

Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

30 декабря 2019 г.

Оглавление

1	Общая топология	5
1.1	Метрические пространства	5
1.2	Топологические пространства	5
1.3	Внутренность, замыкание, граница	5
1.4	Подпространства	5
1.5	Сравнение топологий	5
1.6	База топологии	5
1.7	Произведение топологических пространств	5
1.7.1	Произведение параметризуемых метрических пространств	6
1.7.2	Тихоновская топология	7
1.8	Непрерывность	8
1.8.1	Непрерывность в метрических пространствах	9
1.8.2	Липшицевы отображения	10
1.8.3	Композиция непрерывных отображений	10
1.9	Гомеоморфизм	10
1.10	Аксиомы	12
1.10.1	Аксиомы счетности	12
1.10.2	Сепарабельность	13
1.10.3	Аксиомы отделимости	14
1.11	Связность	15
1.11.1	Связные множества	15
1.11.2	Связность при отображении	16
1.11.3	Компоненты связности	16
1.12	Линейная связность	17
1.12.1	Компоненты линейной связности	18
1.12.2	Линейная связность и связность	18
1.12.3	Локальная линейная связность	18
1.13	Компактность	19
1.13.1	Компактность в \mathbb{R}^n	21
1.13.2	Центрированные семейства	22
1.13.3	Непрерывные отображения компактов	23
1.13.4	Вложения компактов	23
1.13.5	Лемма Лебега	23
1.13.6	Равномерная непрерывность	24
1.13.7	Теорема Тихонова	25
1.13.8	Локальная компактность	25
1.13.9	Одноточечная компактификация	25
1.14	Полные метрические пространства	25
1.14.1	Компактность полных метрических пространств	25

1.15	Факторизация	25
1.15.1	Каноническая проекция на факторпространство	26
1.15.2	Стягивание множества в точку	26
1.15.3	Несвязное объединение	27
1.15.4	Приклеивание по отображению	27
1.16	Многообразия	28
1.16.1	Классификация многообразий	30
1.16.2	Сферы	30
1.16.3	Классификация поверхностей	30
1.16.4	Эйлерова характеристика	30

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.

Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y .

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y , а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ – замкнуто, $B \cap Y$ – замкнуто. Тогда $A \times B$ – замкнуто в $X \times Y$.

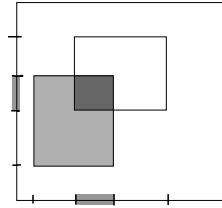


Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y , а $X \setminus A$ открыто в X . Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. \square

Practice. Для любых $A \subset X$, $B \subset Y$:

1. $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$
2. $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \stackrel{?}{\geq} d(p, p'') \stackrel{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

$$2. \Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

A это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y .

$$3. \Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d \text{ Рассмотрим } W \in \Omega_{X \times Y}.$$

$$\exists A \subset X, B \subset Y \text{- открытые, } (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

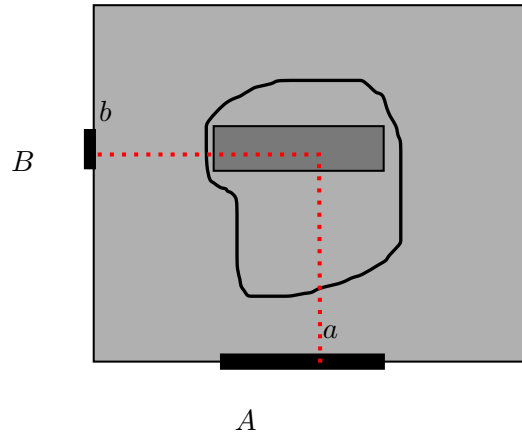


Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (x'', y'')) &\stackrel{?}{\leq} d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) \\ &\stackrel{\text{II}}{\leq} \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \stackrel{\text{II}}{=} \end{aligned}$$

□

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \rightarrow X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i .

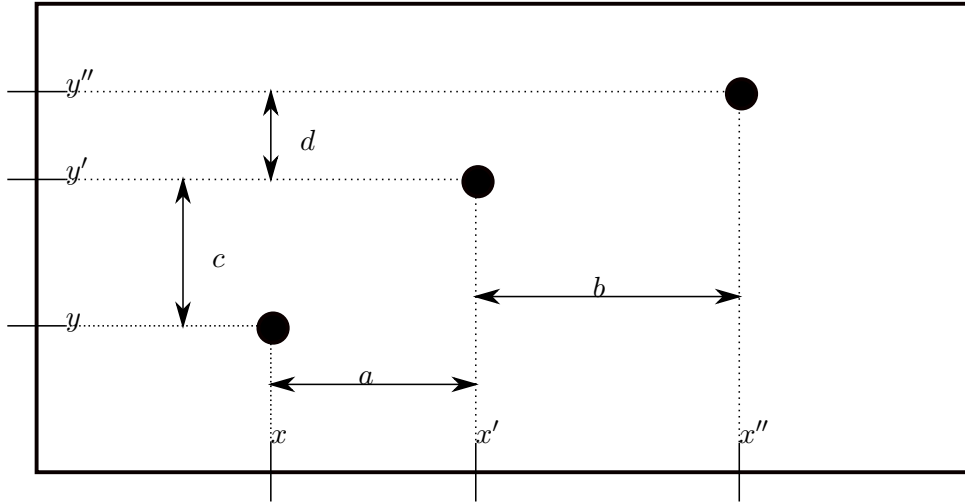


Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Def 2 (Тихоновская топология). Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \Omega_i\}.$$

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобратся с отрезком $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \rightarrow Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тожественное отображение непрерывно. $id_X : X \rightarrow X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

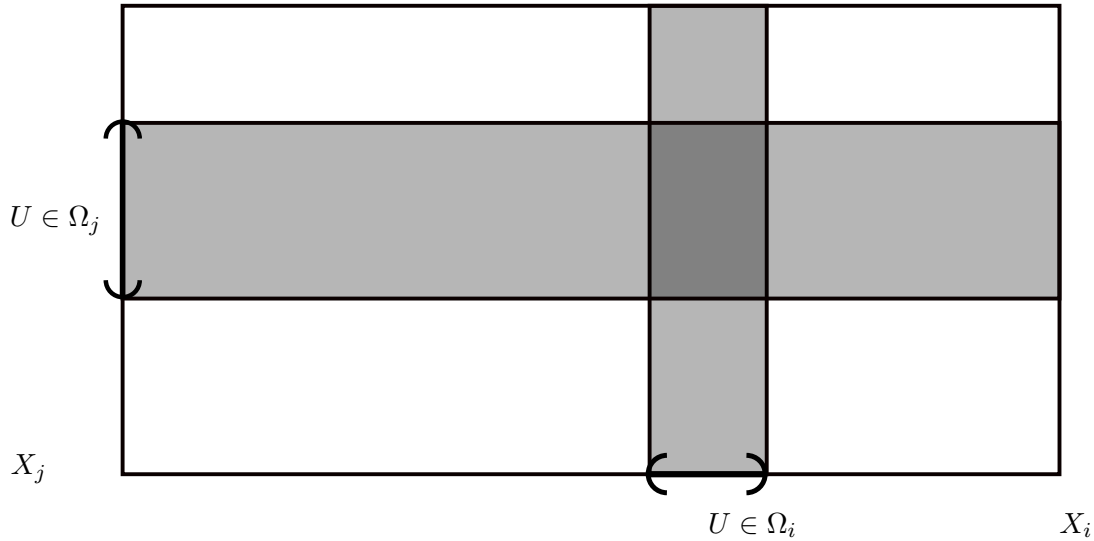


Рис. 1.4: Тихоновская топология

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

Theorem 4. f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. \Rightarrow)

$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

\Leftarrow)

$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$ - внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. X, Y – метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$.

Тогда f – непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. \Rightarrow) Так как f – непрерывна в точке x , существует окрестность $V \ni x : f(V) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

\Leftarrow) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$.
 $\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.

$f : X \rightarrow Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x_0 \in X$. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что f тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. Композиция непрерывных отображений непрерывна.

1.9 Гомеоморфизм

Designation. X, Y – топологические пространства.

Def 6. Гомеоморфизм между X и Y – непрерывное биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что $f^{-1} : Y \rightarrow X$ тоже непрерывно.

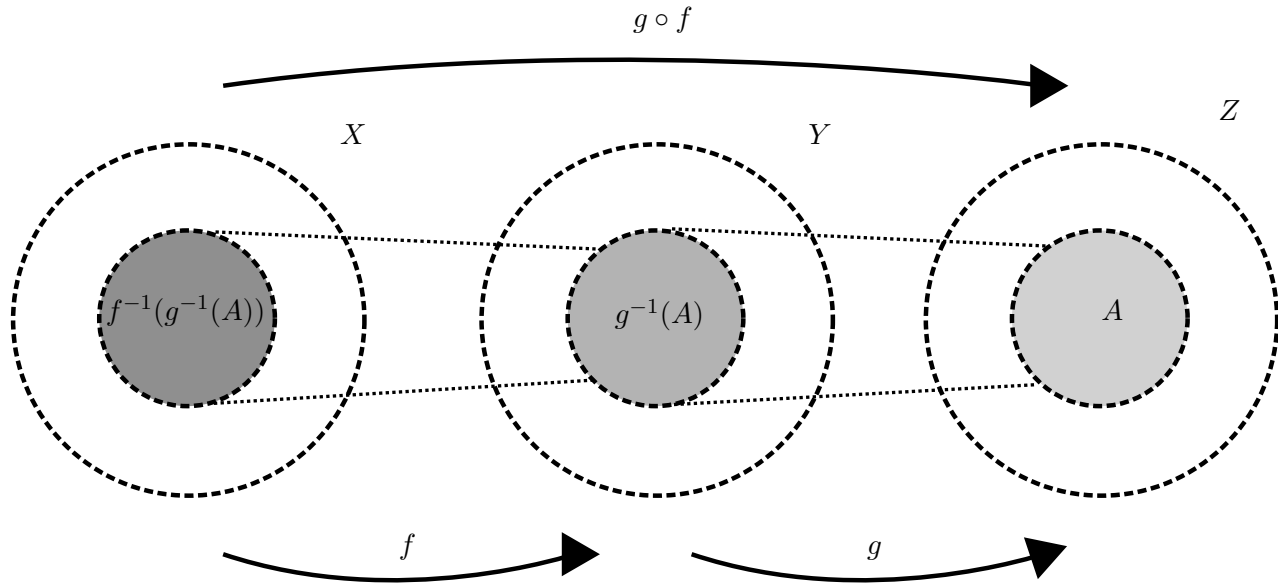


Рис. 1.5: Композиция отображений

Def 7. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. Тожественное отображение — гомеоморфизм.
2. Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.
3. Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.

Theorem 7. Гомеоморфность — отношение эквивалентности.

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y .
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f — биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1 , f — непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке $(1, 0)$.

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d : (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d] \cong (c, d]$
- $\forall a, b : (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b : [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 8. Открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен \mathbb{R}^n

Designation. D^n — замкнутый единичный шар в \mathbb{R}^n

Designation. S^n — единичная сфера в \mathbb{R}^{n+1}

Theorem 9. $S^n \setminus \{\text{точка}\} \cong \mathbb{R}^n$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.10 Аксиомы

1.10.1 Аксиомы счетности

Def 8. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ — такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество — не более, чем счетное.

Def 9. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сечности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 10. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 10. $2AC \Rightarrow 1AC$

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 11. Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Statement. \mathbb{R} имеет счетную базу.

Theorem 12. Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.

Theorem 13. Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.

Corollary. \mathbb{R}^n имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 11. Топологическое свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 14. Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in \mathcal{A}$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.10.2 Сепарабельность

Def 12. Всюду плотное множество – множество, замыкание которого есть все пространство.

Def 13. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R}

Def 14. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. X, Y – сепарабельны $\implies X \times Y$ тоже.

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 15.

- Счетная база \implies сепарабельность.
- Для метризуемых пространств сепарабельность \implies счетная база

1.10.3 Аксиомы отделимости

Def 15. X обладает свойством T_1 , если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U , что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 16. $T_1 \iff$ любая точка является замкнутым множеством.

Def 16. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y : U \cap V = \emptyset$.

Def 17. X хаусдорфово \iff Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 18. X – регулярно, если

- обладает T_1
 - \forall замкнутого $A \subset X \forall x \in X \setminus A \exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$
- Другое название T_3 -пространство

Def 19. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \emptyset) \exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$

Другое название T_4 -пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.

Нормальность не наследственная.

Def 20. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единицу на B .

□

Lemma (Урысон). X – нормально, $A, B \subset X$ – замкнуты, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1] : f|_A = 0 \wedge f|_B = 1$

1.11 СВЯЗНОСТЬ

Designation. X — топологическое пространство.

Def 21 (Связное топологическое пространство).

X связно, если:

- его нельзя разбить на два непустых открытых множества;
- его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;
- не существует открыто-замкнутых множеств, кроме \emptyset и X ;
- не существует сюръективного непрерывного отображения $f : X \rightarrow 0, 1$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- \mathbb{Q} несвязно

1.11.1 Связные множества

Def 22. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C , что $ClA \cap C = \emptyset \wedge ClC \cap B = \emptyset$.
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V : U \cap V = \emptyset \wedge U \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap A \neq \emptyset$.
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.

Связные множества на прямой

Statement. Отрезок $[0, 1]$ связан.

Theorem 17. Для $X \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:

1. X — связно
2. X — выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)
3. X — интервал, точка или пустое множество

1.11.2 Связность при отображении

Theorem 18. X — связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ связно.

Theorem 19. X связно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(X)$ содержит все числа между a и b .

Доказательство. По теореме 18 $f(X)$ связно. Тогда по определению $f(X)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. \square

1.11.3 Компоненты связности

Def 23. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X .

Exs.

1. $[0, 1] \cup [2, 3]$ две компоненты связности — $[0, 1]$ и $[2, 3]$.
2. Компоненты связности \mathbb{Q} — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств). Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ тоже связно.

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V .

$$\exists i, j \in I : U \cap A_i \neq \emptyset \wedge V \cap A_j \neq \emptyset.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Противоречие. \square

Theorem 20. Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:

- каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;
- различные компоненты связности не пересекаются.

Доказательство.

1. Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x . Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме 1.11.3 полученное множество связно, значит это компонента связности.

2. Различные компоненты связности не пересекаются.

Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \emptyset$. По лемме 1.11.3 $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

□

Lemma. Замыкание связного множества связно.

Theorem 21. Компоненты связности замкнуты.

Доказательство. Следует из леммы 1.11.3.

□

Note. компоненты связности не всегда открыты. Например, в \mathbb{Q} .

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.12 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 24. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α **соединяет** $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 25. X линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ех.

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \exists \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

Theorem 22. Если X линейно связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ в $f(X)$.

□

Lemma. Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X \exists \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \rightarrow \exists \bar{\alpha} = \alpha(1 - t)$

Транзитивность: если α идет из x в y , а β из x в z , построим путь γ , идущий из x в z :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

1.12.1 Компоненты линейной связности

Def 26. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 27 (переформулировка). Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.12.2 Линейная связность и связность

Theorem 23. Если X линейно связно, то оно связно.

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ex (Связность не влечет линейную связность). Рассмотрим множество

$$\left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность

График линейно связан, значит он связан, а $(0, 0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X , следовательно, X — связно.

2. $(0, 0)$ не соединяется путем с другими точками

Пусть α — путь с началом в $(0, 0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) = (0, 0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

Докажем, что T открыто в $[0, 1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

$$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связан, $T = [0, 1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0, 0)$.

□

1.12.3 Локальная линейная связность

Def 28. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x : V \subset U$.

Ex. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связно.

Theorem 24. В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.

Доказательство. 1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.

2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности. \square

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 25. Интервалы $[0, 1]$, $[0, +\infty)$, \mathbb{R} , S^1 попарно негомеоморфны.

Theorem 26. \mathbb{R}^2 не гомеоморфна никакому интервалу и S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества \mathbb{R}^2 связно.

\square

1.13 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 29. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны
2. Все ахти дискретные пространства пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. \mathbb{R} некомпактно

Def 30. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A , $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X , $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

Theorem 27 (лемма Гейне-Бореля). *Отрезок $[0, 1]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $l_0 = [0, 1]$, $\{U_i\}$ — открытые множества в \mathbb{R} , $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i . Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i . Обозначим ее l_1 .

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \dots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0 . Она лежит в каком-то U_{i_0} . С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n . Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i . Противоречие. \square

Theorem 28. *Если X компактно и $A \subset X$ замкнуто, то A компактно.*

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X , выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. \square

Theorem 29. *Если X, Y компактны, то $X \times Y$ компактно.*

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$.

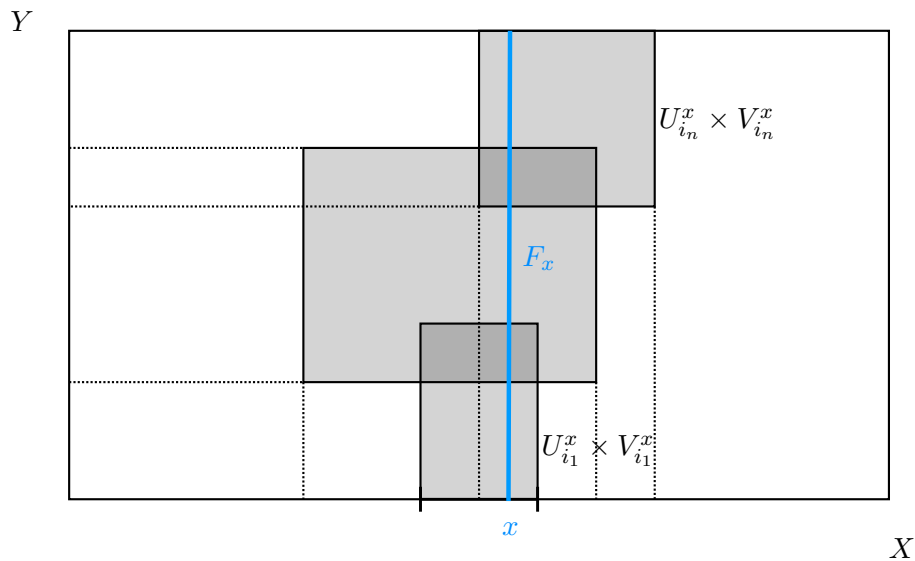


Рис. 1.6: Покрытие и гомеоморфизм

2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x := \{x\}Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U_{i_1}^x \times V_{i_1}^x, \dots, U_{i_n}^x \times V_{i_n}^x$.
3. $U^x = U_{i_1}^x \cap \dots \cap U_{i_n}^x$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X . $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".
4. Получили окрестности U^x для всех точки $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

□

Theorem 30. Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X .

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \ni x : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A : U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x , не пересекающая A . □

Theorem 31. Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы 30.

$$U := \bigcup U_{a_i}, V := \bigcap V_{a_i}.$$

U и V — открытые множества, $U \supset A$, $V \ni x$, $U \cap V = \emptyset$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть A, B замкнуты и $A \cap B = \emptyset$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \supset B : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . Аналогично получим открытые $U := \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V := \bigcap V_{a_i} \supset B$, $U \cap V = \emptyset$. Доказали, что X нормально.

□

1.13.1 Компактность в \mathbb{R}^n

Designation. X — метрическое пространство.

Def 31. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 32. Диаметр множества A :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. A ограничено тогда и только тогда, когда $\text{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 32. Компактное метрическое пространство ограничено.

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 33. Множество в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство.

\Rightarrow По прошлому следствию 1.13.1.

\Leftarrow Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.13.2 Центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 33. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 34. X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Доказательство.

\Rightarrow От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \emptyset$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

\Leftarrow Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств A_1, \dots, A_n . Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из A_1, \dots, A_n , это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i \in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X , хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Не умоляя общности A_0 компактно. По теореме 34 (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$ имеет непустое пересечение. \square

Theorem 35. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Note. Теорема 35 обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

1.13.3 Непрерывные отображения компактов

Theorem 36. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X . Выберем в нем конечное подпокрытие V_{i_1}, \dots, V_{i_n} . Тогда U_{i_1}, \dots, U_{i_n} — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. \square

Theorem 37. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(x)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. \square

Theorem 38. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная биекция. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. f непрерывно \iff прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно \iff f -образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. \square

1.13.4 Вложения компактов

Def 34. $f : X \rightarrow Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.13.5 Лемма Лебега

Theorem 39 (Лемма Лебега). X — компактное метрическое пространство. $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i .

Def 35. Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство.

$$\forall x \in X \exists r_x > 0, U_i \in \{U_i\} : B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что $\{B_{\frac{r_x}{2}}\}_{x \in X}$ — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

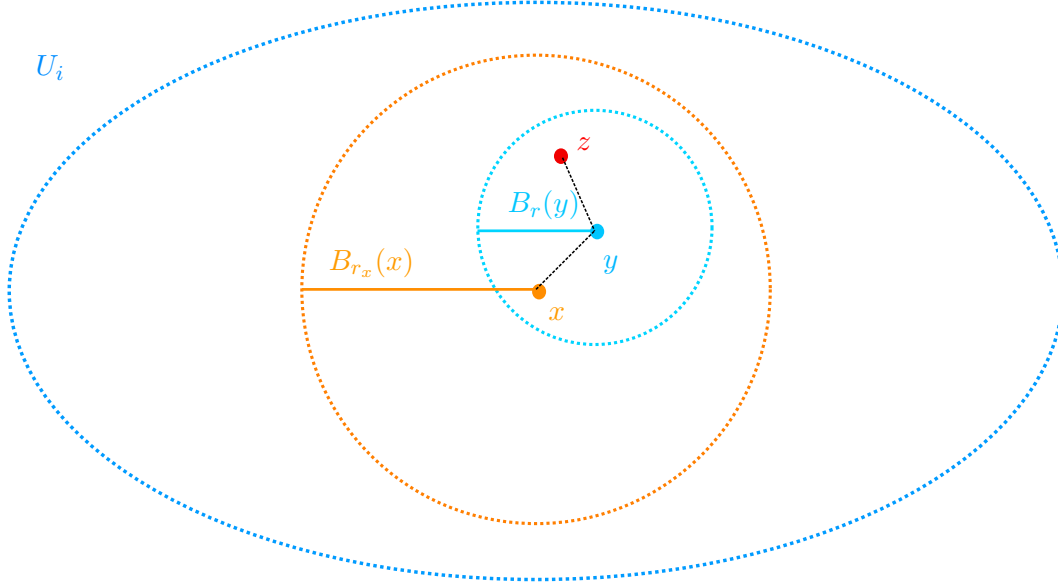


Рис. 1.7: Лемма Лебега

$$r \leq \frac{r_x}{2}, \quad \overline{xy} + \overline{yz} < r + \frac{r_x}{2} < r_x.$$

Следовательно, $B_r(y) \subset B_{\frac{r_x}{2}}(y) \subset B_{r_x}(x) \subset U_i$. □

Corollary. Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $\{U_i\}$ — открытое покрытие Y . Тогда $\exists r > 0 : \forall x \in X f(B_r(x))$ содержится в одном из U_i .

Доказательство. Применим лемму Лебега к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

1.13.6 Равномерная непрерывность

Def 36. Отображение $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, x' \in X (d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Theorem 40. Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Применим следствие 1.13.5 из леммы Лебега к f и покрытию Y шарами радиуса $\frac{\delta}{2}$ □

1.13.7 Теорема Тихонова

Theorem 41 (Тихонов, без доказательства). Пусть $\{X_i\}$ — произвольное семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение $\prod_{i \in I} X_i$ тоже компактно.

1.13.8 Локальная компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 37. X локально компактно, если $\forall x \in X \exists$ окрестность $U \ni x : \text{Cl } U$ компактно.

Ex. \mathbb{R}^n локально компактно.

Practice. Если X локально компактно и хаусдорфово, то X регулярно.

1.13.9 Одноточечная компактификация

Designation. X — хаусдорфово топологическое пространство.

Def 38. Одноточечная компактификация X — топологическое пространство \hat{X} :

- $\hat{X} = X \cup \{\infty\}, \quad \infty \notin X$
- $U \subset \hat{X} \wedge \infty \notin U$ открыто в \hat{X} тогда и только тогда, когда U открыто в X
- $U \subset \hat{X} \wedge \infty \in U$ открыто в \hat{X} тогда и только тогда, когда $X \setminus U$ компактно

Statement. Определение 38 корректно, то есть указанные открытые множества образуют топологию на $X \cup \{\infty\}$.

Practice.

1. \hat{X} компактно
2. \hat{X} хаусдорфово тогда и только тогда, когда X локально компактно
3. $\hat{\mathbb{R}} \cong S^1$
4. $\hat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$

1.14 Полные метрические пространства

1.15 Предел последовательности

Designation. X — топологическое пространство.

Def 39. Точка $x \in X$ — предел последовательности $\{x_n\} \subset X$, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in U \quad \forall n > N.$$

Синонимы: x_n стремится к x или x_n сходится к x

Designation. $x_n \rightarrow x$ и $x = \lim x_n$

Property.

1. $x_n = x$ сходится к x
2. $x_n \rightarrow x \implies$ любая подпоследовательность тоже сходится к x
3. Если X хаусдорфово, то предел единственный
4. В метрическом пространстве $X = (X, d)$,

$$x_n \rightarrow x \iff d(x, x_n) \rightarrow 0.$$

5. Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей.

$$\forall \text{ замкнутого } A \subset X : (\{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow x \implies x \in A).$$

6. В метрическом пространстве X (или в пространстве со счетной базой) верно обратное: если $A \subset X$ содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то A замкнуто.

1.16 Полные пространства

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 40. $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N \quad d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

или

$$d(x_n, x_k) \rightarrow 0, \quad n, k \rightarrow \infty.$$

Синонимы: $\{x_n\}$ — последовательность Коши, $\{x_n\}$ сходится в себе.

Def 41. X полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Property.

1. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Note. Полнота — не топологическое свойство!

Exs.

1. \mathbb{R} полно (критерий сходимости Коши)
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно (если $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, она фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
3. $[0, 1]$ полно
4. $(0, 1)$ не полно

Theorem 42. \mathbb{R}^n полно.

Доказательство. Пусть $\{x\}$ — последовательность в \mathbb{R}^n , $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. Предположим, что $\{x_k\}$ фундаментальна в \mathbb{R}^n . Тогда $\forall i \in [1, n] : \{x_k^i\}$ — тоже фундаментальна. Значит координатные последовательности имеют пределы x^1, \dots, x^n . Следовательно, $x_k \rightarrow x := (x^1, \dots, x^n)$. \square

Theorem 43. Если X полно и $Y \subset X$ замкнуто, то Y полно.

Practice. Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.

Practice. Множество в \mathbb{R}^n полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

1.16.1 Теорема о вложенных шарах

Theorem 44 ("о вложенных шарах"). Пусть

- X — полное метрическое пространство
- A_1, A_2, \dots — непустые замкнутые множества в X
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
- $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Для всех A_n выберем точку x_0 . Так как $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$, $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел x , который принадлежит X , так как X полно.

$$\forall n \geq k : x_n \in A_k \implies x \in A_k.$$

Тогда $x \in \bigcap A_i \implies \bigcup A_i \neq \emptyset$. \square

1.16.2 Теорема Бэра

Def 42. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ нигде не плотно, если:

$$\text{Int Cl } A = \emptyset$$

или

$X \setminus A$ содержит всюду плотное множество

или

любое открытое $U \subset X$ содержит открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Ех. $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — ненулевой многочлен степени n над \mathbb{R} . Тогда $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в \mathbb{R}^n .

Ех. Канторово множество нигде не плотно в \mathbb{R} .

Theorem 45 (Бэр). *Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным набором нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2, \dots — нигде не плотные множества. Пусть $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$.

A_1 нигде не плотно, следовательно, открытый шар $B_{r_0}(x_0)$ содержит открытое множество $U_1 : U_1 \cap A_1 = \emptyset$.

U_1 содержит открытый шар, который содержит $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1)$, $r_1 \leq 1$.

Построили замкнутый шар $B_1 \subset B_0$, $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Аналогично построим последовательность $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, где радиус $r_i \leq \frac{1}{i}$ и $B_i \cap A_i = \emptyset$.

По теореме ?? о вложенных шарах существует точка $x \in \bigcap B_i$. Тогда $x \notin \bigcup A_i \Rightarrow \bigcup A_i \neq X$. \square

Corollary. Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Theorem 46 (усиление теоремы Бэра). *Пусть X — полное метрическое пространство, A — объединение счетного набора нигде не плотных множеств. Тогда $\text{Int } A = \emptyset$.*

1.16.3 Пополнение

Def 43. Пусть X — метрическое пространство. Пополнение X — такое метрическое пространство \overline{X} , что

- \overline{X} полно
- $X \subset \overline{X}$ как подпространство, то есть $d_X = d_{\overline{X}}$
- X всюду плотно в \overline{X}

Theorem 47 (без доказательства). *У любого метрического пространства есть пополнение.*

1.17 Компактность метрических пространств

1.17.1 Секвенциальная компактность

1.17.2 Вполне ограниченные множества

1.17.3 Компактность и счетная база

1.18 Факторизация

Def 44. Пусть X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство X/\sim — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X .

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X .

1.18.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на X .

Def 45. Каноническая проекция X на X/\sim или отображение факторизации — отображение

$$p: X \rightarrow X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 48. Каноническая проекция непрерывна.

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X .

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. Следующие свойства наследуются факторпространством:

- Связность
- Линейная связность
- Компактность
- Сепарабельность

1.18.2 Стягивание множества в точку

Def 46. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A , операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ех. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме 46)

1.18.3 Несвязное объединение

Def 47. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологией: A открыто в $X \sqcup Y \iff A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y .

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.18.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение.

Def 48. \sim — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A : a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f .

Ех. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y , $A = \{x_0\}$, $f(x_0) = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0) .

Ех. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ех. Если склеить \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , получилась **лента Мебиуса**.

Def 49. Пусть X — топологическое пространство. Γ — подгруппа группы $\text{Homeo}(X)$ — группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство X/\sim обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ех. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где \mathbb{Z} действует на \mathbb{R} параллельными переносами.

Theorem 49. Пусть $p : X \rightarrow X/\sim$ – каноническая проекция. $f : X \rightarrow Y$ переводит эквивалентные точки в равные:

$$\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : f = \bar{f} \circ p$.
2. \bar{f} непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.

Доказательство.

- Определим $\bar{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- \implies По непрерывности композиции, если \bar{f} непрерывна, то f тоже.
- \impliedby В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 50 (Склеивание концов отрезка). $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0, 1] \rightarrow S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$. Соответствующее $\bar{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$ – биекция. По теореме 43 \bar{f} непрерывно. $[0, 1]/\{0, 1\}$ – компактно, S^1 – хаусдорфово, следовательно, \bar{f} – гомеоморфизм.

□

Theorem 51. X – замкнуто, Y – хаусдорфово. $f : X \rightarrow Y$ – непрерывно и сюръективно. Тогда

$$X/\sim \cong Y,$$

где \sim определяется условием

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Theorem 52. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме 45 достаточно построить сюръективный гомеоморфизм $f : B \rightarrow S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x| \right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

□

1.19 Многообразие

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 50. n -мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n .

Число n — размерность многообразия.

Theorem 53. При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны.

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m .

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество \mathbb{R}^n или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n -мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n / \{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно \mathbb{RP}^n .

Def 51. n -мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо \mathbb{R}^n , либо $\mathbb{R}_+^n := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M .

Def 52. Поверхность – двумерное многообразие.

Ex. D^n – многообразие с краем, S^{n-1} – его край.

Theorem 54. \mathbb{R}_+^n не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в \mathbb{R}^n .

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) — тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) — бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ($abab$) — проективная плоскость \mathbb{RP}^2 .

Theorem 55.

- Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).
- Пусть в m -угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать их между собой.

1.19.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 56 (без доказательства). Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда

1. M – компактно, без края $\implies M \cong S^1$
2. M – некомпактно, без края $\implies M \cong \mathbb{R}$
3. M – компактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, 1]$
4. M – некомпактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, +\infty)$

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края — несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.19.2 Сферы

Def 53. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2 , вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 54. Сфера с пленками — аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой — \mathbb{RP}^2 , сфера с двумя пленками — бутылка Клейна.

1.19.3 Классификация поверхностей

Statement. Поверхность — связное двумерное многообразие.

Theorem 57.

- Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.
- Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.
- Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.19.4 Эйлерова характеристика

Def 55. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 58. *Эйлерова характеристика – топологический инвариант и не зависит от разбиения.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n, \chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- $\chi(\text{сферы с } p \text{ ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с } q \text{ пленками}) = 2 - q$