

Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

2 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Непрерывные функции

1.1 Непрерывность в точке

Designation. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

Def 1. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0 , если

для любой окрестности U точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(V \cap A) \subset U$.

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \quad x \in A \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (1.1)$$

Note. Если $x_0 \in A'$, то условие 1.1 эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note. Если точка x_0 является изолированной для A , то f непрерывна в x_0 .

1.2 Свойства непрерывных функций

1.2.1 Теорема об алгебраических операциях

Theorem 1 (об алгебраических операциях с непрерывными функциями). Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Если f и g непрерывны в точке x_0 , то $\alpha g + \beta f$ непрерывна в точке x_0 .
- Если f и g непрерывны в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{g}{f}$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Если x_0 — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. \square

1.2.2 Теорема о композиции

Theorem 2 (о композиции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, $x_0 \in A$. Пусть f непрерывна в точке x_0 , g непрерывна в точке $f(x_0) = y_0$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Обозначим $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$. Пусть U — окрестность точки z_0 . Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как f непрерывна в точке x_0 :

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

1.2.3 Теорема о пределе последовательности

Theorem 3. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Следующие условия эквивалентны:

1. f непрерывна в точке x_0
2. \forall последовательности $\{x_n\} \in A$, $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Доказательство.

$$1 \implies 2$$

Пусть W — окрестность точки $f(x_0)$. Так как f непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как $x_n \rightarrow x_0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x_n \in V \implies f(x_n) \in W.$$

$$2 \implies 1$$

Пусть f не непрерывна в точке x_0 , есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Из этого следует, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Противоречие.

□

1.3 Непрерывность на множестве

Def 2. Говорят, что функция f , заданная на множестве A , непрерывна на некотором подмножестве $A_1 \subset A$, если она непрерывна в каждой точке множества A_1 .

1.3.1 Теоремы Вейерштрасса

Theorem 4 (Первая теорема Вейерштрасса). Пусть f задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве A . Тогда функция f ограничена на A .

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на A . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \rightarrow x$. Так как A замкнуто, $x \in A$. Следовательно, $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x)$. Противоречие. \square

Theorem 5 (Вторая теорема Вейерштрасса). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве A функция. Если существуют конечные

$$M = \sup_{x \in A} f(x), \quad m = \inf_{x \in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

Доказательство.

- Для M :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : M \geq f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \rightarrow x$. Так как A замкнуто, $x \in A$.

$$f(x_{n_j}) \rightarrow f(x) \wedge f(x_{n_j}) \rightarrow M \implies M = f(x).$$

Значит, M достигается.

- Для m : совершенно аналогично.

\square

1.3.2 Теорема о промежуточном значении

Designation. «и между r и s » $:= \begin{cases} u \in [r, s] & r \leq s \\ u \in [s, r] & r > s \end{cases}$

Theorem 6 (о промежуточном значении). Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle \alpha, \beta \rangle$. Пусть $a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle$, v находится между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует x между a и b такой, что $f(x) = v$.

Доказательство. Если $a = b$, утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что $a < b$. Будем считать, что $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$.

Пусть нет точки $x_0 : f(x_0) = v$. Обозначим $I = [a, b]$. Пусть $X = \{x \in I \mid f(x) \leq v\}$ и $Y = \{x \in I \mid f(x) \geq v\}$. Докажем, что X и Y замкнуты.

1. X замкнуто:

x_0 — предельная точка. Следовательно, $\exists x_n \in X : x_n \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0)$. Тогда $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

$$f(x_n) \leq v \implies f(x) \leq v.$$

2. Аналогично Y замкнуто.

Следовательно, $X \cap Y \neq \emptyset$. □

Theorem 7. Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle a, b \rangle$. Следующие условия эквивалентны:

1. f — инъекция (то есть $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$)
2. f — строго монотонная

Доказательство.

$2 \implies 1$ Очевидно.

$1 \implies 2$ Пусть f не строго монотонна. Тогда $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle$:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{cases}.$$

Тогда $\exists x'_1 \neq x'_2$, но $f(x'_1) = f(x'_2)$. Противоречие. □

Theorem 8. Пусть g задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда g непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).

Statement. Если f непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то f^{-1} тоже задана на отрезке и непрерывна.

1.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z}, f(x) = x^m, x > 0$.

$$x^0 \equiv 1, \quad x > 0.$$

x^m строго возрастает, если $m > 0$

x^m строго убывает, если $m < 0$

$$x^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-m}}$$

$f(x) = x^m$ — непрерывная функция. Обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$ — корень m -й степени из $y > 0$.

Def 3. $x > 0, r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}$

$x^r = \sqrt[q]{x^p}$ — x в рациональной степени.

Note. $x \mapsto x^r$ — непрерывное отображение.

Lemma. Результат не зависит от представления r в виде дроби.

Property.

$$1. x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$$

$$2. (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$$

$$3. x^r \cdot y^r = (xy)^r$$

1.5 Равномерная непрерывность

Def 4. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что f **равномерно непрерывна** на A , если

$$(|x - x_0| < \delta \wedge x \in A) \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ex. $f(x) = x$, $A = \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 |x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \implies f \text{ равномерно непрерывна.}$$

Ex. $f(x) = x^2$, $A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y| < C\varepsilon \implies f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

Ex. $h(x) = \sqrt{x}$ — равномерно непрерывна.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

1.5.1 Теорема Кантора

Theorem 9 (Кантор). Пусть A замкнутое ограниченное множество. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного. Пусть f не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \delta > 0 \exists x'_1, x''_2 \in A : |x'_1 - x''_2| < \delta \wedge |f(x'_1) - f(x''_2)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$.

$$\exists x'_n, x''_n \in A : |x'_n - x''_n| < \delta \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Получили две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$. Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности $\exists x'_{n_j} \rightarrow x_0 \in A$.

$$x''_{n_j} = x'_{n_j} + (x''_{n_j} - x'_{n_j}) \rightarrow x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x'_{n_j}) - f(x''_{n_j})| \geq \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к $f(x_0)$, значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие. \square

Глава 2

Дифференцирование

2.1 Определения

Designation. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Def 5. Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0),$$

где $l(t) = kt$, $k \in \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x_0 (также обозначается $df_{x_0}(t)$ или $df(x_0, t)$).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0).$$

Def 6. Если f дифференцируема в точке x_0 , **производная** f в точке x_0 определяется так:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Property.

1. Если f дифференцируема в точке x_0 , то k единственное.
2. Если f дифференцируема в точке x_0 , то f непрерывна в точке x_0 .
3. f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k, \quad df_{x_0}(t) = kt.$$

Доказательство.

$$\boxed{\implies} f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow k.$$

$\boxed{\impliedby}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0) = \\ &= k(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

□

4. f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует β , заданная в окрестности $V \ni x$:

(a) β непрерывна в точке x_0

(b) $f(x) - f(x_0) = \beta(x) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in V$

Доказательство. \Rightarrow

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} & x = x_0 \end{cases}$$

\Leftarrow $\beta(x) = \beta(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)$ Подставим

$$f(x) - \underbrace{\beta(x_0)}_k (x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(1)(x - x_0).$$

Получили определение.

□

2.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!

1. $f(x) = ax + b$ дифференцируема и $\forall x_0 : f'(x_0) = a$

2. Если f, g дифференцируемы в точке x_0 , $f \cdot g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Если f, g дифференцируемы в x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Если $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \langle c, d \rangle$, $x_0 \in \langle c, d \rangle$, $g(x_0) \in \langle a, b \rangle$ и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, g дифференцируема в точке x_0 , то $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

6. Производная обратной функции. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна. Пусть $x_0 \in (a, b)$, $\exists f'(x_0) \neq 0$, обозначим $g = f^{-1}$ — обратное отображение, $y_0 = f(x_0)$. Тогда g дифференцируема в точке y_0 и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. $m \in \mathbb{N}$, $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Если $x_0 > 0$, то g дифференцируема в точке x_0 и

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8. $x_0 > 0$, $\alpha = \frac{l}{k} > 0$. $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$. Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и

$$\varphi'(x) = l \left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$

Аналогично для $\alpha < 0$.

9. Таблица еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

2.3 Производная возрастающей функции

Def 7. Пусть $f : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Говорят, что f **возрастает в точке** x_0 , если \exists окрестность $U \ni x_0$:

$$\begin{cases} f(y) \leq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \leq x_0 \\ f(y) \geq f(x_0) & y \in U \cap I \wedge y \geq x_0 \end{cases}$$

Note. Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

Theorem 10. Пусть в условии определения f возрастает в точке x_0 .

1. Если $\exists f'(x)$, $f'(x_0) \geq 0$

2. Пусть $\exists f'(x_0) > 0$, тогда f строго возрастает в точке x_0

Доказательство.

1.

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0 \quad \forall x \geq x_0} \rightarrow f'(x_0) \implies f'(x_0) \geq 0.$$

$$2. f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \implies |\gamma(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|).$$

$0 < \varepsilon < f'(x_0)$. Разберем пару случаев:

(a) $x > x_0$.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geq (f(x) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b) $x < x_0$.

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

Def 8. $I = (\alpha, \beta)$, $x \in I$. Говорят, что f имеет **монотонный максимум**, если

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

Note. Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

Note. Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

Theorem 11. $x_0 \in (\alpha, \beta)$ — точка локального экстремума для $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 локальный максимум. Тогда $f \upharpoonright_{(\alpha, x_0]}$ — возрастает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \geq 0$. Также $f \upharpoonright_{[x_0, \beta)}$ — убывает в точке $x_0 \implies f'(x_0) \leq 0$.

Для других случаев полностью аналогично.

□

2.4 Формулы Коши и Лагранжа

2.5 Правило Лопиталья

2.6 Формула Тейлора

2.7 Достаточное условие экстремума

2.8 Сходимость последовательностей

Theorem 12. $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \rightarrow f$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \implies |f(x)| \leq M$
2. f ограничена: $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

Доказательство. Очевидно

□

Theorem 13. $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ на A . Пусть $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows f g$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - g_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 14 (Критерий Коши для равномерной сходимости). Пусть f_n — последовательность функций на множестве A . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f_n \Rightarrow f$, $\varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть ?? выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см ??). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x , перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$. □

Ех. Функция на \mathbb{R} , непрерывная всюду, но не дифференцируемая ни в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 15 (Вейерштрасс). Пусть f_n — функция на множестве A .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum_0^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

Ех (Ван дер Варден). $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

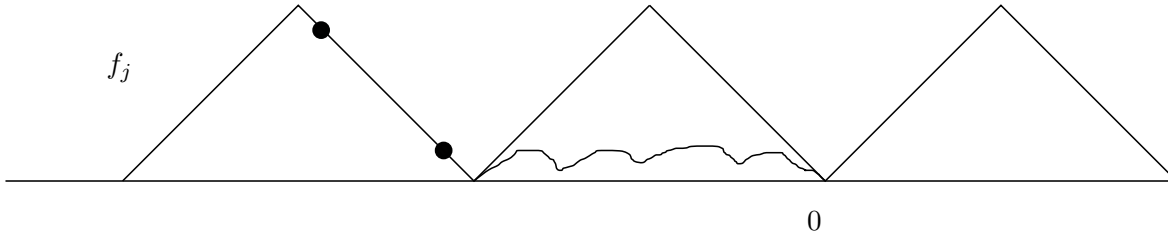


Рис. 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k (\pm), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

Theorem 16. $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Предположим, что $f_n \rightarrow f$ поточечно. f_n дифференцируемы и $f_n \rightrightarrows g$ равномерно. Тогда f дифференцируемая на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a, b \rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'_{k,l}(c), \quad c \text{ между } x, y.$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем $k, l \rightarrow \infty$.

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем x .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

2.9 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b \rangle$. $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Def 9. Говорят, что f есть первообразная для g , если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 17 (Ньютон, Лейбниц). Если g непрерывна, то у нее есть первообразная.

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c .

Theorem 18. Если f_1, f_2 — первообразные для g , то $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x) dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 10. Линейная функция — это функция вида $\varphi(h) = ch$.

Линейная форма: $\langle a, b \rangle$; Φ — отображение отрезка $\langle a, b \rangle$ в множество линейных функций.
 $x \in \langle a, b \rangle$, $\Phi(x)$ — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 11 (дифференциал). f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ — тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. $\Phi = c \cdot dx$, где c — некая функция на $\langle a, b \rangle$

$$f' = g$$

$$df = f'dx = gdx$$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ g dx.$$

Ex.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t) \right) &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \end{aligned}$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям). $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

Ex.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

2.10 Интеграл

Def 12. A — множество произвольной природы. $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Φ — функционал на A .

Def 13. Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a, b]$.
 $f \mapsto \Phi(f)$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ($f \mapsto I(f)$)
2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ (Линейность)
3. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
4. $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

Def 14. Разбиение — ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

Def 15. g на $\langle a, b \rangle$ — ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

2.10.1 Интеграл Дарбу

Def 16. J — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^N$, такой что $J_k \cap J_s = \emptyset$, $k \neq s$, $\bigcup_{k=1}^N J_k = J$. (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 17. Длина интервала $\langle a, b \rangle$ — это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\emptyset| = 0$

Lemma. Если $\{J_k\}_{k=1}^N$ — разбиение J , то $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

Def 18. e — множество, f — ограниченная функция на e .

Колебание f на e :

$$\begin{aligned} esc_e(f) &= \sup_{x,y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

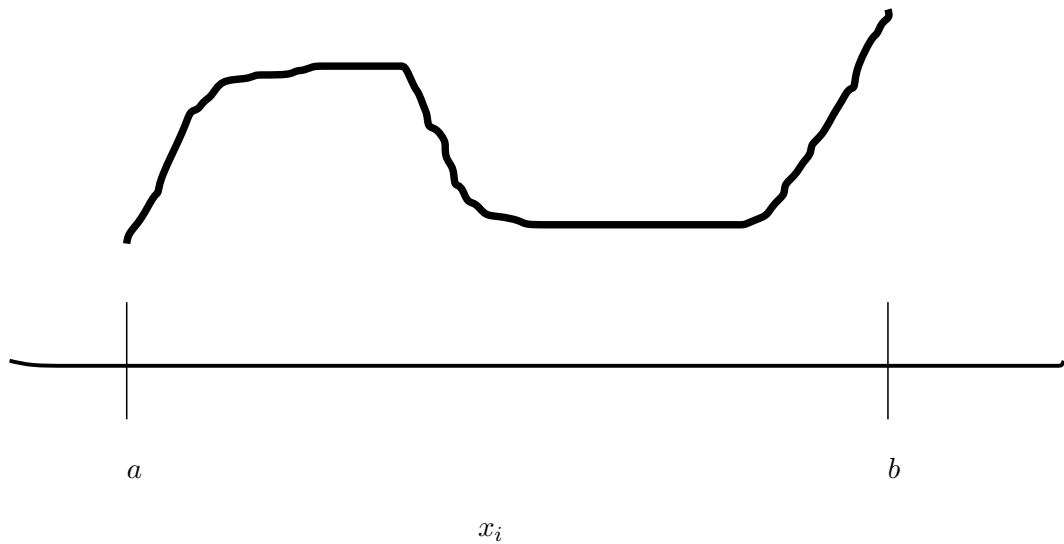


Рис. 2.2: График функции

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки J_1, \dots, J_N из разбиения отрезка J .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \bar{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \dots J_N$

Designation. A — множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

B — множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. Пусть $\{A, B\}$ — щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$ (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от f)

Statement. $\{A, B\}$ — щель.

Доказательство. ε — разбиение отрезка J_i . $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leq \overline{S}(f)$

\mathcal{E}, \mathcal{F} — разбиение J_i : \mathcal{F} — измельчение \mathcal{E} , если $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. Если \mathcal{F} — измельчение для \mathcal{E} , то

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geq \underline{S}_{\mathcal{E}}(f), \quad \overline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{E}}(f).$$

Lemma. Рассмотрим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения отрезка J_i . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения. \mathcal{F} — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f).$$

Следовательно, $\{A, B\}$ — щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 19. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ex.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ — ступенчатая функция на J , Существует разбиение \mathcal{E} отрезка на J . $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}(\varphi) = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

Theorem 19. Если J — замкнутый отрезок ($J = [a, b]$), f — непрерывная функция на J , то f интегрируема по Риману.

Note. Пусть J — произвольный отрезок, f — ограниченная функция на J , \mathcal{E} — разбиение отрезка J на непустые отрезки $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^k |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^k |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^k |e_i| \left(\sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \right) = \sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f \end{aligned}$$

Note. f интегрируема по Риману \iff щель (A, B) — узкая \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данных обозначениях измельчения можно считать, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ // возможно, здесь должно быть что-то другое

Theorem 20 (Критерий интегрируемости по Риману). f интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение e_1, \dots, e_k Отрезка J , такое что

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию ?? f равномерно непрерывна по теореме Кантора 9:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Пусть e_1, \dots, e_k — столь мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\forall i : |e_i| < \delta$. Тогда $\forall i : \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f \leq \varepsilon \sum_{i=1}^k |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

Property. 1. f непрерывна на $\langle a, b \rangle \implies f$ интегрируема.

2. Σ — разбиение,

$$\bar{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$

3. Если $\alpha > 0$,

$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$

Аналогично с нижней суммой.

4. Если f интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$

5. $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены. Σ разбиение.

$$\bar{S}_\Sigma(f + g) \leq \bar{S}_\Sigma(f) + \bar{S}_\Sigma(g).$$

6.

$$\underline{S}_\Sigma(f + g) \geq \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$

7. Если f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ интегрируема и

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.

8. f, g интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема и

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

9. Монотонность. $f \geq 0$, f интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geq 0$.

10. f, g интегрируемы на $\langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot g$ интегрируема.

Доказательство.

$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leq C, |g| \leq D \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Пусть J — отрезок. Оценим осцилляцию.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| = \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f. \end{aligned}$$

f, g интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leq \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leq \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J f &\leq \varepsilon \\ \sum_{J \in \Sigma} |J| \text{osc}_J g &\leq \varepsilon \end{aligned}.$$

Тогда $\forall J \in \Sigma : \text{osc}_J(fg) \leq C \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \text{osc}_J f$.

Следовательно,

$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \text{osc}_J fg \leq C \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \text{osc}_J f \leq (C + D)\varepsilon.$$

□

11. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $J \subset \langle a, b \rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)

Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. J_1, J_2 — два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \emptyset$. Тогда

$$I(f\chi_{J_1 \cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. Основная оценка интеграла. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$. $|f| \leq M$ на $[c, d] \subset \langle a, b \rangle$

$$\left| \int_c^d f \right| \leq M(d - c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f\chi_{\langle c, d \rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

Statement. f интегрируема на $\langle a, b \rangle$.

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

2.10.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная функция f , если F дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 21 (Ньютон-Лейбниц). Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$ и непрерывна в точке $t \in \langle a, b \rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a, b \rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$. Тогда F дифференцируема в точке t и $F'(t) = f(t)$.

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^x f - \int_{t_0}^t f}{x - t} \right| = \left| \frac{\int_t^x f}{x - t} - f(t) \right| =$$

$$\frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f - (x - t)f(t) \right| = \frac{1}{|x - t|} \left| \int_t^x f(s) - f(t) ds \right| \leq \sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)|.$$

f непрерывна в t . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$. Если $|s - t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x - t| < \delta \implies \forall s \in [t, x] : |s - t| < \varepsilon \rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup_{s \in [t, x]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{F(x) - f(t)}{x - t} - f(t) \right| = 0 \implies F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$, то $\forall t_0 \in [a, b] : F$ — первообразная f .

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница). f непрерывна на $[a, b]$, F — первообразная f . Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 20. $f \in C^k \langle a, b \rangle$, $k \in \mathbb{N} \cap \{0, \infty\}$, если $f, f', \dots, f^{(k)}$ непрерывны.

Theorem 22. Если $f, g \in C^1(a, b)$, то

$$\int_a^b f g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

$$\text{где } \Phi \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2.10.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g непрерывны на $[a, b]$ и f, g, f', g' непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ — первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 23. f_n, f — заданы на $\langle a, b \rangle$; $n \in \mathbb{N}$ Пусть

1. все f_n интегрируемы по Риману на $\langle a, b \rangle$
2. $f_n \Rightarrow f$. Тогда f интегрируема по Риману

$$\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. E — множество, u, v — вещественные функции на E . $|u(x) - v(x)| \leq \lambda \forall E$. Тогда $|\text{osc}_E(u) - \text{osc}_E(v)| \leq 2\lambda$

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

$$|\text{osc}_{\langle a, b \rangle} - \text{osc}_{\langle a, b \rangle}(f)| \leq 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots, I_N\}$ — отрезки $\langle a, b \rangle$:

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^N |I_j| \text{osc}_{I_j}(f) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a) + 1).$$

Следовательно, f интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x)dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0 \exists M : \forall n \geq M \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b \rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.11 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \implies l(0) = 0.$$

Будем искать l , заданную на \mathbb{R}_+ .

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 21. Логарифм — строго монотонная функция, заданная на \mathbb{R}_+ , такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. Для $n \in \mathbb{N}$:

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \implies l(1) = 0.$$

Statement. Если l — логарифм, $c \neq 0$, то cl — тоже логарифм.

Lemma. Если l — логарифм, то l непрерывна на всей области определения.

Доказательство. Пусть l — логарифм. Считаем, что f строго возрастает.

$$t = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 2l(1+x).$$

При $x \rightarrow 1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \rightarrow 1-$, получаем то же самое. Значит l непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. \square

Lemma. Если l — логарифм, то функция l дифференцируема.

Доказательство.

$$\Phi(x) = \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) =$$

$$x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x})d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy =$$

$$\Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. \square

Theorem 24 (Производная логарифма).

$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 25. Если l логарифм, то

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 26. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t} dt$ — логарифм.

Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 27. Если $C \neq 0$, то

$$\varphi(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x} \int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм —

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

Statement. Образ функции \log есть все вещественные числа.

Доказательство. При $x_1 > x$, $\log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty$. □

Def 22 (Обратная функция к логарифму). У функции \log есть обратная функция, называемая экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Property. 1. \exp строго возрастает

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp = 0.$$

4.

$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Statement. Экспонента дифференцируема:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{с между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Theorem 28. Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $\exp(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.

$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leq R$. Применим:

$$\leq \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражение стремится к нулю.

Lemma. Пусть $a_0, a_1, a_2 \dots$ — положительные числа и $\exists N : a_j < \eta < 1 \quad \forall j > N$. Тогда $a_0 a_1 \dots a_j \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty$

Corollary. Если $a_j \geq 0$, $a_j \rightarrow 0$, то $a_0 \dots a_j \rightarrow 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремится к нулю. Доказали равномерную сходимость. \square

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты).

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leq (n+1)! \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty.$$

\square

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример).

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на \mathbb{R} .

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(2 \frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема в нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j - \text{полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g .

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

h — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a, b)$, $a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{aligned} u(x) &> 0 & x \in (a, b) \\ u(x) &= 0 & x \notin (a, b) \end{aligned}.$$

Designation. l — логарифм.

$$\exists! a \in (0, +\infty) : l(a) = 1.$$

Такое число называется основанием логарифма l .

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e .

Designation (общий случай).

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a — ан для l .

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} : u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \dots \log u}_n) = u^n$

$$\text{Целая отрицательная степень: } \exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$$

$$\text{Рациональная степень: } v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

$$1. \quad u^{v_1+v_2} = \exp((v_1 + v_2) \log u) = \exp v_1 \log u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$$

$$2. \quad (u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$$

$$3. \quad (u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_1 \log u) = u^{v_1 v_2}$$

2.11.1 Показательная функция

Def 23. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 24. Пусть $a \neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

2.11.2 Степенная функция

Def 25. Степенная функция $g(x) = x^b$, $x \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. Если $a > 1$, то $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x)$, $x \rightarrow \infty$

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{b \log x - x \log a}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. \square

Practice.

$$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

Statement. Ранее доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

сходится при любых x . Экспонента равномерна на любом конечном отрезке.

Ряд для e^x по степеням $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0)^n \quad (2.2)$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность”

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leq 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad (2.3)$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. В ?? общий член стремится к нулю, если $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geq \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k} \right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

2.11.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 29 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0).

$$f(x) = \log(1+x), \quad f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f^{(2)} = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)} = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) (1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^k \frac{\log^{(n)}(1)}{n!} x^n + \frac{\log^{(k+1)}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n \rightarrow 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \rightarrow 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. Ракскладывается ли логарифм ряд Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad (2.4)$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n} |x|^n \leftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $x \in (-1, 1]$.

Theorem 30. $x \in (-1, 1]$. Тогда ряд ?? равномерно сходится равномерно на любом $(r, 1]$, $r > -1$.

Доказательство. 1. $x \in [0, 1]$.

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \left(\frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} x^{k+1} \leq \frac{1}{k+1}, \quad c \in [0, x] \quad (2.5)$$

В частности, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

2. $-1 < x \leq 0$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \left(\frac{1}{1+c} \right)^{k+1} \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \leq \left(\frac{1}{1-|x|} \right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{k+1} \quad (2.6)$$

Удачным случаем ?? будет $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$, $x \in (-\frac{1}{2}, 0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$. Подставим $x = -x$:

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dx &= \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}. \\ \log(1+t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \quad -1 < t \leq 0, t < x \leq 0. \\ \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^t \left(\frac{|x|^n}{1-|x|} \right) dx \leq \frac{1}{1-|t|} \int_0^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1}. \end{aligned}$$

Это выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, $t > -1$, если $t \in (-1, 0]$, $|t| \leq r < 1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\leq \frac{1}{1+|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1} \leq \frac{1}{1-r} \frac{1}{n} r^n$. □

Note. Логарифм — аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $\left| 1 - \frac{x}{x_0} \right| < 1$.

$$\log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right)^n.$$

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \frac{1}{x_0} (x - x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

2.11.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n + 1$ производную на отрезке I , $t, a \in I$.

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \int_a^t f'(x) d(x - t) = f'(x)(x - t) \Big|_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x - t) dx = \\ &= f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx. \end{aligned}$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \int_a^t f''(x)(t - x) dx.$$

И так далее

Theorem 31. f имеет $n + 1$ производную на отрезке I , $t, a \in I$.

$$f(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t - a)^j + \frac{1}{n!} \int_a^t f^{(n+1)}(z)(t - x)^{n+1} dx.$$

Ех. $x \rightsquigarrow u$, $x = a(1 - u) + tu$
 $u \in [0, 1]$, $dx = (t - a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1 - u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t - a) = \\ &= (t - a)(1 - u) \end{aligned}$$

$$r_n(a, t) = \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(a(1 - u) + tu)(t - a)^n (1 - u)^n (t - a)^n du.$$

Если $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m, \quad m \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m - 1)(1 + x)^{m-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m - 1) \dots (m - k + 1)(1 + x)^{m-k} \end{aligned}$$

Designation.

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m - 1) \dots (m - k + 1)}{k!}.$$

$$|x| < 1$$

$$(1 + t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m - 1) \dots (m - n)(1 + tu)^{m-n-1}(1 - u)^n du.$$

Theorem 32 (Ряд Ньютона). Ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} t^k$$

сходится к $(1+t)^m$, при $|t| < 1$

Доказательство. $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1) \dots (m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$. $0 \leq t < 1$.

$$|R_n(t)| \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right|.$$

□

Theorem 33. $R_n(t) \rightarrow 0$ при $|t| < 1$, и сходится равномерно при $|t| < \phi < 1$.

Доказательство. Пусть $\int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right| = I$

1. Сначала $0 \leq t_0$:

$$I \leq \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \leftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \leq t^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| \frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|m-n-1|}{n+2} t.$$

$t < 1$, $t + \varepsilon < 1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} < t + \varepsilon$

2. Следующий случай $-1 < t < 0$ Подынтегральное выражение:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right|^n \left| \frac{1}{1+tu} \right|^{m-1}.$$

$$1 + |t| \geq |1+tu| \geq 1 - |t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right| \leq \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u+u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1 - \left(n \frac{1-|t|}{1-|t|u} \right).$$

Это не превосходит $1 - n(1-|t|)$.

Второй множитель:

(a) $m \leq 1$

$$\left| \frac{1}{1+tu} \right|^{-m+1} \leq \left(\frac{1}{1-|t|u} \right)^{-m+1} \leq \left(\frac{1}{1-|t|} \right)^{-m+1}.$$

(b) $m > 1$

$$|1+tu|^{m-1} \leq (1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку $C_m(t)$.

$$\begin{aligned} I &\leq C_m(t) \int_0^1 (1 - n(1 - |t|)) du = C_m(t) \left(-\frac{1}{1 - |t|} \right) \frac{1}{n+1} (1 - n(1 - |t|))^{n+1} \Big|_{n=0}^{n=1} = \\ &= C_m(t) \frac{1}{1 - |t|} \frac{1}{n+1} (1 - |t|^{n+1}) \leq C_m(t) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Получили

$$R_n(t) \leq |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \frac{1}{n+1} \bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} |t| \left| \frac{m-n+1}{n+2} \right| \leftarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\exists k_0 : n > k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leq \rho \quad \sigma_n(t) \leq A\rho^{n-1}, \quad |t| \leq \rho < 1.$$

Доказали сходимость.

□

$x, x_0 > 0$

$$\begin{aligned} x^m &= x_0^m \left(\frac{x}{x_0} \right)^m = x_0^m \left(1 - \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) \right)^m = \\ &= x_0^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right) = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

Theorem 34 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). Если f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке с концами a, t :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \quad (2.7)$$

Statement. Если f дифференцируема $n+1$ раз:

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t : R_n(t, a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (2.8)$$

Note. Если $f \in C^{(n+1)}$, то ?? можно вывести из ??.

Theorem 35 (о среднем). φ, ψ — функции на $[c, d]$, φ непрерывна, ψ — интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда

$$\exists \psi \in [c, d] : \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx = \varphi(\psi) \int_c^d \varphi(x) dx.$$

Доказательство. Можно считать, что $\psi \geq 0$. Пусть $m = \min_{x \in [c, d]} \varphi(x)$, $M = \max_{x \in [c, d]} \varphi(x)$.

$$m \int_c^d \varphi(x) dx \leq \int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx \leq M \int_c^d \varphi(x) dx.$$

$$m\psi(x) \leq \varphi(x)\psi(x) \leq M\psi(x).$$

Если $\int_c^d \psi(x) dx = 0$, теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leq \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx} \leq M.$$

Следовательно,

$$\exists \zeta \in [c, d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x) \psi(x) dx}{\int_c^d \psi(x) dx}.$$

□

Statement (оценка остатка).

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists \zeta : R_n(t, a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) \int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} \left[-(t-x)^{n+1} \Big|_{x=a}^{x=t} \right] = f^{(n+1)}(\zeta) \frac{1}{(n+1)!} (t-a)^{n+1}.$$

2.12 Дифференциальные уравнения

$$\Phi(f'(t), f(t), t) = 0.$$

Theorem 36. Пусть f — непрерывная дифференцируемая функция на (a, b) . Следующие условия эквивалентны:

1. $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a, b)$
2. $\exists A : f(t) = Ae^{ct}$

Доказательство. $2 \implies 1$ — очевидно

$1 \implies 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда $g(t) \equiv A \in \mathbb{R}$.

□