

Конспект по матанализу I семестр  
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

December 2, 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Непрерывные функции</b>	<b>3</b>
1.1	Определения, свойства . . . . .	3
1.2	Теоремы . . . . .	3
1.2.1	Теоремы Вейерштрасса . . . . .	3
1.2.2	Теорема о промежуточном значении . . . . .	3
1.3	Степени с рациональным показателем . . . . .	3
1.4	Равномерная непрерывность . . . . .	3
1.4.1	Теорема Кантора . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Дифференцирование</b>	<b>4</b>
2.1	Определения . . . . .	4
2.2	Правила дифф . . . . .	4
2.3	Сходимость последовательностей . . . . .	4
2.4	Первообразные . . . . .	7
2.5	Интеграл . . . . .	9
2.5.1	Интеграл Дарбу . . . . .	10

[section]

# Chapter 1

## Непрерывные функции

### 1.1 Определения, свойства

### 1.2 Теоремы

#### 1.2.1 Теоремы Вейерштрасса

#### 1.2.2 Теорема о промежуточном значении

### 1.3 Степени с рациональным показателем

### 1.4 Равномерная непрерывность

#### 1.4.1 Теорема Кантора

# Chapter 2

## Дифференцирование

### 2.1 Определения

### 2.2 Правила дифф

### 2.3 Сходимость последовательностей

**Theorem 2.3.1.**  $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{R}, f_n \rightarrow f$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists M : |f_n(x)| \leq M \quad \forall n, x \longrightarrow |f(x)| \leq M$
2.  $f$  – ограничена:  $|f(n)| \leq M \forall x \rightarrow \exists N \exists A : |f_n(x)| \leq A \quad \forall n \leq N \forall x$

*Proof.* Очевидно □

**Theorem 2.3.2.**  $f_n \Rightarrow f, g_n \rightarrow g$  на  $A$ . Пусть  $\exists M : \forall x \in A \forall n |f_n(x)| \leq M$ . Тогда  $f_n g_n \Rightarrow f g$

*Proof.*

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leq M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

**Theorem 2.3.3.** Критерий Коши для равномерной сходимости Пусть  $f_n$  – последовательность функций на множестве  $A$ . Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, j > N \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

*Proof.* Необходимость.

Пусть  $f_n \rightrightarrows f$ ,  $\varepsilon > 0$  найдем  $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$ .

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x))| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть 2.3.3 выполнено.  $x \in A$  - фиксировано. Тогда  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  есть последовательность Коши (см 2.3.3). Следовательно,

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{def}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$ . Нашли  $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$  Зафиксируем  $k, x$ , перейдем к пределу по  $j$  :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для  $\forall x \in A, \forall k > N$ . □

**Example.** Функция на  $\mathbb{R}$ , непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$(\text{Вейерштрасс}): f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

**Theorem 2.3.4** (Вейерштрасс). Пусть  $f_n$  - функция на множестве  $A$ .

$$\forall x : |f_n(x)| \leq a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда  $\sum_0^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно.

*Note.* Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

*Proof.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $N : \sum_{n=k+1}^l a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$ .

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \dots + f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_l(x)| \leq a_{k+1} + \dots a_l < \varepsilon.$$

□

**Example** (Ван дер Варден).  $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$  ; продолжим с периодом 1.  $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x)$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  - непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

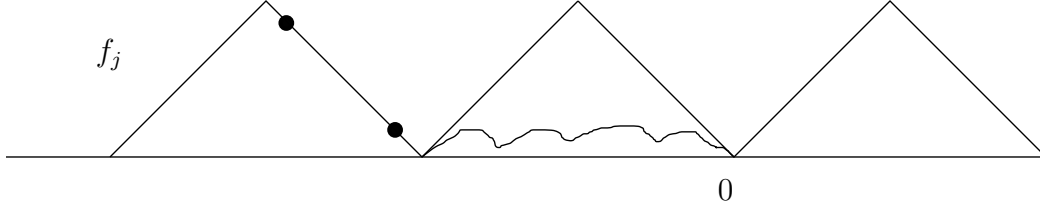


Figure 2.1: График функции Ван дер Вардена

$$h \neq 0, h_k = \pm \frac{1}{4^{n-1}} : \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x+h_k) - f_j(x)) h_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f_j(x+h_k) - f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в  $h_k$  ( $\pm$ ), чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном  $j$  значение будет разных знаков.

**Name.** Ряд из функций  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$  – сходится обозначает, что функции  $S_j(x) = h_1(x) \dots h_j(x)$  сходятся в соответствующем смысле.

**Example.**  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow |x|$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x| \geq 1.$$

**Theorem 2.3.5.**  $f_n, f, g_n : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  Предположим, что  $f_n \rightarrow f$  поточечно.  $f_n$  дифференцируемы и  $f_n \rightrightarrows g$  равномерно. Тогда  $f$  дифференцируемая на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$ .

*Proof.* Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : k, l > N \rightarrow \forall x \in \langle a, b \rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для  $xy \in \langle a, b \rangle$  :

$$\frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} = u'k, l(c), \quad \text{с между } x, y..$$

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : \left| \frac{u_{k,l}(x) - u_{k,l}(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \iff \forall x \in \langle a, b \rangle, \forall k, l > N : \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{x - y} \right| < \varepsilon.$$

Фиксируем  $k, l \rightarrow \infty$ .

$$\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - 1} \right| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \langle a, b \rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем  $x$ .

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \wedge x \neq y \rightarrow \left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} f'_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных  $k, x$ :

$$|y - x| < \delta, y \neq x \rightarrow \left| f'_k(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x - y| < \delta \rightarrow \left| g(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 3\varepsilon.$$

□

## 2.4 Первообразные

Пусть все происходит на  $\langle a, b \rangle$ .  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

**Def 1.** Говорят, что  $f$  есть первообразная для  $g$ , если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $f' = g$  всюду.

**Theorem 2.4.1** (Ньютон, Лейбниц). Если  $g$  — непрерывна, то у нее есть первообразная.

*Note.* К этой теореме мы еще вернемся.

**Statement.** Если  $f' = g$ , то  $(f + c)' = g$  для любой константы  $c$ .

**Theorem 2.4.2.** Если  $f_1, f_2$  — первообразные для  $g$ , то  $f_1 - f_2 = \text{const}$

Функция	Первообразная
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c, \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
$e^x$	$e^x + c$



**Name.** Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

**Statement.**  $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

**Def 2.** Линейная функция – это функция вида  $\varphi(h) = ch$ .

Линейная форма:  $\langle a, b \rangle$ ;  $\Phi$  – отображение отрезка  $\langle a, b \rangle$  в множество линейных функций.

$x \in \langle a, b \rangle$ ,  $\Phi(x)$  – линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

**Def 3** (дифференциал).  $f$  – дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

**Example.**  $x : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  – тождественная.  $dx(u, h) = h$

**Statement.**  $\Phi = c \cdot dx$ , где  $c$  – некая функция на  $\langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} f' &= g \\ df &= f'dx = gdx \end{aligned}$$

Задача первообразной: дана линейная форма  $\varphi = gdx$ ; найти функцию  $f : df = \varphi$

**Statement.**

$$d(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g : dx = f' \circ gdx.$$

**Example.**

$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Сделаем замену  $x = \sin t$ , пусть  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t dt &= \int \cos^2(t) dt = \\ \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt &= \frac{1}{2} \int ((1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \int \cos t d(2t)) &= \frac{1}{2} (t + \frac{\sin 2t}{2}) \end{aligned}$$

Тогда  $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2 \arcsin x}{2})$

**Statement** (Формула интегрирования по частям).  $(fg)' = f'g + fg'$  Перепишем:

$$d(fg) = gdf + f dg.$$

$$gdf = -f dy + d(fg).$$

$$\int gdf = fg - \int f dg.$$

**Example.**

$$\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C.$$

**Example.**

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx. \\ &= \sin x e^x - \int x \cos x de^x = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Теперь решим уравнение и получим:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c.$$

## 2.5 Интеграл

**Def 4.**  $A$  – множество произвольной природы.  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\Phi$  – функционал на  $A$ .

**Def 5.** Интеграл – функционал на множестве функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ .

$$f \mapsto \Phi(f)$$

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

$$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi.$$

$$f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0.$$

$$\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle, f = \Phi(\chi) \langle c, d \rangle = d - c.$$

**Statement.** Каким должен быть интеграл?

1. Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число ( $f \mapsto I(f)$ )
2.  $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$  (Линейность)
3.  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
4.  $\langle a, b \rangle : I(\chi_{\langle a, b \rangle}) = b - a$

**Def 6.** Разбиение – ступенчатая функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\langle a, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i, \beta_i \rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i \rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j \rangle = \emptyset.$$

**Def 7.**  $g$  на  $\langle a, b \rangle$  – ступенчатая, если при  $i \neq j$  она постоянна на отрезках какого-то разбиения нашего отрезка  $\langle a, b \rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

### 2.5.1 Интеграл Дарбу

**Def 8.**  $J$  – конечный интервал, если его разбиение – это набор интервалов  $\{J_k\}_{k=1}^N$ , такой что  $J_k$

$\text{cap } J_s = \emptyset, k \neq s, \bigcup_{k=1}^N J_k = J_i$ . (Допускаются одноточечные и пустые множества.)

**Def 9.** Длина интервала  $\langle a, b \rangle$  – это  $b - a$  Обозначается  $|J| = b - a, |\emptyset| = 0$

**Lemma.** Если  $\{J_k\}_{k=1}^N$  – разбиение  $J$ , то  $|J| = \sum_{k=1}^N |J_k|$

**Def 10.**  $e$  – множество,  $f$  – ограниченная функция на  $e$ .

Колебание  $f$  на  $e$  :

$$\begin{aligned} \text{esc}_e(f) &= \sup_{x, y \in e} |f(x) - f(y)| = \\ &= \sup_y \left( \sup_x (f(x) - f(y)) \right) = \sup_x \left( \sup_y (f(x) - f(y)) \right) = \\ &= \sup_{x \in e} f(x) + \sup_{y \in e} (-f(y)) = \sup_{x \in e} f(x) - \inf_{y \in e} f(y). \end{aligned}$$

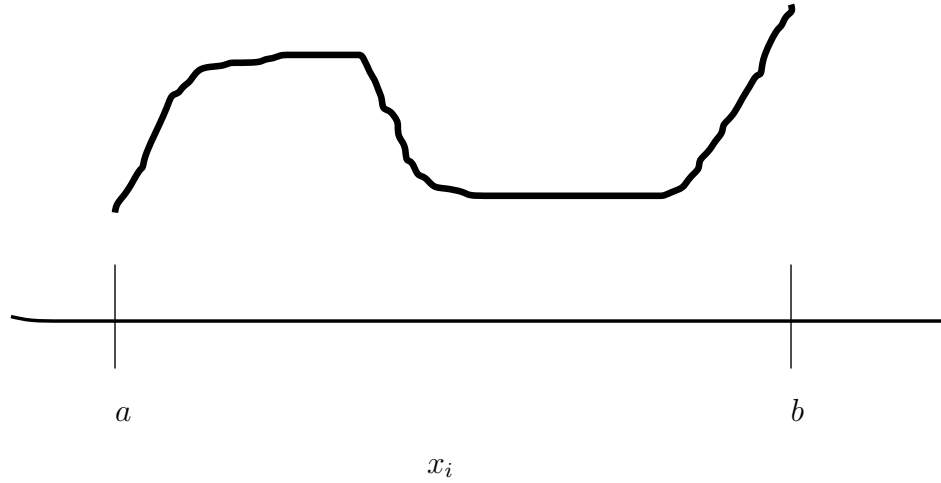


Figure 2.2: График функции

Пока предполагаем, что  $f$  ограничена. Просуммируем отрезки  $J_1, \dots, J_N$  из разбиения отрезка  $J$ .

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \inf_{x \in J_k} f(x) \underline{S}.$$

– нижняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

$$\sum_{k=1}^N |J_k| \sup_{x \in J_k} f(x) = \bar{S}.$$

– верхняя сумма Дарбу для  $f$  и разбиения  $J_1 \dots J_N$

**Name.**  $A$  – множество всех нижних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

$B$  – множество всех верхних сумм Дарбу для  $f$  по всевозможным разбиениям  $J_i$

**Statement.** Пусть  $\{A, B\}$  – щель. Тогда

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \bar{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели – это  $[\underline{I}(f), \bar{I}(f)]$  (верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от  $f$ )

**Statement.**  $\{A, B\}$  – щель.

*Proof.*  $\varepsilon$  – разбиение отрезка  $J_i$ .  $\underline{S}_\varepsilon(f)$ ,  $\bar{S}_\varepsilon(f)$  – верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что  $\underline{S}_\varepsilon(f) \leq \bar{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$  – разбиение  $J_i$  :  $\mathcal{F}$  – измельчение  $\mathcal{E}$ , если  $\forall a \in \mathcal{F} \exists b \in \mathcal{E} : a < b$ .

**Lemma.** Если  $\mathcal{F}$  – измельчение для  $\mathcal{E}$ , то

$$\underline{S}_\mathcal{F}(f) \geq \underline{S}_\mathcal{E}(f), \quad \bar{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{E}(f).$$

**Lemma.** Рассмотрим  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  – разбиения отрезка  $J_i$ . Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)

Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  – разбиения.  $\mathcal{F}$  – общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leq \underline{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_\mathcal{F}(f) \leq \bar{S}_{\mathcal{E}_2}(f).$$

Следовательно,  $\{A, B\}$  – щель. □

*Note.* Определенные величины  $\bar{I}(f), \underline{I}(f)$  законны.

**Def 11.**  $f$  называется интегрируемой по Риману, если  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$

**Example.**

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману.  $\varphi$  – ступенчатая функция на  $J$ , Существует разбиение  $\underline{S}$  отрезка на  $J$ .  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_\mathcal{E}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i \bar{S}_\mathcal{E}(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$$

Тогда  $\underline{I}(\varphi) - \bar{I}(\varphi) = I(\varphi) = \sum_{i=1}^k |e_i| c_i$

*Note.* Пусть  $J$  – произвольный отрезок,  $f$  – ограниченная функция на  $J$ ,  $E$  – разбиение отрезка  $J$  на непустые отрезки  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

**Theorem 2.5.1.** *Критерий интегрируемости по Риману  $f$  – интегрируема по Риману на  $J$  тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $e_1, \dots, e_k$  Отрезка  $J$ , такое что*  
$$\sum_{i=1}^k |e_i| \operatorname{osc}_{e_i} f < \varepsilon.$$

*Proof.* Проверим, что  $f$  удовлетворяет условию ??

□