

Конспект по матанализу  
I семестр  
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

6 января 2020 г.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
1.1	Простейшие свойства вещественных чисел . . . . .	5
1.2	Множества в $\mathbb{R}$ . . . . .	6
1.3	Натуральные числа . . . . .	6
1.3.1	Аксиома Архимеда . . . . .	6
1.3.2	Аксиома индукции . . . . .	6
1.3.3	Неравенство Бернулли . . . . .	7
1.3.4	Аксиома Кантора-Дедекинда . . . . .	7
1.3.5	Иррациональность корня из двух . . . . .	8
1.3.6	Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке . . . . .	8
1.3.7	Число $e$ . . . . .	9
1.4	Свойства подмножеств $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.4.1	Грани . . . . .	9
1.4.2	Связность отрезка . . . . .	10
1.4.3	Предельные и изолированные точки . . . . .	11
1.4.4	Теорема о вложенных отрезках . . . . .	11
1.4.5	Теорема о компактности . . . . .	12
1.4.6	Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках . . . . .	12
1.4.7	Десятичное разложение вещественного числа . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Пределы</b>	<b>15</b>
2.1	Основные свойства пределов функций . . . . .	15
2.1.1	Определение предела . . . . .	15
2.1.2	Единственность предела . . . . .	15
2.1.3	Теорема о пределе сужения . . . . .	16
2.1.4	Предел постоянной функции и предел тождественного отображения . . . . .	16
2.1.5	Неравенства между функциями, имеющими предел . . . . .	16
2.1.6	Предельный переход в неравенстве . . . . .	16
2.1.7	Принцип двух полицейских . . . . .	17
2.1.8	Предел линейной комбинации . . . . .	17
2.1.9	Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций . . . . .	17
2.1.10	Предел произведения имеющих предел функций . . . . .	18
2.1.11	Предел частного . . . . .	18
2.1.12	Односторонние пределы . . . . .	18
2.1.13	Сумма геометрической прогрессии . . . . .	19
2.1.14	Предел монотонной функции . . . . .	20
2.1.15	Предел композиции . . . . .	20
2.2	Критерий Коши . . . . .	21

2.2.1	Критерий Коши . . . . .	21
2.3	Ряды . . . . .	22
2.3.1	Понятие ряда. Теорема Лейбница . . . . .	22
2.3.2	Теорема сравнения для рядов с неотрицательными членами . . . . .	23
2.4	Верхние и нижние пределы . . . . .	24
2.4.1	Определение и свойства . . . . .	24
2.4.2	Теорема об описании верхнего и нижнего предела . . . . .	24
2.5	Последовательности . . . . .	25
2.5.1	Сходящиеся последовательности и их пределы . . . . .	25
2.5.2	Вторая форма теоремы о компактности . . . . .	26
2.5.3	Предел функции в терминах последовательности . . . . .	27
2.6	Бесконечные пределы . . . . .	27
2.6.1	Бесконечные пределы . . . . .	27
2.7	Бесконечно большие и бесконечно малые . . . . .	28
2.7.1	О и о. Соотношения транзитивности . . . . .	28
2.7.2	Эквивалентные функции . . . . .	29
2.7.3	Отношение эквивалентности и вычисление пределов . . . . .	29
2.7.4	Классификация разрывов . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Непрерывные функции</b>	<b>31</b>
3.1	Непрерывность в точке . . . . .	31
3.2	Свойства непрерывных функций . . . . .	31
3.2.1	Теорема об алгебраических операциях . . . . .	31
3.2.2	Теорема о композиции . . . . .	31
3.2.3	Теорема о пределе последовательности . . . . .	32
3.3	Непрерывность на множестве . . . . .	32
3.3.1	Теоремы Вейерштрасса . . . . .	33
3.3.2	Теорема о промежуточном значении . . . . .	33
3.4	Степени с рациональным показателем . . . . .	34
3.5	Равномерная непрерывность . . . . .	35
3.5.1	Теорема Кантора . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Дифференцирование</b>	<b>37</b>
4.1	Определения . . . . .	37
4.2	Правила дифференцирования . . . . .	38
4.3	Производная возрастающей функции . . . . .	39
4.4	Формулы Коши и Лагранжа . . . . .	40
4.5	Правило Лопиталья . . . . .	42
4.6	Старшие производные . . . . .	43
4.6.1	Полином с заданными производными . . . . .	43
4.6.2	Полином Тейлора . . . . .	44
4.7	Формула Тейлора . . . . .	45
4.7.1	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано . . . . .	45
4.7.2	Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа . . . . .	46
4.8	Достаточное условие экстремума . . . . .	47
4.9	Сходимость последовательностей функций . . . . .	47
4.9.1	Теорема Стокса-Зейделя . . . . .	47
4.9.2	Равномерный предел последовательности ограниченных функций . . . . .	48
4.9.3	Критерий Коши для равномерной сходимости . . . . .	49
4.9.4	Признак Вейерштрасса . . . . .	49

4.9.5	Теорема о дифференцируемости предельной функции . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Интегрирование</b>	<b>53</b>
5.1	Первообразные . . . . .	53
5.2	Интеграл . . . . .	55
5.2.1	Интеграл Дарбу . . . . .	55
5.2.2	Связь интеграла и производящей . . . . .	60
5.2.3	Формула интегрирования по частям . . . . .	60
5.3	Логарифм и экспонента . . . . .	62
5.3.1	Показательная функция . . . . .	67
5.3.2	Степенная функция . . . . .	67
5.3.3	Разложение Тейлора для логарифма . . . . .	68
5.3.4	Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора . . . . .	70
5.4	Дифференциальные уравнения . . . . .	73



# Глава 1

## Введение

### 1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

#### 1. Алгебраические операции

- (а) сложение  $a, b \in \mathbb{R}$  : сумма  $a + b$  определяется единственным образом
  - i.  $a + b = b + a$  (коммутативность)
  - ii.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность)
  - iii.  $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$  (нейтральный по сложению)
  - iv.  $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$  (обратный по сложению)
- (б) умножение  $x, y \in \mathbb{R}$  : произведение  $x \cdot y$  определяется единственным образом
  - i.  $xy = yx$  (коммутативность)
  - ii.  $(xy)z = x(yz)$  (ассоциативность)
  - iii.  $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$  (нейтральный по умножению)
  - iv.  $x(a + b) = xa + xb$  (дистрибутивность)
  - v.  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$  (обратный по умножению)

#### 2. Порядок на $\mathbb{R}$

**Def 1.** Упорядоченная пара  $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$  .

**Def 2.** Декартово произведение  $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$ .

**Def 3.** Отношение между элементами множеств  $X, Y$  -  $A \subset X \times Y$

Отношения порядка:  $a < b, a > b, a = b$

- (а)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \\ a < b \end{cases}$  (антисимметричность)
- (б)  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  (транзитивность)
- (с)  $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$
- (d)  $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- (е)  $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

## 1.2 Множества в $\mathbb{R}$

**Def 4** (Отрезки, интервалы, сегменты).  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ (замкнутый отрезок)}$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (открытый слева отрезок)}$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (открытый справа отрезок)}$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (открытый отрезок)}$$

**Def 5** (Лучи).  $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

**Def 6.**

Множество  $A \subseteq \mathbb{R}$  ограничено сверху, если  $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$ . Любое такое  $x$  - верхняя граница  $A$ .

Множество  $A \subseteq \mathbb{R}$  ограничено снизу, если  $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$ . Любое такое  $y$  - нижняя граница  $A$ .

//  $\pm\infty$  - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

## 1.3 Натуральные числа

### 1.3.1 Аксиома Архимеда

**Axiom 1** (Архимед). *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

**Lemma.**  $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

*Доказательство.* Предположим противное.  $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$ . Тогда  $\forall n : n < x^{-1}$ , а это противоречит аксиоме Архимеда.  $\square$

### 1.3.2 Аксиома индукции

**Axiom 2** (индукции). *Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

**Statement** (Обоснование метода математической индукции). *Пусть  $P_1, P_2, \dots$  - последовательность суждений. Предположим, что*

1.  $P_1$  - верно

2. Для любого  $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$



Тогда все условия  $P_i$  верны.

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n - \text{верно}\}$  и его дополнение  $B = \mathbb{N} \setminus A$ . Если не все  $P_i$  верны, то  $B \neq \emptyset$ . По аксиоме индукции существует наименьший элемент  $l \in B$ . Если  $l \neq 1, l-1 \notin B$ . А тогда  $P_{l-1}$  - верно, из чего следует, что  $P_l$  - верно. То есть  $l \notin B$ . Противоречие. Иначе не выполнено первое условие.  $\square$

### 1.3.3 Неравенство Бернулли

**Theorem 1** (Неравенство Бернулли). Пусть  $a > 1$ . Тогда  $a^n \geq 1 + n(a - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$

*Доказательство.* Индукция:

База:  $n = 1$ :  $a \geq 1 + (a - 1)$

Переход:  $n \rightarrow n + 1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a - 1)a = (a - 1) + 1 + n(a - 1)a = \\ &1 + (a - 1)(1 + na) \geq 1 + (a - 1)(1 + n) \end{aligned}.$$

$\square$

**Corollary.** Множество  $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  для  $a > 1$  не ограничено сверху.

*Доказательство.* Пусть  $a^n \leq b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $1 + (a - 1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$ . Противоречие  $\square$

### 1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

**Def 7.** Щель – пара вещественных чисел  $(A, B)$ , где  $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ , такая что всякое число из  $A$  не более любого из  $B$ .

**Def 8.** Число  $c$  лежит в щели  $(A, B)$ , если  $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

**Def 9.** Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

**Axiom 3** (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

**Statement.** Квадратный корень из 2 существует и единственный.

*Доказательство.*

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$ . По аксиоме Кантора-Дедекинда  $\exists v : a \leq v \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ . Тогда  $v^2 = 2$ .

**Lemma.** В множестве  $B$  нет наименьшего элемента. В множестве  $A$  нет наибольшего элемента.

Докажем, что  $v^2 = 2$ . Пусть  $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$ . То есть  $v \in A \vee v \in B$ . Следовательно,

$$\left[ \begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

## 2. Единственность

Возьмем  $c \geq 0 : c^2 = 2$ . Пусть существует еще одно  $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$ . Тогда

$$\left[ \begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

### 1.3.5 Иррациональность корня из двух

**Def 10.** Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число  $c$ , для которого верно  $c^2 = 2$ .

**Theorem 2.** Квадратный корень из двух иррационален.

*Доказательство.* Пусть  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q$$

□

### 1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

**Def 11.**  $\langle u, v \rangle$  – любой отрезок с концами в  $u, v$  ( $u \leq v$ ). Его длина  $|\langle u, v \rangle| := v - u$

**Theorem 3.** Пусть  $c > 0$ . Тогда на каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$  существует точка вида  $rc$ , где  $r \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* Заменим  $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$ . Теперь будем доказывать  $a \leq r \leq b$ . Существует  $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$ . Рассмотрим множество  $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$ . Кроме того  $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$ . Среди таких  $p$  существует наименьший  $p_0$ .

Возьмем  $\frac{p_0 - 1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$

□

**Corollary.** На каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$ , существует рациональное число.

**Theorem 4.** На каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$ , существует иррациональное число.

*Доказательство.* По следствию из теоремы 3  $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ . Тогда  $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$ .

□

### 1.3.7 Число $e$

**Def 12.** Рассмотрим последовательность  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

Число  $e$  – предел  $\{a_n\}$ .

**Statement.**  $\{a_n\}$  - сходится.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333 \end{aligned}$$

□

**Theorem 5.**  $e$  - иррационально.

*Доказательство.*  $2 < e < 3$

Пусть  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Тогда  $q > 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right). \\ q!p &= S + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \right) = S + a. \end{aligned}$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$ . Обозначим предел за  $a$ . Докажем, что  $a \notin \mathbb{Z}$ .

**Statement.**  $0 < a < 1$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} &\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}. \\ 0 < a &\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1. \end{aligned}$$

□

□

## 1.4 Свойства подмножеств $\mathbb{R}$

### 1.4.1 Грани

**Def 13** (supremum). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

**Def 14** (infimum). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - ограничено снизу.  
Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его верхних границ.

**Theorem 6** (об описании точной верхней грани). Пусть  $A \neq \emptyset$  и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1.  $x = \sup A$
2.  $x$  – верхняя граница для  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$

$x = \sup A \Rightarrow x$  – верхняя граница. Пусть  $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$ . Тогда  $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$ . Но из этого следует, что  $x - \varepsilon$  тоже наименьшая граница, которая меньше  $x$ . Следовательно,  $x \neq \sup A$ . Противоречие.

$2 \Rightarrow 1$

$x$  – верхняя граница,  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$ . Докажем, что  $x$  – наименьшая верхняя граница.

Пусть  $\exists y < x : y$  – верхняя граница  $A$ . Рассмотрим  $(y, x]$ . Для него верно  $\forall z \in (y, x] : z \notin A$ . Но тогда  $x$  – не верхняя граница.  $\square$

**Theorem 7** (об описании точной нижней грани). Пусть  $A \neq \emptyset$  и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1.  $x = \inf A$
2.  $x$  – нижняя граница для  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

### 1.4.2 Связность отрезка

**Def 15.** Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

*Note.* Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

**Theorem 8** (о связности отрезка). Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

Для любого отрезка  $[a, b]$ ,  $a \leq b$ : если  $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$  – замкнуты  $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$ , то  $E \cap F \neq \emptyset$ .

*Доказательство.*  $E, F$  замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что  $E \cap F = \emptyset$ . Не умоляя общности  $x = \sup E < b$ , тогда  $(x, b] \in F$ . С одной стороны,  $x$  – предельная точка для  $E$ , с другой стороны, предельная точка для  $F$ . Так как  $E, F$  – замкнуты,  $x \in E \wedge x \in F$ . Следовательно,  $E \cap F \neq \emptyset$ . Противоречие.  $\square$

## 1.4.3 Пределные и изолированные точки

**Def 16.** Окрестность точки  $x \in \mathbb{R}$  – любой открытый интервал вида  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ .

**Def 17.** Проколота окрестность точки  $x \in \mathbb{R}$  – объединение двух открытых интервалов вида  $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

**Def 18.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ .

$u$  называется предельной точкой для  $A$ , если в любой проколотой окрестности точки  $u$  есть точки множества  $A$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

**Exs.**

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$  не имеют предельных точек.
2.  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  имеет одну предельную точку 0.
3. Для  $\mathbb{Q}$  все предельные точки -  $\mathbb{R}$ .

**Def 19.** Все точки множества  $A$ , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A - \text{изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

**Exs.**

1.  $[1, 2] \cup \{3\}$  имеет одну изолированную точку 3.
2.  $[1, 2]$  не имеет ни одной изолированной точки.

**Lemma.** Пусть  $A$  ограничено сверху (снизу),  $y = \sup A$  ( $y = \inf A$ ).

$$\begin{cases} y \notin A \Rightarrow y - \text{предельная точка } A \\ y \in A \end{cases}$$

## 1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

**Theorem 9** (о вложенных отрезках).  $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$ .

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  - последовательность замкнутых отрезков  $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

*Доказательство.* Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что  $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$ . Тогда множества  $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда  $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$ .

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем  $k = j$  :

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

*Note.* Эта точка единственна тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

*Доказательство.* Если такая точка единственная,  $(A, B)$  - узкая щель. То есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$ . Не умоляя общности,  $j \geq k$ . Тогда  $b_j - a_j < \varepsilon$ .

В обратную сторону очевидно. □

### 1.4.5 Теорема о компактности

**Theorem 10** (о компактности). *Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

*Доказательство.* Пусть  $A$  - ограничено. Тогда  $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$ . Получаем  $A \subset [a_1, b_1]$ . Возьмем середину отрезка  $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$ . Теперь  $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] - \text{бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] - \text{бесконечно} \end{cases}$  Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем  $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . По теореме о вложенных отрезках  $\exists \forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$ . Этот  $x$  и есть предельная точка для множества  $A$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$ . Тогда  $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$ . □

### 1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

**Theorem 11** (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $I_n = [a_n, b_n]$ . По теореме о вложенных отрезках  $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . Если  $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ , то  $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$ . А тогда  $t = b_{n_0}$ , которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе  $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$  и правые концы одинаковы. □

### 1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть  $x \in [0, 1)$ . Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов  $\{I_i\}$ . Будем собирать десятичную запись:

1.  $i_1$  - номер интервала, куда попало  $x$
2.  $i_2$  - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей

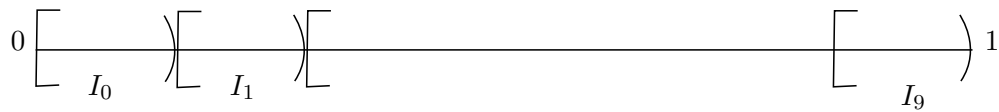


Рис. 1.1: Decimal decomposition

3. И так далее

Получим  $0.i_1i_2i_3\dots$  – десятичную запись числа  $x$ .

*Note.* Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

**Theorem 12.** Пусть  $(j_1, j_2, \dots)$  – цифры от нуля до девяти.  $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$ .  
Тогда  $\exists! x \in [0, 1)$  для которого  $0.j_1j_2\dots$  – десятичное представление.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность полуинтервалов  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . По теореме 11 существует непустое пересечение, равное одной точке – и есть наше число.  $\square$





## Глава 2

# Пределы

### 2.1 Основные свойства пределов функций

#### 2.1.1 Определение предела

**Def 20.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любой окрестности  $U$  в точке  $b$  существует такая проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$  :  $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$ .

**Def 21.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

**Def 22.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если  $x_0 = \infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

*Note.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

#### 2.1.2 Единственность предела

**Theorem 13.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x$  - предельная точка для  $A$ .

Если  $a, b$  - предельные для  $f$  в точке  $x_0$ , то  $a = b$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \neq b$ . Тогда существуют  $U_1, U_2$  - не пересекающиеся окрестности точек  $a, b$ . Так как  $a, b$  - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим  $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$ .  $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Противоречие.  $\square$

### 2.1.3 Теорема о пределе сужения

**Def 23.**  $A'$  – множество всех предельных точек.

**Theorem 14** (о пределе сужения).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$   
Пусть  $x_0 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$ . Тогда  $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$ .

*Доказательство.* По условию  $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$ , тем более  $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$ . □

**Theorem 15** (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если  $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$ , то  $\exists \lim_{x_0} f = z$ .

*Доказательство.*  $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V}) \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$ .  
 $\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$  - тоже окрестность точки  $x_0$ . □

### 2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

**Statement.**  $f(x) = x \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

**Statement.**  $f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

### 2.1.5 Неравенства между функциями, имеющими предел

**Theorem 16.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$ . Предположим, что существуют пределы у  $f, g$  в точке  $x_0$  равные соответственно  $a, b$ . Пусть  $a < b$ .

Тогда существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $U_1, U_2$  - не пересекающиеся окрестности точек  $a, b$ . Так как  $a, b$  - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned}$$

Возьмем  $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$ . Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$ . □

### 2.1.6 Предельный переход в неравенстве

**Theorem 17** (Предельный переход в неравенстве). Если  $g(x) \leq f(x)$  на  $A$  и существуют пределы  $a, b$  этих функций в точке  $x_0$ , то  $a \leq b$ .

## 2.1.7 Принцип двух полицейских

**Theorem 18** (Принцип двух полицейских).  $f, g, k : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$   
Пусть  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$ . Тогда  $\lim_{x_0} g = b$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\overset{\circ}{U}(b)$ . Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2: \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

□

## 2.1.8 Предел линейной комбинации

**Theorem 19** (Предел линейной комбинации).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
Пусть существуют пределы  $\lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$ .

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда  $\lim_{x_0} h = \alpha a + \beta b$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ &= |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leq \\ &\leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что  $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$ . Будем считать, что  $\alpha, \beta \neq 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} \exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ \exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned}$$

Теперь возьмем  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Тогда для  $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ :

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

## 2.1.9 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}, f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$

Предположим, что  $\lim_{x_0} f = 0$  и  $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

*Доказательство.* Если  $c = 0$ , утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что  $c > 0$ . Запишем определение предела  $f$ :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

□

### 2.1.10 Предел произведения имеющих предел функций

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$  в некоторой проколотой окрестности  $x_0$ , а  $f(x) - a$  и  $g(x) - b$  стремятся к нулю в точке  $x_0$ . Тогда можем применить утверждение 2.1.9:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

### 2.1.11 Предел частного

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$ ,  $b \neq 0$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

*Доказательство.*

**Lemma.** В условии утверждения функция  $g$  удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{V}(x_0)$ .  
То есть  $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

*Доказательство.* (леммы)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ .

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$  (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \quad . \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a)g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

### 2.1.12 Односторонние пределы

**Designation.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  - предельная точка  $A$ , ( $x_0 \in \mathbb{R}, \neq \pm\infty$ ).  $A_1 = A \cap (-\infty, x_0]$ ;  $A_2 = A \cap [x_0, +\infty)$ .

**Def 24.** Если  $x_0$  — предельной точка  $A_1$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \upharpoonright_{A_1}$ , то говорят, что  $f$  имеет **предел слева** от  $x_0$ .  
Если  $x_0$  — предельная точка  $A_2$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f \upharpoonright_{A_2}$ , то говорят, что  $f$  имеет **предел справа** от  $x_0$ .

**Designation.** Левый предел обозначают:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ . Правый предел обозначают:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ .

**Ех.**

$$A = [0, 2], x_0 = 1, f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

В точке 1 у этой функции предел слева - 1, справа - 0.

**Ех.**

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Слева предел 0, справа — нет.

### 2.1.13 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию  $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .

**Statement.** Если  $|q| < 1$ , то  $f(x)$  имеет предел, иначе не имеет предела.

*Доказательство.*

$$|q| < 1$$

**Lemma.**

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Доказательство.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем  $\forall \varepsilon > 0 \ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$ . Подойдет  $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$ .

□

Из леммы получаем:  $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ .

2.  $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \text{ нет предела}$$

3.  $q = 1$ ,  $f(n) = n + 1$  - нет предела

4.  $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5.  $q < 1$

$$|f(n)| = \left| \frac{q^n - 1}{q - 1} \right| \geq \frac{1}{|q - 1|} (|q|^n - 1).$$

Эта функция тоже не имеет предела.

□

### 2.1.14 Предел монотонной функции

**Def 25.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$

$f$  – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

$f$  – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

$f$  – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

**Theorem 20** (о пределе монотонной функции).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонная и ограниченная функция на  $A, x_0 \in A'$ , (допускается  $x_0 = \pm\infty$ , то есть  $A$  – неограничено). Если  $f$  – возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  – возрастает и ограничена сверху.  $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$ .

$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ . Докажем, что  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим  $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ .

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда  $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

*Note.* Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если  $f$  убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

### 2.1.15 Предел композиции

**Def 26.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subset B$ . Тогда задана функция композиции  $h = f \circ g$ .

**Theorem 21.** Пусть  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y \rightarrow b} g(y) = d$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = d$ , если хотя бы одно условие выполнено:

1.  $f(x) \neq b, \quad \forall x \neq x_0$
2.  $b \in B, g$  – непрерывна в точке  $b : d = g(b)$

*Доказательство.* Пусть  $U$  — окрестность точки  $d$ ;  $\exists V(b)$ :

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W}(x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Rightarrow f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда  $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) \in U$ . Пусть выполнено второе условие. Либо  $f(x) \neq b$ , тогда  $g(f(x)) \in U$ , либо  $f(x) = b$ , тогда  $g(f(x)) = d \in U$   $\square$

## 2.2 Критерий Коши

### 2.2.1 Критерий Коши

**Theorem 22** (Критерий Коши).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A'$ .  $x$  - либо число, либо  $\pm\infty$ .

Функция  $f$  имеет предел в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ .

**Lemma.** Если выполнено условие Коши, то  $f$  ограничено вблизи  $x_0$ .

*Доказательство.* Применим условие : зафиксируем какую-то точку  $y$  из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности  $x_0$  выполнено  $f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$ , то есть  $f(x)$  ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности,  $f$  - ограничена.

**Def 27.** Пусть  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена на  $B, E \subset B$ . Колебание  $f$  на  $E$  - это  $\sup_{x \in E} g(x) - \inf_{x \in E} g(x) = \text{osc}_E(g)$

Если  $\forall x, y \in E |g(x) - g(y)| \leq \rho \Rightarrow \text{osc}_E(g) \leq \rho$ :  $\forall x, y \in E - \rho < g(x) - g(y) \leq \rho \Rightarrow g(x) \leq g(y) + \rho \Rightarrow \sup_E g \leq g(y) + \rho, \sup_E g - \rho \leq g(y) \forall y \in E \Rightarrow \sup_E g - \rho$  - нижняя граница,  $\inf_E g \geq \sup_E g - \rho$ .

$$/ \sup - \inf \leq \sup - (\sup - \rho) = \rho$$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$\text{osc}_B(f) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что  $|f(x) - f(y)| \leq \rho \forall x, y \in B \Rightarrow \text{osc}_B(f) \leq \rho$ . Пусть  $d = \text{osc}_B(f)$ ;  $x, y \in B$

$$m = \inf_{z \in B} f(z) \leq f(x) \leq \sup_{z \in B} f(z) = M$$

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq f(y) \leq \sup_{z \in B} f(z)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = \text{osc}_B(f) = d$$

$d$  - верхняя граница для множества чисел  $|f(x) - f(y)|$ , доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо.  $\square$

$f$  удовлетворяет условию Коши в  $x_0$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A$ . По лемме  $f$  ограничена.

Заведем вспомогательную функцию  $g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$  - предельная точка для  $g$ ,  $g$  ограничена на  $A$ .  $\overset{\circ}{V}(x_0); m = m_{\overset{\circ}{V}} = m_{\overset{\circ}{V},g} = \inf_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} g(x); M = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} g(x)$ . Всегда  $m \leq M$ , заведем еще  $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\overset{\circ}{V}}$  - множество  $\inf$  по всем проколотым окрестностям, аналогично заведем множество  $\sup$ .

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара  $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$  образует щель. Если  $\overset{\circ}{W} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow m_{\overset{\circ}{W}} \geq m_{\overset{\circ}{V}}; M_{\overset{\circ}{W}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}$ . Пусть  $a \in \Gamma, b \in \Delta, \exists \overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{W}$ :  $a = m_{\overset{\circ}{V}}, b = M_{\overset{\circ}{W}}$ . Пусть  $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{W}$ ;  $a \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq b$ . Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей  $f$  это щель.  $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$  узкая щель.  $\varepsilon > 0; \exists \overset{\circ}{V}: |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow M_{\overset{\circ}{V},f} - m_{\overset{\circ}{V},f} \leq \varepsilon$ , то есть там только одно число  $c$ .

$$\forall \overset{\circ}{V}(x_0) m_{\overset{\circ}{V},f} \leq c \leq M_{\overset{\circ}{V},f}. x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow m_{\overset{\circ}{V},f} \leq f(x) \leq M_{\overset{\circ}{V},f} \Rightarrow |f(x) - c| \leq |M - m| \leq \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : osc_{\overset{\circ}{V} \cap A}(f - c) \leq \varepsilon.$$

□

## 2.3 Ряды

### 2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

**Def 28.** Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ряд – символ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Частичные суммы ряда – последовательность  $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ .

Говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

**Statement.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} - \text{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

**Theorem 23** (Лейбниц). Пусть  $a_n$  - монотонно убывающая неотрицательная последовательность  $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится тогда и только тогда, когда  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n$$

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}-1} + \dots + a_{2^n})$$

Заменяем в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$



Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится.

$\Leftarrow$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится. Обозначим его сумму за  $T$ . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^n} + \dots a_{2^{n+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots 2^n a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□

### 2.3.2 Теорема сравнения для рядов с неотрицательными членами

**Theorem 24** (Теорема сравнения). Пусть  $\{a_n\}, \{b_n\}$  - неотрицательные последовательности. Если  $a_n \leq b_n \forall n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, значит и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

*Доказательство.* Пусть  $S_n$  (частичные суммы  $b$ )  $\rightarrow S$ , то есть ограничены сверху. Частичные суммы ряда  $a$  тогда ограничены сверху частичными суммами  $b$ , а значит ограничены  $S$  тем более. Значит по предыдущей теореме  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, и предел не больше по лемме о предельном переходе в неравенстве.

□

**Theorem 25.** Пусть  $s > 0$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  сходится при  $s > 1$  и расходится при  $s \leq 1$ .

*Доказательство.*  $s < 1 \Rightarrow n^s < n \Rightarrow \frac{1}{n^s} > \frac{1}{n} \Rightarrow$  если докажем, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, то и ряд при  $0 < s < 1$  расходится. Проверим, что  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$  неограничены. Посмотрим на  $S_{2^j}$ :

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{j-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^j}\right) &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{j-1}\frac{1}{2^j} = \\ &= 1 + j\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Действительно неограничены.

Пусть  $s > 1$ . Хотим доказать, что  $1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s}$  ограничена сверху.  $\exists j : 2^j \leq n < 2^{j+1}$ .

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} &\leq 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots + \frac{1}{(2^{j+1}-1)^s} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{js}} + \dots + \frac{1}{(2^{j+1}-1)^s}\right) \leq \\ &\leq 1 + 2\frac{1}{2^s} + 2^2\frac{1}{2^{2s}} + \dots + 2^j\frac{1}{2^{js}} = 1 + \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^{k(s-1)}} = \frac{\frac{1}{2}^{(s-1)(j+1)} - 1}{\frac{1}{2}^{s-1} - 1} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}^{s-1}} \end{aligned}$$

Да, ограничена, значит сходится

□

**Ех.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

## 2.4 Верхние и нижние пределы

### 2.4.1 Определение и свойства

**Def 29.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x)$$

$$b = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x).$$

Число  $a$  называется верхним пределом  $f$  в точке  $x_0$ .

Число  $b$  называется нижним пределом  $f$  в точке  $x_0$ .

**Property.** 1.  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. Сумма двух функций  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} (f + g) \leq \overline{\lim}_{x_0} f + \overline{\lim}_{x_0} g.$$

Рассмотрим  $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ .

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g).$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{x_0} (f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim}_{x_0} (f, g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

### 2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

**Theorem 26** (Теорема об описании верхнего предела). Пусть  $f$  - ограниченная функция на множестве  $A$ .  $x_0 \in A$ . Число  $a$  является верхним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

*Доказательство.* Пусть 1 и 2 выполнены.  $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$ .

Рассмотрим  $\varepsilon > 0$  и найдем для него  $\overset{\circ}{V}$ .

$$\overline{\lim}_{x_0} f \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq a + \varepsilon.$$

Тогда  $\overline{\lim}_{x_0} \leq a$ .

$$\forall \overset{\circ}{U}: M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{x_0} f \geq a + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  любое,  $\overline{\lim}_{x_0} f \geq a$

Теперь в обратную сторону. Пусть  $a = \overline{\lim}_{x_0} f$ .

$$a = \overline{\lim}_{x_0} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} : a \leq M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Рассмотрим произвольную проколотую окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$ .

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

□

**Theorem 27** (Теорема об описании нижнего предела). Пусть  $f$  - ограниченная функция на множестве  $A$ .  $x_0 \in A$ . Число  $b$  является нижним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично

□

## 2.5 Последовательности

### 2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  имеет единственную предельную точку  $+\infty$ .

**Def 30.**  $\{x_n\}$  называется сходящейся, если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Statement.** Пусть  $\{x_n\}$  - последовательность,  $b \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N} - \text{конечное} : \forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$$

Доказательство. Запишем определение того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad (2.1)$$

$1 \Rightarrow 2$ . Пусть 2.1 верно. Возьмем  $A = \{1, \dots, N\}$  - конечно. Следовательно, верно 2.

$2 \Rightarrow 1$ . Возьмем  $N = \max\{A\}$ , получим 1.

□

**Def 31.** Пусть  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - биекция.  $y_n = x_{\varphi(n)}$  - перестановка  $\{x_n\}$ .

**Corollary.** Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

**Def 32.** Пусть  $\{n_k\}$  - строго возрастающая последовательность натуральных чисел.  $\{y_k\} : y_k = x_{n_k}$  - подпоследовательность  $\{x_n\}$

**Statement.** Если  $\{x_n\}$  сходится к  $b$ , то любая подпоследовательность тоже сходится к  $b$ .

*Доказательство.* Аналогично 2.1.3. □

### 2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

**Lemma.**  $\{x_n\} = X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $x_0$  - предельная точка для  $X$ .
2.  $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 : x_n \in X, x_n \neq x_0$ . Более того  $\{x_n\}$  можно выбрать так, что  $x_k \neq x_j, i \neq j$ .

*Доказательство.*  $2 \Rightarrow 1$ . Возьмем любую проколотую окрестность точки  $x_0$ . Хотим:  $\overset{\circ}{V} \cap X \neq \emptyset$ .

$$\overset{\circ}{V} = (x - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x + \varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$ . Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ . По принципу двух полицейских  $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ . Теперь сделаем все неравными:  $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$ , дальше возьмем  $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$  и скажем, что  $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X_1, x_2 \neq x_1$  и так далее,  $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \dots |x_0 - x_{n-1}|, x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$  □

**Theorem 28** (Вторая форма теоремы о компактности). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

*Доказательство.*  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  - ограниченная последовательность. Тогда  $\exists M : |x_n| \leq M, \forall n$ . Разберем два случая:

1.  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.
2.  $A$  - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для  $A$ . Тогда по лемме 2.5.2 существует  $\{a_k\} \in A, a_k \rightarrow b, a_k \neq a_l, k \neq l$ .

Тогда  $\forall k \exists! n_k : a_k = x_{n_k}$ , где номера  $n_k$  попарно различны, но не упорядочены. То есть  $\{x_{n_k}\}$  - перестановка  $\{x_n\}$ , а значит тоже сходится. □

### 2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

**Theorem 29.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$
2.  $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow a$

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$ . Берем последовательность  $a_n \in A, a_n \neq x_0$ . Надо  $f(a_n) \rightarrow a$ .

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\exists N : a_n \in V \quad \forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} \quad (a_n \neq x_0).$$

Получаем

$$|f(a_n) - a| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$ . От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\neg "a = \lim_{x \rightarrow x_0} f" : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0, x \in A, \quad |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Возьмем

$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, x_n \in A.$$

Получаем, что  $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ . С другой стороны, по принципу двух полицейских:

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Противоречие.

Случай  $x_0 = \infty$ .

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Возьмем  $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$ . □

## 2.6 Бесконечные пределы

### 2.6.1 Бесконечные пределы

**Def 33.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$ . Говорят, что  $f$  имеет предел  $+\infty(-\infty)$  в точке  $x_0$ , если:  $\forall U(\pm\infty)$  существует проколотая окрестность  $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

На языке неравенств:  $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

**Def 34.** Говорят, что  $f$  стремиться к бесконечности в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ . То есть  $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$ .

**Statement.** Пусть  $f(x) \neq 0$  в проколотой окрестности  $x_0$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  - стремиться к бесконечности в точке  $x_0$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$  (тогда дополнительное условие 2.6.1 можно не накладывать).

$$\varepsilon > 0, M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$  (здесь условие 2.6.1 необходимо).  $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$ . Тогда существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$  :

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \iff |f(x)| > M.$$

□

## 2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

### 2.7.1 О и о. Соотношения транзитивности

**Def 35.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ .

$f$  называется бесконечно малой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ .

$f$  называется бесконечно большой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

**Def 36.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $g$  доминирует функцию  $f$  вблизи  $x_0$  и пишут  $f = O(g)$  ( $x \rightarrow x_0$ ), если  $\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$ .

**Def 37.** Функции  $f, g$  называются сравнимым вблизи  $x_0$ , если  $f = O(g) \wedge g = O(f)$ . Обозначение:  $f \asymp g$ .

**Property.**  $f = O(g) \wedge g = O(h) \implies f = O(h)$

*Доказательство.*

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leq c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$$

$$\exists \overset{\circ}{V}(x_0), \exists c_2 : |g(x)| \leq c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$ :

$$|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq c|h(x)|.$$

□

*Note.* Если  $g(x)$  не обращается в ноль вблизи  $x_0$ , то  $f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f}{g}$  - ограниченная функция.

**Def 38.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $f(x) = o(g(x))$  вблизи  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) :$

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

*Note.* Если  $g(x)$  не обращается в ноль вблизи  $x_0$ , то  $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$  - ограниченная функция.

### 2.7.2 Эквивалентные функции

**Def 39.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $f, g$  эквивалентны вблизи  $x_0$ , если  $f - g = o(g)$ , при  $x \rightarrow x_0$ . Обозначение:  $f \sim g$ .

*Note.* Определение асимметрично!

**Lemma.**  $f \sim g$ , при  $x \rightarrow x_0 \implies g \sim f$  при  $x \rightarrow x_0$

*Доказательство.* Проверим, что  $g = O(f)$  вблизи  $x_0$ :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ :

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2} |g(x)|.$$

$$\frac{1}{2} |g(x)| \leq |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leq 2 |f(x)|.$$

□

*Note.* Если  $g(x) \neq 0$  вблизи  $x_0$ ,  $f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

### 2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

**Statement.** Полезные преобразования для вычисления пределов:

1.  $p(x) = \sum_{i=1}^n a_n x^n, \quad a_n \neq 0$ . При  $x \rightarrow +\infty : p(x) \sim a_n x^n$
2.  $p(x) = (x - x_0)^l (b + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0$ . Тогда  $p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$
3.  $f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \dots + 1} \sim \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$

**Theorem 30.**  $f, g$  не обращаются в нуль вблизи  $x_0$ ,  $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$  вблизи  $x_0$ . Тогда  $fg, f_1 g_1$  одновременно имеют или не имеют предел в точке  $x_0$ . Если пределы существуют, то они равны.

*Note.* Аналогичная теорема верна для  $\frac{f}{g}$  и  $\frac{f_1}{g_1}$

*Доказательство.*

$$fg = f_1 g_1 \quad \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \quad \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

□

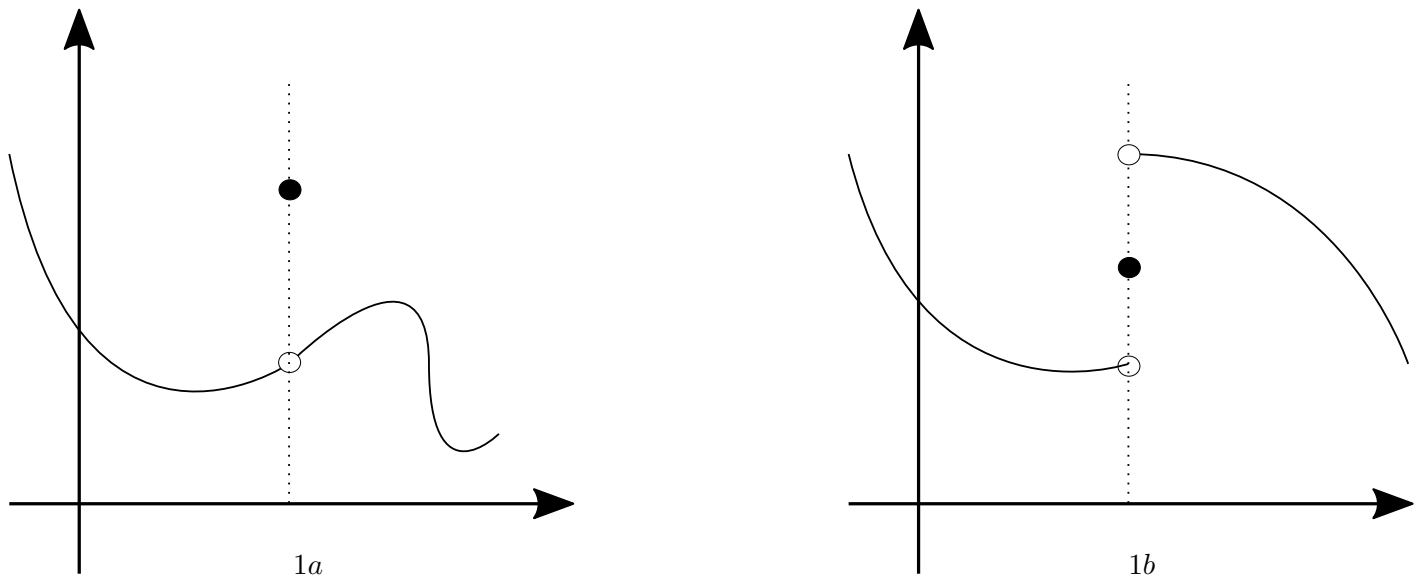


Рис. 2.1: Разрывы первого рода

#### 2.7.4 Классификация разрывов

##### 1. Разрывы первого рода

(a) Устранимые разрывы:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f$  существует, но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f \neq f(x_0)$ .

(b) Скачок:  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ , но они не равны.

##### 2. Разрывы второго рода — остальные.



## Глава 3

# Непрерывные функции

### 3.1 Непрерывность в точке

**Designation.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$

**Def 40.** Функция  $f$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если

для любой окрестности  $U$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $f(V \cap A) \subset U$ .

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \quad x \in A \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (3.1)$$

*Note.* Если  $x_0 \in A'$ , то условие 3.1 эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Note.* Если точка  $x_0$  является изолированной для  $A$ , то  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

### 3.2 Свойства непрерывных функций

#### 3.2.1 Теорема об алгебраических операциях

**Theorem 31** (об алгебраических операциях с непрерывными функциями). Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Если  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$ , то  $\alpha g + \beta f$  непрерывна в точке  $x_0$ .
- Если  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x_0$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Если  $x_0$  — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. □

#### 3.2.2 Теорема о композиции

**Theorem 32** (о композиции).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(A) \subseteq B$ ,  $x_0 \in A$ . Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $g$  непрерывна в точке  $f(x_0) = y_0$ . Тогда  $g \circ f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Обозначим  $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$ . Пусть  $U$  — окрестность точки  $z_0$ . Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ :

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

### 3.2.3 Теорема о пределе последовательности

**Theorem 33.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$
2.  $\forall$  последовательности  $\{x_n\} \in A$ ,  $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

*Доказательство.*

$$1 \implies 2$$

Пусть  $W$  — окрестность точки  $f(x_0)$ . Так как  $f$  непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как  $x_n \rightarrow x_0$ :

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in V \implies f(x_n) \in W.$$

$$2 \implies 1$$

Пусть  $f$  не непрерывна в точке  $x_0$ , есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим  $\delta_n = \frac{1}{n}$ .

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Из этого следует, что  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Противоречие.

□

## 3.3 Непрерывность на множестве

**Def 41.** Говорят, что функция  $f$ , заданная на множестве  $A$ , **непрерывна на некотором подмножестве**  $A_1 \subset A$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $A_1$ .

### 3.3.1 Теоремы Вейерштрасса

**Theorem 34** (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть  $f$  задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве  $A$ . Тогда функция  $f$  ограничена на  $A$ .

*Доказательство.* От противного. Пусть  $f$  не ограничена на  $A$ . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$  — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность  $x_{n_j} \rightarrow x$ . Так как  $A$  замкнуто,  $x \in A$ . Следовательно,  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$ . Противоречие.  $\square$

**Theorem 35** (Вторая теорема Вейерштрасса).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве  $A$  функция. Если существуют конечные

$$M = \sup_{x \in A} f(x), \quad m = \inf_{x \in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

*Доказательство.*

- Для  $M$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

По теореме о компактности существует подпоследовательность  $x_{n_j} \rightarrow x$ . Так как  $A$  замкнуто,  $x \in A$ .

$$f(x_{n_j}) \rightarrow f(x) \wedge f(x_{n_j}) \rightarrow M \implies M = f(x).$$

Значит,  $M$  достигается.

- Для  $m$ : совершенно аналогично.

$\square$

### 3.3.2 Теорема о промежуточном значении

**Designation.** « $u$  между  $r$  и  $s$ »  $:= \begin{cases} u \in [r, s] & r \leq s \\ u \in [s, r] & r > s \end{cases}$

**Theorem 36** (о промежуточном значении). Пусть  $f$  задана и непрерывна на отрезке  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Пусть  $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $v$  находится между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Тогда существует  $x$  между  $a$  и  $b$  такой, что  $f(x) = v$ .

*Доказательство.* Если  $a = b$ , утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что  $a < b$ . Будем считать, что  $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$ .

Пусть нет точки  $x_0 : f(x_0) = v$ . Обозначим  $I = [a, b]$ . Пусть  $X = \{x \in I \mid f(x) \leq v\}$  и  $Y = \{x \in I \mid f(x) \geq v\}$ . Докажем, что  $X$  и  $Y$  замкнуты.

1.  $X$  замкнуто:

$x_0$  — предельная точка. Следовательно,  $\exists x_n \in X : x_n \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0)$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

$$f(x_n) \leq v \implies f(x) \leq v.$$

2. Аналогично  $Y$  замкнуто.

Следовательно,  $X \cap Y \neq \emptyset$ . □

**Theorem 37.** Пусть  $f$  задана и непрерывна на отрезке  $\langle a, b \rangle$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  — инъекция (то есть  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$  )
2.  $f$  — строго монотонная

*Доказательство.*

$2 \implies 1$  Очевидно.

$1 \implies 2$  Пусть  $f$  не строго монотонна. Тогда  $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ :

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{cases}.$$

Тогда  $\exists x'_1 \neq x'_2$ , но  $f(x'_1) = f(x'_2)$ . Противоречие. □

**Theorem 38.** Пусть  $g$  задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда  $g$  непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).

**Statement.** Если  $f$  непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то  $f^{-1}$  тоже задана на отрезке и непрерывна.

### 3.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z}, f(x) = x^m, x > 0$ .

$x^0 \equiv 1, x > 0$ .

$x^m$  строго возрастает, если  $m > 0$

$x^m$  строго убывает, если  $m < 0$

$x^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-m}}$

$f(x) = x^m$  — непрерывная функция. Обратная функция  $g(y) = f^{-1}(y)$  — корень  $m$ -й степени из  $y > 0$ .

**Def 42.**  $x > 0, r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}$

$x^r = \sqrt[q]{x^p}$  —  $x$  в рациональной степени.

*Note.*  $x \mapsto x^r$  — непрерывное отображение.

**Lemma.** Результат не зависит от представления  $r$  в виде дроби.

**Property.**

$$1. x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$$

$$2. (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$$

$$3. x^r \cdot y^r = (xy)^r$$

**3.5 Равномерная непрерывность**

**Def 43.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Говорят, что  $f$  **равномерно непрерывна** на  $A$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 x_0 \in A : (|x - x_0| < \delta \wedge x \in A) \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

**Ex.**  $f(x) = x$ ,  $A = \mathbb{R}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 |x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies f \text{ равномерно непрерывна.}$$

**Ex.**  $f(x) = x^2$ ,  $A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y| < \varepsilon \implies f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

**Ex.**  $h(x) = \sqrt{x}$  — равномерно непрерывна.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

**3.5.1 Теорема Кантора**

**Theorem 39** (Кантор). Пусть  $A$  замкнутое ограниченное множество.  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

*Доказательство.* От противного. Пусть  $f$  не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \delta > 0 \exists x'_1, x''_2 \in A : |x'_1 - x''_2| < \delta \wedge |f(x'_1) - f(x''_2)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим  $\delta = \frac{1}{n}$ .

$$\exists x'_n, x''_n \in A : |x'_n - x''_n| < \delta \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Получили две последовательности  $\{x'_n\}$  и  $\{x''_n\}$ . Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности  $\exists x'_{n_j} \rightarrow x_0 \in A$ .

$$x''_{n_j} = x'_{n_j} + (x''_{n_j} - x'_{n_j}) \rightarrow x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})| \geq \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к  $f(x_0)$ , значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие.  $\square$



## Глава 4

# Дифференцирование

### 4.1 Определения

**Designation.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

**Def 44.** Функция  $f$  называется **дифференцируемой** в точке  $x_0$ , если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0),$$

где  $l(t) = kt$ ,  $k \in \mathbb{R}$  — дифференциал  $f$  в точке  $x_0$  (также обозначается  $df_{x_0}(t)$  или  $df(x_0, t)$ ).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0).$$

**Def 45.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , **производная**  $f$  в точке  $x_0$  определяется так:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Property.**

1. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $k$  единственное.
2. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .
3.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k, \quad df_{x_0}(t) = kt.$$

*Доказательство.*

$$\boxed{\implies} f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow k.$$

$\boxed{\impliedby}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0) = \\ &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

□

4.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует  $\beta$ , заданная в окрестности  $V \ni x$ :

(a)  $\beta$  непрерывна в точке  $x_0$

(b)  $f(x) - f(x_0) = \beta(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in V$

Доказательство.

⇒

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} & x = x_0 \end{cases}$$

⇐  $\beta(x) = \beta(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$  Подставим

$$f(x) - \underbrace{\beta(x_0)}_k (x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0).$$

Получили определение.

□

## 4.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!

1.  $f(x) = ax + b$  дифференцируема и  $\forall x_0 : f'(x_0) = a$

2. Если  $f, g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ ,  $f \cdot g$  тоже дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то  $1/f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Если  $f, g$  дифференцируемы в  $x_0$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в  $x_0$  и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Если  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \langle c, d \rangle$ ,  $x_0 \in \langle c, d \rangle$ ,  $g(x_0) \in \langle a, b \rangle$  и  $f$  дифференцируема в точке  $g(x_0)$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f \circ g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$



6. Производная обратной функции.  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и инъективна. Пусть  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\exists f'(x_0) \neq 0$ , обозначим  $g = f^{-1}$  — обратное отображение,  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда  $g$  дифференцируема в точке  $y_0$  и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$ . Если  $x_0 > 0$ , то  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8.  $x_0 > 0$ ,  $\alpha = \frac{l}{k} > 0$ .  $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$ . Тогда  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$\varphi'(x) = l \left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$

Аналогично для  $\alpha < 0$ .

9. Тайная таблице еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

### 4.3 Производная возрастающей функции

**Def 46.** Пусть  $f : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\in \langle a, b \rangle$ . Говорят, что  $f$  **возрастает в точке**  $x_0$ , если  $\exists$  окрестность  $U \ni x_0$ :

$$\begin{cases} f(y) \leq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \leq x_0 \\ f(y) \geq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \geq x_0 \end{cases}$$

*Note.* Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

**Theorem 40.** Пусть в условии определения  $f$  возрастает в точке  $x_0$ .

1. Если  $\exists f'(x)$ ,  $f'(x_0) \geq 0$
2. Пусть  $\exists f'(x_0) > 0$ , тогда  $f$  строго возрастает в точке  $x_0$

*Доказательство.*

- 1.

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0 \quad \forall x \geq x_0} \rightarrow f'(x_0) \implies f'(x_0) \geq 0.$$

$$2. f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\gamma(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|).$$

$0 < \varepsilon < f(x_0)$ . Разберем пару случаев:

(a)  $x > x_0$ .

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geq (f(x) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b)  $x < x_0$ .

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

**Def 47.**  $I = (\alpha, \beta)$ ,  $x \in I$ . Говорят, что  $f$  имеет **монотонный максимум**, если

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

*Note.* Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

*Note.* Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

**Theorem 41.**  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  — точка локального экстремума для  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $\exists f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  локальный максимум. Тогда  $f \upharpoonright_{(\alpha, x_0]}$  — возрастает в точке  $x_0 \implies f'(x_0) \geq 0$ . Также  $f \upharpoonright_{[x_0, \beta)}$  — убывает в точке  $x_0 \implies f'(x_0) \leq 0$ .

Для других случаев полностью аналогично.

□

## 4.4 Формулы Коши и Лагранжа

**Theorem 42** (Ролль).  $I = [a, b]$ ,  $a \neq b$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, дифференцируема на  $(a, b)$ . Пусть  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса №2 35  $\exists x, y \in [a, b] : \begin{cases} f(x) = \min_{t \in [a, b]} f(t) \\ f(y) = \max_{t \in [a, b]} f(t) \end{cases}$  Если  $x, y \in a, b$ , то  $f \equiv \text{const}$  и  $f'(a) = 0$ . Иначе либо  $x \in (a, b)$ , либо  $y \in (a, b)$ . Тогда в ней производная и равна нулю по прошлой теореме 41.

□

**Corollary** (Формула Коши). Пусть  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Corollary** (Формула Лагранжа). Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , то  $\exists c \in (a, b)$ :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Note.* Если  $h$  дифференцируема на  $(a, b)$  непрерывна на  $[a, b]$ , при этом  $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  инъективна на  $[a, b]$ .

**Corollary.** В условии замечания производная  $h'$  сохраняет знак.

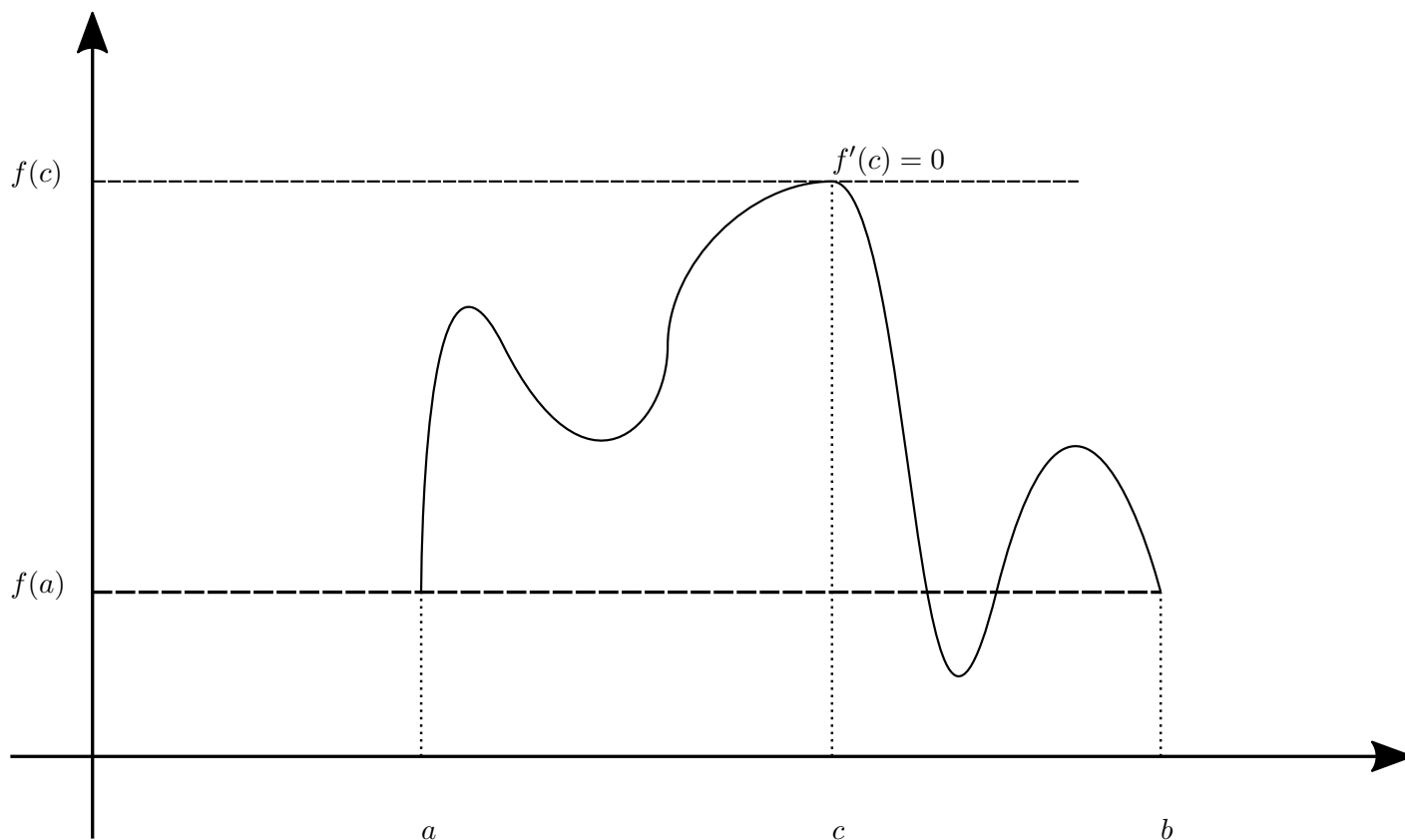


Рис. 4.1: Теорема Ролля

### Следствия из формулы Лагранжа

**Designation.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и дифференцируема на  $(a, b)$

1.  $f \equiv \text{const}$  тогда и только тогда, когда  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .
2. Связь знака производной и монотонности.

#### **Theorem 43.**

- (a) Если  $f$  возрастает (убывает) на  $[a, b]$ , то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ .
- (b) Если  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f$  возрастает (убывает).
- (c) Если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго возрастает (убывает).

**Statement.** Если  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , то  $f$  строго монотонна.

3.  $f'(x_1) = u$ ,  $f'(x_2) = v$ ,  $w$  лежит между  $u$  и  $v$ . Тогда  $\exists y$  между  $x_1, x_2 : f'(y) = w$ .

**Theorem 44.** Если  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ , непрерывна в точке  $a$  и  $\exists \lim_{y \rightarrow a} f'(y) = d$ , то  $f$  дифференцируема в точке  $a$  и  $f'(a) = d$ .

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (0 < |y - a| < \delta \implies |f'(y) - d| < \varepsilon).$$

Если  $x > a$ , по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \quad c \in (a, x).$$

Пусть  $|x - a| < \delta$ , тогда  $|c - a| < \delta$ , следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - d \right| < \varepsilon.$$

□

## 4.5 Правило Лопиталя

**Theorem 45** (Правило Лопиталя для  $0/0$ ).  $f, g$  заданы и непрерывны на  $[a, b]$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ .  $f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(y) \neq 0 \quad \forall y \in (a, b)$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $x > u > a$ .

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \quad y \in (a, x).$$

$$\forall \varepsilon \exists \delta : (|y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - d \right| < \varepsilon).$$

Если  $|x - a| < \delta$ , то  $|y - a| < \delta$ .

$$\left| \frac{f(u) - f(x)}{g(u) - g(x)} - d \right| < \varepsilon \xrightarrow{u \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| \leq \varepsilon \quad \text{при } |x - a| < \delta.$$

□

**Theorem 46** (Правило Лопиталя для  $\infty/\infty$ ).  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

*Доказательство.*  $x, u \in (a, a + \delta)$ ,  $x \neq u$ .  $\exists y$  между  $x$  и  $u$ :

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \quad (4.1)$$

Зафиксируем  $u$  вблизи  $x$  :  $\left| \frac{g(u)}{g(x)} \right| < 1$ . Тогда модуль правой части в уравнении 4.1 не более  $\varepsilon$ . Воспользуемся тем, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ :

$$d - \varepsilon \leq \left| \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \right|.$$

Домножим на знаменатель:

$$(d - \varepsilon)(1 - \frac{g(u)}{g(x)}) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)} \leq (d + \varepsilon) \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right).$$

$x$  близок к  $a$ :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\leq d + \varepsilon \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} &\geq d - \varepsilon \end{aligned}$$

**Statement.** Если  $v(x) < w(x)$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$  и  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} v(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} w(x)$ .

Применим утверждение.

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{|x-a| < \delta} v(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} v(x).$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} v(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{|x-a| < \delta} v(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} v(x).$$

Значит

$$d + \varepsilon \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq d - \varepsilon.$$

□

## 4.6 Старшие производные

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a).$$

Рассмотрим множество  $A = \{x \mid f'(x) \text{ существует}\}$  Тогда можно смотреть на  $f'$  как на функцию, заданную на  $A$ .

**Def 48.** Если  $f'$  определена в точке  $x \in A$ , то  $(f')'(x) = f''(x)$  — вторая производная в точке  $x$ .  
 $f^{(n)}(x)$  —  $n$ -я производная в функции  $f$ .

$$f^{(n+1)} \equiv (f^{(n)})', \text{ если такая существует.}$$

### 4.6.1 Полином с заданными производными

**Def 49.**  $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  — полином степени не выше  $n$ .

Его можно разложить по степеням  $x - x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ :  $p = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n$ , где  $b_i$  — некоторые другие коэффициенты.

Как вычислить коэффициенты  $b_j$ , зная  $p$ ? Нулевой —  $p(x_0)$ , дальше можно взять производную и посчитать следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(x_0) \\ b_1 &= p'(x_0) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p''(x_0) \\ b_3 &= \frac{1}{3!}p^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0) \\ p(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j. \end{aligned}$$

**Ех.** Отсюда можно просто вывести формулу Бинома Ньютона:  $q(x) = (x - a)^n$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \frac{q^{(j)}(0)}{j!}x^j.$$

Одно слагаемое будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{q^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-j+1) \cdot a^{n-j}}{j!} = \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!}(-1)^{n-j}a^{n-j}. \end{aligned}$$

#### 4.6.2 Полином Тейлора

**Def 50.**  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ . Пусть  $p$  — полином степени не выше  $n$ . Говорят, что он есть **полином Тейлора** для  $f$  порядка  $n$  в точке  $x_0$ , если

$$f(x) - p(x) \leq o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

**Ех.**  $n = 0$ .

$$f(x) - c = o_{x \rightarrow x_0}(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c.$$

Существует тогда и только тогда, когда действительно есть предел в точке  $x_0$ .

**Ех.**  $n = 1$

$$p(x) = a + b(x - x_0).$$

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \iff b = f'(x_0), \text{ если } f'(x_0) \text{ существует.}$$

**Theorem 47.** Если полином Тейлора порядка  $n$  существует для  $f$  в точке  $x_0$ , то он единственный.

*Доказательство.* Пусть  $p, q$  — два различных полинома Тейлора. Тогда  $p(x) - q(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n$ .

$$p(x) - p(y) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_n)^n.$$

Докажем, что  $c_j = 0 \ \forall j$ . Пусть  $k = \min\{j \mid c_j \neq 0\}$ .

$$r(x) = c_k(x - x_0)^k + \dots + c_n(x - x_0)^n = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

По определению

$$c_k(x - x_0)^k + c_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \dots + c_n(x - x_0)^n < \varepsilon(x - x_0)^n.$$

$$c_k + c_{k+1}(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-k} < \varepsilon(x - x_0)^{n-k} \quad x \rightarrow x_0 \implies c_k \rightarrow 0.$$

Противоречие. Значит все коэффициенты равны нулю. □

## 4.7 Формула Тейлора

### 4.7.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

**Theorem 48** (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано).  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет  $n - 1$  производную и  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\exists f^{(n)}(x_0)$ . Тогда

$$\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

является полиномом Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$ .

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

*Доказательство.*

**Lemma.** Пусть  $g$  — дифференцируемая  $n - 1$  раз на  $(a, b)$  и  $n$  раз в точке  $x_0 \in (a, b)$  функция.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда

$$g(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

*Доказательство.* Индукция. База  $n = 1$ . Действительно,  $g(x_0) = 0 \implies g(x) = o(1)$ .

Переход ( $n \rightarrow n + 1$ ). По теореме Лагранжа

$$g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x, x_0).$$

По предположению индукции  $g'(y) = o_{y \rightarrow x_0}(y - x_0)^n$ . Это равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (|y - x_0| < \delta \implies |g'(y)| \leq \varepsilon |y - x_0|^n).$$

Выберем  $x$ :  $|x - x_0| < \delta$ . Тогда

$$|\xi - x_0| < \varepsilon \implies g'(\xi) < \varepsilon |\xi - x_0|^n \leq \varepsilon |x - x_0|^n.$$

$$|g(x)| \leq |x - x_0| \cdot \varepsilon |x - x_0|^n = \varepsilon |x - x_0|^{n+1}, \quad |x - x_0| < \delta.$$

□

Доказав лемму, мы доказали и теорему. □

### 4.7.2 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

**Theorem 49** (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа).  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет  $n$  производных на  $(a, b)$  и  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$  непрерывны на  $(a, b)$ . Пусть  $x, x_0 \in (a, b)$  и  $f^{(n+1)}(y)$  существует на открытом интервале между  $x$  и  $x_0$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ между } x \text{ и } x_0.$$

*Доказательство.*

**Lemma.** Пусть  $g$  — дифференцируемая  $n-1$  раз на  $(a, b)$  и  $n$  раз в точке  $x_0 \in (a, b)$  функция.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда  $\exists \xi$  между  $x$  и  $x_0$ :

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

*Доказательство.* Индукция. База:  $n = 0$ . По формуле Лагранжа

$$\exists \xi \in (a, b) : g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0} = g'(\xi)(x - x_0).$$

Переход:  $n-1 \rightarrow n$ . Рассмотрим  $h(t) = (t - x_0)^{n+1}$ ,  $t \in (a, b)$ .

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} &= \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}, \quad \text{при некотором } \xi \text{ между } x, x_0 \\ \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n}. \end{aligned}$$

$g'$  удовлетворяет условию леммы для  $n-1$ . Тогда по предположению индукции

$$g'(\xi) = \frac{(g')^{(n)}(\eta)(\xi - x_0)^n}{n!}, \quad \eta \text{ между } \xi, x_0.$$

Тогда

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n} = \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

□

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

По лемме  $\exists \xi$  между  $x$  и  $x_0$ :

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{g(x)}.$$

□



## 4.8 Достаточное условие экстремума

**Theorem 50.**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f'(x_0) = 0$ ,  $\exists f''(x_0)$ . Тогда

- если  $f''(x_0) > 0$ , то  $f$  имеет локальный минимум в точке  $x_0$
- если  $f''(x_0) < 0$ , то  $f$  имеет локальный максимум в точке  $x_0$ .

*Note.* Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) = 0$ , можно сказать, что  $f$  имеет локальный экстремум в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Запишем формулу Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{нет нулевых}} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \underbrace{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^2}_{\alpha(x)}.$$

Пусть  $f''(x_0) < 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|^2).$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \varepsilon(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon\right)}_t(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Если взять  $\varepsilon = \left|\frac{1}{4}f''(x_0)\right|$ , то  $t$  все еще менее нуля. Тогда во всех точках кроме  $x_0 : f(x) < f(x_0)$ . Следовательно,  $f(x_0)$  — максимум.

Аналогичные рассуждения для  $f''(x_0) > 0$ . □

## 4.9 Сходимость последовательностей функций

**Designation.**  $A$  — множество произвольной природы.  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций.

**Def 51.** Говорят, что  $f_n$  **поточечно сходится к функции**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , если

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Пишут « $f_n \rightarrow f$ ».

**Def 52.** Говорят, что последовательность функций  $f_n$  **сходится равномерно к функции**  $f$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in A : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

**Designation.** Обозначается:  $f_n \rightrightarrows f$ .

### 4.9.1 Теорема Стокса-Зейделя

**Theorem 51** (Стокс-Зайдель).  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n$  равномерно сходится к  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Если все  $f_n$  непрерывны в  $x_0 \in A$ , то  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* Используем условие равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : (n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Зафиксируем  $n_0 > N$ .  $f_{n_0}$  непрерывно. Тогда

$$\exists \delta : (|x - x_0| < \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon).$$

$|x - x_0| < \delta$ , следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + \\ &\quad + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \\ &\quad + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Получили, что  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ . □

#### 4.9.2 Равномерный предел последовательности ограниченных функций

**Theorem 52.**  $f_n \rightrightarrows f$ ,  $f_n$  ограничена, то есть  $\exists M_n : |f_n| \leq M_n$ . Тогда  $\{f_n\}$  ограничена в совокупности, то есть  $\exists M : \forall n |f_n| \leq M$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, l > N : |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$  — критерий Коши. Пусть  $\varepsilon = 1$ :

$$|f_k(x) - f_l(x)| < 1 \quad \forall k, l > N$$

Тогда

$$|f_k(x)| \leq |f_l(x)| + 1 \leq M_l + 1 \quad \forall k, l > N$$

Зафиксируем  $l = N + 1 \implies |f_s(x)| \leq \max\{M_1, \dots, M_N, M_{N+1} + 1\}$  — равномерная ограниченность. □

**Theorem 53.**  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \rightarrow f$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists M : (|f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \implies |f(x)| \leq M)$
2.  $f$  ограничена  $\implies \exists N \exists K : |f_n(x)| \leq K \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in A$

**Theorem 54.**  $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$  на  $A$ . Пусть  $\exists M : \forall x \in A \quad \forall n |f_n(x)| \leq M$ . Тогда  $f_n g_n \rightrightarrows f g$

*Доказательство.*

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

### 4.9.3 Критерий Коши для равномерной сходимости

**Theorem 55** (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть  $f_n$  — последовательность функций на множестве  $A$ . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, j > N \forall x \in A : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad (4.2)$$

*Доказательство.*

Необходимость.

Пусть  $f_n \Rightarrow f$ . Для  $\varepsilon > 0$  найдем  $N : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ .

$$\forall k, l > N : |f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть условие 4.2 выполнено.  $x \in A$  — фиксировано. Тогда  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  есть последовательность Коши (см 4.2). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$ . Нашли  $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ . Зафиксируем  $k, x$ , перейдем к пределу по  $j$  :

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для  $\forall x \in A, \forall k > N$ .

□

### 4.9.4 Признак Вейерштрасса

**Ех.** Функция на  $\mathbb{R}$ , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos(a^j \pi x), \quad |b| < 1, a \in \mathbb{N}, 2 \nmid a.$$

**Theorem 56** (Вейерштрасс). Пусть  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть

$$\forall x \in A : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится и } a_n \geq 0.$$

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно.

*Note.* Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $N : \sum_{n=k+1}^j a_n < \varepsilon \quad \forall k, j > N$ .

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1}(x) + \dots + f_j(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_j(x)| \leq a_{k+1} + \dots + a_j < \varepsilon.$$

□

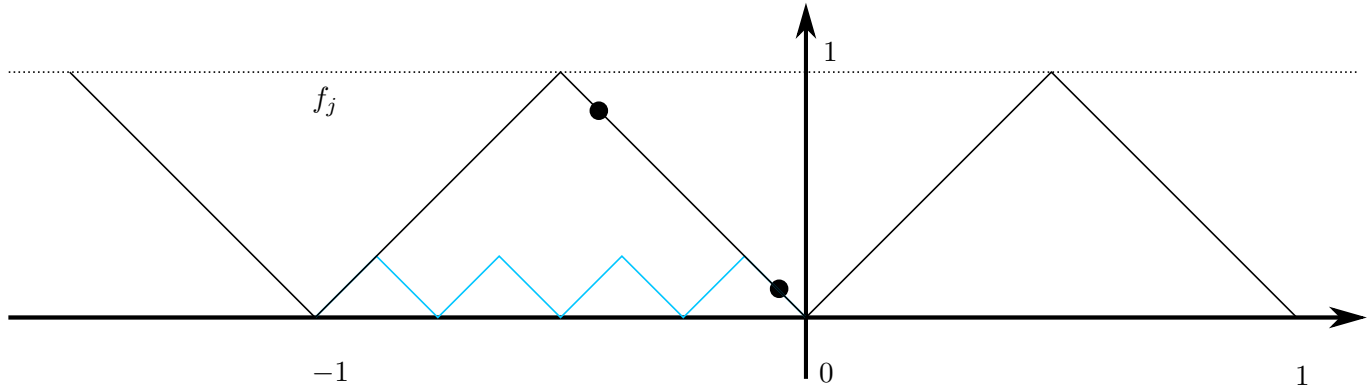


Рис. 4.2: График функции Ван дер Вардена

**Ех** (Ван дер Варден).  $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$ ; продолжим с периодом 1.  $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в  $h_k (\pm)$ , чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном  $j$  значение будет разных знаков.

**Designation.** Ряд из функций  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$  сходится обозначает, что функции  $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$  сходятся в соответствующем смысле.

**Ех.**  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

#### 4.9.5 Теорема о дифференцируемости предельной функции

**Theorem 57.**  $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  Предположим, что  $f_n \rightarrow f$  поточечно.  $f_n$  дифференцируемы и  $f'_n \rightrightarrows g$ . Тогда  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$ .

*Доказательство.* Перепишем условие равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, l > N \forall x \in \langle a, b \rangle : |f'_k(x) - f'_l(x)| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} = f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для  $x, y \in \langle a, b \rangle$ . По теореме Лагранжа:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad c \text{ между } x, y.$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall k, l > N : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon &\iff \\ &\iff \forall x, y \in \langle a, b \rangle, \quad \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Фиксируем  $k, l \rightarrow \infty$ .

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем  $x$ .

$$\exists \delta > 0 : \left( |x - y| < \delta \wedge x \neq y \implies \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - f'_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Объединяем неравенства для данных  $k$  и  $x$ :

$$|x - y| < \delta \wedge y \neq x \implies \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Также запишем равномерную сходимость  $f'_k(x) \rightrightarrows g(x)$ :

$$|x - y| < \delta \wedge x \neq y \implies |g(x) - f'_k(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□



## Глава 5

# Интегрирование

### 5.1 Первообразные

Пусть все происходит на  $\langle a, b \rangle$ .  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Def 53.** Говорят, что  $f$  есть первообразная для  $g$ , если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$  всюду.

**Theorem 58** (Ньютон, Лейбниц). Если  $g$  непрерывна, то у нее есть первообразная.

*Note.* К этой теореме мы еще вернемся.

**Statement.** Если  $f' = g$ , то  $(f + c)' = g$  для любой константы  $c$ .

**Theorem 59.** Если  $f_1, f_2$  — первообразные для  $g$ , то  $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
$e^x$	$e^x + c$

**Designation.** Первообразную функцию (класс всех первообразных функций) обозначают

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

**Statement.** Знаем, что  $(f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ .  $f$  — первообразная для  $g$  на  $[a, b]$ ,  $\phi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  дифференцируема, тогда  $g(\varphi(x))\varphi'(x)$  имеет первообразную  $(f \circ \varphi(x)) + C$

**Def 54.** Линейная форма — это линейная однородная функция вида  $\varphi(h) = ch$ .

**Def 55.** Дифференциальная форма порядка 1 на отрезке  $\langle a, b \rangle$  — отображение, которое каждой точке отрезка сопоставляют некую линейную форму:

$$\Phi : \langle a, b \rangle \mapsto \{\text{коэффициенты, задающие соответствующую линейную форму}\}$$

Общий вид дифференциальной формы на отрезке  $\langle a, b \rangle$ :

$$[\Phi(x)](h) = \Phi(x; h) = c(x)h$$

здесь  $c : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — функция.

**Def 56** (дифференциал).  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

**Statement.** Любая дифференциальная форма  $\psi$  единственным образом представляется в виде  $u(x)dx$ , где  $u$  — некоторая функция.

**Ex.**  $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  — тождественная.  $dx(u, h) = h$

**Statement.**  $\Phi = c \cdot dx$ , где  $c$  — некая функция на  $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма  $\varphi = gdx$ ; найти функцию  $f : df = \varphi$

**Statement.**

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dx.$$

**Ex.**

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену  $x = \sin t$ , пусть  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t) \right) &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \end{aligned}$$

Тогда  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

**Statement** (Формула интегрирования по частям).  $(fg)' = f'g + fg'$  Перепишем:

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

**Ex.**

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$



Ех.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx.\end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

## 5.2 Интеграл

**Def 57.**  $A$  — множество произвольной природы.  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Phi$  — функционал на  $A$ .

**Def 58.** Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ .  
 $f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

**Statement.** Каким должен быть интеграл?

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ( $f \mapsto I(f)$ )
2.  $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$  (Линейность)
3.  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
4.  $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

**Def 59.** Разбиение — ступенчатая функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

**Def 60.**  $g$  на  $\langle a, b \rangle$  — ступенчатая, если при  $i \neq j$  она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка  $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

### 5.2.1 Интеграл Дарбу

**Def 61.**  $J$  — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов  $\{J_k\}_{k=1}^N$ , такой что  $J_k \cap J_s = \emptyset$ ,  $k \neq s$ ,  $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$ . (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

**Def 62.** Длина интервала  $\langle a, b \rangle$  — это  $b - a$ . Обозначается:  $|J| = b - a$ ,  $|\emptyset| = 0$ .

**Lemma.** Если  $\{J_k\}_{k=1}^N$  — разбиение  $J$ , то  $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

**Def 63.**  $e$  — множество,  $f$  — ограниченная функция на  $e$ .

Колебание  $f$  на  $e$ :

$$\begin{aligned} \text{osc}_e(f) &= \sup_{x, y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left( \sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left( \sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

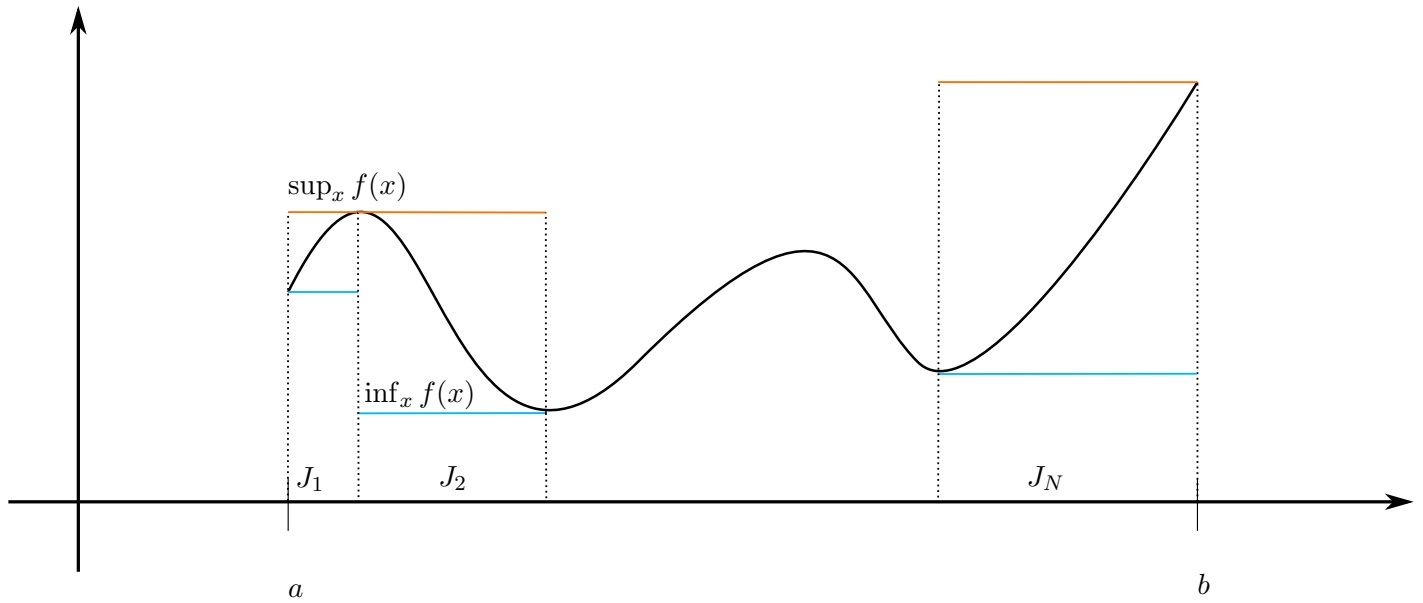


Рис. 5.1: График функции

Пока предполагаем, что  $f$  ограничена. Просуммируем отрезки  $J_1, \dots, J_N$  из разбиения отрезка  $J$ .

**Нижняя сумма Дарбу** для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$ :

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x).$$

**Верхняя сумма Дарбу** для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$ :

$$\overline{S} = \sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x).$$

**Designation.**

$A$  — множество всех нижних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

$B$  — множество всех верхних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

**Statement.** Пусть  $\{A, B\}$  — щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это  $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$  (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от  $f$ )

**Statement.**  $\{A, B\}$  — щель.

*Доказательство.*  $\mathcal{E}$  — разбиение отрезка  $J_i$ .  $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ ,  $\bar{S}_{\mathcal{E}}(f)$  — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что  $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{E}}(f)$

**Def 64.**  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  — разбиения отрезка  $J_i$ .  $\mathcal{F}$  — **измельчение**  $\mathcal{E}$ , если  $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$ .

**Lemma.** Если  $\mathcal{F}$  — измельчение для  $\mathcal{E}$ , то

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geq \underline{S}_{\mathcal{E}}(f), \quad \bar{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{E}}(f).$$

**Lemma.** Рассмотрим  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — разбиения отрезка  $J_i$ . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — разбиения.  $\mathcal{F}$  — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{E}_2}(f).$$

Следовательно,  $\{A, B\}$  — щель. □

*Note.* Определенные величины  $\bar{I}(f), \underline{I}(f)$  законны.

### 5.2.2 Интегрирование по Риману

**Def 65.**  $f$  называется интегрируемой по Риману, если  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

**Ех.**

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману.  $\varphi$  — ступенчатая функция на  $J$ , Существует разбиение  $\underline{\mathcal{E}}$  отрезка на  $J$ .  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \bar{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда  $\underline{I}(\varphi) - \bar{I}\varphi = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

**Theorem 60.** Если  $J$  — замкнутый отрезок ( $J = [a, b]$ ),  $f$  — непрерывная функция на  $J$ , то  $f$  интегрируема по Риману.

*Note.* Пусть  $J$  — произвольный отрезок,  $f$  — ограниченная функция на  $J$ ,  $\mathcal{E}$  — разбиение отрезка  $J$  на непустые отрезки  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^k |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^k |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^k |e_i| \left( \sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \right) = \sum_{i=1}^k |e_i| \text{osc}_{e_i} f \end{aligned}$$

*Note.*  $f$  интегрируема по Риману  $\iff$  щель  $(A, B)$  — узкая  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \bar{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данных обозначениях измельчения можно считать, что  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$  // возможно, здесь должно быть что-то другое

### 5.2.3 Критерий интегрируемости по Риману

**Theorem 61** (Критерий интегрируемости по Риману).  $f$  интегрируема по Риману на  $J$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $e_1, \dots, e_k$  Отрезка  $J$ , такое что

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f < \varepsilon. \quad (5.1)$$

*Доказательство.* Проверим, что  $f$  удовлетворяет условию 5.1  $f$  равномерно непрерывна по теореме Кантора 39:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — столь мелкое разбиение отрезка  $[a, b]$ , что  $\forall i : |e_i| < \delta$ . Тогда  $\forall i : \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon$ .

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon \sum_{i=1}^k |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

### 5.2.4 Свойства интеграла

**Property.**

1.  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle \implies f$  интегрируема.

2.  $\Sigma$  — разбиение,

$$\bar{S}_{\Omega}(-f) = -\underline{S}_{\Omega}(f).$$

3. Если  $\alpha > 0$ ,

$$\bar{S}_{\Sigma}(\alpha f) = \alpha \bar{S}_{\Sigma}(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если  $f$  интегрируема и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f$  интегрируема и  $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5.  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены.  $\Sigma$  разбиение.

$$\bar{S}_{\Sigma}(f + g) \leq \bar{S}_{\Sigma}(f) + \bar{S}_{\Sigma}(g).$$

6.

$$\underline{S}_{\Sigma}(f + g) \geq \underline{S}_{\Sigma}(f) + \underline{S}_{\Sigma}(g).$$

7. Если  $f, g$  интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f + g$  интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8.  $f, g$  интегрируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность.  $f \geq 0$ ,  $f$  интегрируема по Дарбу. Тогда,  $I(f) \geq 0$ .

10.  $f, g$  интегрируемы на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot g$  интегрируема.

*Доказательство.*

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть  $J$  — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

$f, g$  интегрируемы, тогда  $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \bar{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \bar{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда  $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$ .

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11.  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $J \subset \langle a, b \rangle$ . Тогда  $f \cdot \chi_J$  интегрируема. ( $\chi_J$  равна единице на  $J$  и нулю на остальных точках)

Если  $J = \{c\}$ , то  $I(f\chi_J) = 0$ .

12.  $J_1, J_2$  — два подотрезка, такие что  $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$ . Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла.  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .  $|f| \leq M$  на  $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

**Designation.**  $I(f\chi_J)$  не зависит от того, включает ли  $J$  концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{\langle c, d \rangle}).$$

**Designation.** Если  $d < c$  :

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

**Statement.**  $f$  интегрируема на  $\langle a, b \rangle$ .

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

### 5.2.5 Связь интеграла и производящей, теорема Ньютона-Лейбница

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — первообразная функция  $f$ , если  $F$  дифференцируема и  $F' = f$ .

**Theorem 62** (НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ). Пусть  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$  и непрерывна в точке  $t \in \langle a, b \rangle$ . Пусть  $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$ . Тогда  $F$  дифференцируема в точке  $t$  и  $F'(t) = f(t)$ .

Доказательство.  $x \neq t$ .

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t) ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

$f$  непрерывна в  $t$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ . Если  $|s - t| < \delta$ ,  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

**Corollary.** Если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $\forall t_0 \in [a, b] : F$  — первообразная  $f$ .

**Corollary** (Формула Ньютона-Лейбница).  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $F$  — первообразная  $f$ . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Def 66.**  $f \in C^k \langle a, b \rangle$ ,  $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$ , если  $f, f', \dots, f^{(k)}$  непрерывны.

**Theorem 63.** Если  $f, g \in C^1(a, b)$ , то

$$\int_b^a f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

$$\text{где } \Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

### 5.2.6 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и  $f, g, f', g'$  непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть  $\Phi$  — первообразная для  $f'g$ . Запишем первообразную для  $fg'$

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим  $u \Big|_y^x = u(x) - u(y)$ .

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg \Big|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg \Big|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

**Theorem 64.**  $f_n, f$  — заданы на  $\langle a, b \rangle$ ;  $n \in \mathbb{N}$  Пусть

1. все  $f_n$  интегрируемы по Риману на  $\langle a, b \rangle$
2.  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

*Доказательство.*

**Lemma.**  $E$  — множество,  $u, v$  — вещественные функции на  $E$ .  $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \ \forall x \in E$ . Тогда  $|\text{osc}_E(u) - \text{osc}_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|\text{osc}_{\langle a, b \rangle} - \text{osc}_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$  — отрезки  $\langle a, b \rangle$ :

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно,  $f$  интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \ \exists M : \forall n \geq M \ \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

**Statement.** Если  $f$  интегрируема по Риману на  $\langle a, b \rangle$ , то  $|f|$  тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



## Глава 6

# Логарифм и экспонента

### 6.1 Логарифм

Пусть функция  $l$  удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать  $l$ , заданную на  $\mathbb{R}_+$ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

**Def 67.** Логарифм — строго монотонная функция, заданная на  $\mathbb{R}_+$ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

**Statement.** Для  $n \in \mathbb{N}$ :

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

**Statement.** Если  $l$  — логарифм,  $c \neq 0$ , то  $cl$  — тоже логарифм.

#### 6.1.1 Непрерывность логарифма

**Lemma.** Если  $l$  — логарифм, то  $l$  непрерывна на всей области определения.

*Доказательство.* Пусть  $l$  — логарифм. Считаем, что  $f$  строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что  $t = l(1) = 0$ . Пусть  $t > 0$ .

$$l((1+x)^2) = 1l(1+x).$$

При  $x \rightarrow 1+$  получаем, что  $t = 0$ . Если  $x \rightarrow 1-$ , получаем тоже самое. Значит  $l$  непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке.  $\square$

### 6.1.2 Дифференцируемость логарифма

**Lemma.** Если  $l$  — логарифм, то функция  $l$  дифференцируема.

*Доказательство.*

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

$\Phi$  дифференцируема.

$$\begin{aligned} \Phi(2x) &= \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ &= x \int_x^{2x} l\left(x \cdot \frac{t}{x}\right) d\left(\frac{t}{x}\right) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy = \\ &= \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy \end{aligned}$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} = C$ . А  $\Phi$  дифференцируема, следовательно,  $f$  тоже дифференцируема.  $\square$

**Theorem 65** (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$ . Зафиксируем  $y$  и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

**Theorem 66.** Если  $l$  логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

*Доказательство.* Только что доказали.  $\square$

**Theorem 67.**  $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$  — логарифм.

Самая  $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

### 6.1.3 Существование логарифма

**Theorem 68.** Если  $C \neq 0$ , то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} - \text{есть логарифм.}$$

*Доказательство.* Достаточно доказать теорему для  $C = 1$ .

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если  $x_1 > x$ ,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно,  $\varphi$  строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^y \frac{d(\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

#### 6.1.4 Натуральный логарифм

**Def 68.** Натуральный логарифм —

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

**Property.**  $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

**Statement.** Образ функции  $\log$  есть все вещественные числа.

*Доказательство.* При  $x_1 > x$ ,  $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$ . Рассмотрим  $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$ :

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$ .

□

## 6.2 Экспонента

**Def 69** (Обратная функция к логарифму). У функции  $\log$  есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

**Property.**

1.  $\exp$  строго возрастает
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0$
4.  $\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1$
5.  $\exp x \exp y = \exp(x + y)$

**Statement.** Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

### 6.2.1 Ряд Тейлора для экспоненты

**Statement.**

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c) j!^j}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть  $f$  имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для  $f$  в окрестности точки  $x$  :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

**Theorem 69.** Ряд Тейлора для экспоненты,  $x_0 = 0$  :

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого  $x$  этот ряд сходится к  $\exp(x)$ , сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

*Доказательство.*

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем  $R > 0$ , пусть  $|x| \leq R$  Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

**Lemma.** Пусть  $a_0, a_1, a_2 \dots$  — положительные числа и  $\exists N : a_j < \eta < 1 \ \forall j > N$ . Тогда  $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

**Corollary.** Если  $a_j \geq 0, a_j \rightarrow 0$ , то  $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме  $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$  стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость.  $\square$

*Note.*

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

### 6.2.2 Быстрый рост экспоненты

**Corollary** (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

*Доказательство.*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

$\square$

*Note.*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

**Corollary.**

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

## 6.3 Показательная и степенная функции

### 6.3.1 Основание логарифма

**Designation.**  $l$  — логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

Такое число называется основанием логарифма  $l$ .

*Note.*  $l = \log$ . Тогда основание равно  $e$ .

**Designation** (общий случай).

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

$a$  — ан для  $l$ .

$$1 = l(a) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием  $a$  так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

**Designation.** Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

*Note.* Натуральная степень:  $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \dots \log u}_n) = u^n$

Целая отрицательная степень:  $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$

Рациональная степень:  $v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

**Property.**

1.  $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \log u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$
2.  $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$
3.  $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_1 \log u) = u^{v_1 v_2}$

### 6.3.2 Показательная функция

**Def 70.** Показательная функция  $f(x) = a^x$ .

**Property.**  $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

**Property.**  $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

**Def 71.** Пусть  $\neq 1$ .

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

### 6.3.3 Степенная функция

**Def 72.** Степенная функция  $g(x) = x^b, \quad x \in (0, +\infty), \quad b \in \mathbb{R}$ .

**Statement.**

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

**Statement.** Если  $a > 1$ , то  $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x), \quad x \rightarrow \infty$

*Доказательство.*

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{b \log x - x \log a}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Practice.*

$$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

**Statement.** Ранее доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится при любых  $x$ . Экспонента равномерна на любом конечном отрезке.

Ряд для  $e^x$  по степеням  $(x - x_0)$ :

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0)^n \quad (6.1)$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

**Ех.**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$  — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную:  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$  сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз.  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad (6.2)$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

**Statement.** В 5.3 общий член стремиться к нулю, если  $|x| > 0$ .

*Доказательство.*

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим  $n = 2k$ :

$$\left( \frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

## 6.4 Бесконечно дифференцируемые функции

**Ех** (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

$g$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

Если  $x \neq 0$ ,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

$g$  дифференцируема в нуле и  $g'(0) = 0$ .

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j — \text{полином.}$$

Значит,  $g$  бесконечно дифференцируемая функция и  $g^{(j)}(0) = 0$ .

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к  $g$ .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

$h$  — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

**Corollary.** Пусть  $I = (a, b)$ ,  $a < b$ . Существует бесконечно дифференцируемая функция  $u$  :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$

## 6.5 Формулы и ряды

### 6.5.1 Разложение Тейлора для логарифма

**Theorem 70** (разложение Тейлора для  $\log(1+x)$  центром в 0).

$$f(x) = \log(1+x), \quad f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f^{(2)} = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)(1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^k \frac{\log^{(n)} 1}{n!} x^n + \frac{\log^{(k+1)}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

**Statement.**  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

*Доказательство.*  $(1 + \frac{x}{n})^n = e^{\frac{1}{n} \log(1+\frac{x}{n})}$

$$\frac{1}{n} \log(1 + \frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty.$$



$$\log(1 + ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

**Statement.** Раскладывается ли логарифм ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (6.3)$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n} |x|^n \leftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только  $x \in (-1, 1]$ .

**Theorem 71.**  $x \in (-1, 1]$ . Тогда ряд 5.4 равномерно сходится равномерно на любом  $(r, 1]$ ,  $r > -1$ .

*Доказательство.* 1.  $x \in [0, 1]$ .

$$\left| \log(1 + x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \leq \frac{1}{k+1}, \quad c \in lra \quad (6.4)$$

В частности,  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

2.  $-1 < x \leq 0$

$$\left| \log(1 + x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \left( \frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \leq \left( \frac{1}{1-|x|} \right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \left( \frac{|x|}{1-|x|} \right)^{k+1} \quad (6.5)$$

Удачным случаем 5.6 будет  $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $x \in (-\frac{1}{2}, 0]$ . Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой:  $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$ . Подставим  $x = -x$ :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dt &= \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}. \\ \log(1+t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \quad -1 < t \leq 0, t < x \leq 0. \\ \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^t \left( \frac{|x|^n}{1-|x|} \right) dx \leq \frac{1}{1-|t|} \int_t^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1}. \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ,  $t > -1$ , если  $t \in (-1, 0]$ ,  $|t| \leq r < 1$ , равномерно сходится. Удачный случай:  $\leq \frac{1}{1+|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1} \leq \frac{1}{1-r} \frac{1}{n} r^n$ .

□

*Note.* Логарифм — аналитическая функция.

*Доказательство.* Выберем  $\left|1 - \frac{x}{x_0}\right| < 1$ .

$$\log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (\frac{x}{x_0} - 1)^n.$$

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \frac{1}{x_0} (x - x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

### 6.5.2 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

$f$  имеет  $n + 1$  производную на отрезке  $I$ ,  $t, a \in I$ .

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \int_a^t f'(x) d(x - t) = f'(x)(x - t) \Big|_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x - t) dx = \\ &= f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx. \end{aligned}$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx.$$

И так далее

**Theorem 72.**  $f$  имеет  $n + 1$  производную на отрезке  $I$ ,  $t, a \in I$ .

$$f(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t - a)^j + \frac{1}{n!} \int_a^t f^{(n+1)}(z)(t - x)^{n+1} dx.$$

**Ех.**  $x \rightsquigarrow u$ ,  $x = a(1 - u) + tu$   
 $u \in [0, 1]$ ,  $dx = (t - a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1 - u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t - a) = \\ &= (t - a)(1 - u) \end{aligned}$$

$$r_n(a, t) = \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(a(1 - u) + tu)(t - a)^n (1 - u)^n (t - a)^n du.$$

Если  $a = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m, \quad m \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m - 1)(1 + x)^{m-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m - 1) \dots (m - k + 1)(1 + x)^{m-k} \end{aligned}$$

**Designation.**

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

$$|x| < 1$$

$$(1+t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.$$

### 6.5.3 Ряд Ньютона

**Theorem 73** (Ряд Ньютона). *Ряд*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} t^k$$

*сходится к  $(1+t)^m$ , при  $|t| < 1$*

*Доказательство.*  $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$ .  $0 \leq t < 1$ .

$$|R_n(t)| \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right|.$$

□

**Theorem 74.**  $R_n(t) \rightarrow 0$  при  $|t| < 1$ , и сходится равномерно при  $|t| < \phi < 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right| = I$

1. Сначала  $0 \leq t_0$ :

$$I \leq \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \leftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \leq t^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| \frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|m-n-1|}{n+2} t.$$

$t < 1$ ,  $t + \varepsilon < 1$ , следовательно, рано или поздно  $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} < t + \varepsilon$

2. Следующий случай  $-1 < t < 0$  Подынтегральное выражение:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right|^n \left| \frac{1}{1+tu} \right|^{m-1}.$$

$$1 + |t| \geq |1+tu| \geq 1 - |t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right| \leq \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1 - \left( n \frac{1-|t|}{1-|t|u} \right).$$

Это не превосходит  $1 - n(1-|t|)$ .

Второй множитель:

(a)  $m \leq 1$ 

$$\left| \frac{1}{1+tu} \right|^{-m+1} \leq \left( \frac{1}{1-|t|u} \right)^{-m+1} \leq \left( \frac{1}{1-|t|} \right)^{-m+1}.$$

(b)  $m > 1$ 

$$|1+tu|^{m-1} \leq (1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку  $C_m(t)$ .

$$\begin{aligned} I &\leq C_m(t) \int_0^1 (1-n(1-|t|)) du = C_m(t) \left( -\frac{1}{1-|t|} \right) \frac{1}{n+1} (1-n(1-|t|))^{n+1} \Big|_{n=0}^{n=1} = \\ &= C_m(t) \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} (1-|t|^{n+1}) \leq C_m(t) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Получили

$$R_n(t) \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \frac{1}{n+1} \bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} |t| \left| \frac{m-n+1}{n+2} \right| \leftarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leq \rho \quad \sigma_n(t) \leq A\rho^{n-1}, \quad |t| \leq \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

 $x, x_0 > 0$ 

$$\begin{aligned} x^m &= x_0^m \left( \frac{x}{x_0} \right)^m = x_0^m (1 - (1 - \frac{x}{x_0}))^m = \\ &= x_0^m (1 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^m = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (x - x_0)^m. \end{aligned}$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

#### 6.5.4 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

**Theorem 75** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). Если  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз на отрезке с концами  $a, t$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \quad (6.6)$$

**Statement.** Если  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз:

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t : R_n(t, a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (6.7)$$

*Note.* Если  $f \in C^{(n+1)}$ , то 5.8 можно вывести из 5.7.

**Theorem 76** (о среднем).  $\varphi, \psi$  — функции на  $[c, d]$ ,  $\varphi$  непрерывна,  $\psi$  — интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда

$$\exists \psi \in [c, d] : \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\psi) \int_c^d \varphi(x)dx.$$

*Доказательство.* Можно считать, что  $\psi \geq 0$ . Пусть  $m = \min_{x \in [c, d]} \varphi(x)$ ,  $M = \max_{x \in [c, d]} \varphi(x)$ .

$$m \int_c^d \psi(x)dx \leq \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx \leq M \int_c^d \psi(x)dx.$$

$$m\psi(x) \leq \varphi(x)\psi(x) \leq M\psi(x).$$

Если  $\int_c^d \psi(x)dx = 0$ , теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leq \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx} \leq M.$$

Следовательно,

$$\exists \zeta \in [c, d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx}.$$

□

**Statement** (оценка остатка).

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists \zeta : R_n(t, a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} \left[ -(t-x)^{n+1} \Big|_{x=a}^{x=t} \right] = f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

## 6.6 Дифференциальные уравнения

$$\Phi(f'(t), f(t), t) = 0.$$

**Theorem 77.** Пусть  $f$  — непрерывная дифференцируемая функция на  $(a, b)$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a, b)$
2.  $\exists A : f(t) = Ae^{ct}$

*Доказательство.*  $2 \implies 1$  — очевидно

$1 \implies 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда  $g(t) \equiv A \in \mathbb{R}$ .

□