Определения и формулировки по алгебре
Линейная алгебра
II семестр

Тамарин Вячеслав

9 июня 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Линейная алгебра

Вопрос 1 Аксиоматизация объема параллелепипеда. Полилинейное отображение, кососимметричность. Свойства.

Определение 1: Параллелепипед

Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{R}$. Тогда для набора $v_1, \dots v_n \in V$ определим параллелепипед

$$D(v_1, \dots v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in [\,0, 1] \right\}.$$

Свойства (Аксиоматизация в $\mathbb{R}^n$). *Будем записывать векторы в матрицу.*

0. $\operatorname{Vol}(E_n) = 1$
1. $\operatorname{Vol}(\dots, \lambda v, \dots) = |\lambda| \operatorname{Vol}(\dots, v, \dots)$
2. $\operatorname{Vol}(\dots, v, \dots, u, \dots) = \operatorname{Vol}(\dots, v, \dots, u + \lambda v, \dots)$ *(исходя из принципа Кавальери)*
3. $\operatorname{Vol}(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$

Свойства (Аксиоматизация в поле K).

1. $w(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda w(\dots, v, \dots)$
2. $w(\dots, u + v, \dots) = w(\dots, u, \dots) + w(\dots, v, \dots)$
3. $w(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$

Определение 2: Полилинейное отображение

Пусть $U_1, \dots U_l, V$ — векторные пространства над полем K. Отображение $w\colon U_1 \times \dots \times U_l \to V$ называется полилинейным, если

$$w(v_1, \dots v_i + \lambda u_i, \dots v_l) = w(v_1, \dots, v_i, \dots v_l) + \lambda w(v_1, \dots, u_i, \dots v_l).$$

Обозначение. $\operatorname{Hom}_K(U_1, \dots U_l; V)$ — множество всех полилинейный отображений.

Определение 3: Форма

Полилинейное отображение $w\colon V^l \to K$ называется полилинейной формой степени l на V.

Определение 4

Полилинейная форма $w\colon V^l \to K$ на пространстве V над полем K называется

- антисимметричной или кососимметричной, если $w(v_1, \dots v, \dots, v, \dots, v_l) = 0$;
- симметричной, если $w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_l) = w(v_1, \dots, v_j, \dots v_i, \dots, v_l)$.

Лемма 1

Пусть V — векторное пространство размерности n. Для полилинейного отображения $w : V^l \to K$ и любого

$e_1, \dots e_n$ базиса V выполнено

$$w(v_1, \dots v_l) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots i_l \leqslant n} w(e_{i_1}, \dots, e_{i_l}) \prod_{j=1}^{l} a_{i_j,j}, \qquad \text{где } a_{ij} \text{ — } i\text{-ая координата вектора } v_j \text{ в базисе } e.$$

Лемма 2

Пусть V — векторное пространство размерности n. Для полилинейного отображения $w\colon V^l \to K$ выполнено:

1. если w кососимметрично, то $w(\dots, u, \dots, v, \dots) = -w(\dots, v, \dots, u, \dots)$;
2. если $\operatorname{char} K \neq 2$, из результата первого свойства следует кососимметричность;
3. если w кососимметрично, то для любой перестановки $\sigma \in S_l$ верно $w(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(l)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) w(v_1, \dots v_l)$;
4. если w кососимметрично, $w(\dots v, \dots, u, \dots) = w(\dots, v, \dots, u + \lambda v, \dots)$;
5. если w кососимметрично и $l = n$, для набора векторов $v_1, \dots v_n$ и базиса $e_1, \dots e_n$ выполнено

$$w(v_1, \dots v_n) = w(e_1, \dots e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = w(e_1, \dots e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Вопрос 2 Определитель как форма объема. Формы объема, связанные с выбором базиса и их свойства.

Определение 5: Форма объема

Пусть $n = \dim V$. Антисимметричная полилинейная форма $w\colon V^n \to K$ называется **формой объема** на V. Если такая форма не равна 0, то будем говорить, что она **невырожденная**.

Определение 6: Определитель

Определителем $\det$ называется отображение $\det\colon M_n(K) \to K$ такое, что

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i\sigma(i)}.$$

Определение 7

Пусть $e_1, \dots e_n$ — базис пространства V. Определим отображение $\mathrm{Vol}_e\colon V^n \to K$ такое, что

$$\mathrm{Vol}_e(v_1, \dots v_n) = \det(e(v_1), \dots, e(v_n)),$$

где $e\colon V \to K^n$ — отображение сопоставления координат.

Теорема 1: Свойства форм

1. Определитель является формой объема на K^n, при этом $\det E = 1$.
2. Если V — пространство размерности n, то любая форма объема на V имеет вид

$$w = w(e_1, \dots e_n) \operatorname{Vol}_e.$$

   В частности, если e, f — базисы, то $\mathrm{Vol}_f = \det(C_{f \to e}) \operatorname{Vol}_e$.
3. Пространство форм объема одномерно.
4. Для любой невырожденной формы объема w верно утверждение:

$$w(v_1, \dots v_n) = 0 \iff v_1, \dots v_n \text{ линейно зависимы.}$$

Вопрос 3 Свойства определителя. Примеры вычисления. Ориентация и объем.

Лемма 3: Свойства определителей квадратных матриц

1. $\det A = \det A^\top$

2. (a) При элементарных преобразованиях первого типа для строк и столбцов определитель не меняется.
   (b) При смене строк местами меняется знак.
   (c) При домножении строки на λ определитель домножается на λ.
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$
5. $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n_2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
6. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
7. $\det\colon \mathrm{GL}(V) \to K^*$ — гомоморфизм групп.

Пример 1

1. $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
2. Определитель Вандермонда

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j).$$

Утверждение. Пусть отображение Volume: $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Volume}(E_n) = 1$
2. $\mathrm{Volume}(\dots, u + \lambda v, \dots, v, \dots) = \mathrm{Volume}(\dots, u, \dots, v, \dots)$
3. $\mathrm{Volume}(\dots, \lambda v, \dots) = |\lambda| \,\mathrm{Volume}(\dots, v, \dots)$

Тогда $\mathrm{Volume}(A) = |\det A|$

Вопрос 4 Ориентация. Невозможность смены ориентации при непрерывном изменении базиса. Определитель оператора. Сохранение ориентации.

Определение 8

Будем говорить, что два базиса пространства V над $\mathbb{R}$ одинаково ориентированы, если матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

Определение 9

Выбор одного из классов эквивалентности базисов векторного пространства V называется заданием ориентации.

Утверждение. Пусть есть два базиса $e_1, \dots e_n$ и $f_1, \dots f_n$ в пространстве V над $\mathbb{R}$. Если они имеют разную ориентацию, то их нельзя продеформировать один в другой (внутри пространства базисов).

Определение 10: Линейный оператор

Пусть V — пространство. Тогда линейное отображение $L\colon V \to V$ называется (линейным) оператором на пространстве V. Пусть $e_1, \dots e_n$ — базис V, тогда матрицей оператора L в базисе e называется матрица $[L]_e^e$.

Определение 11

Пусть $L\colon V \to V$ — линейный оператор. Тогда определим $\det L = \det A$, где A — матрица перехода в каком-то базисе.

Замечание. Определитель корректно определен.

Определение 12

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Будем говорить, что линейный оператор $L\colon V \to V$ **сохраняет ориентацию**, если $\det L > 0$, и **не сохраняет**, если $\det L < 0$.

Лемма 4

Сохраняющее ориентацию отображение переводит одинаково ориентированные базисы в одинаково ориентированные.

Определение 13

Определим группу операторов $\mathrm{SL}(V) := \{L\colon V \to V \mid \det L = 1\}$. Если V — вещественное векторное пространство, то это операторы, которые сохраняют понятие объема и выбор ориентации пространства. $\mathrm{SL}_n(K)$ называется **группой матриц с определителем** 1.

Вопрос 5 Разложение определителя по столбцу. Формула Крамера.

Определение 14: Минор

Пусть $A \in M_{m\times n}(K)$, $I \subseteq \{1,\dots m\}$, $J \in \{1,\dots n\}$.

Подматрица $A_{I,J}$ — матрица, составленная из элементов A, стоящих в строках из I и столбцах из J.

Минор порядка k матрицы A — определитель квадратной подматрицы $M_{I,J} = \det A_{I,J}$, где $|I| = |J| = k$.

Если $A \in M_n(K)$, то **алгебраическим дополнением элемента** a_{ij} называется $A^{ij} = (-1)^{i+j} M_{\bar{i},\bar{j}}$.

Лемма 5

При разложении по j-ому столбцу имеет место формула

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A^{ij}.$$

Теорема 2: Формула Крамера

Пусть дана система линейных уравнений $Ax = b$ с квадратной матрицей A над полем K. Если A обратима, то единственное решение этой системы имеет вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad \Delta = \det A,\ \Delta_i = \det\left(\text{матрица A, где вместо } i\text{-го столбца стоит столбец } b\right).$$

Вопрос 6 Формула для обратной матрицы. Присоединенная матрица. Соотношение для присоединенной матрицы.

Определение 15: Присоединенная матрица

Присоединенная матрица к матрице A — матрица $(\operatorname{Adj} A)_{ij} = A^{ij}$, где A^{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Теорема 3

Пусть $A \in M_n(K)$. Тогда $\operatorname{Adj} A \cdot A = A \cdot \operatorname{Adj} A = \det(A) \cdot E$.

Вопрос 7 Понятие алгебры над полем. Примеры. Групповая алгебра. Теорема Кэли.

Определение 16: Алгебра над полем

Пусть K — поле. Кольцо S вместе с отображением $K \times S \to S$ называется алгеброй, если

1. $\forall k \in K,\ \forall u, v \in S\colon (ru)v = u(rv)$
2. S является векторным пространством над K относительно указанных операций.

Пример 2

1. Поле K есть алгебра над собой.
2. Если L — расширение поля K, то L — алгебра над K.
3. $\mathbb{C}$ — алгебра над $\mathbb{R}$
4. Кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_K(V)$ векторного пространства V над полем K является алгеброй над K.
5. Кольцо многочленов $K[x_1, \dots x_n]$ — алгебра над K.
6. Любой фактор кольца многочленов $K[x_1, \dots x_n]/I$ — алгебра над K.
7. Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, \dots e_n$. Перемножение двух произвольных элементов

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i \cdot e_j).$$

Поэтому произведение достаточно определить только на элементах базиса, что дает структуру кольца. Для ассоциативности кольца достаточно ассоциативности умножения на базисных элементах $(e_i \cdot e_j) \cdot e_k = e_i \cdot (e_j \cdot e_k)$:

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right)\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \nu_k e_k = \sum_{i,j,k} \lambda_i \mu_j \nu_k (e_i \cdot e_j) \cdot e_k =$$
$$= \sum_{i,j,k} \lambda_i \mu_j \nu_k e_i \cdot (e_j \cdot e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k e_k\right)\right)$$

Теперь приведем конкретный пример. Пусть G — группа, $|G| = 3$.

Определение 17: Групповая алгебра

Групповой алгеброй $K[G]$ над полем K назовем следующую алгебру: возьмем пространство столбцов размера n, занумеруем элементы стандартного базиса элементами группы G; соответствующий $g \in G$ базисный вектор обозначим e_g; умножение $e_g \cdot e_h = e_{gh}$.

Замечание. $K[G]$ некоммутативна тогда и только тогда, когда G некоммутативна.

Определение 18: Гомоморфизм K-алгебр

Отображение $f\colon S_1 \to S_2$, где S_1, S_2 — K-алгебры, называется **гомоморфизмом K-алгебр**, если f — гомоморфизм колец и линейное отображение.

Теорема 4: типа Кэли

Любая конечномерная алгебра A над полем K вкладывается в $\mathrm{End}_k(A)$.

Вопрос 8 Многочлен от элемента. Минимальный многочлен. Нетривиальность минимального многочлена для элемента конечномерной алгебры. Дихотомия для элементов конечномерной алгебры.

Замечание. Пусть K — поле, A — алгебра над K. Заметим, что для $y \in A$ и многочлена $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in K[x]$ можно определить элемент $p(y) = a_0 + \ldots a_n y^n \in A$. Соответствие $p(x) \to p(y) \in A$ определяет единственный гомоморфизм K-алгебр $\varphi\colon K[x] \to A$, $\varphi(x) = y$.

Замечание. Пусть a, b — два элемента алгебры A, которые не коммутируют между собой. Тогда не существует гомоморфизма $K[t_1, t_2]$, переводящего $t_1 \to a$, $t_2 \to b$.

Утверждение. Для любого элемента y конечномерной алгебры A существует $p(x) \in K[x],\ p(x) \neq 0$ такой, что $p(y) = 0$.

Определение 19: Аннуляторы

Ядро гомоморфизма $K[x] \to A$, переводящего $x \to y$, является идеалом $Ann_y \leqslant K[x]$. Его элементы называют **аннуляторами** для элемента $y \in A$. Если этот идеал не 0 (есть нетривиальные многочлен, аннулирующий y), то образующую этого идеала (со старшим коэффициентом 1) называют **минимальным многочленом** для элемента $y \in A$ и обозначают $\mu_y(x)$.

По другому, это многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом, аннулирующий y.

Теорема 5

Любой элемент конечной алгебры A над полем K либо обратим, либо делитель нуля (с любой стороны).

Вопрос 9 Матрица линейного оператора. Инвариантные подпространства и как заметить по матрице линейного оператора. Примеры.

Определение 20

Две матрицы $A, B \in M_n(K)$ **подобны**, если существует матрица $C \in \mathrm{GL}_n(K)$, что $A = CBC^{-1}$.

Замечание. Матрицы одного оператора в разных базисах подобны.

Определение 21: Инвариантное подпространство

Пусть V — пространство с опрератором L. Пусть $U \leqslant V$. Тогда U называется **инвариантным подпространством**, если $L(U) \leqslant V$.

Замечание. Это условие позволяет сузить оператор L с V на U. Наличие инвариантных подпространств не зависит от выбора системы координат.

Лемма 6

Пусть $U \leqslant V$ — подпространство, $L\colon V \to V$ — линейный оператор. Тогда U инвариантно относительно L тогда и только тогда, когда в базисе $e_1, \ldots e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$, где $e_1, \ldots e_k$ — базис U, матрица оператора имеет блочно диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Вопрос 10 Собственные числа и собственные вектора. Характеристический многочлен и его связь с собственными числами. Вычисление характеристического многочлена сопровождающей матрицы.

Определение 22: Собсвенные число и вектор

Пусть V — пространство с опрератором L. Тогда вектор $0 \neq v \in V$ называется собственным вектором с собственным числом λ относительно оператора L, если $Lv = \lambda v$.

Определение 23: Характеристический многочлен

Характеристический многочлен оператора L — $\chi_L(t) = \det(A - tE_n)$, где A — матрица L некотором базисе.

Замечание. Характеристический многочлен корректно определен.

Утверждение. Элемент $\lambda \in K$ является собственным числом оператора L тогда и только тогда, когда λ — корень $\chi_L(t)$.

Определение 24: Сопровождающая матрица

Пусть $f(x) \in K[x]$ — многочлен степени больше 1. Тогда **сопровождающей матрицей** к $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ называется

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Утверждение. Характеристический многочлен сопровождающей матрицы равен $(-1)^n f(t)$

Вопрос 11 След и определитель оператора. Диагонализация. Алгебраическая и геометрическая кратности. Неравенство между ними. Линейная независимость собственных векторов.

Определение 25: След

Пусть A — матрица размера n, тогда **след матрицы** равен $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

След оператора L — след его матрицы.

Замечание. Это определение не зависит от выбора базиса.

Замечание. $\operatorname{Tr} A = (-1)^{n-1} a_{n-1}$, где $\chi_A(t) = \sum a_i t^i$.

Лемма 7: Свойства следа

1. Пусть A — квадратная матрица. Тогда $\operatorname{Tr} CAC^{-1} = \operatorname{Tr} A$ для обратимой C.
2. $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ для $A \in M_{n\times m}(K),\ B \in M_{m\times n}(A)$.
3. След равен сумме собственных чисел с учетом их кратностей, как корней характеристического многочлена.
4. $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^{\top}$.
5. $\operatorname{Tr}(A + \lambda B) = \operatorname{Tr}(A) + \lambda \operatorname{Tr}(B)$

Определение 26: Диагонализируемость

Оператор называется **диагонализируемым**, если в некотором базисе его матрица диагональна.

Матрица $A \in M_n(K)$ называется **диагонализируемой**, если соответствующий оператор $x \to Ax$ диагонализируем. То есть должна существовать обратимая матрица C: CAC^{-1} — диагональна.

Лемма 8

Матрица оператора L в базисе $v_1, \dots v_n$ диагональна тогда и только тогда, когда все v_i — собственные вектора L. В этом случае на диагонали стоят собственные числа оператора L.

Лемма 9

Пусть $v_1, \dots v_n$ — собственные вектора L с собственными числами $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Пусть λ_i попарно различны. Тогда v_i линейно независимы.

Определение 27: Алгебраическая и геометрическая кратности

Пусть L — оператор на пространстве V.

Алгебраическая кратность собственного числа λ — его кратность как корня $\chi_L(t)$.

Геометрическая кратность λ — размерность $\ker L - \lambda \mathrm{id}$.

Лемма 10: Неравенство

Пусть L — линейный оператор на пространстве V, λ — его собственное число. Тогда алгебраическая кратность λ не менее его геометрической кратности.

Вопрос 12 Критерий диагонализируемости. Случай отсутствия кратный собственных чисел. Последовательности, удовлетворяющие линейному рекурентному соотношению.

Теорема 6: Критерий диагонализируемости

Пусть K — поле и все корни $\chi_L(t)$ лежат в K. Тогда оператор L диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого собственного числа алгебраическая и геометрическая кратности равны.

Следствие 1: Случай без кратных корней

Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Если $\chi_L(t)$ не имеет кратных корней, то оператор L диагонализируем.

Следствие 2

Пусть дана последовательность $x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая линейному рекурентному соотношению

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0 x_n = 0,$$

где $a_i \in \mathbb{C}$. Рассмотрим многочлен $f(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_0$. Пусть у $f(t)$ нет кратных корней. Тогда $x_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$, где λ_i — корни $f(t)$.

Вопрос 13 Многочлен от оператора. Разложение пространства в прямую сумму ядер многочленов от исходного оператора. Блочная структура матрицы оператора, связанная с подобным расположением.

Лемма 11

Пусть L — оператор на пространстве V, многочлен $g(t) = p(t)q(t)$ аннулирует L ($g(L) = 0$). Причем $(p(t), q(t)) = 1$. Тогда пространство V раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$V = \ker p(L) \oplus \ker q(L).$$

Утверждение. Пусть L — оператор на V, пространство $V = U_1 \oplus U_2$, где U_1, U_2 инвариантны. Если $e_1, \ldots e_k$ и $f_1, \ldots f_l$ — базисы U_1, U_2, то матрица L в базисе $e_1, \ldots e_l, f_1, \ldots f_l$ имеет вид $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Вопрос 14 Факторизация по подпространству. Оператор на факторпространстве. Блочная структура исходного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.

Определение 28

Пусть U — подпространство V. Определим на факторе V/U структуру векторного пространства так $\lambda\overline{v} = \overline{\lambda v}$.

Определение 29

Пусть V — пространство с оператором L, U — инвариантное подпространство. Тогда определим оператор $\overline{L}$ на V/U так $\overline{L}(\overline{v}) = \overline{L(v)}$.

Замечание. Если $p(x)$ — многочлен, $v \in V$, то $p(\overline{L})\overline{v} = \overline{p(L)v}$.

Замечание. Так как подпространство инвариантно, в подходящем базисе матрица линейного оператора становится блочно-верхнетреугольной и верхний блок — это матрица сужения оператора.

Пусть $e_1, \ldots e_n$ — базис V и $\langle e_1, \ldots e_k \rangle$ — инвариантное подпространство относительно L. Если матрица L в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

то C — матрица $\overline{L}$ в базисе $\overline{e_{k+1}i}, \ldots \overline{e_n}$. Следовательно,

$$\chi_L(t) = \chi_{L|_{V'}}(t) \cdot \chi_{\overline{L}}(t).$$

Теорема 7: Гамильтон-Кэли

Пусть L — оператор на V. Пусть многочлен $\chi_L(L)$ раскладывается на линейные множители. Тогда $\chi_L(L) = 0$.

Вопрос 15 Жорданова клетка. Теорема о жордановой форме: единственность.

Определение 30: Жорданова клетка

Жорданова клетка размера k с собственным числом λ — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема 8: О жордановой форме

Пусть $L\colon V \to V$ — оператор на конечномерном пространстве над алгебраическим замкнутым полем K. Тогда существует базис $e_1, \dots e_n$, в котором матрица L имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s(\lambda_s)} \end{pmatrix}.$$

Более того такая матрица единственна с точностью до перестановки блоков.

Эта матрица называется **матрицей оператора в форме Жордана**. Базис, в котором матрица оператора имеет такой вид называется **жордановым базисом**.

Вопрос 16 Теорема о жордановой форме: существование. Лемма про нильпотентный оператор.

Теорема 9: про нильпотентный оператор

Для любого нильпотентного оператора N на пространстве V существует базис $e_1, \dots e_n$ в котором матрица N имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s(0)} \end{pmatrix}.$$

Вопрос 17 Возведение жордановой клетки в степень. Поведение коэффициентов матрицы A^n в зависимости от n. Линейное рекурентное соотношение с постоянными коэффициентами общего вида.

Лемма 12

$$J_k(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ & \lambda^n & & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Следствие 3

Пусть $A \in M_n(K)$. Тогда существует такая обратимая матрица C, что $A^n = CJ^nC^{-1}$, где J — жорданова форма A. Причем J^n составлена из блоков из прошлой леммы.

Следствие 4

Для любой матрицы A коэффициент ее степени A^n — сумма последовательностей вида $C_n^s\lambda^{n-s}$ с независящими от n коэффициентами. λ — произвольное СЧ, s менее максимального размера ЖК с этим СЧ.

Следствие 5

Пусть дана последовательность $x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая линейному рекурентному соотношению

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_0x_n = 0,$$

где $a_i \in \mathbb{C}$. Рассмотрим многочлен $f(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_0$. Тогда x_n равно сумме последовательностей $n^s\lambda$, где λ — корень $f(t)$ и s строго меньше кратности λ как корня $f(t)$.

Вопрос 18 Многочлен от жордановой клетки. Понятие функции, аналитической на диске. Вычисление аналитической функции от матрицы.

Теорема 10

Пусть L — оператор на векторном пространстве V над полем характеристики 0. Тогда матрица оператора $p(L)$ в жордановом базисе L составлена из блоков вида

$$\begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \ldots & \frac{p^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & p(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \lambda_i$ — собственные числа, а число и размер блоков с λ_i равны числу и размеру блоков в жордановой форме.

Следствие 6

Пусть A — матрица, тогда $p(A) = Cp(J)C^{-1}$, где $p(J)$ составлена из блоков, как в прошлой теореме, а C из жорданова базиса для A.

Определение 31: Аналитичная функция

Пусть $D \subseteq K$ — открытый диск с центром в точке z_0 и радиусом $r > 0$ в $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Функция $f\colon D \to K$ **аналитична**, если существует последовательность $a_n \in K$, что $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots a_n(z - z_0)^n + \ldots$ для любого $z \in D$.

Определение 32

Пусть A — квадратная матрица над полем $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в диске D, а все собственные числа A так же лежат в D. Тогда определим

$$f(A) = a_0 + a_1(A - z_0E) + \ldots + a_n(A - z_0E)^n + \ldots,$$

относительно покоэффициентной сходимости на $M_n(K)$.

Замечание. Матрица $f(A)$ корректно определена и ее можно посчитать: $Cf(J)C^{-1}$.

Вопрос 19 Предельное поведение степеней матрицы при ограничениях на СЧ. Теорема о положительных матрицах (Перрон).

Лемма 13

Пусть A — вещественная или комплексная матрица с собственным числом $\lambda_1 = 1$ кратности 1, а все остальные строго меньше 1 по модулю. Если вектор $v = \sum c_i e_i$, где e_i — жорданов базис, то

$$\lim_{n\to\infty} A^n v = c_1 e_1.$$

Пример 3

1. Запись графа в виде матрицы. $A(G)$ — матрица смежности. $\mathrm{Tr}(A(G))$ — количество циклов длины n. $P(G)$ — матрица случайного блуждания. $P_G^n v$ — распределение после n шагов блуждания, если начальное распределение равно v.
2. Модель Лесли для распределения пл возрастам в популяции.

Определение 33: Положительная матрица

Назовем матрицу A **положительной**, если все ее элементы $A_{ij} > 0$.

Определение 34: Неотрицательная матрица

Назовем матрицу A **неотрицательной**, если $A_{ij} \geqslant 0$.

Обозначение. Если $A \in M_n(\mathbb{C})$, то $|A|$ — матрица из $|a_{ij}|$. Если $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, то $A > B$, если $A - B > 0$ (аналогично с $\geqslant$).

Теорема 11: Перрон, 1907

Если матрица $A > 0$, то наибольшее по модулю собственное число единственное и является вещественным и положительным. Еще оно не является кратным корнем характеристического многочлена. Собственный вектор для него положителен.

Вопрос 20 Теорема Перрона. Критерий максимальности для собственного числа. Стохастические матрицы. Деформация для матрицы случайного блуждания и новый подход нахождения весов для поисковой системы.

Утверждение (Критерий максимальности)**.** Пусть $A \geqslant 0$, и у $A^\top$ есть положительный собственный вектор для собственного числа λ. Тогда λ — наибольшее по модулю собственное число A. Если у матрицы A есть собственный вектор $y \geqslant 0$, то y собственный вектор для числа λ.

Определение 35: Стохастическая матрица

Неотрицательная матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется **стохастической**, если сумма всех коэффициентов в каждом ее столбце равна 1.

Следствие 7

У стохастической матрицы A единица является максимальным по модулю собственным числом.

Вопрос 21 Граф матрицы. Неприводимые и эрогодические (примитивные) матрицы. Связь этих понятий. Теорема Фробениуса. Следствие для неприводимых матриц.

Определение 36: Граф матрицы

Пусть A — неотрицательная вещественная матрица размера n. Вершинами графа этой матрицы будут числа от 1 до n, а ребро между $j \to i$ есть, если коэффициент $A_{ij} \neq 0$.

Определение 37: Неприводимая матрица

Неотрицательная матрица A называется **неприводимой**, если связанный с ней граф сильно связен.

Замечание. Это равносильно тому, что нельзя так перенумеровать координаты, чтобы в новых координатах матрица имела блочно-верхнетреугольный вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Лемма 14

Пусть A — неотрицательная неприводимая матрица размера n. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ матрица $A + \varepsilon E$ эрогодическая.

Теорема 12: Фробениус, 1912

Пусть A — эрогодическая матрица. Тогда у A есть единственное максимальное по модулю собственное число λ и оно вещественно и положительно. Кроме того, λ не является кратным для A, этому числу соответствует положительный собственный вектор.

Следствие 8

Пусть A — неприводимая матрица. Тогда у A есть вещественное собственное число $\lambda > 0$, которое не меньше всех остальных собственных чисел по модулю. Оно не кратно и соответствующий собственный вектор можно выбрать положительным.

Глава 2

Полилинейная алгебра

Вопрос 22 Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Ранг и нувырожденность билинейной формулы. Ортогональное дополнение. Размерность ортогонльного дополнения. Разложение в ортогональную сумму.

Определение 38: Билинейная форма

Пусть V — векторное пространство над K. Отображение $h\colon V \times V \to K$ называется билинейной формой, если

1. $\forall \lambda \in K\ \forall u, v, w \in V\colon \quad h(u + \lambda v, w) = h(u, w) + \lambda h(v, w)$,
2. $h(w, u + \lambda v) = h(w, u) = \lambda h(w, v)$

Определение 39: Матрица билинейной формы

Пусть $e_1, \ldots e_n$ — базис V, h — билинейная форма на V. Тогда матрица A, составленная из элементов $h(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы.

Лемма 15

Пусть V — пространство с базисом $e_1, \ldots e_n$. Тогда имеет место взаимооднозначное соответствие между билинейными формами h на V и матрицами $A \in M_n(K)$.

В частности, если вектор v имеет столбец координат x, а вектор u — столбец y, то $h(u, v) = y^\top A x$.

Лемма 16

Пусть V — пространство с билинейной формой h и базисом $e_1, \ldots e_n$. Пусть матрица h в этом базисе — это A. Если выбрать другой базис f с матрицей перехода C, то в новом базисе матрица A будет иметь вид $A' = C^\top A C$.

Определение 40: Ранг

Ранг билинейной формы — это ранг ее матрицы.

Определение 41

Будем говорить, что элемент u ортогонален (слева) элементу v, если $h(u, v) = 0$, и записывать так $u \perp v$.

Определение 42: Невырожденность

Билинейная форма h называется невырожденной, если $\forall v \neq 0$ существует $u \in V\colon h(u, v) \neq 0$.

Утверждение. Билинейная форма невырождена тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором базисе невырождена.

Определение 43: Ортогональное дополнение сверху

Пусть h — билинейная форма на V. Если U — подпространство V, то правым ортогональным дополнением к U (внутри v относительно h) будет множество

$$U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U\ u \perp v\}.$$

Замечание. Аналогично есть левое дополнение ${}^{\perp}U$

Замечание. Если $e_1, \dots e_k$ базис U, то условие $v \in U^{\perp}$ равносильно $\forall i\ e_i \perp v$.

Утверждение. Пусть U — подпространство V, h — билинейная форма на V. Тогда $\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$. Если форма невырождена, то $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ и верно, что ${}^{\perp}\left(U^{\perp}\right) = U$

Утверждение. Пусть $U \leqslant V$ и h — билинейная форма на V. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $h\,|_U$ невырождена.

Определение 44: Разложение в ортогональную прямую сумму

Если пространство разложилось в виде прямой суммы подпространств $V = U \oplus U'$, таких, что $U' \leqslant U^{\perp}$, то будем говорить, что имеет место разложение в ортогональную прямую сумму подпространств $V = U \oplus^{\perp} U'$.

Замечание. Если h невырождена, то для данного подпространства U может найтись не более одного пространства U', что $V = U \oplus^{\perp} U'$. А именно $U' = U^{\perp}$

Вопрос 23 Симметричные билинейные формы. Матрица для симметричной формы. Примеры. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Соответствие между симметричными билинейными и квадратичными.

Определение 45: Симметричная билинейная форма

Билинейная форма h называется симметричной, если $h(u,v) = h(v,u)$. Форма h называется кососимметричной, если $h(u,v) = -h(v,u)$.

Замечание. Любая билинейная форма h над полем, характеристика которого отлична от 2, может быть единственным образом представлена в виде суммы h^+ и h^-, где h^+ — симметричная форма, а h^- — кососимметричная.

$$h^+(u,v) = \frac{h(u,v) + h(v,u)}{2},\ h^-(u,v) = \frac{h(u,v) - h(v,u)}{2}.$$

Лемма 17

Билинейная форма h симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором базисе симметрична, то есть $A^{\top} = A$, и кососимметрична, если $A^{\top} = -A$.

Определение 46: Квадратичная форма

Квадратичная форма — отображение $q\colon V \to K$ такое, что в некоторой линейной системе координат это отображение есть однородный многочлен степени 2, то есть $q(v) = \sum_{i \leqslant j}^{b_{ij} x_i x_j}$.

Матрица квадратичной формы в указанной системе координат — матрица

$$A_{ij} = \begin{cases} b_{ii}, & i = j \\ \frac{b_{ij}}{2}, & i \neq j \end{cases}.$$

Если вектор v имеет столбец координат x, то $q(v) - x^{\top} A x$

Утверждение (соответстие между формами)**.** Пусть h — билинейная симметричная форма на V. Тогда $q(v) = h(v,v)$ — квадратичная форма. При этом, в любой системе координат матрицы q и h совпадают.

Замечание (обратная конструкция)*.* Пусть q — квадратичная форма. Тогда форма $h(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$ — симметричная билинейная форма.

В таком случае h называется поляризацией квадратичной формы q.

Определение 47: Невырожденность

Квадратичная форма невырождена, если соответствующая ей симметричная билинейная форма невырождена.

Вопрос 24 Понятие ортогонального базиса. Существование ортогонального базиса. Алгоритм приведения квадратичной формы к сумме квадратов.

Определение 48: Ортогональная система векторов

Пусть h — симметричная билинейная форма на V. Система векторов называется ортогональной, если $\forall i \neq j\colon h(e_i, e_j) = 0$. Если $\{e_i\}$ — базис, то его тоже называют ортогональным.

Замечание. Матрица симметричной билинейной формы в ортогональном базисе имеет диагональный вид, а выражение для квадратичной формы — сумма квадратов координат вектора с коэффициентами.

Определение 49: Эквивалентность

Будем говорить, что симметрические билинейные (или квадратичные) формы эквивалентны, если в некоторых базисах они миеют одинаковые матрицы.

Теорема 13: о существовании ортогонального базиса

Пусть V — пространство с симметричной билинейной формой h. Тогда в V существует ортогональный относительно h базис.

Вопрос 25 Главные миноры. Теорема Якоби. Канонический вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

Определение 50: Главные миноры

Пусть A — матрица. Числа $d_i = \det A_i$, где A_i — подматрица A, составленная из первых i строк и столбцов, называются главными минорами.

Замечание. $d_0 = 1$

Теорема 14: Якоби

Пусть V — векторное пространство, q — квадратичная форма, A — ее матрица в некотором базисе $e_1, \ldots e_n$. Пусть главные миноры $d_i \neq 0$. Тогда матрица A — невырождена и может быть приведена к диагональному виду с числами $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ на диагонали.

Утверждение. Канонический вид, к которому можно привести квадратичную форму над $\mathbb{C}$:

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2.$$

Утверждение. Пусть q — квадратичная форма на вещественном пространстве V. Тогда существует линейная система координат, в которой форма имеет вид

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2.$$

Вопрос 26 Положительная определенность. Единственность канонического вида над $\mathbb{R}$. Критерий Сильвестра.

Определение 51: Сигнатура формы

Сигнатура формы над $\mathbb{R}$ — пара чисел (k, l) — число плюсов и минусов в каноническом виде.

Замечание. $k + l = \operatorname{rk} q$

Определение 52: Положительная определенность

Квадратичная форма называется положительно определенной, если $\forall v \neq 0\colon q(v) > 0$.
Симметричная билинейная форма называется положительно определенной, если форма $q(v) = h(v, v)$ положительно определена.
Симметричная матрица называется положительно определенной, если соответствующая форма положительно определена.

Теорема 15

Сигнатура формы q не зависит от способа приведения формы к каноническому виду. Точнее — число k равно размерности наибольшего подпространства, ограничение формы на которое положительно определено.

Следствие 9

Пусть q — форма на вещественном пространстве V размерности n. Тогда канонический вид q однозначно определяется числом n и ее сигнатурой.

Теорема 16: Критерий Сильвестра

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, q — квадратичная форма, A — ее матрица в некоторым базисе $e_1, \dots e_n$. Пусть главные миноры d_i матрицы A не все равны 0. Тогда число перемен знака в последовательности $1 = d_0, d_1, \dots d_n$ равно числу отрицательных квадратов в каноническом виде.

Вопрос 27 Описание положительно определенных квадратичных форм. Оценка на число множеств с одинаковым пересечением.

Лемма 18

Положительно определенная билинейная (квадратичная) форма всегда невырождена.

Теорема 17

Пусть дана форма q на вещественном пространстве V и ее матрица A в некотором базисе. Следующие условия эквивалентны:

1. Форма q положительно определена.
2. Главные миноры матрицы A положительны.
3. Матрица A представима в виде $A = C^\top C$ для некоторой невырожденной верхнетреугольной C.
4. Матрица A представим в виде $C^\top C$ для некоторой невырожденной матрицы.

Утверждение. Рассмотрим множество $\{1, \dots n\}$. Пусть $C_1, \dots C_m$ — множества, для которых верно $\forall i, j\colon |C_i \cap C_j| = t$. Тогда $m \leqslant n$.

Вопрос 28 Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Ортогональное дополнение. Примеры евклидовых пространств.

Определение 53: Евклидово пространство

Векторное пространство V над $\mathbb{R}$ вместе с заданной на волнительно определенной симметричной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется евклидовым пространством. Форма называется скалаярным произведением.

Определение 54: Норма

Определим норму на евклидовом пространстве как $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Норма задает расстояние по правилу $\rho(u, v) = \|u - v\|$.

Замечание. Это действительно норма: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Лемма 19: Неравенство Коши-Буняковского

В евклидовом пространстве выполнено неравенство $\langle u, v \rangle \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$

Лемма 20

Пусть V — евклидово пространство. Тогда для всякого подпространства U имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^\top$. Если есть такое разложение, то оператор проекции на U называется ортогональной проекцией.

Вопрос 29 Полуторалинейные формы на комплексном векторном пространстве. Примеры. Матрица полуторалинейной формы. Эрмитовость. Положительная определенность. Понятие унарного пространства.

Определение 55: Плуторалинейное отображение

Пусть V — комплексное пространство. Отображение $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется { полуторалинейным}, если

1. $h(x, y + \lambda z) = h(x, y) + \lambda h(x, z)$,
2. $h(x + \lambda y, z) = h(x, z) + \overline{\lambda} h(y, z)$.

Пример 4

1. Полуторалинейные форма на $\mathbb{C}^n : h(x, y) = \sum \overline{x_i} y_i$.
2. $A \in M_n(\mathbb{C}),\ h(x, y) = \overline{x}^\top Ay$.
3. Пространство комплекснозначных непрерывных функций на $C([a, b])$. Определим полуторалинейную форму по правилу:
$$h(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) w(x) dx.$$

Определение 56: Матрица полуторалинейной формы

Матрица полуторалинейной формы h в базисе e — матрица $a_{ij} = h(e_i, e_j)$.

Лемма 21

Если x, y — координаты векторов u, v, то $h(u, v) = \overline{x}^\top Ay$.

Если $h(u, v) = \overline{x}^\top Ay$, то A — матрица h.

Определение 57: Эрмитовость

Полуторалинейная форма h называется эрмитовой, если $h(v, u) = \overline{h(v, u)}$ и косоэрмитовой, если $h(u, v) = -\overline{h(v, u)}$.

Лемма 22

Полуторалинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда $A = \overline{A^\top}$ и кососэрмитова тогда и только тогда, когда $-A = \overline{A^\top}$.

Определение 58

Эрмитова форма назовется положительно определенной, если $\forall v \in V \setminus \{0\}\colon h(v, v) > 0$.

Лемма 23

Матрица положительно определенной эрмитовой формы невырождена.

Определение 59: Унитарное пространство

Пространство V над $\mathbb{C}$ вместе с положительно определенной эрмитовой формой называется унитарным пространством. Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Вопрос 30 Примеры унитраных пространств. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника. Разложение в ортогональную прямую сумму. Понятие угла между векторами.

Лемма 24

Пусть $u, v \in V$ — два вектора в унитарном пространстве. Тогда $|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\| \|v\|$

Следствие 10

Отображение $\| \cdot \|\colon V \to \mathbb{R}$, заданное по правилу $v \to \sqrt{\langle v, v \rangle}$ задает норму на V.

Определение 60: Угол между векторами

Пусть $x, y \neq 0$ — два вектора в V. Если V — евклидово, то **углом между** x **и** y называется такое число $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, что

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

В случае унитарного пространства V угол $\varphi \in [\,0, \frac{\pi}{2}]$ и

$$\cos\varphi = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}.$$

Вопрос 31 Ортогонализация Грама-Шмидта. Дополнения ортонормированного набора векторов до базиса. Нахождение координат и длины вектора в ортогональном базисе.

Определение 61: Ортогонализация набора векторов

Пусть $e_1, \dots e_m$ — набор векторов евклидова или унитарного пространства V. **Ортогонализация** набора $\{e_i\}$ — набор $f_1, \dots f_n$ такой, что

1. $\forall i \neq j\colon f_i \perp f_j$
2. $\forall 1 \leqslant k \leqslant n\colon \langle e_1, \dots e_k\rangle = \langle f_1, \dots f_k\rangle$
3. $\|f_i\| = 1$

Набор векторов со свойством 3 называется **нормированным**, со свойствами $1, 3$ — ортонормированным.

Теорема 18

Пусть V — евклидово или унитарное пространство. Задача ортогонализации разрешима для независимого набора векторов из V.

Следствие 11

В евклидовом и унитарном пространстве любой ортонормированный набор можно дополнить до ортонормированного базиса.

Утверждение (Нахождение координат в ортогональном базисе). Пусть $e_1, \dots e_n$ — ортогональный базис V. Если c_i — координаты вектора x в этом базисе, то

$$c_i = \frac{\langle e_i, x\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}.$$

Вопрос 32 Вычисление длины проекции. Версия теоремы Пифагора. Расстояние между вектором и подпространством и между аффинными подпространствами.

Замечание. Для любого подпространства в унитарном пространстве $U \leqslant V$ определено его ортогональное дополнение $U^\top = \{v \in V \mid \forall u \in U\colon \langle u, v\rangle = 0\}$. V раскладывается в прямую сумму $V = U \oplus U^\top$.

Следствие 12

Пусть $e_1, \dots e_n$ — ортогональный базис V, подпространство U порождено $e_1, \dots e_k$. Тогда

1. $pr_U x = \sum \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i$
2. $\|pr_{U^\top} x\|^2 + \|pr_U x\|^2 = \|x\|^2$

Определение 62: Расстояние

Пусть A и B — подмножества метрического пространства. Тогда **расстоянием** $\rho(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} \rho(x, y)$.

Теорема 19

Пусть $U \leqslant V$, $x \in V$. Тогда $\rho(x, U)$ достигается на проекции $pr_U(x)$ и равно $\|x - pr_U(x)\| = \|pr_{U^\top}(x)\|$

Лемма 25

Пусть $A_1 = L_1 + x$, $A_2 = L_2 + y$ — аффинные подпространства. Тогда $\rho(A_1, A_2) = \rho(y - x, L_1 + L_2)$

Вопрос 33 Матрица Грама и невырожденность. Метод наименьших квадратов. Пример с приближением многочленом фиксированной степени. Псевдообратная матрица.

Определение 63: Матрица Грама

Пусть $e_1, \dots e_k$ — набор векторов V. Тогда матрица Грамма — матрица

$$G_{ij}(e_1, \dots, e_k)_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Лемма 26

Пусть $v_1, \dots v_n$ — набор векторов в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\det G(v_1, \dots v_n) = (\mathrm{Vol}(v_1, \dots v_n))^2.$$

Теорема 20: Метод наименьших квадратов

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ищем $x\colon \|Ax - b\|$ — минимально.

$$A^\top Ax = A^\top b.$$
$$x = (A^\top A)^{-1} A^\top.$$

Определение 64: Псевдообратная матрица

Если $\ker A = 0$, матрица $(A^\top A)^{-1} A^\top$ называется псевдообратной.

Вопрос 34 Ортогональные и унитарные операторы. Эквивалентные Переформулировки. ... матрицы. QR-разложение. Его использование для нахождения псевдообратной матрицы.

Определение 65

Пусть V — евклидово (унитарное) пространство. Ортогональным (унитарным) оператором на V называется такой линейный оператор $L\colon V \to V$, что $\|Lx\| = \|x\|$.

Теорема 21

Пусть $L\colon V \to V$ — линейный оператор на евклидовом или унитарном пространстве V. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L — ортогональный (унитарный) оператор.
2. $\forall x, y \in V \colon \langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. L переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный.
4. В любом ортонормированном базисе A (матрица L) удовлетворяет условию $\overline{A}^\top A = E_n$.
5. L переводит некоторый ортонормированный в ортонормированный.
6. В некотором ортонормированном базисе $\overline{A}^\top A = E_n$.

Следствие 13

Ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.

Определение 66: Ортогональная матрица

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $A^\top A = E_n$.

Обозначение. Множество всех ортогональных матриц размера n обозначается $O_n(\mathbb{R})$.

Замечание. Такие матрицы описывают все линейные изометрии $\mathbb{R}^n$, поэтому образуют подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Определение 67: Унитарные матрицы

Унитарная матрица — матрица, удовлетворяющая равенству $\overline{A}^{\top} A = E_n$ и принадлежащая $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Обозначение. Множество таких матриц обозначается $U_n(\mathbb{C})$.

Замечание. Определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

Определение 68

Определим специальную группу сохраняющую ориентацию:

$$\{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = SO_n(\mathbb{R}) \leqslant O_n(\mathbb{R}).$$

Замечание. Это подгруппа индекса 2. Ее называют **группой вращений** $\mathbb{R}^n$.

Вопрос 35 Сорпяженное линейное отображение: существование и единственность. Свойства. Примеры.

Определение 69: Спряженное отображение

Пусть L — линейное отображение $L\colon U \to V$ между евклидовым и унитарным пространствами. Тогда **сопряженным отображением к** L называется такое линейное отображение L^* , то $\langle L^* x, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$ для всех $x \in V,\ y \in U$.

Теорема 22

Сопряженное линейное отображение единственно. Более того, если в U и V выбрать ортонормированные базисы u и v, матрица L в этих базисах есть A, то матрица сопряженного отображения будет равна $\overline{A}^{\top}$.

Следствие 14

Сопряженный оператор к оператору L существует и единственен. Более того, если задан ортонормированный базис $e_1, \dots e_n$ и матрица A (матрица L), то матрица $L^* = \overline{A}^{\top}$.

Лемма 27: Общие свойства

1. $(L+T)^* = L^* + T^*$
2. $(LT)^* = T^* L^*$
3. $(\lambda L)^* = \overline{\lambda} L^*$
4. $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$
5. $L^{**} = L$

Определение 70: Самомопряженность

L — оператор на евклидовом или унитарном пространстве V называется **самосопряженным**, если $L = L^*$.