[section]

1 Теоремы, утверждения, леммы

1.1 Машины Тьюринга

Thesis (Черч, Тьюринг)**.** *Для любой алгоритмически вычислимой функции существует вычисляющая ее значение машина Тьюринга.*

Theorem 1.1. *Множество L_0 не распознается никакой машиной Тьюринга.*

Theorem 1.2 (Эквивалентность машин Тьюринга)**.** *МТ с командами $\{-1, 0, +1\}$ эквивалентна МТ с бесконечной только в одну сторону лентой.*

1.2 Булевы функции

Theorem 1.3. *Для любой булевой функции, не равной тождественно нулю, существует СДНФ, ее задающая.*

Statement 1.
Построение СДНФ:

$$f(x_1, \dots x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots \sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots x_n^{\sigma_n})$$

Построение СКНФ:

$$f(x_1, \dots x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \dots \sigma_n)=0} (x_1^{\neg\sigma_1} \vee \dots x_n^{\neg\sigma_n})$$

Построение многочлена Жегалкина:

$$f(x_1, \dots x_n) = a \oplus \bigoplus_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \\ k \in \{1, \dots n\}}} a_{i_1, \dots i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots x_{i_k}, \quad a, a_{i_1}, \dots a_{i_k} \in \{0, 1\}$$

Theorem 1.4. *Для любой функции существует и единственное представление многочленом Жегалкина.*

Statement 2. *Классы T_0, T_1, S, M, L - замкнуты.*

Theorem 1.5 (Пост, 1921)**.** *Множество булевых функций $\mathcal{F}$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ не содержится ни в одном из пяти классов T_0, T_1, S, M, L.*

1.3 Комбинаторика

Statement 3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Statement 4 (Бином Ньютона)**.** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Theorem 1.6. $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n^n$

1.4 Графы

Lemma 1.

1. $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$
2. *В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих.*
3. *Всякий конечный граф содержит четное число вершин нечетной степени.*

Theorem 1.7.

1. *Связный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все вершины в нем имеют четную степень.*
2. *Связный граф содержит эйлеров путь, тогда и только тогда, когда он содержит две или ноль вершин нечетной степени.*

Theorem 1.8.

1. *Сильно связный ориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все вершины в нем имеют равные степени.*
2. *Сильно связный граф содержит эйлеров путь, тогда и только тогда, когда все, кроме, возможно двух, имеют равные степени.*

Theorem 1.9. *В графе де Брейна существует эйлеров цикл и строка длины $k^{n+1} + n$, содержащая все подстроки длины $n+1$.*

Theorem 1.10 (Дирак, 1952)**.** *Если в графе G с $n > 3$ вершинами сумма степеней любых двух вершин больше либо равна $n - 1(n)$, то существует гамильтонов путь (цикл).*

Theorem 1.11 (о мостах)**.** *Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.*

Theorem 1.12 (о деревьях)**.** *Для простого графа G следующие условия эквивалентны:*

1. *G - дерево.*

2. $\forall x, y \in G, x \neq y : \exists!$ *путь из* x *в* y.

3. G *не содержит циклов, но если любую пару не смежных вершин соединить ребром, то в новом графе будет ровно 1 цикл.*

4. G *- связный граф и* $|V| = |E| + 1$.

5. G *не содержит циклов и* $|V| = |E| + 1$.

6. G *- связный граф, и всякое ребро в нем - мост.*

Theorem 1.13 (Формула Эйлера, 1758). $|V| - |E| + |F| = 2$ *для любого плоского графа.*

Theorem 1.14.

1. $G(V, E)$ *- планарный граф без петель и кратных ребер, где* $|E| \geq 3$. *Тогда* $3|V| - 6 \geq |E|$.

2. *Если любой цикл имеет длину хотя бы* l, *то* $|E| \leq \frac{l}{l-2}(|V| - 2)$

Statement 5. *В любом планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени не больше 5.*

Lemma 2. $K_5, K_{3,3}$ *- не планарные.*

Theorem 1.15 (Понтрягин, Куратовский, 1930). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* $K_5, K_{3,3}$.

Theorem 1.16 (О художесвенной галерее, Хватал, 1975). *Для всякого* $n \geq 3$ *в любом* n*-угольнике достаточно* $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ *сторожей расставленных в его вершинах, чтобы каждую внутреннюю точку видел хотя бы один.*

Lemma 3. *Любой многоугольник можно триангулировать, причем полученный граф раскрашивается в три цвета.*

Theorem 1.17 (Фари, 1948). *Для любого графа без кратных ребер и петель существует укладка, в которой, все ребра представлены отрезками.*

Lemma 4 (О триангуляции). G *- плоский граф без петель, причем в границе каждой грани хотя бы три вершины. Тогда существует триангуляция остовным подграфом которой является* G.

Statement 6. *Рассмотрим цикл с хотя бы тремя вершинами, которые покрашены в хотя бы три цвета так, что любые две соседние покрашены в разные цвета. Тогда можно триангулировать его внутреннюю область так, что все проведенные диагонали соединяют вершины разных цветов.*

Theorem 1.18 (Хивуд). *Всякий планарный граф раскрашивается в пять цветов.*

Theorem 1.19 (Критерий раскраски в два цвета). *Граф двудолен тогда и только тогда, когда не содержит нечетных циклов.*

Lemma 5. *Если граф нельзя покрасить в k цветов, то он содержит индуцированный подграф, в котором все степени хотя бы k.*

Theorem 1.20 (Брукс, 1941). *Пусть в G степени всех вершин не более d. Если $d \geq 3$, и ни одна компонента связности не является полным подграфом K_{d+1}, то $\chi(G) \leq d$. Если $d = 2$, и ни одна компонента связности не является нечетным циклом, то $\chi(G) = 2$.*

Statement 7. *Граф H можно покрасить в k цветов тогда и только тогда, когда H/uv или $H + uv$, где $(u, v) \notin E(H)$, можно покрасить в k цветов.*

Theorem 1.21 (Лемма Холла, 1935). *Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ - двудольный граф. Паросочетание, покрывающее V_1 существует тогда и только тогда, когда $\forall U \subseteq V_1, |U| = k$, у вершин в U в совокупности не менее k смежных вершин в V_2.*

Theorem 1.22 (Татта, 1947). *В графе $G = (V, E)$ есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $\forall U \subseteq V$ подграф $G \setminus U$ содержит не более $|U|$ нечетных компонент связности.*

Theorem 1.23 (Формула Бержа). *Число вершин, непокрытых максимальным паросочетанием равно $\max\limits_{U \subseteq V}(odd(G \setminus U) - |U|) = d(G)$ - дефект графа G.*

Theorem 1.24 (Гернинг, 2000). *Пусть $V_1, V_2 \subseteq V(G)$; $k \in \mathbb{N}$. Тогда верно одно из условий:*

1. *В $V(G)$ найдется подмножество $U, |U| < k$, разделяющее V_1, V_2.*

2. *В G найдется хотя бы k простых путей из V_1 в V_2, не имеющие общих вершин.*

Theorem 1.25 (Менгер, 1927). *Пусть a, b - вершины связного графа, не соединенные ребром. Тогда минимальное число вершин (a, b)-разделяющего множества равно наибольшему числу не пересекающихся по вершинам путей из a в b.*

Theorem 1.26 (Кёнинг, 1931). *Максимальное число ребер в паросочетании двудольного графа равно минимальному числу в его вершинном покрытии.*

Theorem 1.27 (Петерсон, 1891). *Во всяком 3-регулярном графе без мостов есть совершенное паросочетание.*

Theorem 1.28 (Кёнинг, о раскраске ребер). *В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ существует правильная раскраска ребер в d цветов, где $d = \max\limits_{v \in V} \deg v$.*

Theorem 1.29 (Визинг, 1964). *Во всяком графе существует правильная раскраска в $d + 1$ цвет, где d - наибольшая степень вершин.*

Lemma 6. *Пусть* $G = (V, E)$.

1. v *- вершина со степенью не более* k
2. $\deg u \le k, \forall (u, v) \in E$
3. $|\deg u = k| \le 1, (u, v) \in E$

Тогда, если $G \setminus \{v\}$ *можно раскрасить в* k *цветов, то и* G *можно покрасить в* k *цветов.*

Theorem 1.30 (Гейл, Шепли, об устойчивых браках, 1962)**.** *Во всяком двудольном графе для любых предпочтений* $\{\le_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$ *существует устойчивое паросочетание.*

Thesis (Рамсей)**.** *В достаточно большой структуре, об устройстве которой ничего не предполагается, можно найти подструктуру, устроенную некоторым регулярным образом.*

Theorem 1.31 (Рамсей, 1930)**.** *Для любых натуральных чисел* $\{k; m_1, \dots m_d\}$ *найдется* $N \in \mathbb{N}$ *обладающее свойством* $\mathcal{R}(k; m_1, \dots m_d)$*. Иными словами, число* $R(k; m_1, \dots m_d)$ *существует и конечно.*

Statement 8.

1. $R(1; m_1 \dots m_d) = \sum\limits_{i=1}^{d} m_i - d + 1, \quad \forall m_i \in \mathbb{N}$
2. *Если* $\min(m_1, \dots m_d) < k$*, то* $R(k; m_1, \dots m_d) = \min(m_1, \dots m_d)$

Theorem 1.32 (Верхняя оценка чисел Рамсея)**.** $R(n, m) \le C_{n+m-2}^{m-1}$

Corollary 1 (Верхняя оценка диагональных чисер Рамсея)**.** $R(n, n) \le (1 + o(1)) \frac{4^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}}$

Theorem 1.33 (Нижняя оценка диагональных чисел Рамсея)**.** $R(n, n) \ge 2^{\frac{n}{2}}, \quad n \ge 2$

Theorem 1.34 (Шур, 1917)**.** *Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение* $x + y = z$ *имеет одноцветное решение.*

Theorem 1.35 (Эрдеш, Секреш, 1935)**.** *Для любого натурального* k *найдется такое* N*, что из любых* N *точек на плоскости общего положения найдется* k*, являющихся вершинами выпуклого* k*-угольника.*

Statement 9.

1. *Из любых пяти точек общего положения найдутся четыре в выпуклом положении.*
2. *Если из* $k \ge 4$ *точек любые четыре лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении.*