-g)\|_\infty \leqslant \gamma \|f - g\|$

   Пусть $f - g = h$. $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma\|h\|$. Пусть $M = \max|a|$, $\|h\|_\infty\, |h(x)|$.

$$\begin{aligned} \left(U_0^1(h)\right)(x) &= -\int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ \left(U_0^2(h)\right)(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2) \left(\int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1\right) dt_2 \\ &\vdots \\ \left(U_0^n(h)\right)(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\ldots)\, dt_n \end{aligned}$$

   Оценим

$$|\left(U_0^n(h)\right)(x)| \leqslant M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \ldots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leqslant \left(M^n \frac{x^n}{n!}\right) \|h\|_\infty.$$

   Выражение в скобках стремиться к нулю при $n \to \infty$. Значит, U_0^n сжимающее.

   Note. На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

   $f \in C[0,1]$. Так как $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$, $f \in C^1[a,b]$

Practice. X полно, $U : X \to X,\ \forall x, y \colon \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$.

1. Верно ли, что U сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

Definition 15: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$). $U : X \to Y$ называется **линейным**, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X \colon U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X,\ \lambda$ — скаляр: $U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Note. Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейный отображений: $U(x_1) = Ux_1$

Designation. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y.

Definition 16

$X_1, \dots X_n$ — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$ — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

Designation. $\mathrm{Poly}(X_1, \dots X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Definition 17

Если Y — поле скаляров, линейное отображение $U : X \to Y$ называется **линейным функционалом**.

Example 2.2.2. $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R},$ лишь конечное число отлично от нуля$\}$
$U : X \to X,\ x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

Example 2.2.3 (δ-функция)**.** $\delta : C[-1, 1] \to \mathbb{R},\ \delta(f) = f(0)$.

Example 2.2.4. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf = \int_a^b f(x)dx$

Example 2.2.5. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

Example 2.2.6. $U \in \mathrm{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots \mathbb{R}}_{n}; \mathbb{R}),\ U(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

Example 2.2.7. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}),\ U(x, y) = (x, y)$

Example 2.2.8. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) - [x, y]$ — векторное произведение.

Example 2.2.9. Определитель, все возможные формы объема.

Example 2.2.10. $U_j \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Можно сделать из этого полилинейное $U \in \mathrm{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$, $U(x_1, \dots x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots U_n x_n$.

Example 2.2.11. $U : C^1[a, b] \to C[a, b],\ Uf = f'$

Theorem 2.2.2 (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения)**.** *X, Y — линейный нормированные пространства с одним полем скаляров, $U \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывно*
2. *U непрерывно в 0*
3. *$\exists C\ \forall x \in X \colon \|Ux\|_Y \leqslant C\|x\|_X$*

Definition 18

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y.

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X,\ \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Note. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Note.

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Example 2.2.12. Нормы в прошлых примерах

2.2.2 $\|U\| = \infty$

2.2.3 $\|U\| = 1$

2.2.4 $\|U\| = b - a$

2.2.5 $\|U\| = b - a$

2.2.11 $\|U\| = 1$

Theorem 2.2.3 (Условие непрерывности полилинейного отображения)**.** $U \in \mathrm{Poly}(X_1, \dots X_m; Y)$, X_i, Y *— линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывно*
2. *U непрерывно в* 0
3. $\exists C\ \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots x_n \in X_n\colon \|U(x_1, \dots x_n)\| \leqslant X\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$

Note. В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots \|x_n\|_{X_n}\}.$$

Definition 19: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf\left\{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots x_n \in X_n\ \|U(x_1, \dots x_n) < C\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|\right\}.$$

Theorem 2.2.4 (эквивалентные способы вычисления опеператора)**.** *U — линейное непрерывное отображение $X \to Y$. Тогда*

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|U\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\|.$$

Доказательство. Обозначим супремумы за A, B, C, D. Очевидно, что $C \geqslant B$ и $C \geqslant D$

$$C = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \frac{\|Ux\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что $B \geqslant A$. $x \neq 0,\ \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|Ux\| \leqslant B.$$

Значит, $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant B$.

Теперь докажем, что $D \geqslant A$.

$$x \neq 0,\ \varepsilon > 0\colon \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - e\varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leqslant D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant \frac{D}{1-\varepsilon} \to 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D \implies \sup_{x \neq} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D.$$

□

Remark. В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

Theorem 2.2.5 (эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора)**.** U : $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$.

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \dots x_n)}{\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|}\| = \sup_{\|x_j = 1\| \|U(x_1, \dots x_n)\|} = \sup_{\|x_j\|<1} = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1}.$$

2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

Theorem 2.2.6 (О свойствах операторной нормы)**.** $U_1, U_2, U_3 : X \to Y$ *— линейные непрерывные операторы,* λ *— скаляр. Тогда*

1. $\|U_1 + U_2\| \leqslant \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \Longleftrightarrow U = 0$
4. $U : X \to Y, V : Y \to Z$ *— линейные отображения.*

$$\|VU\| \leqslant \|V\| \cdot \|U\|$$
$$VU = V \circ U$$
$$VUx = V(U(x))$$

Designation. $L(X, Y) \subset \mathrm{Hom}(X, Y)$ — пространство линейных операторов.

Лекция 5

13 march
18 апреля
в 11:00
в каб 301
коллоквиум

Note. $L(X; Y) \subset \mathrm{Hom}(X; Y)$ — линейные отображения из X в Y. Это линейное нормированное пространство.

Note. Тоже самое верно для полилинейных отобранной. То есть выполнены аксиомы нормы, доказательство аналогичное. $L(X_1, X_2, \dots X_n; Y) \subset \mathrm{Poly}(X_1, \dots X_n; Y)$.

Theorem 2.2.7 (О полноте пространства операторов)**.** *Если* Y *полно, то* $L(X; Y)$ *Тоже полно.*

Доказательство.

1. Построение предельного оператора.

$$\{U_n\} \subset L(X, Y) \text{ — фундаментальна, то есть } \|U_n - U_m\| \to 0, n, m \to \infty.$$

Рассмотрим $x \in X$:

$$\|U_m x - U_n x\|_Y = \|(U_m - U_n)x\|_Y \leqslant \|U_m - U_n\| \cdot \|x\|_X \to 0,\ n, m \to \infty.$$

Тогда $\{U_m x\}$ фундаментальна в Y, следовательно, $\exists \lim_{m \to \infty} U_m x =: U(x)$

2. Линейность предельного отображения.

$$U(x_1 + x_2) = \lim_{mto\infty} (U_m(x_1 + x_2)) = \lim U_m x_1 + \mathrm{Im}\, U_m x_2 = Ux_1 + Ux_2$$
$$U(\lambda x) = \lambda U x$$

3. Непрерывность U.

$$\varepsilon = 1\ \exists N \colon \forall n, m \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leqslant 1 \cdot \|x\|.$$

Устремим $n \to \infty$:

$$\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in X : \|U_m x - Ux\| \leqslant \|x\|.$$

По неравенству треугольника, при достаточно большом $m > N$

$$\|Ux\| \leqslant \|Ux - U_m x\| + \|U_m x\| \leqslant \|x\| + \|Um\| \cdot \|x\| \leqslant (1 + \|U_m\|) \cdot \|x\|.$$

Следовательно, U непрерывно.

4. Сходимость $\{Um\}$ к U по норме $L(X, Y)$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in X\colon \|U_m x - U_n x\| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

При $x \to \infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m > N\ \forall x \in X\colon \|U_m x - Ux\| \leqslant \varepsilon \|x\| \iff \|Um - U\| \leqslant \varepsilon.$$

□

Theorem 2.2.8. *Если Y полно, то $L(X_1, \dots X_n; Y)$ полно.*

Example 2.2.13 (Самый важный случай)**.** Y — пространство скаляров. $L(X, Y) = X^*$ — сопряженное пространство — пространство линейных непрерывных функционалов.

Theorem 2.2.9. *$L_1 = L(X_1 \dots X_k; L(X_{k+1}, \dots X_n; Y) \backsimeq L(X_1, \dots X_n; Y) = L_2$, то есть существует изометрический (сохраняющий норму) изоморфизм.*

Доказательство. Построим биекцию. $U \in L_1\colon U(x_1, \dots, x_k) \in L(X_{k+1}, \dots X_n; Y)$, $U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n) \in Y$.

Определим $\tilde{U}(x_1, \dots x_n) \coloneqq U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n)$. Оно будет полилинейно непрерывно. Это же определение работает и в обратную сторону.

Теперь нужно понять, что с нормой все в порядке.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ 1\leqslant i\leqslant k}} \|U(x_1, \dots x_n)\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ 1\leqslant i\leqslant k}} \left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ k< i\leqslant n}} \|U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n)\| \right) = \sup_{\substack{\|x_i\|=1\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \|\tilde{U}(x_1, \dots x_n)\| = \tilde{U}.$$

□

2.3 Дифференциальные отображения

Definition 20

X, Y — нормированные пространства, $E \subset X$, $x \in E$, x — внутренняя точка, $f : E \to Y$. f — **дифференцируемо в точке** x, если $\exists L \in L(X, Y)$:

$$f(x + h) - f(x) = L(h) + \mathrm{o}(h), \qquad h \to 0, x + h \in E.$$

Note. $x, h \in X$, $f(x), f(x + h) \in Y$, $Lh \in Y$

Что такое $\mathrm{o}(h)$:

$$f(x + h) - f(x) = Lh + \alpha(x, h).$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definition 21

L — **дифференциал** f в точке x.

Designation. Обозначения дифференциала $D_x f, f'(x), d_x f, df(x)$

Формула из определения выглядит так

$$f(x+h) - f(x) = df(x)h + \mathrm{o}(h), \quad h \to 0.$$

Note. Это определение — дифференцируемость по Фреше.

Note. В конечномерном случае из линейности L автоматически следует непрерывность.

Theorem 2.3.1. *Если дифференциал в точке x существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $\exists L_1, L_2\colon f(x+h) - f(x) = L_i h + \mathrm{o}(h)$. Тогда $L_1 h - L_2 h - \mathrm{o}(h)$, докажем, что $L = L_1 - L_2$ равно нулю.

Зафиксируем $h \neq 0$.

$$\|Lh\| = \frac{\|L(th)\|}{\|t\|} = \underbrace{\frac{\|L(th)\|}{\|th\|}}_{\to 0,\ t \to 0} \|x\| \to 0, \quad t \to 0.$$

Следовательно, $\|Lh\| = 0 \implies L = 0$. □

Definition 22

Если $f : E \subset X \to Y$ (E открыто), f дифференцируема во всех точках E, $df : E \to L(X,Y)$ — производное отображение.

Note. Если f дифференцируема в точке x, то f непрерывна.

Правила дифференцирования

Линейность $f_1, f_2 : E \subset X to Y$, f_1, f_2 непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2$ — скаляры: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ дифференцируема в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

Дифференциал композиции X, Y, Z — линейные нормируемые пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$, U, V открыты, $f : U to Y, g : V \to Z$, $x \in U, f(x) in V$, f дифференцируема в точке x, g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x.

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\ &= dg(f(x)\,(f(x+h) - f(x)) + \mathrm{o}(f(x+h) - f(x)) \\ &= dg(f(x)\,(df(x)h + \mathrm{o}(h)) + \mathrm{o}(f(x+h) - f(x)) = \\ &= dg(f(x))df(x)h + \underbrace{dg(f(x)(\mathrm{o}(h)) + \mathrm{o}(f(x+h) - f(x))}_{? = \mathrm{o}(h)} \end{aligned}$$

$$\frac{\|dg(f(x))(\mathrm{o}(h))\|_Z}{\|h\|_X} \leqslant \frac{\|dg(f(x))\|\,\|\mathrm{o}(h)\|}{\|h\|_X} \to 0.$$

$$\frac{\|\mathrm{o}(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|\mathrm{o}(f(x+h) - f(x))\|}{\|f(x+h) - f(x)\|}}_{\to 0, h \to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|}}_{\text{ограничено}} \to 0,\ h \to 0.$$

□

Дифференцирование обратного $x \in U \subset X$, U открыто, $f : U \to Y$, существует окрестность $V(f(x))$ в Y, в которой $\exists f^{-1}$. Предположим, что f дифференцируема в точке x, $\exists\,(df(x))^{-1} \in L(Y, X)$, f^{-1} непрерывна в точке $f(x)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y,X)} = (df(x))^{-1}.$$

Note. Здесь слишком много условий

Доказательство. $f(x) = y,\ f^{-1}(y) = x,\ f(x+h) = y+t,\ f^{-1}(y+t) = x+h$. $h \to 0 \iff t \to 0$. Давайте запишем

$$t = f(x+h) - f(x) = df(x)h + \mathrm{o}(h).$$

Тогда $\|t\| \leqslant C\|h\|$. Воспользуемся тем, что $df(x)$ обратим.

$$(df(x))^{-1}\, t = h + (df(x))^{-1}\,(\mathrm{o}(h)) \tag{2.3.1}$$

$$\|\,(df(x))^{-1}\,(\mathrm{o}(h))\| \leqslant \|\,(df(x))^{-1}\,\| \cdot \|\mathrm{o}(h)\| \leqslant \frac{\|h\|}{2}, \quad \|h\| < \delta.$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \left(\|h\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|\mathrm{o}(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|\,(df(x))^{-1}\,\|}\right).$$

Тогда $\forall \|h\| < \delta\colon \|(df(x))^{-1}t\| \geqslant \frac{\|h\|}{2} \Longrightarrow \|h\| \leqslant C\|t\|$. Перепишем 2.3.1

$$f^{-1}(y+t) - f(y) = (df(x))^{-1}t + \mathrm{o}(t).$$

Это определение дифференцируемости. Тогда

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}.$$

□

2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования

0. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f дифференцируема.

$$df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h \mapsto f'(x)h.$$

1. $f : U \subset X \to Y$, f постоянно, то есть $f(x) = y_0 \quad \forall x \in U$. Тогда $df(x) = 0$ (нулевое линейное отображение, все переводит в нуль).

2. $f \in L(X, Y)$, $df(x) = f$.

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = (df(x))(h).$$

3. $f(x, y) = x^2 + 2xy$. $h = (h_x, h_y)$

$$\begin{aligned} f(x+h_x, y+h_y) - f(x, y) &= x^2 + xh_x + h_x^2 + 3xy + 3xh_y + 3yh_x - x^2 - 3xy + 3h_xh_y = \\ &= (2x+3y)h_x + 3xh_y + \underbrace{h_x^2 + 3h_xh_y}_{\mathrm{o}(h)} \end{aligned}$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2x+3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

4. $x \in U \subset X,\ f : U \to Y,\ A \in L(Y, Z)$. Если f дифференцируема в точке x, то $A \circ f$ дифференцируема в точке x и $d(A \circ f)(x) = Adf(x)$
5. $x \in U \subset X,\ f : U \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$. Это n отображений: $f(x) = (f_1(x), \ldots f_n(x))\,, \quad f_j : U \to Y_j$. f дифференцируема в точек x, тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots f_n$ дифференцируемы в точке x_0.

   Доказательство. $f(x+h) - f(x) = df(x)h + \mathrm{o}(h) \in Y$. Левая часть равна
   $$(f_1(x+h) - f_1(x), \ldots f_n(x+h) - f_n(x))\,.$$
   А правая
   $$(L_1h, L_2h, \ldots L_nh) + \mathrm{o}(h).$$
   □

6. $x_j : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to X_j, \quad (x_1, \ldots x_n) \mapsto x_j$.
   $$dx_j(x)h = h_j.$$
   Это удобное обозначение базиса, которое мы будем дальше использовать.
7. $A : X_1 \times X_n \to Y$ — полилинейное и непрерывное. Оставим только два сомножителя. $A : X_1 \times X_2 \to Y$.
   $$A(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - A(x_1, x_2) = A(x_1, h_1) + A(h_1, x_2) + \underbrace{A(h_1, h_2)}_{\mathrm{o}(h)}.$$
   $$dA(x_1, x_2)h = A(h_1, x_1) + A(x_1, h_2).$$
   Или можно записать так:
   $$dA(x_1, x_2) = A(dx_1, x_2) + A(x_1, dx_2).$$
   Совершенно аналогично для n координат.

Property.

1) $f(x) = x_1 \cdot \ldots x_n,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$
$$df(x)h = \sum_{j=1}^{n} \left(h_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

2) $f_1, \ldots f_n : X \to \mathbb{R}$.
$$d(f_1 f_2 ... f_n)(x) = f_2(x) f_3(x) \ldots df_1(x) + \ldots.$$

3) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *скалярное произведение.*
$$d\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle.$$

4) $f, g : X \to \mathbb{R}^n$
$$d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle.$$

5) $f : X \to Y$ *над* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda : X \to \mathbb{R}$
$$d(\lambda f) = \underbrace{f}_{\in Y} \underbrace{d\lambda}_{L(X,\mathbb{R})} + \lambda \underbrace{df}_{\in L(X,Y)}.$$

Practice. $U = \{A \in L(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in L(X, Y)\}$ — множество обратимых линейных отображений. $f : U \to L(X, Y),\ f(A) = A^{-1}$. Найти df.

2.5 Частные производные

Definition 23: Частные производные

Пусть $a \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. U — окрестность точки a. $f : U \to Y$. $f(x) = f(x_1, \ldots x_n)$.

Определим $\varphi_j : X_j \to Y,\ \varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \ldots x_j, a_{j+1}, \ldots a_n)$.

$d\varphi_j(a_j)$ называется частным дифференциалом (частной производной) f по x_j в точке a, если существует.

Designation. Частный дифференциал обозначается кучей способов

$$\partial_{x_j} f(a),\ \frac{\partial f}{\partial x_j}, \partial_j f(a) \in L(x_i, Y).$$

Лекция 6

20 march

2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m,\ Y = \mathbb{R}^n$

Statement. *Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $f_1, f_2, \ldots f_n$ дифференцируемы в точке x и*

$$df(x) = (df_1(x), \ldots df_n(x)))\,, \qquad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}),\ f_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Запишем

$$df(x)h = (df_1(x)h, \ldots df_n(x)h)\,.$$

Тогда

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \ldots f_n(x+h) - f_n(x))\,.$$

Первое слагаемое равно $df(x)h$, а правая □

Statement. *Если $n = 1$, то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то существуют все частные производные и*

$$df(x)h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j, \quad h = (h_1, \ldots h_n)^T.$$

при этом

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right).$$

Statement. *Вернемся к 2.6. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x и существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$, $j = 1, \ldots m$, $k = 1, \ldots n$*

$$\partial f(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \cdots \\ \cdots \\ df_n(x)h \end{pmatrix}.$$

Statement. *Если есть отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, и они дифференцируемы, то $d(f \circ f)(x) = dg(f(x))df(x)$:*

$$\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & \frac{(\partial g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x) & \cdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}.$$

Правило цепочки:

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

Statement.

Example 2.6.1 (вычисление частных производных)**.** Пусть $f(x,y) = x^3 + 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x.$$

То есть

$$df(x,y)h = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Через градиенты

$$\text{grad}.$$

Statement. *Если $f\colon \mathbb{R}^m \to R$, то частные производные можно определять формулами*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t}, \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T.$$

(Единица стоит на i-м месте.) Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

Definition 24: Производная по вектору

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R},\ v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v. Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v.

Property (Экстремальное свойство градиента)**.** *В случае $\mathbb{R}^m$*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v\rangle,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leqslant |\text{grad} f(x)|\,|v|\,.$$

Функция растет быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right|.$$

Доказательство. Все рассуждения предполагают, что f дифференцируема в x.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v\rangle \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x+tv)-f(x)=df(x)(tv)+\mathrm{o}_{t\to 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=df(x)v+\underbrace{\frac{\mathrm{o}(t)}{t}}_{\to 0}.$$

□

2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

Theorem 2.7.1 (Теорема о конечном приращении)**.** *Пусть* $f\colon U\subset X\to Y$ *непрерывно на* $[x,x+t]\subset U$ *и дифференцируемо на* $(x,x+h)$*. Тогда*

$$\|f(x+h)-f(x)\|_Y\leqslant \sup_{\xi\in(x,x+h)}\|df(\xi)\|_{L(X,Y)}\cdot\|h\|_X.$$

Доказательство. Обозначим супремум $M=\sup_{\xi\in(x,x+h)}\|df(\xi)\|_{L(X,Y)}=\sup_{\Theta\in(0,1)}\|df(x,+\Theta h)\|_{L(X,Y)}$. Достаточно проверить

$$\forall[\xi',\xi'']\subsetneq(x,x+h)\colon \|f(\xi')-f(\xi'')\|\leqslant M\|\xi'-\xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1=[\xi_1',\xi_1'']\colon \|f(\xi_1')-f(\xi_1'')\|\geqslant(M+\varepsilon_0)\|\xi_1'-\xi_1''\|,\quad \varepsilon_0>0.$$

Разделим отрезок пополам: $\Delta_1=\Delta_1^1\cup\Delta_1^2=[\xi_1',\frac{\xi_1'+\xi_1''}{2}]\cup[\frac{\xi_1'+\xi_1''}{2},\xi_1'']$. На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность $\Delta_1\supset\Delta 2\ldots$. Пусть $\{\xi_0\}=\cap\Delta_i$. Тогда

$$f(\xi_0+\delta)-f(\xi_0)=df(\xi_0)\delta+\alpha(\delta),\quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|}\overset{\delta\to 0}{\to}0.$$

Тогда

$$\exists\varepsilon>0\colon\left(\|\delta\|<\varepsilon\Longrightarrow\|f(\xi_0+\delta)-f(\xi_0)\|\leqslant\left(M+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\delta\|,\quad\frac{\alpha(\delta)}{\|\delta\|}\overset{\delta\to 0}{\to}0\right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности $\exists N\colon\forall n>N\quad\Delta_n\subset B(\xi_0,\varepsilon)$.

$$\|f(\xi_n')-f(\xi_m'')\|\leqslant+\begin{cases}\|f(\xi_n')-f(\xi_0)\|\leqslant\left(M+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n'-\xi_0\|\\ \|f(\xi_n'')-f(\xi_0)\|\leqslant\left(M+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n''-\xi_0\|\end{cases}=\left(M+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n'-\xi_n''\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

Note. В правой части можно ююю

Note. На прямой теорема Лагранжа дает существование $\xi\in(x,x+\varepsilon)$:

$$|f(x+h)-f(x)|=|f'(\xi)|\cdot|h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

Note. В $\mathbb{R}^n$ есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

Corollary. Если f из теоремы и $A \in L(X, Y)$, то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leqslant \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi - Ah)\| \|h\| = \sup_{v \in (0,1)} \|df(x + vh - Ah\| \|h\|.$$

Это теорема при $g(x) = f(x) - Ax$.

Corollary. Если K — выпуклый компакт в X, $f \in C^1(K, Y)$, то f — Липшицево на K.

Definition 25

Если $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо во всех точках U и $df\colon U \to L(X, Y)$ непрерывно, то говорят, что f **непрерывно дифференцируемо** на U и пишут $f \in C^1(U, Y)$

Note. $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ непрерывно дифференцируемо на U тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

Theorem 2.7.2 (Признак дифференцируемости)**.** *Пусть $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$, $x \in U$. Предположим, что f имеет все частные дифференциалы в U и они непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке x.*

Доказательство. Докажем для $m = 2$. Дифференциал должен выглядеть так: $Lh = \partial_{x_1} f(x) h_1 + \partial_{x_2} f(x) h_2$. $x \in U \subset X_1 \times X_2$.

Проверим $\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = o(h)$ при $h \to 0$.

$$..(x) \leqslant \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1) - \partial_{x_2} f(x_1 x_2) h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + \Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x) h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1 + \Theta h, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leqslant .$$

Заметим, что $\|h_1\| \leqslant \|h\| \wedge \|h_2\| \leqslant \|h\|$. Тогда можем переписать так:

$$\leqslant \|h\| \cdot \left(\sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_1} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремиться к 0 при $h \to 0$. ☐

Corollary. Непрерывная дифференцируцемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

Theorem 2.7.3 (Теорема о конечном приращении для функций)**.** *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x+h] \in U$ и дифференцируема на $(x.x+h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x+h)$, что*

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Corollary. Если U — выпуклое множество и $df(x) = 0$ для любого x из U, то $f(x) = const$ на U.

Corollary. Если U — открытое связное множество в $df(x) = 0$ для всех $x \in U$, то $f(x) = const$ на U.