

Конспект по матанализу  
III семестр  
Современное программирование, факультет математики и  
компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Бахарева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

19 октября 2020 г.



# Оглавление

1	Функциональные последовательности и ряды	5
1.1	Равномерная и поточечная сходимости	5
1.2	Равномерные и поточечные сходимости рядов	7
1.3	Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	10
1.4	Степенные ряды	12
1.5	Разложение элементарных функций в ряды Тейлора	15
2	Теория меры и интегрирования	19
2.1	Системы множеств	19
2.2	Объем	21
2.3	Мера и ее свойства	23
2.4	Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.	25
2.5	Продолжение меры. Построение внешней меры.	27
2.5.1	Теорема о продолжении меры	28
2.6	Единственность стандартного построения	29
2.7	Определения и простейшие свойства меры Лебега в $\mathbb{R}^n$	30
2.8	Регулярность меры Лебега	32



# Глава 1

## Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: †

2 Sept

### 1.1 Равномерная и поточечная сходимости

#### Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , и  $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Тогда говорят, что  $f_n$  сходится к  $f$  поточечно ( $f_n \rightarrow f$ ), если

$$\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого  $x \in E$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_{(x,\varepsilon)}$  такое, что

$$\forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Замечание.* Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под  $E$  обычно подразумевается подмножество  $\mathbb{R}^n$ .

#### Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , и  $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Тогда говорят, что  $f_n$  сходится к  $f$  равномерно на  $E$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_{(\varepsilon)}$  такое, что

$$\forall n > N \forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции  $f_n(x) = x^n$  на отрезке  $(0, 1)$ . Так как  $\forall x \in (0, 1): x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $f_n \rightarrow f \equiv 0$ . Но  $f_n \not\rightrightarrows 0$ , потому что, например, для  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  каким бы ни было  $N$  для всех  $n > N$  можно взять такое  $x$  рядом с единицей, что  $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$ .

Утверждение.  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$  равносильно тому, что

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте  $C(K)$ , где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \rightarrow f \implies \|f_n - f\| \rightarrow 0 \iff f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на  $E$  ( $l^\infty(E)$ ) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

**Определение 3: Равномерная ограниченность**

Последовательность функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  называется равномерно ограниченной на  $E$ , если существует такое  $M$ , что

$$\forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}: |f_n(x)| \leq M.$$

Пример 1.1.2. Пусть  $f_n \in C(K)$ . Тогда равномерная ограниченность  $\{f_n\}$  равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. Из равномерной сходимости следует поточечная

1. Если для всех  $x \in E$  выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

где  $\{a_n\}$  — последовательность, стремящаяся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E$ .

2. Если существует  $\varepsilon_0$  и  $x_n \in E$  для всех  $n$  такие, что

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

то  $f_n$  не сходится равномерно к  $f$  на  $E$ .

3. Пусть  $\{f_n\} \Rightarrow f$  на  $E$  и  $\{g_n\}$  равномерно ограничена на  $E$ . Тогда  $f_n g_n \Rightarrow 0$ .

□

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) g_n(x)| \leq M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x \in E} |f_n(x)|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

■

4. **Критерий Коши.** Пусть  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .  $f_n$  равномерно сходится на  $E$ , тогда<sup>1</sup> для любого положительного  $\varepsilon$  существует  $N$ , что

$$\forall n, m > N \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

□

1  $\Rightarrow$  2 Запишем определение равномерной сходимости на  $E$  для  $\frac{\varepsilon}{2}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых  $n, m > N$

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &\leq \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2  $\Rightarrow$  1 Из условия Коши получаем, что для всех  $x \in E$  последовательность  $f_n(x)$  фундаментальна. Следовательно, существует предел  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Устремим  $m \rightarrow \infty$ . Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

По определению равномерной сходимости получаем, что  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ .

■

<sup>1</sup>С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

5. Пусть  $E$  — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке  $x \in E$  функций  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Если  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ , то  $f$  тоже непрерывна в точке  $a$ .

□ Проверим, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

А именно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Используем равномерную сходимость: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N$  такое, что

$$\forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как  $f_n$  непрерывна в точке  $a$ , можем записать определение для  $\frac{\varepsilon}{3}$  и заодно взять  $n > N$ :

$$\exists \delta > 0: \forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем два полученных неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| + \\ &+ |f_n(a) - f(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon \end{aligned}$$

■

6. **Теорема Стокса-Зайделя.** Пусть  $f_n \in C(E)$ . Если  $f_n \rightrightarrows f$ , то  $f$  непрерывна на  $E$ .

□ Следствие из 5 [прошлого свойства].

■

## 1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функциональный ряд

Рассмотрим функции  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) &\text{ — функциональный ряд,} \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) &\text{ — частичная сумма ряда.} \end{aligned}$$

Если  $S_n$  сходится к  $S$  поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если  $S_n$  сходится к  $S$  равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.

$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

**Замечание.** Если рассматриваемые функции ограничены ( $u_n \in C(K)$ ), то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в  $C(K)$  равносильна тому, что  $\|S_n - S\|_{C(K)} \rightarrow 0$ . Это в свою очередь равносильно тому, что  $S_n$  сходится равномерно к  $S$  на  $K$ .

Свойства.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , тогда  $r_n \rightrightarrows 0$  на  $E$ .
2. **Критерий Коши.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , тогда для всех  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что

$$\forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E: \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x) \right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. **Необходимое условие равномерной сходимости ряда.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ , то  $u_n$  равномерно сходится к 0.

☐ По критерию Коши для  $p = 1$ . ■

4. **Признак сравнения.** Пусть  $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}^2$  и для всех  $x \in E$  выполнено неравенство  $|u_n(x)| \leq v_n(x)$ . Если  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  тоже сходится равномерно на  $E$ .

☐ Обозначим частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x).$$

Заметим, что

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \leq |C_m(x) - C_n(x)|.$$

Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше  $\varepsilon$  при  $m, n > N$  и  $x \in E$ . Тогда можем применить критерий Коши для  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . ■

5. **Признак Вейерштрасса.** Пусть  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  и для всех  $x \in E$  выполнено неравенство  $|u_n(x)| \leq a_n$ . Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно.

☐ Применить признак Коши. ■

6. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  сходится равномерно, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно.

7. **Признак Дирихле.** Пусть  $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , обозначим  $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ . Если выполнены следующие условия, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  сходится равномерно:

(a) ряд  $U_n$  равномерно ограничен на  $E$ , то есть  $\exists M: \forall x \in E \forall n \quad |U_n(x)| \leq M$ ;

(b) ряд  $v_n$  равномерно сходится к нулю ( $v_n \Rightarrow 0$ );

(c) для любого  $x \in E$  последовательность  $\{v_n(x)\}$  монотонна.

☐ Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)v_k(x) = U_n(x)v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$

Так как  $U_n(x)$  равномерно ограничено, а  $v_n(x)$  равномерно сходится к нулю,  $U_n(x)v_n(x)$  тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))|.$$

Оценим частичную сумму<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq \\ &\leq M \cdot \sum_{k=1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = \\ &= M \cdot |v_1(x) - v_n(x)| \end{aligned}$$

Так как  $v_n \Rightarrow 0$ ,  $|v_1(x) - v_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |v_1(x)|$ . Значит, частичная сумма ряда стремится к  $M \cdot |v_1(x)|$ , следовательно<sup>4</sup>, второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится. ■

<sup>2</sup>Здесь на лекции  $u_n, v_n$  были определены как  $E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , но случае  $\mathbb{C}$  не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

<sup>3</sup>В последнем переходе мы используем монотонность  $v_k(x)$

<sup>4</sup>Например, по признаку сравнения



8. **Признак Лейбница.** Если выполнены следующие условия, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x)$  равномерно сходится:

- (a)  $v_n \Rightarrow 0$  на  $E$ ;
- (b) для любого  $x \in E$ , ряд  $\{v_n(x)\}$  монотонный.

□ Обозначим за  $u_n(x) := (-1)^n$ . Заметим, что ряд  $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  ограничен, тогда по признаку Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$  равномерно сходится. ■

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ . Обозначим  $u_n(x) = \sin(nx)$  и  $v_n(x) = \frac{1}{n}$ . Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \\ &= \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix \cdot \frac{n+1}{2}} \cdot (e^{ix \cdot \frac{n+1}{2}} - e^{-ix \cdot \frac{n+1}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left( e^{\frac{ixn}{2}} \right) \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$  при  $x \in (0, 1)$ . Обозначим  $v_n(x) = \frac{x^n}{n}$ .  $v_n(x)$  монотонна для всех  $x \in (0, 1)$ , так же  $|v_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ , поэтому  $v_n$  равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. **Признак Абеля.** Пусть  $u_n, v_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Если выполнены следующие условия, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$  сходится равномерно:

- (a) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  равномерно сходится на  $E$ ;
- (b) ряд  $v_n$  равномерно ограничен;
- (c) для любого  $x \in E$  последовательность  $\{v_n(x)\}$  монотонна.

□ Проверим критерий Коши, а именно: для любого  $\varepsilon > 0$  должно существовать число  $N$  такое, что

$$\forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) &= \sum_{k=1}^p u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) = \\ &= (U_{n+p}(x) - U_n(x)) \cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} (U_{n+k}(x) - U_n(x)) \cdot (v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)) \end{aligned}$$

Так как  $v_n$  равномерно ограничено, а  $u_n$  равномерно сходится<sup>6</sup>:

$$(U_{n+p}(x) - U_n(x)) \cdot v_{n+p}(x) \leq |U_{n+p}(x) - U_n(x)| \cdot M < \varepsilon \cdot M.$$

<sup>5</sup>Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.

<sup>6</sup>Поэтому можем использовать критерий Коши

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для  $u_n$  и монотонность  $v_n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} (U_{n+k}(x) - U_n(x)) \cdot (v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |U_{n+k}(x) - U_n(x)| \cdot |v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p-1} |v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| \leq \varepsilon \cdot 2M \end{aligned}$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через  $\varepsilon$ , поэтому можем им воспользоваться. ■

### 1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

1. Пусть  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E$  и существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$ . Тогда пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существуют и равны.

То есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

□

- (a) Проверим, что у  $b_n$  есть предел. Из критерия Коши для  $f_n$  следует, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $N$ , что

$$\forall n, m > N \forall x \in E: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремим  $x \rightarrow a$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow b_n$  и  $f_m(x) \rightarrow b_m$ . Из того, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon,$$

следует, что последовательность  $\{b_n\}$  фундаментальна. Поэтому предел  $b_n$  существует и  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

- (b) Определим функции

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Эти функции непрерывны в точке  $a$ . Кроме этого  $g_n \Rightarrow g$  на  $E \cup \{a\}$ , так как можно выбрать  $N$  из прошлого пункта.

- (c) Используем свойство равномерной сходимости

$$b = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

■

Следствие 1. Если  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $f_n \Rightarrow f$  на  $(a, b)$  и  $f_n$  непрерывна, то  $f_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$

#### Лекция 2: †

2. Пусть  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $a$  — предельная точка  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = b_n$ . Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

□ Обозначим частные суммы за

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = B_n$  и  $S_n \Rightarrow S$  на  $E$ .  $S_n(x)$  — функции, поэтому можно применить свойство 1 и получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} S_n = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

■

3. Пусть  $f_n \in C[a, b]$  и  $f_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$ <sup>7</sup>. Рассмотрим произвольную точку  $c \in [a, b]$  и первообразную  $\int_c^x f_n(t) dt$ . Тогда

$$\int_c^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_c^x f(t) dt \text{ на } [a, b].$$

В частности,

$$\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

□ Посмотрим на разность

$$\left| \int_c^x f(t) dt - \int_c^x f_n(t) dt \right| \leq |c - x| \cdot \max_{t \in [c, x]} |f(t) - f_n(t)| \quad (1.3.1)$$

Расширив отрезок  $[c, x]$  до  $[a, b]$ , получаем следующую оценку на 1.3.1

$$1.3.1 \leq (b - a) \cdot \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.3.2)$$

Выражение в 1.3.2 не зависит от  $x$ , откуда и следует равномерная сходимость. ■

4. **Перестановка дифференцирования и предельного перехода.** Пусть  $f_n \in C[a, b]$ ,  $f'_n \Rightarrow g$ ,  $c \in [a, b]$  и  $f_n(c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ . Тогда  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $[a, b]$  и  $f' = g$ . То есть

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

□ Так как  $f'_n \Rightarrow g$ , по прошлому свойству

$$\int_c^x f'_n(t) dt \Rightarrow \int_c^x g(t) dt.$$

Заметим, что

$$\int_c^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(c).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(c)}_{\rightarrow A} + \underbrace{\int_c^x f'_n(t) dt}_{\Rightarrow \int_c^x g(t) dt} \Rightarrow A + \int_c^x g(t) dt.$$

■

**Следствие 2** (дифференцирование равномерно сходящегося ряда). Пусть есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $c \in [a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  равномерно сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$  сходится. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно и

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

<sup>7</sup>Из этих двух условий автоматически следует, что  $f$  непрерывна

## 1.4 Степенные ряды

### Определение 5: Степенной ряд

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , где  $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ , называется степенным с центром в точке  $z_0$ .

*Замечание.* С помощью переносов любой степенной ряд сводится к ряду с центром в нуле  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .<sup>8</sup>

**Теорема 1.4.1.** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится при всех  $z$ , что  $|z| < |z_0|$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>То есть для всех  $z$  внутри шара с центром в нуле и радиусом  $z_0$ .

□ Так как ряд сходится в точке  $z_0$ ,  $a_n z_0^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то есть  $|a_n z_0^n| \leq M$ . Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

А такой ряд сходится, так как  $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$ . ■

**Следствие 3.** Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  расходится, то для всех  $z$ , что  $|z| > |z_0|$ , степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  расходится.

### Определение 6: Радиус сходимости

Радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  — такое число, что для всех  $z$ :  $|z| < R$  ряд сходится, а для всех  $z$ :  $|z| > R$  ряд расходится.

*Замечание.*  $R$  может быть равным нулю или бесконечности.

**Теорема 1.4.2 (Формула Коши-Адамара).** Радиус сходимости существует и равен

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□ Зафиксируем  $z$ .

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если  $|z| < R_{\text{сх}}$ , то  $q < 1$ , тогда по признаку Коши ряд сходится.

Если  $|z| > R_{\text{сх}}$ , то  $q > 1$ , аналогично по признаку Коши ряд расходится.

Если  $|z| = R_{\text{сх}}$ , то  $q = 1$ , и в этом случае ничего сказать нельзя. ■

*Упражнение.* Придумать формулировку в стиле признака Даламбера, то есть

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Здесь, в отличие от верхнего предела в формуле Коши-Адамара, еще нужно доказать, что предел существует.

**Пример 1.4.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $n! \sim e^n$ , поэтому  $R_{\text{сх}} = \infty$ .

<sup>8</sup>Далее в утверждениях будет обычно фигурировать ряд с центром в нуле для упрощения рассуждений.

Пример 1.4.2.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$ ,  $R_{\text{сх}} = 0$ .

Пример 1.4.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ,  $R_{\text{сх}} = 1$ .

**Теорема 1.4.3.** Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Рассмотрим  $0 < r < R$ . Тогда в  $\overline{B(0, r)}$  ряд сходится равномерно.

□ Возьмем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ . Это сходящийся числовой ряд. Если взять ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  с произвольным  $z$ , то

$$\max_{\overline{B(0, r)}} |a_n z^n| = |a_n| r^n.$$

Получили что, ряд максимумов сходится, из чего про признаку Вейерштрасса следует, что ряд сходится. ■

**Следствие 4.** Сумма степенного ряда непрерывна в шаре  $B(0, R_{\text{сх}})$ , так как частичные суммы будут непрерывными функциями, которые равномерно сходятся, следовательно, сходятся к непрерывной функции.

**Теорема 1.4.4 (Теорема Абеля).** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , радиус сходимости равен  $R$ . Предположим, что в точке  $z$  есть сходимость. Тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится на  $[0, R]$  равномерно. В частности,

$$\exists \lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

□ Докажем, что ряд сходится равномерно. Запишем следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

По условию  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  сходится равномерно (не зависит от  $x$ ), а  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  — монотонна и ограничена. Тогда по признаку Абеля ряд равномерно сходится на  $[0, R]$  ■

Пример 1.4.4. Разложим в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{при } |x| < 1.$$

По признаку Абеля при  $|x| = 1$  ряд тоже сходится. Поэтому  $R_{\text{сх}} = 1$ , причем на самом радиусе ряд тоже сходится.

**Лемма 1.** Следующие ряды имеют одинаковые радиусы сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}.$$

□ Заметим, что если  $x_n$  сходится, то<sup>9</sup>

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

<sup>9</sup>По определению верхнего предела это супремум частичных пределов последовательности, выберем такую  $\{x_{k_i}, y_{k_i}\}$ . Мы знаем, что  $x_{k_i} \rightarrow x$ , поэтому  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} y_{k_i} = x \lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i}$ .

Теперь воспользуемся формулой Коши-Адамара. Обозначим за  $R_1, R_2, R_3$  радиусы сходимости рядов из условия.

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n \cdot \frac{1}{n+1}|}} = \frac{1}{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}} \right) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|}} = \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1 \\ R_3 &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|a_n \cdot n|}} = \frac{1}{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n} \right) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|a_n|}} = \\ &= \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1 \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.4.5.** Пусть есть вещественный степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , его ряд сходимости равен  $R$ . Тогда его можно проинтегрировать почленно для всех  $x$ , что  $|x - x_0| < R$ :

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

□ Пусть  $r = |x - x_0| < R$ . В  $\overline{B(x_0, r)}$  ряд равномерно сходится. Рассмотрим его частные суммы  $S_n(x)$ . Так как  $S_n(x) \Rightarrow S$ ,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt &= \int_{x_0}^x S(t) dt = \\ &= \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S_n(t) dt \end{aligned}$$

■

#### Определение 7: Производная комплекснозначной функции

Пусть  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $a$  — внутренняя точка  $E$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ . Производную в точке  $a$  можно определить двумя способами:

1. это такая функция

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

2.  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , если существует такое  $k \in \mathbb{C}$ , что

$$f(z) = f(a) + k(z - a) + o_{z \rightarrow a}(z - a).$$

**Замечание.** Существование  $f'(a)$  равносильно тому, что  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , и в этом случае  $k = f'(a)$ .

**Теорема 1.4.6.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , его радиус сходимости равен  $R$ ,  $f(z)$  — сумма ряда внутри шара  $B(z_0, R)$ . Тогда при  $z: |z - z_0| < R$  функция  $f$  дифференцируема сколько угодно раз, при этом

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!} (z - z_0)^{n-m}.$$

□ Опять скажем, что  $z_0 = 0$ . Достаточно доказать для  $m = 1$ , а далее по индукции. Пусть  $|z| < r < R$ . Запишем

определение

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \\
 &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \\
 &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^n - z^n)}{w - z} \stackrel{?}{=} \\
 &\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n \underbrace{(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})}_{\text{все стремятся к } z^{n-1}} = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}
 \end{aligned}$$

Осталось доказать один переход. Если докажем равномерную сходимость ряда в  $\overline{B(0, r)}$ , то он будет верен. Обозначим

$$u_n(w) = a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}).$$

Заметим, что

$$|u_n(w)| \leq |a_n| \cdot (|w^{n-1}| + |w^{n-2}z| + \dots + |z^{n-1}|) \leq |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Так как  $r^{n-1} \in \overline{B(0, R)}$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$  сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)$  сходится, следовательно можем переставить предел и суммирование. ■

**Теорема 1.4.7 (О единственности разложения в степенной ряд).** Если  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  и сходится в круге  $B(z_0, R)$ , то коэффициенты задаются однозначно:

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

□ По теореме 1.4.6 можем записать следующую формулу:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (z - z_0)^{n-k}.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = a_m m! \implies a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

### Определение 8

Для бесконечно дифференцируемого в точке  $z_0$  степенного ряда  $f$  имеет место формула Тейлора с центром в точке  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

## 1.5 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Запишем разложения, которые нам уже известны

1.  $e^x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2.  $\sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3.  $\cos x$ 

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

**Определение 9**

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ . Определим  $\exp z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  для комплексного числа как ряды из формул выше.

Упражнение.

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\ (e^z)' &= e^z \\ (\sin z)' &= \cos z \\ (\cos z)' &= -\sin z \end{aligned}$$

Теорема 1.5.1 (Формула Эйлера).

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

□ Честная подстановка. Можно перегруппировывать слагаемые в рядах, так как они абсолютно сходятся. ■

4.  $\ln(1+x)$ 

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad |x| < 1.$$

□

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Так как  $1 - t + t^2 - t^3 + \dots$  — равномерно сходящийся ряд при  $|t| < 1$ , можем интегрировать его почленно. Аналогично мы можем определить  $\ln(1+z)$  для  $z \in \mathbb{C}$ , если  $|z| < 1$ . ■

5.  $\operatorname{arctg} x$ 

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Формула верна внутри круга  $|t| < 1$  для равномерной сходимости. ■

6.  $(1+x)^p$ 

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n.$$

Докажем, что радиус сходимости равен 1. Обозначим

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n, \quad f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^p}, \quad x \in (-1, 1).$$



Поступим хитро: докажем, что  $f(x) \equiv 1$ . Заметим, что  $f(0) = 1$ . Тогда достаточно проверить, что  $f'(x) = 0$  для всех  $x: |x| < 1$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= S(x)(1+x)^{-p} \\ f'(x) &= S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = \\ &= (1+x)^{-p-1} (S'(x)(1+x) - pS(x)) \end{aligned}$$

Проверим, что  $(S'(x)(1+x) - pS(x)) = 0$ .

$$\begin{aligned} p \cdot S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{n!} x^n \cdot p \\ (1+x) \cdot S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot (1+x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{(n-1)!} (x^{n-1} + x^n) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$p \cdot \frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{n!} = \frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{(n+1)!} + \frac{p(p-1) \dots (n-p)}{n!}.$$

Поэтому коэффициенты при  $x^k$  будут одинаковыми, следовательно, разность равна нулю.

7. Частный случай для  $p = -\frac{1}{2}$

$$\frac{p(p-1) \dots (n-p+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

8.  $\arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$



## Глава 2

# Теория меры и интегрирования

Лекция 3: †

16 Sept

### 2.1 Системы множеств

Определение 10: Алгебра подмножеств

Пусть  $T$  — произвольное множество,  $2^T$  — система подмножеств.  $\mathfrak{A} \subset 2^T$  — алгебра подмножеств, если

- (i)  $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- (ii)  $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- (iii)  $A \in \mathfrak{A} \implies T \setminus A \in \mathfrak{A}$

Свойства.

- 1.  $T \in \mathfrak{A}$
- 2.  $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \setminus B = A \cap (T \setminus B) \in \mathfrak{A}$
- 3.  $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B = T \setminus ((T \setminus A) \cap (T \setminus B)) \in \mathfrak{A}$
- 4.  $A_j \in \mathfrak{A}, j = 1, \dots, n \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}, \bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}$

Определение 11:  $\sigma$ -алгебра

$\mathfrak{A} \subset 2^T$  —  $\sigma$ -алгебра, если  $\mathfrak{A}$  — алгебра и

(ii  $\sigma$ )  $\forall A_j \in \mathfrak{A}, j \in \mathbb{N}: \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Замечание.  $\forall A_j \in \mathfrak{A}, j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Пример 2.1.1.

- 1.  $2^T = \mathfrak{A}$
- 2.  $\{\emptyset, T\} = \mathfrak{A}$

Теорема 2.1.1. Пусть  $T$  произвольное множество и  $\mathcal{E} \subset 2^T$  — какая-то система подмножеств. Тогда существует минимальная по включению  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ .

□ Возьмем пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{E}$ .



Определение 12: Борелевская оболочка

$\sigma$ -алгебра из прошлой теоремы называется борелевской оболочкой. Обозначается  $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$

Определение 13

Рассмотрим топологическое пространство  $(T, \tau)$  ( $\tau$  — система открытых множеств). Тогда  $\mathfrak{B}(\tau)$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $T$ . Обозначается  $\mathfrak{B}(T)$ .

Определение 14: Полукольцо

Набор подмножеств  $\mathcal{P} \subset 2^T$  называется полукольцом, если выполнены следующие аксиомы:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{P}$
- (ii)  $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$
- (iii)  $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  и  $Q_j$  дизъюнкты.

Пример 2.1.2.  $T = \mathbb{R}, \mathcal{P} = \{[a, b)\}$

Теорема 2.1.2 (о свойствах полукольца). Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $P, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ . Тогда

1.  $P \setminus \bigcup_{j=1}^n P_j = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  и  $Q_j$  дизъюнкты;
2.  $\bigcup_{j=1}^n P_j = \bigcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$ , где  $Q_{k_j} \in \mathcal{P}$ ,  $Q_{k_j}$  дизъюнкты и  $\forall j: Q_{k_j} \subset P_k$ ;
3. в предыдущем пункте можно заменить  $n$  на  $\infty$ .

□

1. Очевидно

2. Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^n P_j = \underbrace{P_1}_{\in \mathcal{P}} \cup \overbrace{(P_2 \setminus P_1)}^{\bigsqcup Q_j} \cup \overbrace{(P_3 \setminus (P_1 \cup P_2))}^{\bigsqcup Q_j} \cup \dots$$

При этом все полученные множества дизъюнкты.

3. В предыдущем пункте мы не пользовались конечностью объединения.

Пример 2.1.3 (Важный пример: полукольцо ячеек в  $\mathbb{R}^n$  и полукольцо биодических ячеек в  $\mathbb{R}^n$ ). Первое обозначается  $\mathcal{P}^n$ , второе —  $\mathcal{P}_d^n$ .

Рассмотрим два вектора

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, \dots, b_n), \quad \forall i: b_i \geq a_i \end{aligned}$$

Тогда  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j: a_j \leq x_j \leq b_j\} = \prod [a_j, b_j]$  — ячейка.

Ячейка называется кубической, если  $\forall j, k: |a_j - b_j| = |a_k - b_k|$ .

Возьмем  $e = (1, \dots, 1)$  и  $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}$ ,  $\bar{k} \in \mathbb{Z}^n$ .  $[\bar{k}, \bar{k}+e]$  — кубик с целочисленными координатами. Такие ячейки назовем ячейками ранга 1. Они покрывают все  $\mathbb{R}^n$  и дизъюнкты.

Такие ячейки можно разбить на  $2^n$  меньших ячеек второго ранга:  $[\frac{\bar{k}}{2}, \frac{\bar{k}+e}{2}]$ . Аналогично можно продолжить до ранга  $S+1$ :  $[\frac{\bar{k}}{2^S}, \frac{\bar{k}+e}{2^S}]$ .

Свойства.

- внутри ранга ячейки не пересекаются
- ячейки разных рангов либо не пересекаются, либо одна содержится в другой
- если  $Q$  — ячейка ранга  $k$ ,  $Q'$  — ячейка ранга  $k+1$ , то  $Q \setminus Q'$  — объединение ячеек ранга  $k+1$

$\mathcal{P}'_d$  — множество всех ячеек  $[\frac{\bar{k}}{2^S}, \frac{\bar{k}+e}{2^S}]$ , для  $s = 0, 1, \dots, d$  и  $\bar{k} \in \mathbb{Z}^n$ .

Теорема 2.1.3.  $\mathcal{P}^n$  и  $\mathcal{P}_d^n$  — полукольца.

Теорема 2.1.4. Для любого открытого непустого  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$  существует счетный набор  $P_k \in \mathcal{P}_d^{na}$  такой, что

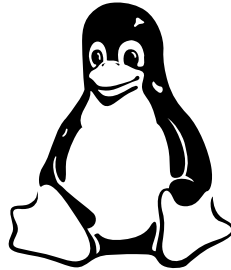
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G.$$

<sup>a</sup>Можно считать, что  $P_k$  не пересекаются

□ Рассмотрим точку  $x \in G$  и шар  $B(x, r) \subset G$ . Тогда существует такая ячейка  $S$ , что существует  $P_x$  ранга  $S$ , что  $x \in P_x \subset B(x, r)$  (просто берем диаметр ячейки менее  $x$ ).

Всего ячеек счетное число, поэтому в покрытии тоже будет счетное, при этом  $\bigcup_{x \in G} P_x = G$ . ■

.....



.....

## 2.2 Объем

Определение 15: Объем

Рассмотрим множество  $T$ , полукольцо  $\mathcal{P} \subset 2^T$ . Тогда  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  — объем, если

- (i)  $\mu \geq 0$

- (ii)  $\mu(\emptyset) = 0$   
 (iii)  $\mu$  конечноаддитивна:

$$P, P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}, \bigsqcup_{j=1}^k P_j = P \implies \mu(P) = \sum_{j=1}^k \mu(P_j).$$

Пример 2.2.1.  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 = \{[a, b]\}, \mu([a, b]) = b - a$ .

Пример 2.2.2.  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g$  монотонно возрастает. Тогда  $\nu_g([a, b]) = g(b) - g(a)$  — тоже объем.

Пример 2.2.3.  $\mathcal{P}$  — множества на плоскости, которые либо ограничены, либо дополнение ограничено.

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1 & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}, \quad \mu_2(A) = \begin{cases} +\infty & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}$$

Пример 2.2.4 (классический объем в  $\mathbb{R}^n$ ). Рассмотрим  $\mathcal{P}^n, P = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ , где  $\lambda_n(P) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ .

Упражнение. Проверить, что это объем.

Теорема 2.2.1 (о свойствах объема). Рассмотрим полукольцо  $\mathcal{P}, \mu$  — объем на  $\mathcal{P}, P, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ .

1. (монотонность)  $P' \subset P \implies \mu(P') \leq \mu(P)$
2. (усиленная монотонность)  $P_k$  — дизъюнкты,

$$\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu(P_k) \leq \mu(P).$$

3. (конечная полуаддитивность)<sup>a</sup>

$$P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \implies \mu(P) \leq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

<sup>a</sup>Здесь не предполагается, что  $\bigcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$

□

1. Если  $P \subset P'$ , то  $P \setminus P' = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$ , где  $Q_k \in \mathcal{P}$  и  $Q_k$  дизъюнкты.

$$\text{Тогда } P = P' \cup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k.$$

$$\mu(P) = \mu(P') + \sum_{k=1}^n \mu(Q_k) \geq \mu(P').$$

2.  $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^N Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  и  $Q_j$  дизъюнкты.

$$\text{Тогда } P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \cup \bigsqcup_{j=1}^N Q_j. \text{ Следовательно,}$$

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^n \mu(P_k) + \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) \geq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

3. Пусть  $P \cap P_k = P'_k \in \mathcal{P}$ . Тогда  $P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigcup_{k=1}^n \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\subset P'_k}$  — дизъюнкты.

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \stackrel{\text{по 2}}{\leq} \sum_{k=1}^n \mu(P'_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(P_k).$$

■

*Замечание.* Если  $\mathcal{P}$  — алгебра, то по аксиоме (iii) можно проверять только для двух множеств, а далее по индукции.

*Замечание.* Если  $\mathcal{P}$  — алгебра,  $A, B \in \mathcal{P}$ ,  $B \subset A$ , то

$$\mu(B) < +\infty \implies \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

## 2.3 Мера и ее свойства

### Определение 16: Мера

Пусть  $\mathcal{P}$  — подкольцо,  $\mu$  — объем на  $\mathcal{P}$ .  $\mu$  называется мерой, если  $\mu$  счетно-аддитивен:

$$P, P_k \in \mathcal{P}, P_k \text{ — дизъюнкты}, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \implies \mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Сумма в этом ряду не зависит от порядка, так как он положительный.

### Пример 2.3.1.

- Классический объем  $\lambda_n$  в  $\mathbb{R}^n$  (докажем позже)
- $\left. \begin{array}{l} \nu_g([a, b)) = g(b) - g(a) \\ g \nearrow \text{ и непрерывна слева} \end{array} \right\} \implies \nu_g \text{ — мера (Упражнение)}$

**Теорема 2.3.1** (о счетной полуаддитивности меры). Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $\mu$  — объем на  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu$  — мера, тогда для любых  $P, P_k \in \mathcal{P}$

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

□

$\boxed{1 \implies 2}$   $P'_k = P_k \cap P$ ,  $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P'_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ , где  $Q_{kj}$  — дизъюнкты. Тогда

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \underbrace{\mu(Q_{kj})}_{\leq \mu(P'_k) \leq \mu(P_k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

$\boxed{2 \implies 1}$  Пусть  $Q, Q_j \in \mathcal{P}$ ,  $Q_j$  — дизъюнкты и  $Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ .

Из полуаддитивности следует, что  $\mu(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$ . Теперь заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^n Q_j \subset Q \implies \sum_{j=1}^n \mu(Q_j) \leq \mu(Q).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \leq \mu(Q).$$

■

**Теорема 2.3.2 (о непрерывности меры снизу).** Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра,  $\mu$  — объем на  $\mathfrak{A}$ .  $\mu$  — мера, тогда для всех  $A_k \in \mathfrak{A}$  таких, что  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  верно следующее свойство<sup>a</sup>

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

<sup>a</sup>Это свойство называется «непрерывностью меры снизу»

□

**1  $\implies$  2** Рассмотрим новую систему дизъюнктивных множеств из  $\mathfrak{A}$ :

$$A'_1 = A_1, A'_2 = A_2 \setminus A_1, A'_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$$

Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A, \quad A_n = \bigcup_{j=1}^n A'_j.$$

Так как  $A'_j$  дизъюнктивны,

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A'_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**2  $\implies$  1** Пусть  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ , где  $B_j$  дизъюнктивны. Рассмотрим такие  $A_k = \bigcup_{j=1}^k B_j$ . Так как  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ,

$$\mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

Из конечной аддитивности объема следует, что

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A).$$

Значит,  $\mu$  — мера.

■

### Определение 17: Конечный объем

Рассмотрим множество  $T$ , полукольцо  $\mathcal{P}$  и объем  $\mu$  на  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu$  называется конечным объемом, если  $\mu(T) < \infty$ .

**Теорема 2.3.3 (о непрерывности меры сверху).** Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра,  $\mu$  — конечный объем на  $\mathfrak{A}$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $\mu$  — мера
- (ii) для всех  $A_k \in \mathfrak{A}$  выполнено<sup>a</sup>

$$A_{k+1} \subset A_k, A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A} \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A).$$

- (iii) для всех  $A_k \in \mathfrak{A}$  выполнено

$$A_{k+1} \subset A_k, \emptyset = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \implies \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$



<sup>a</sup>Это и называется непрерывностью меры сверху

□

(i)  $\implies$  (ii) Пусть  $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$ , тогда  $A_1 = A \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  и  $B_j$  дизъюнкты. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \mu(A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(B_j)}_{\mu(A_1) - \mu(A_{n+1})} \\ \underbrace{\mu(A_1)}_{\text{конечно}} &= \mu(A) + \underbrace{\mu(A_1)}_{\text{конечно}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n+1}) \\ \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n+1}) \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (iii) Очевидно

(iii)  $\implies$  (i) Пусть  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ , где  $B_j$  дизъюнкты и  $B_j, A \in \mathfrak{A}$ . Проверим счетную аддитивность. Рассмотрим

$$A_k = B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \dots = A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \dots \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} &= \mu(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &= \mu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j\right) = \mu(A) - \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \end{aligned}$$

Получили, что  $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$ , значит,  $\mu$  — мера.

■

## 2.4 Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.

### Определение 18: Внешняя мера

$T$  — произвольное множество,  $\tau: 2^T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .  $\tau$  — внешняя мера, если

- (i)  $\tau \geq 0$
- (ii)  $\tau(\emptyset) = 0$
- (iii) (счетная полуаддитивность)

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \implies \tau(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k).$$

*Замечание.*  $\tau$  конечно полуаддитивна.

*Замечание.*  $\tau$  монотонна:  $E_1 \subset E_2 \implies \tau(E_1) \leq \tau(E_2)$

### Определение 19: $\tau$ -измеримо

Пусть  $\tau$  — внешняя мера на  $T$ . Множество  $A$  —  $\tau$ -измеримо, если для любого  $E \subset T$ <sup>a</sup>

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \quad (2.4.1)$$

<sup>a</sup>В этом неравенстве знак  $\leq$  есть всегда

Теорема 2.4.1. Пусть  $\tau$  — внешняя мера,  $\mathfrak{A}_\tau$  — система  $\tau$ -измеримых множеств. Тогда  $\mathfrak{A}_\tau$  —  $\sigma$ -алгебра и  $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$  — мера.

□

0.  $\emptyset \in \mathfrak{A}_\tau$

1. Докажем, что  $A \in \mathfrak{A}_\tau \implies T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$ . Заметим, что

$$E \setminus A = E \cap (T \setminus A) \quad E \setminus (T \setminus A) = E \cap A.$$

По определению  $\tau$ -измеримости 2.4.1 для всех  $E \subset T$

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \setminus (T \setminus A)) + \tau(E \cap (T \setminus A)).$$

Следовательно,  $T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$ .

2. Докажем, что  $A, B \in \mathfrak{A}_\tau \implies A \cup B \in \mathfrak{A}_\tau$ . Рассмотрим произвольное множество  $E \subset T$ . Запишем для него условие 2.4.1 для  $A$

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \\ &= \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B) = \\ &= (\tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B)) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \geq \\ &\geq \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \end{aligned}$$

Так как неравенство в обратную сторону верно всегда,  $A \cap B \in \mathfrak{A}_\tau$ .

3. Проверим конечную аддитивность  $\tau$  на  $\mathfrak{A}_\tau$ . Хотим доказать, что для дизъюнктивных  $A, B \in \mathfrak{A}_\tau$  выполнено

$$\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cup B).$$

Заметим, что для всех  $E$

$$\begin{aligned} (E \cap (A \cup B)) \cap A &= E \cap A \\ (E \cap (A \cup B)) \setminus A &= E \cap B \end{aligned}$$

Подставим в условие  $\tau$ -измеримости 2.4.1

$$\tau(E \cap (A \cup B)) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B).$$

Теперь подставим в качестве  $E = T$

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B).$$

4. Проверим, что  $\mathfrak{A}_\tau$  —  $\sigma$ -алгебра. Для этого осталось доказать, что

$$\forall A_j \in \mathfrak{A}_\tau: \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}_\tau.$$

Обозначим  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ .

(а) Пусть все  $A_j$  дизъюнктивны. Для всех  $E$  верно

$$\tau(E) = \tau\left(E \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) + \tau\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) =$$

Воспользуемся конечной аддитивностью и тем, что  $E \setminus A \subseteq E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$ :

$$= \sum_{j=1}^n \tau(E \cap A_j) + \tau\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A).$$

Устремим  $n \rightarrow \infty$  и воспользуемся счетной аддитивностью для дизъюнктивных множеств:

$$\begin{aligned}\tau(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A) \geq \\ &\geq \tau\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\right) + \tau(E \setminus A) \geq \\ &\geq \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E)\end{aligned}$$

Следовательно,  $A \in \mathfrak{A}_\tau$ .

(b) Если  $A_j$  не дизъюнктивны, рассмотрим новые  $A'_j$ :

$$A'_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k.$$

$A'_j$  дизъюнктивны и измеримы, при этом их объединение равно  $A$ . Тогда по первому пункту  $A$  измеримо.

$\mu = \tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$ , при этом известно, что  $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$  — объем и  $\tau$  полудаддитивна. По теореме о счетной полуаддитивности,  $\tau$  — мера.

■

#### Лекция 4: †

23 Sept

##### Определение 20: Полная мера

Пусть  $\mu$  — мера на полукольце  $\mathcal{P}$ . Мера называется полной, если

$$e \in \mathcal{P}, \mu(e) = 0 \implies \forall e' \subset e: e' \in \mathcal{P}.$$

Следствие 5 (Ключевое свойство построения меры).  $\tau|_{\mathfrak{A}_\tau}$  — полная мера.

□ Рассмотрим  $e \in \mathfrak{A}_\tau$  и  $e' \subset e$ , причем  $\tau(e) = 0$ . Хотим доказать, что  $e' \in \mathfrak{A}_\tau$ . Хотим проверить такое равенство для всех  $E \in \mathcal{T}$ :

$$\tau(E) = \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

По монотонности меры,  $\tau(E) \geq \tau(E \setminus e')$ . Так как  $E \cap e' \subset E \cap e \subset e$ ,

$$0 \leq \tau(E \cap e') \leq \tau(e) = 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\tau(E) \geq \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

А в другую сторону это неравенство верно всегда в силу полуаддитивности внешней меры.

■

## 2.5 Продолжение меры. Построение внешней меры.

Обозначение. Рассмотрим полукольцо  $\mathcal{P}$  и  $\mu_0$  — меру на нем. Пусть

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, P_j \in \mathcal{P} \right\}.$$

Если  $E$  нельзя покрыть счетным набором  $P_j$ , будем считать  $\mu^*(E) = +\infty$ .

Теорема 2.5.1.  $\mu^*$  — внешняя мера и  $\mu^*(E) = +\infty$ .

□

1.  $E \in \mathcal{P} \xRightarrow{?} \mu^*(E) = \mu_0(E)$ . Нужно проверить неравенство в две стороны.

$\leq$  Возьмем покрытие  $\{E, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ . Тогда  $\mu^*(E) \leq \mu_0(E) + 0$ .

$\geq$  По теореме о счетной полуаддитивности меры, если  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ ,  $P_j \in \mathcal{P}$ , то  $\mu_0(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \leq \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$ .

В частности,  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

2. Проверим счетную полуаддитивность  $\mu^*$ , то есть докажем, что

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n \implies \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Каждое множество нужно оценить с некоторой точностью разбиения, а потом устремить разницу к нулю.

Если сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = +\infty$ , то неравенство автоматически выполнено. Предположим, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$  конечно.

Тогда существует такое покрытие  $\{P_j^{(n)}\}$ , что ошибка не большая для фиксированного  $\varepsilon > 0$ :

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Далее запишем для  $E$

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}.$$

Так как  $\mu^*$  — это инфимум, можно перейти к следующему неравенству

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

■

### 2.5.1 Теорема о продолжении меры

Теорема 2.5.2 (Теорема о продолжении меры). Пусть  $\mu_0$  — мера на полукольце  $\mathcal{P}$ ,  $\mu^*$  — внешняя мера, построенная ранее. По ней построена  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A}_{\mu^*}$  измеримых по  $\mu^*$  множеств.

Тогда  $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$ <sup>a</sup> и  $\mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$  — продолжение меры  $\mu_0$ .

<sup>a</sup>Это содержательная часть

□ Хотим проверить, что если  $P \in \mathcal{P}$ , то  $P \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ , то есть

$$\forall E \in T: \mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Так как  $\leq$  верно всегда, остается доказать неравенство в обратную сторону. Разберем два случая:

$E \in \mathcal{P}$  Воспользуемся главной аксиомой полукольца:  $E \setminus P = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  и дизъюнкты. Тогда  $E = \underbrace{(P \setminus E)}_{\in \mathcal{P}} \cup \bigcup_{j=1}^N \underbrace{Q_j}_{\in \mathcal{P}}$ , причем это объединение дизъюнктное. Теперь заметим, что для  $\mu_0$  есть конечная аддитивность, а  $\mu^*$  совпадает с  $\mu$  на элементах кольца, и поэтому

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu_0(E) = \mu_0(P \cap E) + \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j\right) = \\ &= \mu^*(P \cap E) + \sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \end{aligned}$$

Так как  $\mu^*$  полуаддитивна,  $\sum_{j=1}^N \mu^*(Q_j) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j\right) = \mu^*(E \setminus P)$ . Тогда

$$\mu^*(E) = \mu^*(P \cap E) + \mu^*(E \setminus P).$$

$E$  произвольное Если  $\mu^*(E) = +\infty$ , то неравенство сразу верно, поэтому будем считать, что  $\mu^*(E) < +\infty$ . Воспользуемся этим и приблизим с точностью до любого  $\varepsilon$  к объединению элементов полукольца.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и построим такие  $P_j \in \mathcal{P}$ , что  $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ , при этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Так как  $P_j \in \mathcal{P}$ :

$$\mu_0(P_j) = \mu^*(P_j) \geq \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \setminus P) \geq \\ &\geq \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \cap P\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \setminus P\right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\geq} \\ &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\geq} \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \end{aligned}$$

■

**Определение 21:** Стандартное продолжение (продолжение Каратеодори)

$\mu = \mu^*|_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$  — стандартное продолжение или продолжение Каратеодори меры  $\mu_0$  с полукольца  $\mathcal{P}$ .

*Замечание.*

1.  $\mu$  — полная мера, так как сужение — тоже полная мера.

2. Повторное продолжение бессмысленно.

*Упражнение.* Проверить, что внешняя мера получится такой же.

$$3. \mu(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, P_j \in \mathcal{P} \right\}$$

## 2.6 Единственность стандартного построения

**Определение 22:**  $\sigma$ -конечность объема и меры

Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо на  $2^T$ ,  $\mu$  — объем или мера. Тогда  $\mu$  называется  $\sigma$ -конечным(ой), если суще-

существуют такие  $P_j \in \mathcal{P}$ ,  $\mu(P_j) < +\infty$ , что

$$T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j.$$

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $\mu$  — стандартное продолжение  $\mu_0$  с  $\mathcal{P}$  на  $\mathfrak{A}$ , а  $\nu$  — какое-то продолжение  $\mu_0$  с  $\mathcal{P}$  на  $\mathfrak{A}'$ . Тогда

1. для всех  $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ :  $\nu(A) \leq \mu(A)$ , более того, если  $\mu(A) < +\infty$ , то  $\nu(A) = \mu(A)$
2. если  $\mu_0$  —  $\sigma$ -конечная мера, то  $\mu = \nu$  на  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$

В частности,  $\sigma$ -конечная мера единственным образом продолжается на  $\mathfrak{B}(\mathcal{P})^a$ .

<sup>a</sup>Это борелевская оболочка

□

1. [1] Проверим неравенство. Известно, что  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ ,  $P_j \in \mathcal{P}$ , следовательно,

$$\nu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) \underset{\nu - \text{продолжение } \mu_0}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j).$$

Перейдем к inf:

$$\nu(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A).$$

- [2] Пусть  $P \in \mathcal{P}$  и  $\mu(P) = \nu(P) < \infty$ . Докажем, что  $\nu(P \cap A) = \mu(P \cap A)$ . Предположим, что  $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$ .

$$\begin{aligned} \mu(P) = \nu(P) &= \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \\ &< \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P) \end{aligned}$$

Противоречие.

- [3] Пусть  $\mu(A) < \infty$ , тогда существуют такие  $P_j \in \mathcal{P}$ , что  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ <sup>1</sup>, где  $\mu(P_j) = \mu_0(P_j) < \infty$ . Тогда из счетной аддитивности  $\nu$

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j \cap A) \underset{\text{по 2}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j \cap A) = \mu(A).$$

Доказали первый пункт.

2. Пусть мера  $\sigma$ -конечна. Тогда все пространство можно представить в виде объединения конечных объемов и применить подпункт 3 из пункта 1 доказательства.

$$\mu_0 - \sigma\text{-конечна} \implies T = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j, \quad P_j \text{ дизъюнкты, } \mu(P_j) < \infty.$$

■

## 2.7 Определения и простейшие свойства меры Лебега в $\mathbb{R}^n$

На полукольце ячеек  $\mathcal{P}^n$  и диодическом полукольце ячеек  $\mathcal{P}_d^n$  мы определили классический объем  $\lambda_n = \lambda$ .

**Теорема 2.7.1.** Классический объем  $\lambda$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{P}^n$ .

<sup>1</sup>Можно всегда считать объединение дизъюнктым, так как можно заменить на него по стратегии, использованной ранее

□  $\sigma$ -конечность очевидна — подойдет покрытие единичными кубами.

Докажем, что это мера. Для этого можно доказать счетную полуаддитивность, то есть

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \implies \lambda(P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j).$$

Пусть  $P = [a, b]$  и  $P_j = [a_j, b_j]$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ , расширим один отрезок, а второй наоборот сузим.

Пусть  $b' \in [a, b]$ ,  $P' = [a, b'] \subset P$ :  $\lambda([a, b]) - \lambda([a, b']) < \varepsilon$ .

Еще возьмем  $a'_j < a_j$ ,  $P_j \subset (a'_j, b_j)$ :  $\lambda((a'_j, b_j)) - \lambda([a_j, b_j]) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ .

Заметим, что

$$P' \subset P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j.$$

Так как  $P'_j$  открытые, а  $P'$  компактно, существует конечное подпокрытие

$$\exists j_k: P' = [a, b'] \subset \bigcup_{k=1}^N P'_{j_k} \subset \bigcup_{k=1}^N [a_{j_k}, b_{j_k}].$$

Так как  $\mu$  конечно полуаддитивна,

$$\sum_{k=1}^N \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k}]) \geq \lambda([a, b']) \geq \lambda([a, b]) - \varepsilon.$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k}]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a'_j, b_j]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a_j, b_j]) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Итого,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \varepsilon \geq \lambda(P) - \varepsilon.$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим требуемое неравенство. ■

### Определение 23: Мера Лебега

Мера Лебега — стандартное продолжение классического объема.  $\mathfrak{A}^n$  — получающаяся  $\sigma$ -алгебра — множества измеримы по Лебегу.

Упражнение. Продолжения с  $\mathcal{P}^n$  и  $\mathcal{P}_d^n$  совпадают.

Свойства.

- 1 Все открытые множества измеримы. Более того, если  $G$  открыто и  $G \neq \emptyset$ , то  $\lambda(G) > 0$ .
- 2 Все замкнутые множества измеримы (дополнение к открытому).  $\lambda(\{a\}) = 0$ .
- 3 Если  $A$  измеримо и ограничено, то  $\lambda(A) < \infty$  (можно ограничить параллелепипедом).
- 4 Если  $E_k$  измеримо и  $\lambda(E_k) = 0$ , то  $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$ .
- 5 Если  $E$  — счетное множество, то  $\lambda(E) = 0$ .
- 6 Если  $E$  — множество и для всех  $\varepsilon > 0 \exists E \subset E_\varepsilon$  измеримое и  $\lambda(E_\varepsilon) < \varepsilon$ , то  $E$  измеримо и  $\lambda(E) = 0$ .  
 □ Построим последовательность  $E_n: \lambda(E_n) < \frac{1}{n}$ . Можно считать, что  $E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$ . Тогда  $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ .  
 По непрерывности сверху

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n).$$

Так как  $\lambda$  полная, предел равен нулю,  $E$  измеримо и  $\lambda(E) = 0$ . ■

7 Рассмотрим  $\mathbb{R}^n$  и гиперплоскость  $H_k = \{x_k = 0\}$ .  $\lambda(H_k) = 0$ .

□

$$H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0, |x_l| < j \text{ при } k \neq l\}.$$

Запишем в маленький параллелепипед:

$$P_\varepsilon = [-j, j] \times \dots \times \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon]}_k \times \dots \times [-j, j].$$

$$\lambda(P_k) = (2j)^{n-1} \cdot 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

■

8 В  $\mathbb{R}$  континуальное множество меры 0 — канторово множество.

9 Упражнение. Существует неизмеримое множество.

## 2.8 Регулярность меры Лебега

### Определение 24: Регулярная мера

Рассмотрим топологическое пространство  $T$ ,  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(T)$ ,  $\mu$  — мера на  $\mathfrak{A}$ .  $\mu$  называется регулярной, если

- (i)  $\forall A \in \mathfrak{A}: \mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ открыто, } A \subset G\}$
- (ii)  $\forall A \in \mathfrak{A}: \mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ замкнуто, } A \supset F\}$

Упражнение. Если  $\mu(T) \leq \infty$ , то из (i) следует (ii).

Лемма 2. Для регулярности меры достаточно выполнения одного из двух свойств:

- (a)  $\forall \varepsilon > 0 \forall A \in \mathfrak{A} \exists \text{ открытое } G: A \subset G, \mu(G \setminus A) < \varepsilon$
- (b)  $\forall \varepsilon > 0 \forall A \in \mathfrak{A} \exists \text{ замкнутое } F: A \supset F, \mu(A \setminus F) < \varepsilon$

□

(a)  $\iff$  (b) (a) для  $A$  равносильно (b) для  $T \setminus A$

(a)  $\implies$  (i) Очевидно

■

### Теорема 2.8.1. Мера Лебега регулярна.

□ Проверим условие (a) из прошлой леммы.

1. Пусть  $\lambda(A) < \infty$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда существуют такие  $P_j \in \mathcal{P}^n$ , что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset A, \quad \lambda(P_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Немного расширим ячейки, чтобы они стали открытыми множествами. Пусть  $P_j = [a_j, b_j]$ , построим  $P'_j \subset P'_j(a'_j, b_j)$ , при этом  $\mu(P'_j) - \mu(P_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ .

Теперь  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j \supset A$  и

$$\lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P'_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$



2. Если  $\mu(A) = \infty$ , то можем представить  $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ , где  $Q_j$  — дизъюнктные ячейки из  $\mathcal{P}^n$ . Тогда можем воспользоваться  $\sigma$ -конечностью: представим  $A$  так

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(Q_j \cap A)}_{\text{все конечны по мере}}.$$

Каждое из  $(Q_j \cap A)$  можем приблизить каким-то открытым множеством  $G_j$ :  $G_j \cap A \subset G_j$  и  $\lambda(G_j \setminus (Q_j \cap A)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ .

Тогда возьмем  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A$ , поэтому  $\lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$ .

■

Следствие 6. Если  $E$  измеримо по Лебегу, то существуют компактные множество  $K_j$  такие, что

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \quad \lambda(e) = 0.$$

□ Рассмотрим замкнутые  $F_j \subset E$ , что  $\lambda(E \setminus F_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  и  $F_j \subset F_{j+1} \subset \dots$

Построим из  $F_j$  компакты:  $K_j = F_j \cap \overline{B(0, j)}$ .

Рассмотрим  $e$ :

$$e = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Тогда

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e.$$

Проверим, что  $\lambda(e) = 0$ .

$$\lambda(e) \leq \lambda(E \setminus F_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Значит,  $e$  измеримо и  $\lambda(e) = 0$ .

■

Следствие 7. Если  $E$  измеримо, то существуют открытые  $G_j$  и измеримое  $e'$ , что  $\lambda(e') = 0$  и

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \setminus e'.$$

Теорема 2.8.2 (Ключевой момент. Почему интеграл Лебега удобнее Римана). Пусть  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f$  непрерывно дифференцируема в  $G$ .

1. Если  $E \subset G$ , то  $f(E)$  измеримо.
2. Если  $\lambda(E) = 0$ , то  $\lambda(f(E)) = 0$ .

Лекция 5: †

30 Sept

Теорема 2.8.3 (О сохранении измеримости при гладком отображении). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^m$  и  $G$  — открытое,  $C^1(G) \ni \Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкая функция на  $G$ . Тогда

- (1) если  $e \subset G$  и  $\lambda(e) = 0$ , то  $\Phi(e) \in \Omega_m$  и  $\lambda(\Phi(e)) = 0$ ;
- (2) если  $E \subset G$  и  $E \in \Omega_m$ , то  $\Phi(E) \in \Omega_m$ ,

где  $\Omega_m$  — семейство измеримых по Лебегу множеств.

□

1  $\implies$  2 Представим  $E = e \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ , где  $K_n$  — компактны и  $\lambda(e) = 0$ . Так как  $\Phi$  гладкая, она переводит компакт в компакт.

$$\Phi(E) = \Phi(e) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n).$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n)$  — объединение замкнутых, следовательно, само является замкнутым, а поэтому измеримо по Лебегу. По первому пункту  $\Phi(e)$  измеримо. А тогда и  $\Phi(E)$  измеримо.

1 Пусть  $\lambda(e) = 0$ .

1. Рассмотрим случай, когда  $e$  входит в  $G$  внутри некоторой ячейки.  $e \subset P \subset \bar{P} \subset G$ , где  $P$  — ячейка, поэтому  $\bar{P}$  — компакт.

По теореме о конечном приращении  $\Phi|_{\bar{P}}$  — липшицево, то есть<sup>2</sup>

$$\exists c: \forall x, y \in \bar{P} \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|.$$

Воспользуемся регулярностью меры Лебега: зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует открытое  $g$ , что

$$e \subset g \subset G \text{ и } \lambda(g) < \varepsilon.$$

Теперь представим  $g$  в виде объединения дизъюнктивных ячеек:  $g = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ . Обозначим ребро ячейки  $Q_j$  за  $h_j$  и перепишем условие  $\lambda(g) < \varepsilon$ , используя счетную аддитивность:

$$\lambda(g) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j^m < \varepsilon.$$

Заметим, что  $\text{diam } Q_j = h_j \sqrt{m}$ . Так как  $\Phi$  липшицево,  $\text{diam } \Phi(Q_j) \leq c \cdot h_j \sqrt{m}$ . Тогда  $\Phi(Q_j)$  можно погрузить в ячейку:

$$\begin{aligned} \Phi(Q_j) &\subset Q'_j, \quad h'_j \leq 2ch_j \sqrt{m} \\ \lambda(Q'_j) &\leq \underbrace{(2c\sqrt{m})^m}_{\text{не зависит от номера ячейки}} (h_j)^m \end{aligned}$$

Мы знаем, что

$$\Phi(e) \subset \Phi(g) \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Phi(Q_j) \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q'_j.$$

При этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q'_j) \leq (2c\sqrt{m})^m \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (h_j)^m < (2c\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon.$$

Следовательно,  $\Phi(e)$  можно покрыть множеством сколь угодно малой меры. Тогда  $\Phi(e)$  измеримо и  $\lambda(\Phi(e)) = 0$ .

2. Если  $e$  не помещается в диадическую ячейку:  $e \subset G$ . Так как  $G$  открыто, каждая точка входит с некоторой окрестностью  $B$ , для которой можно найти некоторую ячейку  $P_j$ , что точка принадлежит  $P_j$ , а  $\bar{P}_j \subset B \subset G$ . Поэтому

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j, \quad P_j \text{ — ячейки, } \bar{P}_j \subset G.$$

Тогда можем рассмотреть  $e_j = e \cap P_j \subset P_j \subset G$ . В этом случае  $\lambda(e \cap P_j) \leq \lambda(e) = 0$  и  $e \cap P_j \subset P_j \subset \bar{P}_j \subset G$ .

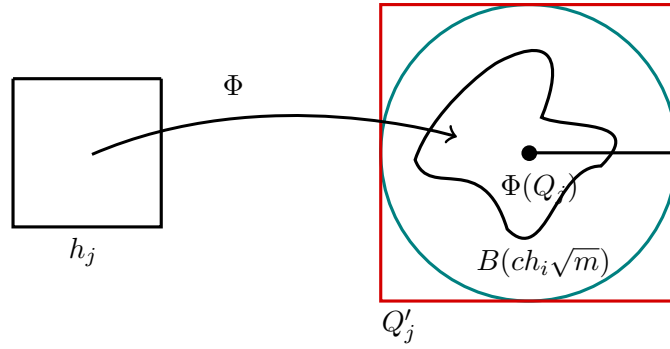
Можно применить первый пункт и получить, что

$$\Phi(e \cap P_j) \text{ измеримо и } \lambda(\Phi(e \cap P_j)) = 0.$$

Просуммируем:  $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j)$  и

$$\Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j) \implies \lambda(\Phi(e)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\Phi(e \cap P_j)) = 0.$$

<sup>2</sup>Здесь под нормой подразумевается евклидова норма, то есть просто модуль. В качестве константы  $c$  достаточно взять максимум дифференциала на  $\bar{P}$ .

Рис. 2.1: Отображение  $Q_j$ 

*Ремарка.* На самом деле гладкость не нужна, а достаточно локальной липшицевости.

*Ремарка.* Подпространство меньшей размерности, чем объемлющая, имеет меру нуль.

**Следствие 8.** Возьмем открытое  $G \subset \mathbb{R}^m$  и функцию  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(G)$ .

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in G\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Тогда  $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$ .

□ Рассмотрим множество  $G \times \{0\}$ .  $\lambda_{m+1}(G \times \{0\}) = 0$ , так как для любого покрытия параллелепипедами можно сколь угодно уменьшить объем (уменьшаем последнюю сторону, а это можно делать, так как покрыть нужно точку 0). Теперь возьмем  $\Phi(x, 0) = (x, f(x))$ . По доказанной теореме  $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$ . ■

*Задача.* Измеримость не сохраняется при непрерывном отображении. Привести пример. *Намек на решение:* канторова лестница.

## 2.9 Инвариантность меры Лебега при движении

**Теорема 2.9.1 (Инвариантность при сдвиге).** Рассмотрим  $v \in \mathbb{R}^m$  и  $E \in \mathfrak{A}_m$ . Тогда  $v + E = \{v + x \mid x \in E\}$  тоже измеримо и  $\lambda(v + E) = \lambda(E)$ .

□ Так как сдвиг — липшицево отображение с коэффициентом 1, по прошлой теореме ??,  $v + E$  измеримо. Определим  $\mu(E) = \lambda(v + E)$ .  $\mu$  — мера на  $\mathfrak{A}$ , так как множества измеримы по  $\lambda$ , тогда они измеримы по  $\mu$ . Тогда для ячейки  $P \in \mathcal{P}_m$  верно  $\mu(P) = \lambda(v + P) = \lambda(P)$ .

Так как  $\lambda$  — стандартное продолжение объема на ячейках, а  $\mu$  — продолжение Каратеодори, причем они совпадают на полукольце, то по единственности стандартного продолжения они совпадают на  $\mathfrak{A}_m$ . Следовательно,  $\lambda(E) = \lambda(v + E)$ . ■