

Part I

Алгебра

Chapter 1

Линейная алгебра. Векторные пространства

1.1 Лекция 1

X - множество

$*$: $X \times X \rightarrow X$

$(x, y) \mapsto x * y$

Аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)
2. $\exists e \in X \forall a \in X : e * a = a * e = a$ (нейтральный элемент)
3. $\forall a \in X \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$ (обратный элемент)
4. $\forall a, b \in X : a * b = b * a$ (коммутативность)

Определение 1. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется **полугруппой**

Определение 2. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-2, называется **моноидом**

Определение 3. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-3, называется **группой**

Определение 4. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **коммутативной** или **абелевой группой**

Примеры.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – группа
2. $(\mathbb{N}, +)$ – полугруппа

3. $(\mathbb{N}_0, +)$ – моноид

4. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ – группа

5. Пусть A – множество

$X :=$ множество биективных отображений $A \rightarrow A$

id_A – нейтральный элемент

Если $f(x) = y$, то $\tilde{f}(y) = x$ – обратная функция ($f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id_A$).

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $id_A(x) = x$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1$

Следовательно, (X, \circ) – не коммутативная группа

Обозначение.

- \cdot – мультипликативность, 1 , x^{-1}
- $+$ – аддитивность, 0 , $-x$
- \circ – относительно композиции, id , x^{-1}
- $*$ – абстрактная операция, e , x^{-1}

Пусть $(R, +)$ – абелева группа

Определим отображение

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Для $(R, +, \cdot)$ могут быть верны следующие аксиомы:

5. $a(b + c) = ab + ac$
 $(b + c)a = ba + ca$ (дистрибутивность)
6. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность)
7. $\exists 1_R \forall a \in R : 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ (нейтральный элемент)
8. $ab = ba$ (коммутативность)
9. $0_R \neq 1_R$
10. $\forall a \neq 0_R \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$ (обратный элемент)

Определение 5. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5, называется **не ассоциативным кольцом без единицы**.

Определение 6. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-6, называется **ассоциативным кольцом без единицы**.

Определение 7. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5-7, называется **ассоциативным кольцом с единицей**.

Определение 8. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-8, называется **коммутативным кольцом**.

Примеры.

1. \mathbb{Z} – коммутативное кольцо

2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поля

3. Рассмотрим $\mathbb{Z}_n = 0, \dots, n-1$ с операциями $+_n, \cdot_n$:

$$a +_n b = (a + b) \% n$$

$$a \cdot_n b = (a \cdot b) \% n$$

Обратимые элементы:

$$ax = 1 + ny$$

$$ax - ny = 1$$

Если $(a, n) = 1$, есть решение, иначе – нет. \mathbb{Z}_p – поле $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$

1.2 Лекция 2

Определение 9. V – векторное пространство над полем F , если $(V, +)$ – абелева группа, задано отображение $V \times F \rightarrow V$

$(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$, удовлетворяющее аксиомам $\forall x, y \in V, \forall a, b \in F$:

$$5. x \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$$

$$6. (x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$$

$$x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$$

$$7. x \cdot 1_F = x$$

$$A \in M_n(F), \alpha \in F$$

$$(A, \alpha)_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$$

$$(AB)\alpha = A(B\alpha)$$

Примеры.

1. Множество векторов в \mathbb{R}^3

$$2. F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

3. X - множество, $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$
 $f, g : X \rightarrow F$
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ - многочлены от одной переменной t
5. V - абелева группа, в которой $\forall a \in V : \underbrace{a + a + \dots + a}_{p \in \mathbb{P}} = 0$ Тогда V - векторное пространство над \mathbb{Z}_p $k \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_k$

1.3 Лекция 3

Определение 10. Алгебра A над полем F – кольцо, являющееся векторным пространством над F ("+" - операция в кольце и в векторном пространстве), такое что $(ab)\alpha = a(b\alpha)$ $a, b \in A, \alpha \in F$

Пример. $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ - не ассоциативная алгебра на \mathbb{R}

Определение 11. Матрица размера $I \times J$ (I, J - множества индексов) над множеством X - это функция

$$A : I \times J \rightarrow X, \quad (i, j) \rightarrow a_{ij}.$$

Пусть определено умножение $X \times Y \rightarrow Z, \quad (x, y) \rightarrow xy$
 $(Z$ - коммутативный моноид относительно "+")

Определение 12. Строка - матрица размера $\{1\} \times J$
 Столбец - матрица размера $J \times \{1\}$

A - строка длины J над X

B - строка длины J над Y

Тогда произведение $AB = \sum_{j \in J} a_{1j} b_{j1} \in Z$

$x \rightarrow x_e$ - координаты вектора x

$$\underbrace{x \cdot y}_{\text{скалярное произведение}} = x_e^T \cdot y_e$$

Определение 13. Транспонирование матрицы.

D - матрица $I \times J$ над X

D^T - матрица $J \times I$ над $X : (D^T)_{ij} = (D)_{ji}$

Замечание. Пусть в X есть элемент $0 : 0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y$. Все кроме конечного числа $a_j = 0$. Тогда AB имеет смысл, даже когда $|J| = \infty$.

"почти все" = кроме конечного количества

Обозначение.

a_{i*} - i -я строка матрицы A

a_{*j} - j -й столбец матрицы A

1.3.1 Произведение матриц

A - матрица $I \times J$ над X .

B - матрица $J \times K$ над Y .

AB - матрица $I \times K$ над $Z = X \cdot Y$, $(AB)_{ik} = a_{i*} \cdot b_{*k} = \sum_{j \in J} a_{ij} \cdot b_{jk}$.

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = va, \quad v \in V, a \in F.$$

1.4 Лекция 4

Определение 14. $(G, *)$, $(H, \#)$ - группа

$\varphi : G \rightarrow H$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \# \varphi(g_2)$$

Определение 15. R, S -кольца

$\varphi : R \rightarrow S$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$$

Для колец с 1: $\varphi(1) = 1$

Определение 16. U, V - векторные пространства над F

$\varphi : U \rightarrow V$ - линейное отображение, если:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u\alpha) = \varphi(u)\alpha$$

Замечание. Изоморфизм – биективный гомоморфизм.

Определение 17. V - векторное пространство над полем F

v - строка элементов "длины" I над V

a - столбец "высоты" I , почти все элементы которого равны 0.

Тогда va - линейная комбинация набора v с коэффициентами .

Замечание. $U \subset V$

U является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V . Тогда U - подпространство V

Лемма. $U \subseteq V$

$\forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in F :$

$u_1 + u_2 \in U, u_1 \alpha \in U$ Тогда U - подпространство. Если U - подпространство в V , то пишут $U \subseteq V$.

Определение 18. $v = \{v_i | i \in I\}$, где $v_i \in V \forall i \in I$

$\langle v \rangle$ - наименьшее подпространство, содержащее все v_i

Лемма. $\langle v \rangle = \{va | a - \text{столбец высоты } I \text{ над } F, \text{ где почти всюду элементы равны нулю}\} = U$

Доказательство. $v_i \in \langle v \rangle \Rightarrow v_i a_i \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow v_{i_1} a_{i_1} + \dots + v_{i_k} a_{i_k} \in \langle v \rangle$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ содержит все варианты комбинаций. $va + vb = v(a + b) \in U$

$(va)\alpha = v(a\alpha) \in U$

\Rightarrow множество линейных комбинаций – подпространство U - подпространство, содержащее $v_i \forall i \in I$

$\langle v \rangle$ – наименьшее подпространство, содержащее v_i

$\Rightarrow \langle v \rangle \subseteq U$ тогда $\langle v \rangle = U$ □

Определение 19. Если $\langle v \rangle = V$, то v – система образующих пространство V
Базис – система образующих.

Обозначение. F^I – множество функций из I в F = множество столбцов высоты I
 ${}^I V$ – множество строк длины I

Набор элементов из V , заиндексированных множеством I – это функция $f : I \rightarrow V$
 $i \mapsto f_c$

Определение 20. $v \in {}^I V$

v – линейно независим, если $\forall a \in F^I, a \neq 0 \Rightarrow va \neq 0$

Теорема 1.4.1. $v \subseteq V$ (можно считать, что v – строка длины v)
Следующие утверждения эквивалентны:

1. v – линейно независимая система образующих
2. v – максимальная линейно-независимая система
3. v – минимальная система образующих
4. $\forall x \in V \exists! a \in F^v : x = va = \sum_{t \in v} t \cdot a_t$ (почти все элементы равны 0)

Доказательство. (1) \Rightarrow (4) – доказали ранее (1) \Rightarrow (2)

$$x \in V \setminus v$$

$$x = va(a \in F^v)$$

$$va = x \cdot 1 = 0 - \text{линейная зависимость набора } v \cup x$$

Т.о. любой набор, строго содержащий v , линейно зависим $\Rightarrow v$ – максимальный.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$x \in V \setminus$$

$$v \subseteq V \cup x - \text{линейно зависим}$$

$$va + xa_x = 0$$

$$a \neq 0$$

$$\text{Если } a_x = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ?!}$$

$$\text{Значит } a_x \neq 0$$

$$va = c \cdot (-a_x)$$

$$x = v \cdot \frac{a}{-a_x} \Rightarrow v - \text{система образующих.}$$

□

Лемма. (Цорн) Пусть \mathbb{A} – набор подмножеств (не всех) множества X .

Если объединение любой цепи из \mathbb{A} , принадлежащей \mathbb{A} , то в \mathbb{A} существует максимальный элемент.

$$M \in \mathbb{C} - \text{максимальная, если } M \subseteq M' \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow M = M'$$

Теорема 1.4.2. (о существовании базиса) V – векторное пространства

X – линейное независимое подмножество V

Y – система образующих V

$$X \leq Y$$

Тогда существует базис Z пространства $V : X \leq Z \leq Y$

Доказательство. \mathbb{A} – множество всех линейно независимых подмножеств, лежащих между X и Y . $X \in \mathbb{A}$

$$\mathbb{C} \leq \mathbb{A}$$

$$X \leq \cup C \in \mathbb{C} \leq Y$$

Пусть $\cup C \in \mathbb{C}$ – линейно зависимый. То есть $\exists u_1, \dots, u_2 \in / \dots$

...

Пусть v – базис V .

$$\forall x \in V \exists! x_v \in F^v : x = v \cdot x_v$$

$$v = (v_1, \dots, v_n), x_v = \text{матрица столцов альфа};$$

$$x = v_1 \alpha_1 + \dots = v \cdot x_v$$

□

1.5 Лекция 5

1.6 Лекция 6

1.7 Лекция 7

Утверждение.

$$U \leq W \quad \exists V \leq W : W = U \oplus V$$

Доказательство. Выберем базис u в U . Дополним до базиса $u \cup v$ пространства W и положим $V = \langle v \rangle$.

$$\langle u \rangle = U \quad \langle v \rangle = V \quad \langle u \cup v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle = U \oplus V = W$$

$$x \in U \cap V \Rightarrow x = ua = vb \Leftrightarrow ua - vb = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0 \quad (u \cup v - \text{линейно независимый})$$

□

Следствие.

$$u - \text{базис } U, v - \text{базис } V, U, V \leq W$$

$$u \cup v - \text{базис } W \Leftrightarrow U \oplus V$$

25.09.2019

1.8 Лекция 8

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in n^V$$

$$M_n(F) - \text{алгебра матриц размера } n \times n \text{ над } F$$

$$GL_n(F) = M_n(F)^* - \text{полная линейная группа степени } n \text{ над } F$$

Лемма.

$$v \in n^V, A \in GL_n(F)$$

$$v - \text{линейно независимый} \Leftrightarrow vA - \text{линейно независимый}$$

$$\langle v \rangle = \langle vA \rangle$$

Доказательство. $(vA)A^{-1} = v(AA^{-1}) = vE = v$, поэтому можно доказывать только в одну сторону.

v - линейно независимый.

$vAb = 0 \Rightarrow A^{-1}Ab = 0 \Rightarrow b = 0$, т.е. vA - линейно независимый.

$$(vA)b = v(Ab) \in \langle v \rangle, \quad \langle vA \rangle \leq \langle v \rangle$$

□

Утверждение. u, v - два разных базиса пространства V .

Тогда $\exists!$ матрица $A \in GL_n(F) : u = vA$

При этом $a_{*k} = (u_k)_v \quad \forall k = 1, \dots, n$. Такая матрица обозначается $C_{v \rightarrow u}$ и называется матрицей перехода от v к u .

$$C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = C_{v \rightarrow u} C_{u \rightarrow v} = E$$

Доказательство. Положим $a_{*k} = (a_k)_v \Rightarrow u_k = va_{*k} \Rightarrow u = vA$.

$vA = vB \Leftrightarrow A = B$ то есть A - единственно.

Далее:

$$\left. \begin{aligned} u &= vC_{v \rightarrow u} \\ v &= uC_{u \rightarrow v} \end{aligned} \right\}$$

$$uE - uC_{v \rightarrow u}C_{v \rightarrow u}$$

$$E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

□

Следствие. v - базис V

$f : GL_n(F) \rightarrow$ множество базисов пространства V

$f(A) = vA$ - биекция.

Доказательство.

$$|F| = q \quad \dim V = u$$

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) - \text{количество базисов}$$

\mathbb{F} - поле из q элементов.

□

Утверждение. Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

Следствие. u, v - базисы V

$$x = C_{u \rightarrow v} x_v$$

Доказательство.

$$x = ux_u = vx_v$$

$$v = uC_{u \rightarrow v}$$

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \Rightarrow x_u = C_{u \rightarrow v}x_v$$

□

Следствие. (Матричные линейные отображения)

$$L : U \rightarrow V, \quad u - \text{базис } U, v - \text{базис } V$$

Тогда $\exists!$ матрица $L_{v,u}(L_u^v : \forall x \in UL(x)_v = L_u^v x_u$

При этом $(L_u^v)_{*k} = L(u_k)_v$

Замечание.

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in n^U$$

$$L : U \rightarrow V$$

$$L(a) := (L(u_1), \dots, L(u_n))$$

$$L(ua) = L(u)a \quad a \in F^n$$

$$\varphi_v : V \rightarrow F^n$$

$$\varphi_v(g) = y_v \quad \forall g \in V$$

$$\varphi_v - \text{линейно} \Rightarrow (L(u)a)_v = L(u)_v a$$

$$L(u)_v := (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$$

Доказательство.

$$x = ux_u$$

$$L(x) = L(u)x_u$$

$$L(x)_v = L(u)_v x_u$$

Положим $L_u^v := L(u)_v$.

$$\forall x \in U : L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$\text{При } x = u_k : L(u_k)_v = L_u^v(u_k)_u = (L_u^v)_k$$

□

Замечание. Если $Ax = Bx \quad \forall x \in F^n$, то $A = B$

26.09.2019

1.9 Лекция 9

Примеры.

1. $V = \mathbb{R}[t]_3$ - многочлены степени не более 3

$$D(p) = p' \quad V \rightarrow V$$

$$v = (1, t, t^2, t^3).$$

$$D(1) = 0, D(t) = 1, D(t^2) = 2t.$$

$$D_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$v^{(1)} = (1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}).$$

2. $V = \mathbb{R}[t]$

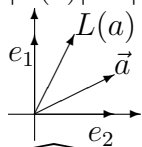
$$v = (1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots).$$

$$D(v_0) = 0, D(v_k) = v_{k-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ & 0 & 1 & \cdots \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

3. $V = \mathbb{R}^3$

$$|L(a)| = |a|$$



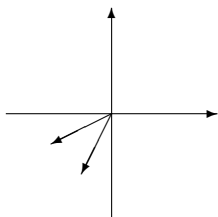
$$a, L(a) = \varphi$$

$$e = (e_1, e_2) \text{ - базис}$$

$$L(e_1)_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$L(e_2)_e = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$



$$a_e = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$L(a)_e = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \varphi) \\ \sin(\psi + \varphi) \end{pmatrix}.$$

$$L(a)_e = L_e \cdot a_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Утверждение. $L : U \rightarrow V$

$u, u' - \text{базис } U$

$v, v' - \text{базис } V$

Тогда $L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} L_u^v C_{u \rightarrow u'}$

Доказательство.

$$L(x)_v = L_u^v x_u.$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v_1} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u.$$

$$\forall x_u \in F^{\dim U}$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_k.$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}.$$

□

Замечание.

$$\text{Если } U = V \quad u = v, u' = v'.$$

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

Утверждение. *Линейное отображение однозначно определяется образом базисных векторов.*

$u = (u_1, \dots, u_n) - \text{базис } U$

Для любого векторного пространства V :

$$\forall v_1, \dots, v_n \in V$$

$$\exists! \text{ линейное отображение } (*) L : U \rightarrow V : L(u_k) = v_k \quad \forall k$$

Доказательство.

$$L(ua) := va$$

$$\forall L^* : L(ua) = L(u)a = va$$

□

При этом L - инъективно тогда и только тогда, когда v - линейно независимый
 L - сюръективно тогда и только тогда, когда v - система образующих
 L - изоморфизм тогда и только тогда, когда v - базис.

Утверждение. $V, \quad v, v' - \text{базис } V$

$L : V \rightarrow V - \text{линейно}$

$$L(v_k) = v'_k \quad \forall k$$

$$(L_v)_k = L(v_k)_v = (v'_k)_v$$

$$L_v = C_{v \rightarrow v'}.$$

по другому

$$(Id_{v'}^v)_k = Id(v'_k)_v = (v'_k)_v.$$

$$\text{Тогда } L_v = C_{v \rightarrow v'} = Id_{v'}^v.$$

Определение 21. $f : X \rightarrow Y$

$$Im f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

$L : U \rightarrow V$ - линейное отображение

$$Im L = \{L(x) \mid x \in U\}$$

$$Ker L = L^{-1}(0) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$$

Лемма.

$$Im L \leq V$$

$$Ker L \leq U$$

Пусть $L(x) = y$

$$\begin{aligned}\forall y \in V : L^{-1} = x + Ker L \\ L^{-1}(y) = \{z \in U \mid L(z) = y\} \\ x + Ker L = \{x + z \mid z \in Ker L\}\end{aligned}$$

1.10 Лекция 10

Теорема 1.10.1. $L : U \rightarrow V$

$$\dim U = \dim Ker L + \dim Im L.$$

Доказательство. $u = (u_1, \dots, u_k)$ - базис $Ker L$

$v = (v_1, \dots, v_m)$ Дополним базис ядра до базиса U : $u \cup v$ - базис U

$L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$ - базис образа. $\forall x \in Im L \exists y \in U : L(y) = x$.

$$y = ua + vb, \quad a \in F^k, b \in F^m$$

$$x = L(y) = \underbrace{L(u)}_{(L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)} + L(v).$$

Следовательно, $L(v)$ - система образующих.

$$L(v)c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in Ker L \Rightarrow vc = ud \quad \text{для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u - два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ - линейно независимый. \square

Теорема 1.10.2. (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)

$$U, V \leq W$$

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

Доказательство. \hookleftarrow внешнюю сумму $U \oplus V$, $L(u, v) = u + v$

Тогда $Im L = U + V$. $(u, v) \in Ker L \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \subset U \cap V$

$$Ker L = (u, -u) \mid u \in U \cap V \cong U \cap V$$

$$\dim(U \oplus V) = \dim Ker L + \dim Im L = \dim U \cap V + \dim U + V \quad \square$$

08.10.2019

1.11 Лекция 11

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Простейший базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = vx_v, \quad x = ex_e = Ex_e$$

$$eC_{e \rightarrow v} = v - \text{из столбцов } v.$$

$$C_{e \rightarrow v} = v - \text{матрица из столбцов } (v_1, \dots, v_n).$$

$$L : F^m \rightarrow F^n, \quad A \in M_{n \times m}(F) \quad L(x) = Ax$$

$$L(x)_e = L_0^e x_e, \quad L(x)_e = L(x) = Ax = L_e^e x_e.$$

$\text{Hom}(F^n, F^m) \cong M_{m \times n}(F)$ - изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем A отождествляется с L , пишем A_u^v вместо L_u^v (A в базисе $u - v$).

Определение 22. Линейный оператор из V в V называется эндоморфизмом V . Множество эндоморфизмов $V = \text{End}(V)$ - ассоциативная алгебра над f

$+, * \alpha$ - поточечные операции, $*$ - композиция.

$L, M, N \in \text{End}(V) : \quad L \circ (M + N) = L \circ M + L \circ N$ - следует из линейности L

v - базис V , $u = \dim V$

$$\theta_v : \text{End}(V) \rightarrow M_n(F)$$

$$\theta_v = L_v$$

Утверждение. θ_v - биективно.

Упражнение. Построить обратное θ_v

Лемма. $(M \circ L)_v = M_v \circ L_v$

Утверждение. θ_v - изоморфизм

F - алгебра

$$\text{End} V \cong M_n(F)$$

—

Теорема 1.11.1. $U \leq V$

$\forall L : V \rightarrow W, \quad U \leq \text{Ker} L, \exists! \tilde{L} : V \setminus U \rightarrow W$

$$\tau : \begin{array}{ccc} V \setminus U & \longrightarrow & W \\ \uparrow \pi_U & & \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}.$$

$$\tau \circ \pi_U = L$$

L - эпиморфизм $\Rightarrow \tau$ - эпиморфизм

$\text{Ker} L = U \Rightarrow \tau$ - мономорфизм

Доказательство. Диаграмма коммутативна, следовательно, \tilde{L} строится однозначно.

Пусть $\tilde{L}(x+U) := L(x).y \in U \in \text{Ker} L : L(x+y) = L(x)+L(y) = L(x) \tilde{L}$ задано корректно (легко проверить, что оно линейно, единственность следует из коммутативности диаграммы).

$\tilde{L}(x+U) = L(x)$ - необходимо и достаточно коммутативности диаграммы.

$$\tilde{L}(x+U) = 0_W \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker} L = U \Leftrightarrow x+U = 0+U = 0_{V \setminus U}$$

Для инъективности : $\text{Ker} \tilde{L} = 0_{V \setminus U}$

□

Теорема 1.11.2 (О гомоморфизме). $L : V \rightarrow W$

$$V/\text{Ker} L \cong \text{Im} L.$$

Доказательство. Возьмем $U = \text{Ker} L$ и заменим W на $\text{Im} L$ $n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle \leq \dim F^m = m$. Из линейной независимости строк следует, что $m \leq n$ Таким образом $m = n$.

n линейно независимых столбцов (строк) в n -мерном пространстве - базис и матрица A - матрица перехода $C_{e \rightarrow a}$, где $a = (a_{*1}, \dots, a_{*n})$ - набор столбцов A . Следовательно, $A \in GL_n(F)$ - множество обратных матриц. □

Определение 23. Ранг:

$$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

$$rk L = \dim \text{Im} L$$

$$u_1, \dots, u_n \text{ - базис } U, L : U \rightarrow V$$

$$rk L = rk((L(u))) = \dim \langle L(u_1), \dots, L(u_n) \rangle$$

$$A \in M_{m \times n}(F)$$

$$\text{Столбцовый ранг } A : rk A = rk(a_{*1}, \dots, a_{*m})$$

$$\text{Строчный ранг} : rk A = rk(a_{1*}, \dots, a_{n*})$$

или наибольшее количество независимых столбцов (строк).

Лемма. $A \in M_{m \times n}$

1. столбцы A линейно независимы \Leftrightarrow столбцовый $rk A = n$

2. столбцы A - система образующих в $F^m \Leftrightarrow$ столбцовый $rk A = m$

3. строки A линейно независимы \Leftrightarrow строчной $rk A = m$

4. строки A - система образующих в ${}^m F \Leftrightarrow$ строчной $rk A = n$
5. столбцы являются базисом $F^n \Leftrightarrow m = n =$ строчной $rk A$
6. если столбцы и строки A линейно независимы $\Leftrightarrow n = m$, строки и столбцы - базисы, A - обратима.

Доказательство. (6)

из (1) \Rightarrow $c.rk A = n$

$n = \dim \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle$

□

10.10.2019

1.12 Лекция 12

Лемма. $L : U \rightarrow V$ - линейное отображение.

$rk L = c.L_U^V$

Для любых базисов u, v пространств U, V .

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V \\ \downarrow \varphi_u & & \downarrow \varphi_v \\ F^n & \xrightarrow{L_U^V} & F^m \end{array}$$

□

Лемма. $A \in M_{m \times n}(F)$

$B \in GL_m(F), C \in GL_n(F)$

$rk A = rk BAC$ - строчной или столбцовый.

Доказательство. $L : F^n \rightarrow F^m$ - оператор умножения на A . $A = L_e^e$.

$B = C_{e \rightarrow v}, C = C_{e \rightarrow u}$, где u, v - базисы пространств F^m, F^n .

$BAC = L_v^u$ Тогда $c.rk A = c.rk BAC = rk L$. Со столбцами все хорошо. Теперь со строками: $r.rk A^T = c.rk A$

$r.rk (BAC)^T = r.rk (A^T B^T C^T)$ $r.rk (BAC)^T = c.rk BAC$

Тогда $r.rk A^T = r.rk C^T A^T B^T$. (Заметим, что $(B^T)^{-1} = ((B^{-1})^T)$ Следовательно, B^T, C^T - произвольные обратимые матрицы.

□

Упражнение. $(AB)^T = B^T A^T$

Теорема 1.12.1 (PDQ - разложение, равенство базисов). $L : U \rightarrow V$ - линейное отображений,

1. Существуют базисы u, v пространств U, V такие что

$$L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Размер $E = rk L$.

$$2. \forall A \in M_{m \times n}(F) \exists P \in GL_m(F), Q \in GL_n(F) : A = PDQ, \text{ где } D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ c.rk} A = \text{r.rk} A$$

Доказательство. (f_1, \dots, f_k) - базис $\text{Ker} L$. Дополним до базиса на пространства $U : g \cup f = u$. Тогда (см. Теорему о ядре и образе). $L(g)$ - базис $\text{Im } L$. Дополним его до базиса v пространства V .

$$v = (L(g_1), \dots, L(g_l), v_{l+1}, \dots, v_n).$$

$$\text{таким образом } L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

Определение 24. W - множество матриц-перестановок (группа Вейля).

$$a_{*i} = e_{\sigma(k)}, \quad \text{где } \sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ - биекция.}$$

$B =$ - множество обратимых верхнетреугольных матриц. (борелевская подгруппа) B^- - множество обратимых нижнетреугольных матриц.

Теорема 1.12.2 (разложение Брюа).

$$GL_n(F) = BWB = \{b_1 w b_2 \mid b_1, b_2 \in B, w \in W\}.$$

$w \in W : BwB$ - клетка Брюа.

Доказательство. $a \in GL_n(F)$

$$\exists b, c \in B : bac \in W.$$

Индукция по n

В первом столбце a выберем низший ненулевой элемент.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}.$$

$$ua = ()$$

Пусть a' - матрица, полученная из uav вычеркиванием i -ого столбца и j -строки. Легко видеть, что ее столбцы линейно независимы. Следовательно, a' - обратима. Тогда по ПИ $\exists b', c' : b'a'c' \in W_{n-1}$. Все получилось!

□

Доказательство. см конспект $GL_n(F) = BWB$
 $a \in GL_n(F)$

□

Теорема 1.12.3 (разложение Гаусса).

$$GL_n(F) = WB^-B.$$

$w \in W : wB^-B$ - клетка Гаусса.

Доказательство. Докажем, что $\forall w \in W : BwB \subset wB^-B$
 $BwB = \bigcup_{w \in W} BwB \subset \dots$

Лемма (1). $D = D_n(F)$ - множество обратимых диагональных матриц. $U = U_n(F)$ - множество унитарных матриц. Тогда $B = DU = UD$.

Упражнение. $a = \begin{pmatrix} \alpha_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \text{ если } i \neq j \Rightarrow ab = ba \Rightarrow b \in D$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

□

Лемма (2). $U = \prod_{i < j} X_{ij}$, причем произведение берется в любом наперед заданном порядке.

Доказательство. Будет в теории групп

□

Обозначение. $w \in W : U_w := \prod_{i < j, \sigma(i) > \sigma(j)} X_{ij}$, где σ - перестановка соответствующая w . То есть $w^{-1}X_{ij}w = X_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Теорема 1.12.4 (Приведенной разложение Брюа). $B = \bigcup_{w \in W} U_w w D U$ При этом w , а также элементны из U_w, D, U определены по элементам из B из единственным образом.

Доказательство.

□

Следствие. $BwB \subset wB^{-1}B = w(w^{-1}U_w w)B \subset wU^-B \subset wB^-B$

Доказательство. $BwB = U_w w B$

□

□

Утверждение.

$$BwB \cap Bw'B = \emptyset, \quad \forall w \neq w'.$$

1.13 Лекция 13

15.10.2019 Доказательство теорем

1.14 Лекция 14

17.10.2019

Разложение Гаусса. Идея доказательства: $a \in GL_n(F)$, $wa \in U^-B$. Найдем такое w .

Определение 25. Главная подматрица матрицы A - подматрица $k \times k$ стоящая в левом верхнем углу матрицы A .

Лемма. Обратимость любой главной подматрицы не зависит от умножения на U^- слева и на U справа.

Доказательство. $a^{(k)}$ - главная подматрица $k \times k$ в a .

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где $b \in U^-F$ Обратимость $a^{(k)}$ равносильно обратимости $ba^{(k)}$, так как b - обратима. \square

Лемма. $a \in U^-B \Leftrightarrow$ все главные подматрицы обратимы.

Доказательство. Доказываем следствие влево. Индукция по n . База: $n = 1$ - очевидно
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к $a^{(n-1)}$. Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. \square

Лемма. $\forall a \in GL_n(F) \exists w \in W$: все подматрицы в wa обратимы. По условию $a^{(n-1)}$ обратима,

Доказательство. Индукция по k . Докажем, что существует перестановка $a \in GL_n(F)$ такая, что главные подматрицы размера не более $k \times k$ обратимы.

$k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем i - строку с первой.

Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

По индукционному предположению все главные подматрицы в $a^{(k)}$ обратимы. Все столбцы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k+1} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk+1} \end{pmatrix} = k+1$ $k+1$ -мерное подпространство U в ^{k+1}F . А первые k строк этой матрицы линейно независимы. $X = b_1, \dots, b_k, Y = b_1, \dots, b_n, \quad b_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik+1})$. X - линейно независимый, $\langle y \rangle = U, \dim U = k+1$.

$$\exists Z : X \geq X \geq Y, \text{ где } Z - \text{ базис } U..$$

$$|Z| = k+1 \Rightarrow Z = b_1, \dots, b_k, b_i, i > k..$$

Переставляем i -ю строку на $k+1$ место. У получившейся матрицы первые k главных подматриц равны главным подматрицам в a , а строки $k+1$ -й строки главной подматрицы линейно независимы. Следовательно, она независима. \square

$wa \in B^-B$. Домножая на B, B^- , получим, что хотели. \square

Теорема 1.14.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений $Ax = b$ имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $rkA = rk(Ab)$, где (Ab) - расширенная матрица.

Доказательство.

$$rkA = rk(Ab) \Leftrightarrow \langle a_{*1}, \dots \rangle = \langle a_{*1}, \dots, a_{*n}, b \rangle \Leftrightarrow b \in \langle a_{*1}, \dots, a_{*n} \rangle \Leftrightarrow \text{система имеет решение.}$$

\square

Chapter 2

Начала теории групп

2.1 Лекция 14

Определение 26. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если H – группа относительно операции, заданной в G .

$$H \leq G.$$

Лемма. $H \subset B$ H - подгруппа $\Leftrightarrow \forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$.

Утверждение. G, H - группы.

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \cdot g', h \cdot h').$$

Определение 27. $\varphi: X \rightarrow Y, (X, *), (Y, \dots) -$.
 φ - гомоморфизм групп, если:

$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Изоморфизм - биективный гомоморфизм.

Лемма. $G, H \leq F$

1. $G \cap H = \{1\}$
2. $G \cdot H = F$
3. $\forall g \in G, h \in H : gh = hg$

Тогда $F \cong G \times H$.

Доказательство. $\varphi : G \times H \rightarrow F$

$$\varphi(g, h) = g \cdot h$$

$$\varphi((g, h) \cdot (g', h')) = \varphi(gg', hh') = gg'hh'.$$

$$\varphi(g, h) \cdot \varphi(g', h') = ghg'h'.$$

(1) $\Leftrightarrow \varphi$ - сюръективно.

$$\varphi(g, h) = \varphi(g', h') \Leftrightarrow gh = g'h' \Leftrightarrow g'^{-1}g = h'h^{-1} = 1 \Rightarrow g' = g, h' = h.$$

□