Билеты по алгебре
II семестр

Тамарин Вячеслав

21 мая 2020 г.

Оглавление

Вопрос 1 Подгруппа, порожденная множеством. Явное описание. Примеры образующих в D_n и $\mathrm{GL}_n(K)$. Понятие циклической группы.

i Подгруппа, порожденная множеством

Определение 1: Подгруппа, прожденная множеством

G — группа, $X \subset G$. Наименьшая группа $H \leqslant G$, содержащая X называется подгруппой, порожденной X.

Обозначение. $\langle X \rangle$.

Замечание. Эта группа всегда существует и совпадает с $\bigcap_{X \subset L \leqslant G} L = \langle X \rangle$

Утверждение (Явное описание порожденной подгруппы)**.**

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n} \mid x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

Для $n = 1$ считаем, что такое произведение равно нейтральному элементу.

Доказательство.

$\boxed{\supseteq}$ Любой элемент $x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ должен принадлежать подгруппе, порожденной X, из чего следует это включение.

$\boxed{\subseteq}$ Заметим, что заданное множество — подгруппа G: произведение двух элементов и обратный элемент имеют такой же вид, нейтральный — случай с $n = 0$. Поэтому это множество — подгруппа G, содержащая X. Так как $\langle X \rangle$ — минимальная группа с этим свойством, получаем нужное включение.

□

Определение 2: Группа, порожденная множеством

Группа G называется порожденной множеством X, если $\langle X \rangle = G$. Если X конечно, имеет место обозначение $G = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Все x_i называются образующими G. Если для группы G существует такой конечный набор, она называется конечно порожденной.

Определение 3: Циклическая подгруппа

G — группа, $g \in G$. Подгруппа вида $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ называется циклической подгруппой, порожденной g.

Определение 4: Циклическая группа

Группа G называется циклической, если она порождена одним элементом, то есть $\exists g \in G \colon G = \langle g \rangle$.

ii Примеры образующих в D_n и $\mathrm{GL}_n(K)$

Образующие D_n Заметим, что одним элементом эта группа порождена быть не может, так как она не абелева.

Утверждение. *Поворот f_φ на угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ и симметрия f_l относительно одной из разрешенных прямых. Тогда $\langle f_\varphi, f_l \rangle = D_n$.*

Доказательство. Любой поворот на $\frac{2\pi k}{n}$ можно получить повтором f_φ^k. Докажем, что

$$\left| \left\{ f_l^\varepsilon f_\varphi^k \;\middle|\; \varepsilon \in \{0, 1\},\ k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\} \right| = 2n.$$

Пусть $f_l^{\varepsilon_1} f_\varphi^{k_1} = f_l^{\varepsilon_2} f_\varphi^{k_2}$. Тогда $f_l^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} f_\varphi^{k_1 - k_2} = \mathrm{id}$.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $f_\varphi^{k_1 - k_2} = \mathrm{id} \Longrightarrow k_1 = k_2$. Иначе $f_l^\varepsilon = f_\varphi^k$, но поворот не может быть равен симметрии, так как при симметрии на месте остается только прямая, а при повороте либо одна точка, либо все пространство. □

Образующие $\mathrm{GL}_n(K)$ Здесь образующими будут матрицы элементарных преобразований: транспозиций (которые можно выразить через оставшиеся), псевдоотражения (домножение на число) и трансвекции (прибавление одной строки к другой, умноженной на число).