

Конспект по топологии
I семестр
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

19 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

Def 1. Метрическое пространство — пара (X, d) , где X — множество (точек), а $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — расстояние, такая что $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Note. Вместо буквы d используют $\rho(x, y)$ или $|xy|$.

Property (Неравенство многоугольника).

$$\forall x_1, \dots, x_n \in X : \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \geq d(x_1, x_n).$$

Exs.

1. Прямая \mathbb{R} ,

$$d(x, y) = |x - y|$$

2. Плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,

$$d((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

3. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

4. Подпространство.

Пусть $X = (X, d)$ — метрическое пространство. $Y \subset X$, $(Y, d|_{Y \times Y})$ — подпространство.

5. Единичная метрика.

$$X \text{ любое множество, } d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

6. Нестандартные метрики на плоскости:

$$d_1((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v|$$

$$d_\infty((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$$

7. Расстояние в графе

Def 2. X — метрическое пространство, $x \in X, r > 0$.

Открытый шар с центром в x и радиусом r

$$B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r

$$\overline{B}_r(x) = B[x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Сфера с центром в точке x и радиусом r

$$S_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

Exs.

1. $X = \mathbb{R}, B_r(x) = (x - r, x + r)$

2. $X = \mathbb{R}^2$

3. $X = (\mathbb{R}^2, d_1)$

4. $X = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$



Рис. 1.1: Второй, третий и четвертый примеры

Def 3. Множество $A \subset X$ открыто, если $\forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$.

Exs.

1. Квадрат без границы на плоскости открыт, а квадрат с границей — нет.

2. Интервалы в \mathbb{R} : \mathbb{R} , (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ — открыты, остальные — нет.
3. X с единичной метрикой — все множества открыты.
4. \emptyset всегда открыто
5. Все пространство тоже всегда открыто

Note. Открытость — относительное свойство, зависит от пространства.

Ex. $[0, 1)$ не открыто на прямой, но открыто на $[0, +\infty)$

Theorem 1. *Открытые шары открыты.*

Theorem 2. *Объединение любого набора открытых множеств открыто.*

Доказательство. $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство открытых множеств. Рассмотрим

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Пусть $x \in A$. Тогда $\exists i \in I : x \in A_i$. Так как A_i открыто, $\exists r > 0 : B_r(x) \subset A_i \implies B_r(x) \subset A$. Следовательно, A открыто. \square

Theorem 3. *Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто.*

Доказательство. Докажем для двух. Пусть A, B открыты. Рассмотрим $x \in A \cap B$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists r_1 > 0 : B_{r_1} \subset A \\ \exists r_2 > 0 : B_{r_2} \subset B \end{array} \right\} \implies B_{\min(r_1, r_2)} \subset A \cap B.$$

\square

Practice. Открытые множества на прямой представимы в виде дизъюнктного объединения открытых интервалов, причем не более чем счетного числа.

1.2 Топологические пространства

Def 4. X — любое множество.

Топологическая структура (топология) на множестве X — множество $\Omega \subset 2^X$ такая, что:

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. Объединение любого набора множеств из Ω принадлежит Ω

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \Omega : \bigcup_{i \in I} A_i \in \Omega$$

3. Пересечение конечного числа принадлежащих Ω множеств тоже принадлежит Ω :

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \Omega : \bigcap_{i \in [1, n]} A_i \in \Omega.$$

Топологическое пространство — (X, Ω) , X — множество, Ω — топологическая структура, элементы Ω — открытые множества данного топологического пространства.

Exs.

1. Метрические пространства (топология задана метрикой)
2. Дискретная топология $\Omega = 2^X$
3. Антидискретная топология $\Omega = \{\emptyset, X\}$

Def 5. Топологическое пространство (X, Ω) метризуемо, если существует метрика на X , задающая топологию Ω .

Def 6. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется **замкнутым**, если $X \setminus A \in \Omega$.

Exs.

1. $X = \mathbb{R}$. $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, \mathbb{R} — замкнуты.
2. Дискретное пространство — все множества замкнуты.
3. Антидискретное пространство — замкнуты только \emptyset и X .

Practice. Замкнутые шары замкнуты.

Theorem 4.

1. \emptyset, X замкнуты
2. Пересечение любых наборов замкнутых множеств замкнуто
3. Конечное объединение замкнутых множеств замкнуто

Property. (X, Ω) — топологическое пространство, A открыто, B замкнуто.

1. $A \setminus B$ открыто
2. $B \setminus A$ замкнуто

1.3 Внутренность, замыкание, граница

Designation. (X, Ω) — топологическое пространство, $A \subset X$.

1.3.1 Внутренность множества. Внутренние точки

Def 7. Внутренность множества A ($\text{Int}A, A^\circ$) — объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .

Property.

1. $\text{Int}A$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A .
2. A открыто тогда и только тогда, когда $A = \text{Int}A$.

Def 8. Окрестность точки $x \in X$ — любое открытое множество, содержащее x .

Def 9. Точка $x \in A$ называется внутренней точкой множества A , если существует окрестность $U \ni x$ такая, что $U \subset A$.

Theorem 5. Внутренность множества — множество внутренних точек.

Corollary. A открыто тогда и только тогда, когда все его точки внутренние.

1.3.2 Замыкание, граница, точки прикосновения

Def 10. Замыкание множества A ($\text{Cl}A, \bar{A}$) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

Property.

1. $\text{Cl}A$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A .
2. A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Cl}A = A$.
3. $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}A$
 $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl}A$

Def 11. Граница множества A ($\text{Fr}A, \partial A$) это $\text{Cl}A \setminus \text{Int}A$.

Property.

1. $\text{Fr}A$ замкнуто.

2. $\text{Fr}A = \text{Fr}(X \setminus A)$
3. A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr}A \subset A$.
4. A открыто тогда и только тогда, когда $A \cap \text{Fr}A = \emptyset$.
5. $\text{Cl}A = \text{Int}A \sqcup \text{Fr}A$

Statement. $X = \text{Int}A \sqcup \text{Int}X \setminus A \sqcup \text{Fr}A$

Def 12. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения, если для любой окрестности $U \ni x : U \cap A \neq \emptyset$.

Theorem 6. Замыкание множества A — множество всех точек прикосновения.

Доказательство. Перейдем к дополнениям.

$$X \setminus \text{Cl}A \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid x \text{ — не точка прикосновения}\}.$$

$$\text{Int}(X \setminus A) \stackrel{?}{=} \{x \in X \mid \exists \text{ окрестность } U \ni x, U \cap A = \emptyset\}.$$

$$U \cap A = \emptyset \iff U \subset X \setminus A \iff x \text{ — внутренняя точка } X \setminus A.$$

□

1.3.3 Изолированные и предельные точки

Def 13. Точка $x \in X$ называется внешней точкой множества A , если x — внутренняя точка $X \setminus A$.
Внешность A — внутренность $X \setminus A$.

Def 14. $x \in X$ — изолированная точка множества A , если для существует окрестность $U \ni x : A \cap U = \{x\}$.

Def 15. $x \in X$ — предельная точка множества A , если для любой окрестности $U \ni x : (A \cap U) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Property.

1. $\text{Cl}A = \{\text{изолированные точки}\} \sqcup \{\text{предельные точки}\}$
2. A замкнуто тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.

Practice.

1. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
2. $\text{Int}(A \cup B)$ не всегда равно $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$
3. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$
4. $\text{Cl}(A \cap B)$ не всегда равно $\text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$

1.4 Подпространства

Designation. $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство, $Y, Z \subset X$.

Def 16. Индуцированная (относительная) топология на Y — $\Omega_Y = \{Y \cap U \mid U \in \Omega\}$.
 Y с такой топологией называется подпространством X : (Y, Ω_Y) — подпространство X .

Theorem 7. Ω_Y — топология на Y .

Доказательство. Просто проверяем определение. □

Theorem 8. Определение согласовано с метрическим. Если $X = (X, d)$ — метрическое пространство, Ω — топология, заданная метрикой d , то Ω_Y — топология, заданная $d|_{Y \times Y}$.

Доказательство.

$$\boxed{\subset} \quad A \in \Omega_Y \implies A = Y \cap U, \quad U \in \Omega \implies \forall x \in A \exists r > 0 : B_r^X(x) \subset U.$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y$$

Тогда $\forall x \in A \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A \implies A$ открыто относительно $d|_{Y \times Y}$.

$$\boxed{\supset} \quad A \text{ открыто относительно } d|_{Y \times Y} \implies \forall x \in A \exists r > 0 : B_r^Y(x) \subset A.$$

$$U := \bigcup_{x \in A} B_r^X(x) \in \Omega.$$

$$Y \cap U = \bigcup_{x \in A} (Y \cap B_r^X(x)) = \bigcup_{x \in A} B_r^Y(x) = A \implies A \in \Omega_Y$$

□

Theorem 9. $\{B \mid B \text{ замкнуто относительно } \Omega_Y\} = \{A \cap Y \mid A \text{ замкнуто относительно } \Omega\}$

Доказательство. $B \subset Y$ замкнуто в $Y \iff Y \setminus B \in \Omega_Y \iff \exists U \in \Omega : Y \setminus B = Y \cap U \iff \exists U \in \Omega : B = Y \cap (X \setminus U)$ — замкнуто в X . □

Property. $A \subset Y$

1. Если A открыто в X , то A открыто в Y .

2. Если Y открыто в X , то

$$A \in \Omega_Y \implies A \in \Omega.$$

3. Если A замкнуто в X , то A замкнуто в Y .

4. Если Y замкнуто в X , то

$$A \text{ замкнуто в } Y \implies A \text{ замкнуто в } X.$$

Practice. $A \subset Y$

1. $\text{Cl}_Y A = \text{Cl} A \cap Y$

2. $\text{Int}_Y A$ не всегда равно $\text{Int} A \cap Y$

1.5 Сравнение топологий

Designation. X — множество, $\Omega_1, \Omega_2 \subset 2^X$ — топологические структуры.

Def 17. Если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то Ω_1 слабее (грубее), чем Ω_2 , а Ω_2 сильнее (тоньше), чем Ω_1 .

Theorem 10. X — множество, d_1, d_2 — метрики на X . d_1, d_2 задают топологии Ω_1, Ω_2 . Тогда эквивалентны:

- Ω_1 сильнее Ω_2
- В любом шаре метрики d_2 содержится шар метрики d_1 с тем же центром.

Доказательство.

\Rightarrow По определению первое утверждение равносильно тому, что $\Omega_2 \subset \Omega_1 \iff \forall A \in \Omega_2 : A \in \Omega_1$.

Пусть $B(x)$ — открытый шар в метрике d_2 .

$$B(x) \in \Omega_2 \implies B(x) \in \Omega_1 \implies x \text{ — внутренняя точка } X.$$

Следовательно, существует шар метрики d_1 , содержащий $B(x)$.

\Leftarrow $A \in \Omega_2$

$\forall x \in A : \exists B$ — открытый шар в метрике $d_2 \implies \exists B' \subset B$ — открытый в метрике d_1 .

□

Corollary. d_1, d_2 — метрики на X .

$$\exists c > 0 : d_2 \leq cd_1 \quad \left(\forall x, y \in X : d_2(x, y) = cd_1(x, y) \right).$$

Тогда d_2 слабее d_1 (Ω_2 слабее Ω_1).

Доказательство. $d_2 \leq cd_1 \implies B_{\frac{d_2}{c}}^{d_1}(x) \subset B_r^{d_2}(x)$. Выполнено второе условие теоремы 10. Значит, d_2 слабее d_1 . □

Def 18. d_1 и d_2 называются **липшицево эквивалентными**, если $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 d_2 \leq d_1 \leq c_2 d_2$.

Corollary. Липшицево эквивалентные метрики задают одинаковые топологии.

Ex. \mathbb{R}^n , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ d_\infty(x, y) &= \max_i \{|x_i - y_i|\} \end{aligned}$$

Метрики d_1, d_2, d_∞ задают одинаковые топологии так как:

$$\begin{aligned} d_\infty &\leq d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty \\ d_\infty &\leq d_1 \leq n d_\infty \end{aligned}$$

1.6 База топологии

Designation. X — множество, Ω — топология на X .

Def 19. $\Sigma \subset \Omega$ — база топологии Ω , если $\forall A \in \Omega$ представляется в виде объединения элементов Σ .

Ex. В метрическом пространстве базой будет множество всех открытых шаров.

Ex. На \mathbb{R}^1 — открытые интервалы с рациональными концами.

Statement. Σ — база Ω тогда и только тогда, когда

$$\forall U \in \Omega \forall x \in U \exists V \in \Sigma : x \in V \subset U.$$

Theorem 11. X — множество, $\Sigma \subset 2^X$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Существует такая топология, что Σ — база Ω
 2. $\forall A, B \in \Sigma : A \cap B$ — представимы в виде объединения элементов Σ
- и X представимо в виде объединения элементов Σ .

Доказательство.

$1 \implies 2$ Очевидно.

$2 \implies 1$ Пусть

$$\Omega = \{\text{объединение любых наборов элементов } \Sigma\}.$$

Аксиомы из определения топологии выполняются, следовательно, Ω — топология на X .

□

Def 20. $\Lambda \subset \Omega$ — предбаза Ω , если Ω является наименьшей по включению топологией, содержащей Λ .

Theorem 12. Для любого $\Lambda \subset 2^X$ существует топология Ω такая, что Λ — ее предбаза.
База Ω — все возможные конечные пересечения элементов Λ и все пространство.

Def 21. $X = (X, \Omega)$ — топологическое пространство, $x \in X$. $\Sigma_x \subset \Omega$ — набор открытых множеств, содержащих x .

Σ_x — база окрестности x , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x : \exists \text{ окрестность } V \in \Sigma_x : x \in V \subset U.$$

Ex. Шары с центром в точке являются базой окрестности в ней.

1.7 Произведение топологических пространств

Def 22. X, Y - топологические пространства.

Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y - \text{открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y .

Theorem 13. *Определение 22 корректно.*

Доказательство. 1. Все пространство открыто

2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.



Рис. 1.2: Пересечение

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y , а значит принадлежит базе.

□

Theorem 14. $A \cap X$ – замкнуто, $B \cap Y$ – замкнуто. Тогда $A \times B$ – замкнуто в $X \times Y$.

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y , а $X \setminus A$ открыто в X . Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$.

□

Practice. Для любых $A \subset X$, $B \subset Y$:

1. $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$
2. $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 15.

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \stackrel{?}{\geq} d(p, p'') \stackrel{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y .

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.

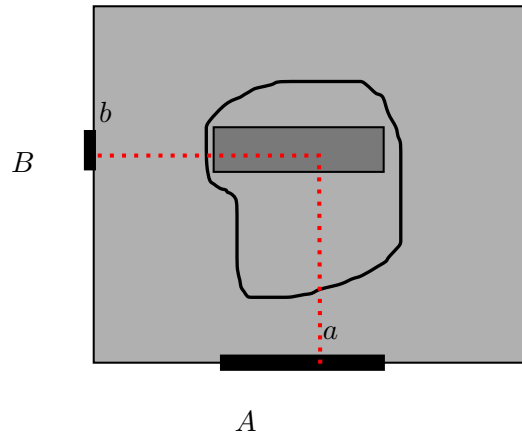


Рис. 1.3: Произведение метрических пространств

$\exists A \subset X, B \subset Y$ - открытые, $(x, y) \in A \times B \subset W$.

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}^Y(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B_r^{X \times Y}((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement. *Согласование метрик:*

$$d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (x'', y'')) &\stackrel{?}{\leq} d_2((x, y), (x', y')) + d_2((x', y'), (x'', y'')) \\ &\stackrel{||}{=} \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \end{aligned}.$$

□



Рис. 1.4: Неравенство треугольника

1.7.2 Тихоновская топология

Designation.

- $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение множеств или пространств.
- $p_i : X \rightarrow X_i$ — координатная проекция.
- Ω_i — топология на X_i .

Def 23 (Тихоновская топология). Пусть $\{X_i, \Omega_i\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod X_i$ – топология с предбазой

$$\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I, U \in \Omega_i\}.$$



Рис. 1.5: Тихоновская топология

Tasks.

1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобратся с отрезком $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]$.
2. Канторовское множество $\approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \rightarrow Y$.

Def 24. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y : f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs.

1. Тожественное отображение непрерывно. $id_X : X \rightarrow X$
2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \rightarrow Y, \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$
3. Если X - дискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \rightarrow Y$ - непрерывно.

Def 25. $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in Y$ f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(V) \subset U.$$

Theorem 16. f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

$$\Rightarrow y_0 \in U.$$

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$$\Leftarrow U \subset Y \text{ открыто, хотим доказать, что } f^{-1}(U) \text{ открыто. Достаточно доказать, что } \forall x \in f^{-1}(U) \text{ внутренняя.}$$

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x — внутренняя точка $f^{-1}(U)$.

□

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 17. X, Y — метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$.

Тогда f — непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x' \in X, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Доказательство.

$$\Rightarrow \text{Так как } f \text{ — непрерывна в точке } x, \text{ существует окрестность } V \ni x : f(V) \subset B_\varepsilon(f(x)). \text{ Так как } V \text{ открыто, } \exists \delta > 0 : B_\delta \subset V.$$

$$\Leftarrow \text{Рассмотрим } U \ni f(x). \text{ Тогда } \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U : \\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U. \text{ Можем взять } V := B_\delta(x).$$

□

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 26. X, Y — метрические пространства.

$f : X \rightarrow Y$ — липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$.

Designation. c — константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq C\delta = \varepsilon.$$

□

Ех. X – метрика, $x_0 \in X$. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что f тоже липшицево с константой 1.

Ех. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений



Рис. 1.6: Композиция отображений

Theorem 18. X, Y, Z – топологические пространства. $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $g \circ f : X \rightarrow Z$. f непрерывно в X , g непрерывно в $f(X)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в X .

Note. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Несложно проверить равенство $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Доказательство. Используя то, что $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, понимаем, что если A открыто в Z , то его прообраз в Y – $g^{-1}(A)$ открыт, а прообраз $g^{-1}(A)$ в X открыт в X . □

Theorem 19. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого замкнут.

Ех. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subset X : f(\text{Cl}A) \subset \text{Cl}f(A),$$

что равносильно

$$\forall A \subset X : f(\text{Int}A) \subset \text{Int}f(A).$$

1.8.4 Предел отображения

Def 27. Предел отображения $f : X \setminus x_0 \rightarrow Y$ в точке x_0 равен $y_0 \in Y$ при $x \rightarrow x_0$, если $\hat{f} : X \rightarrow Y$, определенная равенством

$$\begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases},$$

непрерывна в точке x_0 .

Ех. Непрерывность в $\pm\infty$: $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, окрестности $\pm\infty$ — лучи, окрестности остальных — как раньше.

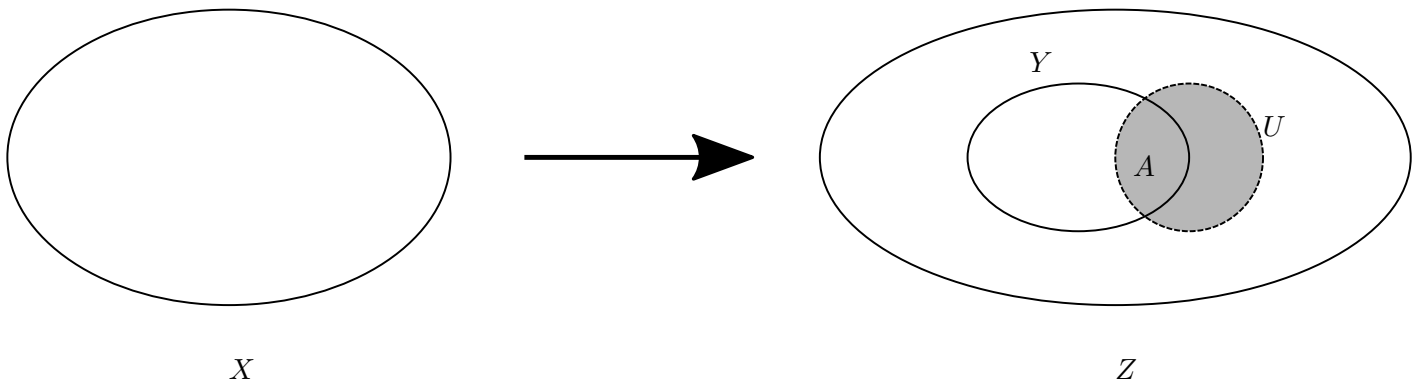
1.8.5 Непрерывность и пространства

Theorem 20. $Y \subset X$. Включение $\text{in} : Y \rightarrow X$, $\text{in}(y) = y \quad \forall y \in Y$ непрерывно.

Theorem 21. $f : X \rightarrow Z$, $Y \subset X$. Если f непрерывно, то $f|_Y$ непрерывно.

Доказательство. $f|_Y = f \circ \text{in}$ — композиция непрерывных непрерывна. □

Theorem 22. $Y \subset Z$, $f : X \rightarrow Y$. f непрерывно тогда и только тогда, когда $\hat{f} = \text{in}_{Y \rightarrow Z} \circ f$ непрерывно.



Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Композиция непрерывных непрерывна.

$2 \implies 1$ Рассмотрим открытое в Y множество A .

$$A = Y \cap U, \quad \text{где } U \text{ открыто в } Z$$

$$f^{-1}(A) = \hat{f}^{-1}(A) = \hat{f}^{-1}(U).$$

$\hat{f}^{-1}(U)$ открыто в X . Следовательно, f непрерывно.

□

1.8.6 Отображения в произведение

Def 28 (Общий вид отображений в произведение). Любое отображение $f : Z \rightarrow X \times Y$ имеет вид $f = (f_1, f_2) : f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \quad \forall z \in Z$. $f_1 : Z \rightarrow X$ и $f_2 : Z \rightarrow Y$ — компоненты.

В обратную сторону: любая пара f_1, f_2 задаем $f : Z \rightarrow X \times Y$.

Def 29. Пусть $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$. Его компоненты — композиции с проекциями:

$$f_i = p_i \circ f, \quad f_i : Z \rightarrow X_i \quad \forall i \in I.$$

Theorem 23. $X = \prod X_i$ (тихоновское произведение). Z — топологическое пространство, $f : Z \rightarrow X$, $f_i = p_i \circ f$ — компоненты отображения. f непрерывно тогда и только тогда, когда f_i непрерывно для всех i .

Доказательство.

$1 \implies 2$ $f_i = p_i \circ f$ — композиция непрерывных непрерывна.

$2 \implies 1$ Проверим, что все прообразы предбазы открыты (из этого будет следовать, что и прообразы всех открытых открыты). Пусть U из предбазы.

$$U = p_i^{-1}(V_i), \quad i \in I \wedge V_i \in \Omega_i.$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(V_i) = f_i^{-1}(V_i).$$

А $f_i^{-1}(V_i)$ открыто, так как f_i непрерывно.

□

1.8.7 Отображения из произведения

Designation. $f : X \times Y \rightarrow Z$, $f(x, y) \in Z \quad \forall x \in X, y \in Y$.

Ex. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

По x , по y непрерывно, потому что просто $|f_y(x)| \leq 1$. Но при $x = y \neq 0$, $f(a, a) = 1$, при $x = y = 0$, $f(0, 0) = 0$, следовательно, непрерывности нет.

Theorem 24.

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x + y \\ f(x, y) &= x - y \\ f(x, y) &= xy \end{aligned} \right\} \text{ непрерывны из } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ в } \mathbb{R}.$$

Доказательство. Снабдим $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ стандартной метрикой. Проверим непрерывность в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Сумма.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} : ((x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \implies |x - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta).$$

Тогда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < 2\delta < \varepsilon.$$

2. Разность. Аналогично.

3. Произведение.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M + 1}, 1 \right\}, \quad M = \max\{|x_0|, |y_0|\}.$$

Если (x, y) лежит в шаре B_δ , то $x = x_0 + a$, $y = y_0 + b$, $|a|, |b| < \delta$.

$$f(x, y) = (x_0 + a)(y_0 + b) = x_0 y_0 + a y_0 + b y_0 + ab.$$

Тогда (используем, что $\delta \leq 1$)

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |a y_0 + b x_0 + ab| < \delta M + \delta M + \delta^2 \leq (2M + 1)\delta \leq \varepsilon.$$

□

Corollary. Пусть X — топологическое пространство. Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, то $f + g$, $f - g$, fg тоже непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $F : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : F(x) = (f(x), g(x))$. F непрерывно по теореме 23. Тогда $f + g$, $f - g$, fg — композиции F и суммы, разности, произведения соответственно. □

Corollary. X — топологическое пространство. Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна на области определения, то есть $\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$.

Доказательство. $g|_{\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}}$ непрерывна. Функция $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ непрерывна. Тогда

$$\frac{1}{g} = \varphi \circ g|_{\{g \neq 0\}} \text{ тоже непрерывно.}$$

Следовательно,

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \text{ непрерывно.}$$

□

Corollary. Любая функция от n переменных, состоящая из элементарных операций, непрерывна на области определения.

Practice. X — топологическое пространство. $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Тогда $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ тоже непрерывны.

1.9 Фундаментальные покрытия

Def 30. X — топологическое пространство. Покрытие X — Любое семейство подмножеств A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

Покрытие $\{A_i\}$ называется **открытым**, если $\forall i \in I : A_i$ открыто.

Покрытие $\{A_i\}$ называется **замкнутым**, если $\forall i \in I : A_i$ замкнуто.

Покрытие $\{A_i\}$ называется **конечным**, если I конечно.

Покрытие $\{A_i\}$ называется **локально конечным**, если $\forall a \in X \exists$ окрестность $U \ni a : \{i \mid U \cap A_i \neq \emptyset\}$ конечно.

Def 31. Покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$ называется **фундаментальным**, если

$$\forall U \subset X : (\forall i \in I : U \cap A_i \text{ открыто в } A_i \implies U \text{ открыто в } X).$$

Theorem 25. $\{A_i\}_{i \in I}$ — фундаментальное покрытие. $f : X \rightarrow Y$. Если $\forall i \in I : f|_{A_i}$ непрерывно, то f непрерывно.

Доказательство. Для любого открытого $U \subset Y$ и любого $i \in I : (f|_{A_i})^{-1}(U)$ открыто в A_i .

$$(f|_{A_i})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_i.$$

Так как покрытие фундаментальное, из последнего утверждения следует, что $f^{-1}(U)$ открыто в X . \square

Theorem 26. Следующие виды покрытий фундаментальны:

1. открытые покрытия
2. конечные замкнутые покрытия
3. локально конечные замкнутые покрытия

Доказательство.

1. Все A_i открыты. $U \subset X$.

$$\forall i \in I : U \cap A_i \text{ открыто в } A_i \implies U \cap A_i \text{ открыто в } X.$$

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i) \text{ открыто в } X.$$

2. A_1, \dots, A_n замкнуто. $U \subset X$ Перейдем к дополнению. Докажем, что $V = X \setminus U$ замкнуто в X . $A_i \cap V$ замкнуто в A_i , следовательно, $A_i \cap V$ замкнуто в X .

$$V = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap V) \text{ замкнуто в } X.$$

Тогда $X \setminus V = U$ открыто в X .

3. Локально конечно $\implies V_x$ пересекаются с конечным числом A_i . Применим второй пункт, получим, что пересечение с U открыто в X . По первому пункту U открыто в X .

□

1.10 Гомеоморфизм

Designation. X, Y — топологические пространства.

Def 32. Гомеоморфизм между X и Y — непрерывное биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что $f^{-1} : Y \rightarrow X$ тоже непрерывно.

Def 33. X и Y гомеоморфны, если существует гомеоморфизм между ними.

Designation. X и Y гомеоморфны: $X \cong Y$ или $X \simeq Y$.

Property.

1. Тожественное отображение — гомеоморфизм.
2. Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.
3. Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.

Theorem 27. Гомеоморфность — отношение эквивалентности.

Note.

1. Гомеоморфизм задает биекцию между открытыми множествами в X и Y .
2. С топологической точки зрения гомеоморфные пространства неотличимы.

Note. Топологическая эквивалентность — гомеоморфность.

Note. Про гомеоморфные пространства говорят, что у них одинаковый тип.

Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом

Пусть $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ такое что:

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

f — биекция между $[0, 2\pi)$ и S^1 , f — непрерывно, но f^{-1} разрывно в точке $(1, 0)$.

Примеры гомеоморфных пространств

Statement.

- $\forall a, b, c, d : [a, b] \cong [c, d]$
- $\forall a, b, c, d : (a, b) \cong (c, d)$
- $\forall a, b, c, d : [a, b) \cong [c, d) \cong (c, d]$
- $\forall a, b : (a, +\infty) \cong (b, +\infty) \cong (-\infty, a)$
- $\forall a, b : [a, +\infty) \cong [b, +\infty) \cong (-\infty, a]$
- $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
- $[0, 1) \cong [0, +\infty)$

Theorem 28. *Открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен \mathbb{R}^n*

Доказательство.

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \operatorname{tg} |\vec{x}| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

□

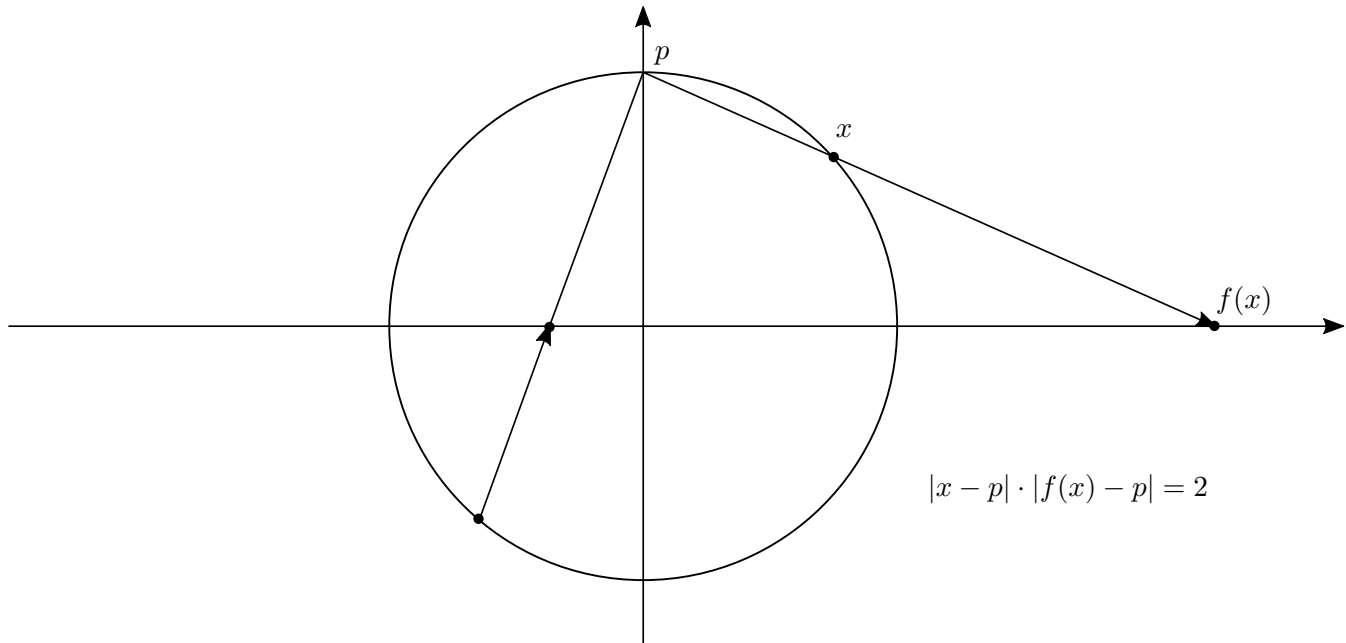
Designation.

D^n — замкнутый единичный шар в \mathbb{R}^n

S^n — единичная сфера в \mathbb{R}^{n+1}

Theorem 29. $S^n \setminus \{\text{точка}\} \cong \mathbb{R}^n$

Доказательство. Выделим последнюю координату и спроецируем точки на \mathbb{R}^n , где она равна нулю. □



$$|x - p| \cdot |f(x) - p| = 2$$

Рис. 1.7: Для $n = 1$

Practice.

1. Квадрат с границей гомеоморфен D^2
2. $D^m \times D^n \cong D^{n+m}$

1.11 Аксиомы

1.11.1 Аксиомы счетности

Def 34. $X = (X, \Omega)$. База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Здесь и далее под счетным множеством подразумевается не более чем счетное.

Def 35. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности (1АС), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 36. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2АС), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 30. $2AC \Rightarrow 1AC$

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть

$$\Sigma_x = \{U \in \Sigma \mid x \in U\}.$$

Тогда Σ_x – база в точке. □

Statement. \mathbb{R} имеет счетную базу.

Theorem 31. Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.

Theorem 32. Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.

Corollary. \mathbb{R}^n имеет счетную базу.

Practice. 1АС тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 37. Топологическое свойство — наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1АС, 2АС — наследственные свойства.

Theorem 33 (Линделёф). Если X удовлетворяет 2АС, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in \Lambda$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.11.2 Сепарабельность

Def 38. Всюду плотное множество — множество, замыкание которого есть все пространство.

Statement. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R}

Def 39. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. X, Y — сепарабельны $\implies X \times Y$ тоже.

Note. Сепарабельность — не наследственное свойство.

Theorem 34.

- Счетная база \implies сепарабельность.
- Для метризуемых пространств сепарабельность \implies счетная база

Доказательство.

- Рассмотрим множество, пересечение которого с каждым элементом базы состоит из одной точки. Оно счетно и пересекается с любым открытым, значит является всюду плотным.
- Рассмотрим всюду плотное множество $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\{B_r(x) \mid x \in A, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ — счетная база.

□

1.11.3 Аксиомы отделимости

Def 40. X обладает свойством T_1 , если для любых различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U , что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Designation. Другое название: T_1 -пространство.

Theorem 35. $T_1 \iff$ любая точка является замкнутым множеством.

Def 41. X хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y : U \cap V = \emptyset$.

Designation. Другое название: T_2 -пространство.

Designation. про такие окрестности U, V говорят, что они отделяют x и y друг от друга.

Note. Все метрические пространства хаусдорфовы.

Theorem 36. X хаусдорфово \iff «диагональ» $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 42. X регулярно, если

- обладает T_1
- \forall замкнутого $A \subset X \forall x \in X \setminus A \exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

Designation. Другое название: T_3 -пространство.

Note (Переформулировка определения T_3). X регулярно тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X, \forall \text{ окрестности } U \ni x \exists \text{ окрестность } V \ni x : \text{Cl}(V) \subset U.$$

Def 43. X нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \emptyset) \exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \emptyset$

Designation. Другое название: T_4 -пространство.

Note (Переформулировка определения T_4). X нормально тогда и только тогда, когда обладает свойством T_1 и

$$\forall x \in X, \forall \text{ замкнутого } A \subset X \text{ и } \forall \text{ открытого } U \supset A \exists \text{ открытое } V : A \subset V \wedge \text{Cl}(V) \subset U.$$

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям. Нормальность не наследственна.

Theorem 37. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. (Хороший метод) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единицу на B . □

1.11.4 Лемма Урысона

Lemma (Урысон). X — нормально, $A, B \subset X$ — замкнуты, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1] : f|_A = 0$ и $f|_B = 1$

Доказательство.

i. Построим открытые множества:

- $U_1 := X \setminus B$
- U_0 — такое, что $A \subset U_0 \subset \text{Cl}(U_0) \subset U_1$
- $U_{\frac{1}{2}}$ — такое, что $\text{Cl}(U_0) \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \text{Cl}(U_{\frac{1}{2}}) \subset U_1$
- $U_{\frac{1}{4}}$ — такое, что $\text{Cl}(U_0) \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \text{Cl}(U_{\frac{1}{4}}) \subset U_{\frac{1}{2}}$
- $U_{\frac{3}{4}}$ — такое, что $\text{Cl}(U_{\frac{1}{2}}) \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \text{Cl}(U_{\frac{3}{4}}) \subset U_1$

И так далее по индукции

- $\alpha = \frac{2k+1}{2^n}$ U_α — такое, что $\text{Cl}(U_{\frac{k}{2^{n-1}}}) \subset U_\alpha \subset \text{Cl}(U_\alpha) \subset U_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}$

ii. Пусть S — множество двоично-рациональных чисел. В прошлом пункте построили семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in S \cap [0,1]}$ такое, что

$$\text{Cl}(U_\alpha) \subset U_\beta, \quad \forall \alpha < \beta \in S \cap [0, 1] \quad (1.1)$$

Доопределим

$$\begin{cases} U_\alpha = \emptyset & \alpha < 0 \\ U_\alpha = X & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Теперь свойство ?? выполняется для всех $\alpha, \beta \in S$.

iii. Определим $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \inf\{\alpha \in S \mid x \in U_\alpha\}.$$

По построению $f(X) \subset [0, 1]$, $f|_A = 0$, $f|_B = 1$.

iv. Докажем, что f непрерывна. Достаточно проверить, что $\{f < t\}$ и $\{f > t\}$ открыты для любого $t \in \mathbb{R}$.

$\{f < t\}$ открыто

$$\begin{aligned} f(x) < t &\iff \inf\{\alpha \in S \mid x \in U_\alpha\} < t \\ &\iff \exists \alpha \in S : \alpha < t, x \in U_\alpha \end{aligned}$$

Тогда $\{f < t\} = \bigcup_{\alpha < t} U_\alpha$. Это объединение открытых множеств.

$\{f > t\}$ открыто

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf\{\alpha \in S \mid x \in U_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \notin U_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \notin \text{Cl}(U_\alpha)\} && (\text{из ??}) \\ &= \sup\{\alpha \in S \mid x \in V_\alpha\}, && \text{где } V_\alpha = X \setminus \text{Cl}(U_\alpha) \end{aligned}$$

Аналогично прошлому шагу:

$$\begin{aligned} f(x) > t &\iff \sup\{\alpha \in S \mid x \in V_\alpha\} \\ &\iff \exists \alpha \in S : \alpha > t, x \in V_\alpha \end{aligned}$$

Значит $\{f > t\} = \bigcup_{\alpha > t} V_\alpha$.

□

1.12 Связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 44 (Связное топологическое пространство). X **связно**, если:

- его нельзя разбить на два непустых открытых множества;
- его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества;
- не существует открыто-замкнутых множеств, кроме \emptyset и X ;
- не существует сюръективного непрерывного отображения $f : X \rightarrow 0, 1$.

Exs.

- Антидискретное пространство связно
- Дискретное пространство из хотя бы двух точек несвязно
- $\mathbb{R} \setminus 0$ несвязно
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно
- \mathbb{Q} несвязно

1.12.1 Связные множества

Def 45. Связное множество — подмножество топологического пространства, которое связано как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Practice.

- Множество $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда оно разбивается на такие непустые B и C , что $ClA \cap C = \emptyset \wedge ClC \cap B = \emptyset$.
- Множество A в метрическом пространстве X несвязно тогда и только тогда, когда существуют открытые $U, V : U \cap V = \emptyset \wedge U \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap A \neq \emptyset$.
- Предыдущее свойство неверно в общей топологии.

Property. Любое открытое содержится в некоторой компоненте связности.

Связные множества на прямой

Statement. Отрезок $[0, 1]$ *связен*.

Theorem 38. Для $X \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:

1. X — связно
2. X — выпукло (то есть вместе с любыми двумя точками содержит весь отрезок между ними)
3. X — интервал, точка или пустое множество

1.12.2 Связность при отображении

Theorem 39. X — связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ связно.

Theorem 40. X связно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $a, b \in f(X)$. Тогда $f(X)$ содержит все числа между a и b .

Доказательство. По теореме ?? $f(X)$ связно. Тогда по определению $f(X)$ выпукло, значит содержит $[a, b]$. \square

1.12.3 Компоненты связности

Def 46. Компонента связности топологического пространства X — максимальное по включению связное множество в X .

Exs.

- $[0, 1] \cup [2, 3]$ две компоненты связности — $[0, 1]$ и $[2, 3]$.
- Компоненты связности \mathbb{Q} — отдельные точки.

Lemma (Об объединении связных множеств). Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство связных множеств, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Тогда $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ тоже связно.

Доказательство. Пусть A разбивается на непустые открытые U и V .

$$\exists i, j \in I : U \cap A_i \neq \emptyset \wedge V \cap A_j \neq \emptyset.$$

Так как A_i связно, $A_i \subset U$. Аналогично $A_j \subset V$. Следовательно, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Противоречие. \square

Theorem 41. Пространство разбивается на компоненты связности. То есть:

- каждая точка содержится в некоторой компоненте связности;
- различные компоненты связности не пересекаются.

Доказательство.

- Каждая точка принадлежит некоторой компоненте связности.
Рассмотрим $x \in X$. Пусть A — объединение всех связных множеств, содержащих x . Такие есть, так как множество $\{x\}$ связно. По лемме ?? полученное множество связно, значит это компонента связности.
- Различные компоненты связности не пересекаются.
Пусть A, B — различные компоненты связности и $A \cap B \neq \emptyset$. По лемме ?? $A \cup B$ тоже связно, но A и B были максимальными по включению. Значит $A \cup B = A = B$. Противоречие.

\square

Lemma. Замыкание связного множества связно.

Theorem 42. Компоненты связности замкнуты.

Доказательство. Следует из леммы ??.

□

Note. компоненты связности не всегда открыты. Например, в \mathbb{Q} .

Corollary. Пространство несвязно тогда и только тогда, когда есть хотя бы две компоненты связности.

Corollary. Две точки принадлежат одной компоненте связности тогда и только тогда, когда существует связное множество, содержащее их.

1.13 Линейная связность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 47. Путь в X — непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ — концы пути (или начало и конец). Путь α соединяет $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$.

Def 48. X линейно связно, если для любых двух точек существует соединяющий их путь.

Ех.

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \exists \alpha(t) = (1 - t)p + tq.$$

Theorem 43. Если X линейно связно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ линейно связно.

Доказательство. Если α — путь, соединяющий $x, y \in X$, то $f \circ \alpha$ соединяет $f(x)$ в $f(X)$.

□

Lemma. Соединимость путем — отношение эквивалентности на множестве точек.

Доказательство.

Рефлексивность: $\forall x \in X \exists \alpha(t) = x$

Симметричность: $\forall x, y \in X : (\exists \alpha : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y) \rightarrow \exists \bar{\alpha} = \alpha(1 - t)$

Транзитивность: если α идет из x в y , а β из x в z , построим путь γ , идущий из x в z :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

1.13.1 Компоненты линейной связности

Def 49. Компонента линейной связности — класс эквивалентности отношения соединимости путем.

Def 50 (переформулировка). Компонента линейной связности — максимальные по включению линейно связные множества.

1.13.2 Линейная связность и связность

Theorem 44. Если X линейно связно, то оно связно.

Corollary. Компоненты линейной связности лежат в компонентах связности.

Ех (Связность не влечет линейную связность). Рассмотрим множество

$$\left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Оно связно, но не линейно связно.

Доказательство.

1. Связность

График линейно связан, значит он связан, а $(0, 0)$ — его предельная точка. X — замыкание графика в X , следовательно, X — связно.

2. $(0, 0)$ не соединяется путем с другими точками

Пусть α — путь с началом в $(0, 0)$. Рассмотрим $T = \{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) = (0, 0)\}$. T замкнуто, так как это прообраз замкнутого.

Докажем, что T открыто в $[0, 1]$. Рассмотрим $t_0 \in T$. Так как α непрерывно $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : |\alpha(t)| < 1$. Предположим, что $\exists t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$. Пусть $f(t)$ — первая координата $\alpha(t)$. Тогда $f(t_1) > 0$. По непрерывности

$$\exists t_2 \in [t_0, t_1] : f(t_2) = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\alpha(t_2) = (f(t_2), \cos f(t_2)) = (\frac{1}{2\pi n}, 1)$. Получаем $|\alpha(t_2)| > 1$. Противоречие.

Значит, T — открыто-замкнутое множество на отрезке, а так как отрезок связан, $T = [0, 1]$. Тогда, α — постоянный путь в точке $(0, 0)$.

□

1.13.3 Локальная линейная связность

Def 51. Пространство X локально линейно связно, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует линейно связная окрестность $V \ni x : V \subset U$.

Ех. Любое открытое множество на плоскости локально линейно связно.

Theorem 45. В локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открыты и совпадают с компонентами связности.

Доказательство. 1. Открытость компонент связности следует из того, что у каждой точки есть линейно связная окрестность, которая содержится в компоненте, а значит, точка каждая точка внутренняя.

2. Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности так как пространство разбито на открытые связанные множества $\{U_i\}$, а тогда любое связанное множество A содержится в одном из U_i (так как $A \cap U_i$ и $A \setminus U_i$ открыты в A). Значит это компоненты связности.

□

Негомеоморфность интервалов и окружности

Theorem 46. Интервалы $[0, 1]$, $[0, +\infty)$, \mathbb{R} , S^1 попарно негомеоморфны.

Theorem 47. \mathbb{R}^2 не гомеоморфна никакому интервалу и S^1

Доказательство.

- В интервалах и окружности существуют конечные множества с несвязными дополнениями.
- Дополнение любого конечного множества \mathbb{R}^2 связно.

□

1.14 Компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 52. X компактно, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие.

Designation. X — компакт.

Exs.

1. Все конечные пространства компактны
2. Все ахти дискретные пространства компактны
3. Бесконечное дискретное пространство некомпактно
4. \mathbb{R} некомпактно

Def 53. Компактное множество — множество, компактное как подпространство.

Note. $A \subset X$. Под покрытием можно понимать одно и двух:

- Набор множеств $V_i \subset A$, открытых в A , $\bigcup V_i = A$
- Набор множеств $U_i \subset X$, открытых в X , $A \subset \bigcup U_i$

Practice. Объединение двух компактных множеств компактно.

Theorem 48 (лемма Гейне-Бореля). Отрезок $[0, 1]$ компактен.

Доказательство. Пусть $l_0 = [0, 1]$, $\{U_i\}$ — открытые множества в \mathbb{R} , $l_0 \subset \bigcup U_i$. Докажем, что l_0 покрывается конечным числом U_i . Предположим противное.

Разделим отрезок пополам и возьмем ту, которая не покрывается конечным числом U_i . Обозначим ее l_1 .

Продолжим последовательность вложенных отрезков далее: $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \dots$, длина уменьшается вдвое.

Тогда они имеют одну общую точку x_0 . Она лежит в каком-то U_{i_0} . С некоторого n этот U_{i_0} содержит l_n . Следовательно, l_n покрывается конечным набором U_i . Противоречие. □

Theorem 49. Если X компактно и $A \subset X$ замкнуто, то A компактно.

Доказательство. Рассмотрим $\{U_i\}$ — покрытие A открытыми в X множествами. Добавим в него $X \setminus A$, получим покрытие X , выберем конечное подпокрытие и уберем $X \setminus A$. Это конечное покрытие A некоторыми множествами из $\{U_i\}$. \square

Theorem 50. Если X, Y компактны, то $X \times Y$ компактно.

Доказательство.

1. Достаточно проверить определение компакта только для покрытий элементами базы. Рассмотрим покрытие $X \times Y$ открытыми $U_i \times V_i$, где $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$.

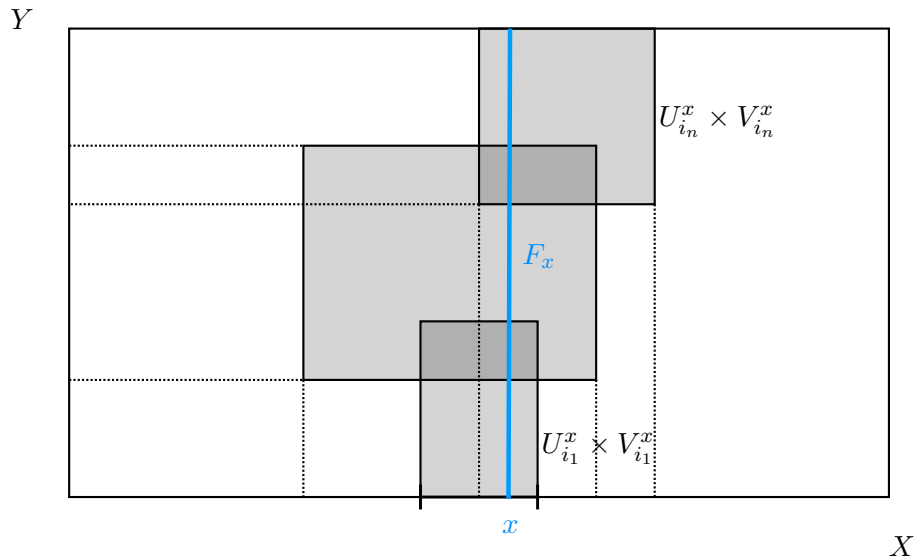


Рис. 1.8: Покрытие и гомеокопия

2. Для всех $x \in X$ рассмотрим гомеокопию (вертикальный слой) $F_x := \{x\}Y$. $F_x \cong Y$, тогда F_x компактно, следовательно, F_x покрывается конечным набором "прямоугольников" $U_{i_1}^x \times V_{i_1}^x, \dots, U_{i_n}^x \times V_{i_n}^x$.
3. $U^x = U_{i_1}^x \cap \dots \cap U_{i_n}^x$ — пересечение проекций "прямоугольников" на X . $U^x \times Y$ покрывается теми же "прямоугольниками".
4. Получили окрестности U^x для всех точки $x \in X$. Выберем из $\{U^x\}_{x \in X}$ конечное подпокрытие. Теперь мы можем объединим соответствующие "прямоугольники" и получим конечное покрытие $X \times Y$.

\square

Theorem 51. Если X хаусдорфово и $A \subset X$ компактно, то A замкнуто в X .

Доказательство. Докажем, что

$$\forall x \in X \setminus A \exists \text{ окрестность } U \ni x : U \subset X \setminus A.$$

Так как X хаусдорфово

$$\forall a \in A, x \in X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \ni x : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Выберем из $\{U_a\}$ конечное подпокрытие A : U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . $\bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ — окрестность x , не пересекающая A . \square

Theorem 52. Если X компактно и хаусдорфово, то оно нормально.

Доказательство.

1. Регулярность. Пусть A замкнуто, $x \notin A$. Построим $\{U_{a_i}\}$ и $\{V_{a_i}\}$ как в доказательстве теоремы ??.

$$U := \bigcup U_{a_i}, V := \bigcap V_{a_i}.$$

U и V — открытые множества, $U \supset A$, $V \ni x$, $U \cap V = \emptyset$.

2. Теперь выведем нормальность. Пусть A, B замкнуты и $A \cap B = \emptyset$. Так как X регулярно

$$\forall a \in A \text{ и замкнутого } B \subset X \exists \text{ окрестности } U_a \ni a, V_a \supset B : U_a \cap V_a = \emptyset.$$

Теперь рассмотрим конечное подпокрытие A из $\{U_{a_i}\}$: U_{a_1}, \dots, U_{a_n} . Аналогично получим открытые $U := \bigcup U_{a_i} \supset A$ и $V := \bigcap V_{a_i} \supset B$, $U \cap V = \emptyset$. Доказали, что X нормально. \square

1.14.1 Компактность в \mathbb{R}^n

Designation. X — метрическое пространство.

Def 54. Множество $A \subset X$ ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Def 55. Диаметр множества A :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Property. A ограничено тогда и только тогда, когда $\text{diam}(A) < \infty$.

Corollary. Свойство ограниченности не зависит от объемлющего пространства.

Theorem 53. Компактное метрическое пространство ограничено.

Corollary. Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Theorem 54. *Множество в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

\Rightarrow По прошлому следствию ??.

\Leftarrow Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как является произведением компактов. A замкнуто и ограничено, из этого следует, что A — замкнутое подмножество компакта. Значит оно компактно.

□

1.14.2 Центрированные семейства

Designation. Здесь I обозначает не более чем счетное множество.

Def 56. Набор множеств называется центрированным, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Theorem 55. *X компактно тогда и только тогда, когда любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство.

\Rightarrow От противного. Пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X и $\bigcap A_i = \emptyset$. Тогда дополнения $X \setminus A_i$ образуют открытое покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие.

Соответствующие A_i имеют пустое пересечение. Противоречие.

\Leftarrow Рассмотрим покрытие $\{A_i\}_{i \in I}$. Выберем в нем конечный набор множеств A_1, \dots, A_n . Если нет точки, которая не принадлежит ни одному из A_1, \dots, A_n , это конечное подпокрытие. Иначе пересечение дополнений $\bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Значит $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор. По условию теоремы он имеет непустое пересечение. Значит $\{A_i\}_{i \in I}$ не покрытие. Противоречие.

□

Corollary. Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\{A_i\}_{i \in I}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X , хотя бы одно из которых компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Не умоляя общности A_0 компактно. По теореме ?? (возьмем $X = A_0$) $\{A_i \cap A_0\}_{i \in I}$ имеет непустое пересечение.

□

Theorem 56. *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — набор непустых замкнутых множеств, линейно упорядоченный по включению, и хотя бы одно из них компактно. Тогда $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

Note. Теорема ?? обычно применяется к последовательностям вложенных компактов:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

1.14.3 Непрерывные отображения компактов

Theorem 57. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f(X)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда $\{V_i \mid V_i = f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X . Выберем в нем конечное подпокрытие V_{i_1}, \dots, V_{i_n} . Тогда U_{i_1}, \dots, U_{i_n} — конечное подпокрытие $f(X)$. Следовательно, X компактно. \square

Theorem 58. Пусть X компактно, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда $f(X)$ имеет максимум и минимум.

Доказательство. $f(X)$ компактно, следовательно, $f(x)$ замкнуто и ограничено, а тогда $f(X)$ содержит свои супремум и инфимум. \square

Theorem 59. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная биекция. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. f непрерывно \iff прообразы замкнутых множеств замкнуты. f^{-1} непрерывно \iff f -образы замкнутых множеств замкнуты.

Если $A \subset X$ замкнуто, A компактно, так как является замкнутым подмножеством компакта. Тогда $f(A)$ компактно, потому что это непрерывный образ компакта. А компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. \square

1.14.4 Вложения компактов

Def 57. $f : X \rightarrow Y$ — вложение, если f — гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Corollary. Пусть X компактно, Y хаусдорфово, $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная инъекция. Тогда f — вложение.

1.14.5 Лемма Лебега

Theorem 60 (Лемма Лебега). X — компактное метрическое пространство. $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r целиком содержится в одном из U_i .

Def 58. Число r называется числом Лебега данного покрытия.

Доказательство.

$$\forall x \in X \exists r_x > 0, U_i \in \{U_i\} : B_{r_x}(x) \subset U_i.$$

Заметим, что $\left\{B_{\frac{r_x}{2}}\right\}_{x \in X}$ — тоже покрытие. Выберем конечное покрытие.

Проверим, что подойдет минимальный из радиусов этих шаров в качестве числа Лебега.

$$\forall y \in X \exists x \in X : y \in B_{\frac{r_x}{2}}(x).$$

$$r \leq \frac{r_x}{2}, \quad \overline{xy} + \overline{yz} < r + \frac{r_x}{2} < r_x.$$

Следовательно, $B_r(y) \subset B_{\frac{r_x}{2}}(y) \subset B_{r_x}(x) \subset U_i$. \square

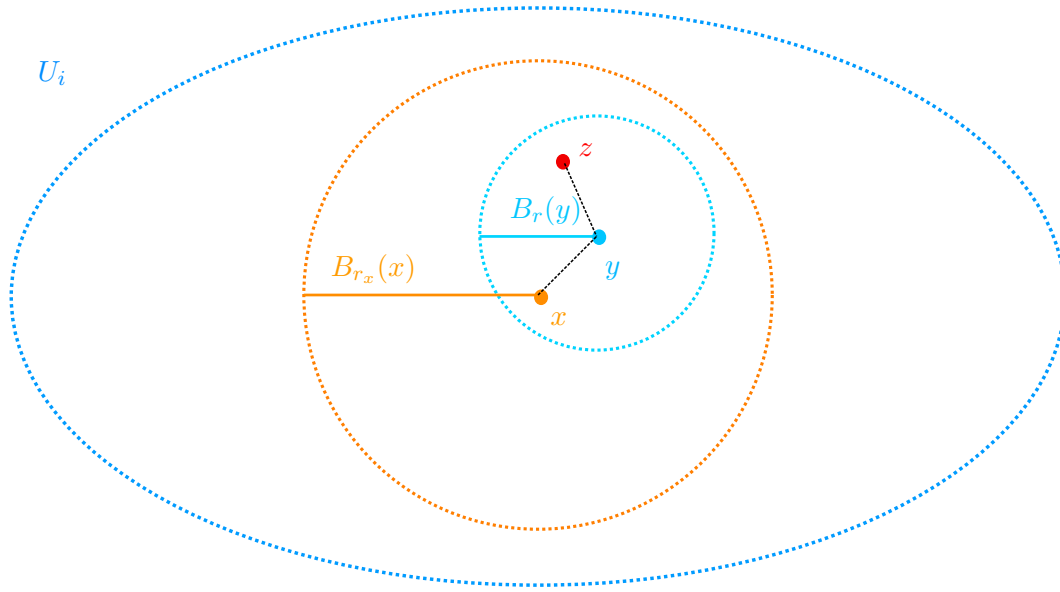


Рис. 1.9: Лемма Лебега

Corollary. Пусть X — компактное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, $\{U_i\}$ — открытое покрытие Y . Тогда $\exists r > 0 : \forall x \in X f(B_r(x))$ содержится в одном из U_i .

Доказательство. Применим лемму Лебега к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

1.14.6 Равномерная непрерывность

Def 59. Отображение $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, x' \in X (d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Theorem 61. Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Применим следствие ?? из леммы Лебега к f и покрытию Y шарами радиуса $\frac{\delta}{2}$ □

1.14.7 Теорема Тихонова

Theorem 62 (Тихонов, без доказательства). Пусть $\{X_i\}$ — произвольное семейство компактных топологических пространств. Тогда тихоновское произведение $\prod_{i \in I} X_i$ тоже компактно.

1.14.8 Локальная компактность

Designation. X — топологическое пространство.

Def 60. X локально компактно, если $\forall x \in X \exists$ окрестность $U \ni x : \text{Cl}U$ компактно.

Ex. \mathbb{R}^n локально компактно.

Practice. Если X локально компактно и хаусдорфово, то X регулярно.

1.14.9 Одноточечная компактификация

Designation. X — хаусдорфово топологическое пространство.

Def 61. Одноточечная компактификация X — топологическое пространство \widehat{X} :

- $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}, \quad \infty \notin X$
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \notin U$ открыто в \widehat{X} тогда и только тогда, когда U открыто в X
- $U \subset \widehat{X} \wedge \infty \in U$ открыто в \widehat{X} тогда и только тогда, когда $X \setminus U$ компактно

Statement. Определение ?? корректно, то есть указанные открытые множества образуют топологию на $X \cup \{\infty\}$.

Practice.

1. \widehat{X} компактно
2. \widehat{X} хаусдорфово тогда и только тогда, когда X локально компактно
3. $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$
4. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$

1.15 Полные метрические пространства

1.16 Предел последовательности

Designation. X — топологическое пространство.

Def 62. Точка $x \in X$ — предел последовательности $\{x_n\} \subset X$, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni x \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in U \quad \forall n > N.$$

Синонимы: x_n стремится к x или x_n сходится к x

Designation. $x_n \rightarrow x$ и $x = \lim x_n$

Property.

1. $x_n = x$ сходится к x
2. $x_n \rightarrow x \implies$ любая подпоследовательность тоже сходится к x
3. Если X хаусдорфово, то предел единственный

4. В метрическом пространстве $X = (X, d)$,

$$x_n \rightarrow x \iff d(x, x_n) \rightarrow 0.$$

5. Замкнутое множество содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей.

$$\forall \text{ замкнутого } A \subset X : (\{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow x \implies x \in A).$$

6. В метрическом пространстве X (или в пространстве со счетной базой) верно обратное: если $A \subset X$ содержит все пределы содержащихся в нем последовательностей, то A замкнуто.

1.17 Полные пространства

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 63. $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, k > N \ d(x_n, x_k) < \varepsilon$$

или

$$d(x_n, x_k) \rightarrow 0, \quad n, k \rightarrow \infty.$$

Синонимы: $\{x_n\}$ — последовательность Коши, $\{x_n\}$ сходится в себе.

Def 64. X полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Property.

1. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность ограничена.
3. Если последовательность фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Note. Полнота — не топологическое свойство!

Exs.

1. \mathbb{R} полно (критерий сходимости Коши)
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно (если $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, она фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
3. $[0, 1]$ полно
4. $(0, 1)$ не полно

Theorem 63. \mathbb{R}^n полно.

Доказательство. Пусть $\{x\}$ — последовательность в \mathbb{R}^n , $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. Предположим, что $\{x_k\}$ фундаментальна в \mathbb{R}^n . Тогда $\forall i \in [1, n] : \{x_k^i\}$ — тоже фундаментальна. Значит координатные последовательности имеют пределы x^1, \dots, x^n . Следовательно, $x_k \rightarrow x := (x^1, \dots, x^n)$. \square

Theorem 64. Если X полно и $Y \subset X$ замкнуто, то Y полно.

Practice. Если множество в метрическом пространстве полно, то оно замкнуто.

Practice. Множество в \mathbb{R}^n полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

1.17.1 Теорема о вложенных шарах

Theorem 65 ("о вложенных шарах"). Пусть

- X — полное метрическое пространство
- A_1, A_2, \dots — непустые замкнутые множества в X
- $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
- $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$

Тогда $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Для всех A_n выберем точку x_0 . Так как $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$, $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, имеет предел x , который принадлежит X , так как X полно.

$$\forall n \geq k : x_n \in A_k \implies x \in A_k.$$

Тогда $x \in \bigcap A_i \implies \bigcup A_i \neq \emptyset$. □

1.17.2 Теорема Бэра

Def 65. X — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ нигде не плотно, если:

$$\text{IntCl}A = \emptyset$$

или

$X \setminus A$ содержит всюду плотное множество

или

любое открытое $U \subset X$ содержит открытое $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Ех. $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — ненулевой многочлен степени n над \mathbb{R} . Тогда $f^{-1}(0)$ нигде не плотно в \mathbb{R}^n .

Ех. Канторово множество нигде не плотно в \mathbb{R} .

Theorem 66 (Бэр). Полное метрическое пространство нельзя покрыть счетным набором нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, \dots — нигде не плотные множества. Пусть $B_0 = \overline{B}_{r_0}(x_0)$.

A_1 нигде не плотно, следовательно, открытый шар $B_{r_0}(x_0)$ содержит открытое множество $U_1 : U_1 \cap A_1 = \emptyset$.

U_1 содержит открытый шар, который содержит $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1)$, $r_1 \leq 1$.

Построили замкнутый шар $B_1 \subset B_0$, $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Аналогично построим последовательность $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$, где радиус $r_i \leq \frac{1}{i}$ и $B_i \cap A_i = \emptyset$.

По теореме ?? о вложенных шарах существует точка $x \in \bigcap B_i$. Тогда $x \notin \bigcup A_i \Rightarrow \bigcup A_i \neq X$. \square

Corollary. Полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Theorem 67 (усиление теоремы Бэра). Пусть X — полное метрическое пространство, A — объединение счетного набора нигде не плотных множеств. Тогда $\text{Int} A = \emptyset$.

1.17.3 Пополнение

Def 66. Пусть X — метрическое пространство. Пополнение X — такое метрическое пространство \bar{X} , что

- \bar{X} полно
- $X \subset \bar{X}$ как подпространство, то есть $d_X = d_{\bar{X}}$
- X всюду плотно в \bar{X}

Theorem 68 (без доказательства). У любого метрического пространства есть пополнение.

1.18 Компактность метрических пространств

1.18.1 Секвенциальная компактность

Def 67. X секвенциально компактно, если у любой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Theorem 69. X компактно, $S \subset X$ — бесконечное множество. Тогда существует такая точка $x \in X$, что любая окрестность $U \ni x$ содержит бесконечно много точек S .

Доказательство. От противного. Пусть $\forall x \in X \exists$ окрестность $U_x : |U_x \cap S| < \infty$. Выберем из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$.

$$S = (S \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (S \cap U_{x_n}).$$

Каждое из $S \cap U_{x_i}$ конечно, следовательно, S конечно. Противоречие. \square

Theorem 70. Если X — компактное метрическое пространство, то X секвенциально компактно.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X . Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.

2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме ?? существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности. Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} : n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \quad k = 1, 2, \dots$

Она сходится к x .

□

Theorem 71. X — топологическое пространство. Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то X секвенциально компактно.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в X . Докажем, что есть сходящаяся подпоследовательность.

1. В $\{x_n\}$ конечное число различных точек. Выберем постоянную подпоследовательность.
2. В $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек. По теореме ?? существует точка $x \in X$, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности.

Пусть U_1, U_2, \dots — счетная база в точке x . Рассмотрим такие вложенные окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \dots$:

$$V_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k.$$

Построим подпоследовательность $y_k = x_{n_k} : n_k > n_{k-1} \wedge y_k \in V_k \quad k = 1, 2, \dots$

Она сходится к x .

□

1.18.2 Вполне ограниченные множества

Designation. $X = (X, d)$ — метрическое пространство.

Def 68. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ — ε -сеть в X , если

$$\forall x \in X \exists s \in S : d(x, s) < \varepsilon.$$

Def 69. X вполне ограничено, если для любого ε существует конечная ε -сеть.

Practice. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Theorem 72. Если метрическое пространство X компактно, то оно вполне ограничено.

Theorem 73. Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно вполне ограничено.

Доказательство. Пусть для $\varepsilon > 0$ нет конечной ε -сети. Построим последовательность x_1, x_2, \dots :

x_1 — любая точка

x_2 — такая точка, что $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$

...

x_n — такая точка, что $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon \quad \forall i \in [1, \dots, n-1]$

...

Такая $\{x_n\}$ не может иметь сходящейся подпоследовательности, так как все попарные расстояния не менее ε . Противоречие. \square

Theorem 74. Если метрическое пространство X секвенциально компактно, то оно полно.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. По секвенциальности у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, она тоже сходится к тому же пределу. \square

Theorem 75. Если X полно и вполне ограничено, то X компактно.

Доказательство. Пусть существует открытое покрытие $\{U_i\}$, у которого нет конечного подпокрытия. Пусть S_1 — конечная 1-сеть. Все пространство покрыто конечным числом шаров радиуса 1 (пусть замкнутых) с центрами в S_1 . Значит, хотя бы один из них не покрывается конечным числом U_i .

Пусть это A_1 .

Теперь рассмотрим конечную $\frac{1}{2}$ -сеть S_2 и пересечения

$$A_1 \cap \bar{B}_{\frac{1}{2}}(s), \quad s \in S_2.$$

Они покрывают A_1 , следовательно, одно из них не покрывается конечным набором U_i . Обозначим его A_2 .

Аналогично строим последовательность замкнутых множеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, где A_n не покрывается конечным набором $\{U_i\}$.

$$A_n = A_{n-1} \cap \bar{B}_{\frac{1}{n}}(s), \text{ где } s \in S_n \text{ — конечная } \frac{1}{n}\text{-сеть.}$$

Тогда $\text{diam} A_n \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$. По теореме о вложенных шарах $\exists x \in \bigcap A_n$.

$$\exists U_i : x \in U_i \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

Далее

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : A_n \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i.$$

То есть A_n покрывается одним U_i . Противоречие. \square

Theorem 76 (Три определения компактности). X — метрическое пространство. Следующие свойства равносильны:

1. X компактно
2. X секвенциально компактно
3. X — полное и вполне ограниченное

Доказательство.

$1 \implies 2$ Уже доказано (см. теорему ??)

$2 \implies 3$ Уже доказано (см. теоремы ?? и ??)

$3 \implies 1$ Уже доказано (см. теорему ??)

□

1.18.3 Компактность и счетная база

Theorem 77. Если X вполне ограничено, то оно имеет счетную базу топологии.

Доказательство. Объединим конечные ε -сети для $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Получим счетное всюду плотное множество. Тогда X сепарабельно, значит X имеет счетную базу (так как X — метрическое пространство). □

Theorem 78. Если X метризуемо и компактно, то X имеет счетную базу топологии.

1.18.4 Обобщение

Theorem 79. X имеет счетную базу топологии. Тогда X компактно тогда и только тогда, когда X секвенциально компактно.

Доказательство.

\implies Уже доказано (см. ??)

\impliedby Рассмотрим открытое покрытие. По теореме Линделёфа, из него можно выбрать счетное подпокрытие: U_1, U_2, U_3, \dots

Пусть нет конечного подпокрытия. Рассмотрим конечные поднаборы $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$. Никто из них не покрывает X , следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n).$$

По секвенциальной компактности можем выбрать из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_k\}$. Пусть $y_k \rightarrow y$.

Так как $\{U_i\}$ — покрытие, $\exists j : y \in U_j$. Но с некоторого момента $y \notin U_j$, так как в каждом U_n только конечное число членов последовательности.

Значит это не предел!

□

1.19 Факторизация

Def 70. Пусть X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на нем как множестве точек.

Факторпространство X/\sim — множество классов эквивалентности с такой топологией:

- множество U открыто в $X/\sim \iff \bigcup_{u \in U} u$ открыто в X .

Эта топология называется фактортопологией.

Note. Элементы факторпространства — классы эквивалентности — подмножества X .

1.19.1 Каноническая проекция на факторпространство

Designation. Здесь и далее X — топологическое пространство, \sim — отношение эквивалентности на X .

Def 71. Каноническая проекция X на X/\sim или отображение факторизации — отображение

$$p : X \rightarrow X/\sim,$$

сопоставляющее каждой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности:

$$p(x) = [x] := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Theorem 80. Каноническая проекция непрерывна.

Note (Переформулировка определения). $A \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(A)$ открыто в X .

Note. Фактортопология — наибольшая топология, для которой каноническая проекция непрерывна.

Property. Следующие свойства наследуются факторпространством:

- Связность
- Линейная связность
- Компактность
- Сепарабельность

1.19.2 Стягивание множества в точку

Def 72. Пусть $A \subset X$. Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$x \sim y \iff x = y \vee (x \in A \wedge y \in A).$$

Факторпространство обозначается X/A , операция называется стягиванием в точку. Полученные классы эквивалентности — A и одноточечные.

Ex. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (доказано позже в теореме ??)

1.19.3 Несвязное объединение

Def 73. Пусть X, Y — топологические пространства. Их несвязное объединение — дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ с такой топологией: A открыто в $X \sqcup Y \iff A \cap X$ открыто в X и $A \cap Y$ открыто в Y .

Note. Аналогично определяется несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i \in I}$.

Practice. Все компоненты связности X открыты тогда и только тогда, когда X — несвязное объединение своих компонент связности.

1.19.4 Приклеивание по отображению

Designation. X, Y — топологические пространства, $A \subset X$. $f : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение.

Def 74. \sim — наименьшее отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, такое что

$$\forall a \in A : a \sim f(a).$$

Факторпространство $(X \sqcup Y)/\sim$ обозначается $X \sqcup_f Y$. Операция называется приклеиванием X к Y по f .

Ех. Пусть x_0, y_0 — точки в X, Y , $A = \{x_0\}$, $f(x_0) = y_0$. Результат склеивания — **букет** (X, x_0) и (Y, y_0) .

Ех. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ех. Если склеить \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , получилась **лента Мебиуса**.

Def 75. Пусть X — топологическое пространство. Γ — подгруппа группы $\text{Homeo}(X)$ — группы всех гомеоморфизмов из X в себя.

Введем отношение эквивалентности \sim на X :

$$a \sim b \iff \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Designation. Факторпространство X/\sim обозначается X/Γ или $\Gamma \backslash X$

Ех. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, где \mathbb{Z} действует на \mathbb{R} параллельными переносами.

Theorem 81. Пусть $p : X \rightarrow X/\sim$ — каноническая проекция. $f : X \rightarrow Y$ переводит эквивалентные точки в равные:

$$\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y : f = \bar{f} \circ p$.
2. \bar{f} непрерывно тогда и только тогда, когда f непрерывно.

Доказательство.

- Определим $\bar{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- \implies По непрерывности композиции, если \bar{f} непрерывна, то f тоже.
- \impliedby В обратную сторону — по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 82 (Склеивание концов отрезка). $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Доказательство. Рассмотрим $f : [0, 1] \rightarrow S^1$.

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Это отображение пропускается через факторпространство $[0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$. Соответствующее $\bar{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1$ — биекция. По теореме ?? \bar{f} непрерывно. $[0, 1]/\{0, 1\}$ — компактно, S^1 — хаусдорфово, следовательно, \bar{f} — гомеоморфизм. \square

Theorem 83. X — замкнуто, Y — хаусдорфово. $f : X \rightarrow Y$ — непрерывно и сюръективно. Тогда

$$X/\sim \cong Y,$$

где \sim определяется условием

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Theorem 84. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B — замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме ?? достаточно построить сюръективный гомеоморфизм $f : B \rightarrow S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|} \sin |x|, \cos |x| \right) & x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, 1) & x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

\square

1.20 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 76. n -мерное многообразие — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^n .

Число n — размерность многообразия.

Theorem 85. При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны.

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m .

Ex. 0-мерные многообразия — не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество \mathbb{R}^n или любого многообразия — многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n — n -мерное многообразие

Ех. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n / \{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно \mathbb{RP}^n .

Def 77. n -мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо \mathbb{R}^n , либо $\mathbb{R}_+^n := [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются **краем** M и обозначаются ∂M .

Def 78. Поверхность – двумерное многообразие.

Ех. D^n – многообразие с краем, S^{n-1} – его край.

Theorem 86. \mathbb{R}_+^n не гомеоморфно никакому открытому подмножеству в \mathbb{R}^n .

Склеивание поверхности их квадрата Три варианта склейки сторон квадрата:

1. Обе пары сторон без переворота ($aba^{-1}b^{-1}$) – тор $S^1 \times S^1$.
2. Одна пара с переворотом ($abab^{-1}$) – бутылка Клейна.
3. Обе пары с переворотом ($abab$) – проективная плоскость \mathbb{RP}^2 .

Theorem 87.

- Пусть дан правильный $2n$ угольник (D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим каждую пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие (поверхность).
- Пусть в m -угольнике некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получится двумерное многообразие с краем.

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать их между собой.

1.20.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 88 (без доказательства). Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда

1. M – компактно, без края $\implies M \cong S^1$
2. M – некомпактно, без края $\implies M \cong \mathbb{R}$
3. M – компактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, 1]$
4. M – некомпактно, $\partial M \neq \emptyset \implies M \cong [0, +\infty)$

Corollary. Компактное 1-мерное многообразие без края – несвязное объединение конечного набора окружностей.

1.20.2 Сферы

Def 79. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сферу S^2 , вырезаем p не пересекающихся дырок (внутренностей D^2). Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 80. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – \mathbb{RP}^2 , сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

1.20.3 Классификация поверхностей

Statement. Поверхность – связное двумерное многообразие.

Theorem 89.

- Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.
- Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.
- Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

Note. Число дырок равно числу компонент края.

1.20.4 Эйлерова характеристика

Def 81. Пусть M – компактная поверхность, разбитая вложенным связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 90. Эйлерова характеристика – топологический инвариант и не зависит от разбиения.

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n$, $\chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$

- $\chi(\text{сферы с } p \text{ ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с } q \text{ пленками}) = 2 - q$