

Билеты по алгебре
I семестр

Тамарин Вячеслав

8 января 2020 г.

Вопрос 1 Векторное пространство

Def 1. Пусть $(V, +)$ — абелева группа, F — поле, и задана операция (умножение) $V \times F \rightarrow V$. Предположим, что $\forall u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие свойства:

1. $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$
2. $v(\alpha + \beta) = v\alpha + v\beta$
3. $(v + u)\alpha = v\alpha + u\alpha$
4. $v \cdot 1 = v$

Тогда V называется векторным пространством над F .

Property.

1. $v \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
2. $v \cdot (-1) = -v$
3. $v \cdot (-\alpha) = (-v)\alpha = -(v\alpha)$
4. $v \cdot \sum \alpha_i = \sum v\alpha_i$
5. $\sum v_i \cdot \alpha = \sum v_i \alpha$

Exs.

1. Множество векторов в \mathbb{R}^3
- 2.

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

3. X — множество, $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$
 $f, g : X \rightarrow F$
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ — многочлены от одной переменной t

Вопрос 2 Подпространство, линейная оболочка

Def 2. Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V .

Statement 1 (критерий подпространства). Подмножество $U \subseteq V$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\forall u, v \in U, \alpha \in F : u + v, u\alpha \in U$.

Def 3. Пусть $u_1, \dots, u_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Сумма

$$\sum_{k=1}^n u_k \alpha_k$$

называется линейной комбинацией векторов u_1, \dots, u_n с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю.

Note. Пусть $S \subseteq V$, и задан набор чисел $\alpha_s \in F$, $s \in S$. Операция бесконечной суммы будет определена только в случае, когда почти все α_s равны нулю.

Def 4. Линейной оболочкой набора S называется подпространство, порожденное S , то есть наименьшее подпространство, содержащее S .

Designation. Линейная оболочка набора S обозначается $\langle S \rangle$.

Statement 2. $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \alpha_k \mid u_k \in S, \alpha_k \in F \right\}$

Def 5. Если $\langle S \rangle = V$, то S называется системой образующих пространства V .

Def 6. Кортеж векторов (u_1, \dots, u_n) называется линейно независимым, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Множество $S \subseteq V$ называется линейно независимым, если любой кортеж, составленный из конечного числа различных векторов из S , является линейно независимым.

Def 7. Базис — линейно независимая система образующих.

Вопрос 3 Матрицы

i Конечные матрицы

Def 8. Двумерный массив $m \times n$ элементов поля F называется матрицей размера $m \times n$ над F .

Designation. Множество таких матриц обозначается $M_{m \times n}(F)$. Если $m = n$, пишут $M_n(F)$. Элемент матрицы A в позиции (i, j) записывается a_{ij} .

Property.

- Для двух матриц одинакового размера определена операция поэлементной суммы: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Также определено умножение матрицы на число: $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.
- Произведением матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$ на матрицу $B \in M_{n \times k}$ называется матрица $C = AB \in M_{m \times k}(F)$ элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

Theorem 1. Множество $M_{m \times n}(F)$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством над полем F .

Доказательство. Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число:

$$\begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \\ (AB)\alpha = A(B\alpha) = (A\alpha)B \end{cases}.$$

Все кроме первого свойства очевидны. Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k \in K} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \\ &= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left(\sum_{k \in K} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j \in J} a_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}$$

Def 9. Квадратная матрица E с 1 на главной диагонали и остальными нулями называется единичной.

Property. Умножение данной матрицы на единичную справа и слева не ее не изменяет.

Матрица E_n является нейтральным элементом в $M_n(F)$. □

Обобщение конечных матриц

Пусть даны множества X_{ij}, Y_{jh} , коммутативные моноиды $(Z_{ih}, +)$, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $h = 1, \dots, k$, и функции «умножения» $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$, $(x, y) \mapsto xy$. Обозначим через X, Y, Z наборы множеств X_{ij}, Y_{jh}, Z_{ih} , соответственно, через $M(X)$ — множество матриц A с элементами $a_{ij} \in X_{ij}$, и аналогично $M(Y), M(Z)$. Тогда можно определить произведение матриц $A \in M(X)$ и $B \in M(Y)$ как матрицу $C = AB \in M(Z)$, где $c_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh}$.

Если все X_{ij}, Y_{jh} будут коммутативными моноидами, а функция умножения дистрибутивной, умножение матриц тоже будет дистрибутивным и ассоциативным.

ii Произвольные матрицы

Пусть I, J — произвольные множества (возможно бесконечные), элементами которых мы будем индексировать строки и столбцы матриц. Пусть $\forall i \in I \wedge j \in J$ задано множество X_{ij} , и обозначим набор всех таких множеств через X . Тогда **матрицей размера $I \times J$ над X** называется функция $A : I \times J \rightarrow \bigcup X_{ij}$ ($i, j \mapsto a_{ij}$, такая что $a_{ij} \in X_{ij}$).

Designation. Множество матриц размера $I \times J$ над X обозначается $M_{I \times J}(X)$. Если $I = \{1\}$, то матрица размера $I \times J$ будут называться столбцами длины J , а если $J = \{1\}$, то столбцами высоты I . Множества строк обозначим данной длины ${}^J X$, множество столбцов — X^J .

Будем считать, что все X_{ij} — абелевы группы в аддитивной записи. Тогда сумма двух матриц одного размера определяется поэлементно: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Если все X_{ij} — векторные пространства над полем F , также можно определить умножение на число: $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.

Умножение матриц

Пусть все операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ дистрибутивны (для $a \cdot 0 = 0$), и в каждом столбце матрицы Y почти все элементы равны 0.

Designation. Обозначим $M_{J \times H}^{c.f.}(Y) \subset M_{J \times H}(Y)$, состоящее из всех матриц B , у которых для любого фиксированного $h \in H$ почти все элементы b_{jh} равны 0.

Def 10. Пусть $\forall i \in I, j \in J, h \in H$ заданы операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$, причем $\forall x, x' \in X_{ij}$ и $\forall y, y' \in Y_{jh}$ выполнены равенства

$$(x + x')y = xy + x'y \wedge x(y + y') = xy + xy'.$$

Произведение матриц $A \in M_{I \times J}(X)$ и $B \in M_{J \times H}^{c.f.}(Y)$ как матрицу $AB \in M_{I \times H}(Z)$ с элементами

$$(AB)_{ih} = \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jh}.$$

При этом суммы определены, так как почти все слагаемые равны нулю.

Note. Аналогично определяется умножение матриц $A \in M_{I \times J}^{r.f.}(X)$ и $B \in M_{J \times H}(Y)$.

Lemma 1. Обычные свойства умножения матриц 1 выполнены, если определены все входящие в формулы операции.

Если $\forall i, j, h \in I$ заданы дистрибутивные операции умножения $X_{ij} \times X_{jh} \rightarrow X_{ih}$, то множество $M_{I \times I}^{c.f.}(X)$ является кольцом с единицей.

Designation. Если X_{ij} одно и то же поле F для всех i, j , будем писать $M_{i \times j}(F)$ вместо $M_{I \times J}(X)$. Если $I = J$, то будем писать $M_I(F)$ вместо $M_{I \times I}(F)$. Если $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$, то можем писать $M_{m \times n}(F)$.

Другие характеристики матриц

Def 11. Множество обратимых элементов кольца $M_n(F)$ называется полной линейной группой степени n над F и обозначается $GL_n(F)$.

Designation. Для множества $M_{I \times \{1\}}^{c.f.}(F)$ введем специальное обозначение F_{fin}^I и будем называть его множеством финитных столбцов высоты I над F . Другим словами, F_{fin}^I — множество финитных (у которых почти все значения равны 0) функций из I в F . Аналогично, ${}^J F_{fin} = M_{\{1\} \times J}^{r.f.}(F)$.

Def 12. Пусть $A \in M_{I \times J}(F)$. Матрица $A^T \in M_{J \times I}(F)$ с элементами $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ называется транспонированной к A .

Statement 3. $(AB)^T = B^T A^T$

Note. Для обозначения столбца часто используется строка $(a_1, \dots, a_n)^T$.

Вопрос 4 Эквивалентные определения базиса

Theorem 2 (Эквивалентные определения базиса). *Следующие условия на подмножество v векторного пространства V эквивалентны:*

- (1) v — линейно независимая система образующих
- (2) v — максимальная линейно независимая система
- (3) v — минимальная система образующих
- (4) любой элемент $x \in V$ представляется в виде линейной комбинации набора v , причем единственным образом

Доказательство.

1 \implies 2 Пусть v — не максимальная линейно независимая система. Мы знаем, что v — система образующих. Тогда любой элемент $a \in V$ представляется в виде линейной комбинации v , а значит любой набор, содержащий v , принадлежит линейной оболочке $\langle v \rangle$, следовательно, набор линейно зависимый.

2 \implies 1 Так как v максимальная линейно независимая система, любой элемент $a \in V$ выражается через элементы v . Следовательно, v — система образующих.

1 \implies 3 Пусть из v можно убрать некоторые элементы так, что полученный набор u будет минимальной системой образующих. Тогда любой элемент набора $v \setminus u$ представим в виде линейной комбинации u . Следовательно, v линейно зависим.

3 \implies 1 Если v линейно зависим, то во всех линейных комбинациях набора v можно заменить один элемент на линейную комбинацию других. А тогда v не минимален.

1 \implies 4 Так как v — система образующих $\langle v \rangle = V$. Теперь докажем, что представление единственно. Пусть $x = va = \sum_{y \in v} ya_y$, $a \in F_{fin}^v$. Предположим, что $\exists b \in F_{fin}^v : x = vb$. Тогда $0 = va - vb \implies 0 = v(a - b)$. Так как v линейно независим, можем сократить: $0 = a - b$, значит представление единственно.

4 \implies 1 Так как любой элемент представим в виде линейной комбинации набора v , $\langle v \rangle = V$. Так как представление единственно, v линейно независим.

□