Лекция 6

20 march

0.1 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m,\ Y = \mathbb{R}^n$

Statement. *Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $f_1, f_2, \dots f_n$ дифференцируемы в точке x и*

$$df(x) = (df_1(x), \dots df_n(x))) \,, \qquad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}),\ f_j \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Запишем

$$df(x)h = (df_1(x)h, \dots df_n(x)h) \,.$$

Тогда

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots f_n(x+h) - f_n(x)) \,.$$

Первое слагаемое равно $df(x)h$, а правая ☐

Statement. *Если $n = 1$, то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то существуют все частные производные и*

$$df(x)h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j, \quad h = (h_1, \dots h_n)^T.$$

при этом

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right).$$

Statement. *Вернемся к . Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x и существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$, $j = 1, \dots m$, $k = 1, \dots n$*

$$\partial f(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \dots \\ \dots \\ df_n(x)h \end{pmatrix}.$$

Statement. *Если есть отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, и они дифференцируемы, то $d(f \circ f)(x) = dg(f(x))df(x)$:*

$$\begin{pmatrix} & \dots & \\ \dots & \frac{(\partial g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \dots & \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \dots & \\ \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x) & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix}.$$

Правило цепочки:

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

Statement.

Example 0.1.1 (вычисление частных производных)**.** Пусть $f(x, y) = x^3 + 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x.$$

То есть

$$df(x, y)h = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Через градиенты

$$\text{grad}.$$

Statement. *Если $f\colon \mathbb{R}^m \to R$, то частные производные можно определять формулами*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T.$$

(Единица стоит на i-м месте.) Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

Definition 1: Производная по вектору

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R},\ v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v. Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v.

Property (Экстремальное свойство градиента)**.** *В случае $\mathbb{R}^m$*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v\rangle,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leqslant |\text{grad} f(x)|\, |v|\,.$$

Функция растет быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right|.$$

Доказательство. Все рассуждения предполагают, что f дифференцируема в x.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v\rangle \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x + tv) - f(x) = df(x)(tv) + o_{t\to 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = df(x)v + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\to 0}.$$

□

0.2 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

Theorem 0.2.1 (Теорема о конечном приращении). *Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ непрерывно на $[x, x+t] \subset U$ и дифференцируемо на $(x, x+h)$. Тогда*

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leqslant \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

Доказательство. Обозначим супремум $M = \sup_{\xi \in (x,x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\Theta \in (0,1)} \|df(x, +\Theta h)\|_{L(X,Y)}$. Достаточно проверить

$$\forall [\xi', \xi''] \subsetneq (x, x+h)\colon \|f(\xi') - f(\xi'')\| \leqslant M\|\xi' - \xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1 = [\xi_1', \xi_1'']\colon \|f(\xi_1') - f(\xi_1'')\| \geqslant (M + \varepsilon_0)\|\xi_1' - \xi_1''\|, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Разделим отрезок пополам: $\Delta_1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 = [\xi_1', \frac{\xi_1' + \xi_1''}{2}] \cup [\frac{\xi_1' + \xi_1''}{2}, \xi_1'']$. На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность $\Delta_1 \supset \Delta 2 \ldots$. Пусть $\{\xi_0\} = \cap \Delta_i$. Тогда

$$f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0) = df(\xi_0)\delta + \alpha(\delta), \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \overset{\delta \to 0}{\to} 0.$$

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\colon \left(\|\delta\| < \varepsilon \Longrightarrow \|f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\delta\|, \quad \frac{\alpha(\delta)}{\|\delta\|} \overset{\delta \to 0}{\to} 0\right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности $\exists N\colon \forall n > N \quad \Delta_n \subset B(\xi_0, \varepsilon)$.

$$\|f(\xi_n') - f(\xi_m'')\| \leqslant + \begin{cases} \|f(\xi_n') - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n' - \xi_0\| \\ \|f(\xi_n'') - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n'' - \xi_0\| \end{cases} = \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n' - \xi_n''\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

Note. В правой части можно юююю

Note. На прямой теорема Лагранжа дает существование $\xi \in (x, x+\varepsilon)$:

$$|f(x+h) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

Note. В $\mathbb{R}^n$ есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

Corollary. Если f из теоремы и $A \in L(X,Y)$, то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leqslant \sup_{\xi \in (x,x+h)} \|df(\xi - Ah)\|\|h\| = \sup_{v \in (0,1)} \|df(x + vh - Ah\|\|h\|.$$

Это теорема при $g(x) = f(x) - Ax$.

Corollary. Если K — выпуклый компакт в X, $f \in C^1(K,Y)$, то f — Липшицево на K.

Definition 2

Если $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо во всех точках U и $df\colon U \to L(X, Y)$ непрерывно, то говорят, что f непрерывно дифференцируемо на U и пишут $f \in C^1(U, Y)$

Note. $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ непрерывно дифференцируемо на U тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

Theorem 0.2.2 (Признак дифференцируемости)**.** *Пусть $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$, $x \in U$. Предположим, что f имеет все частные дифференциалы в U и они непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке x.*

Доказательство. Докажем для $m = 2$. Дифференциал должен выглядеть так: $Lh = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \partial_{x_2} f(x)h_2$. $x \in U \subset X_1 \times X_2$.

Проверим $\|f(x + h) - f(x) - Lh\| = o(h)$ при $h \to 0$.

$$..(x) \leqslant \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1) - \partial_{x_2} f(x_1 x_2)h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1+h_1, x_2+\Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1+\Theta h, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leqslant .$$

Заметим, что $\|h_1\| \leqslant \|h\| \wedge \|h_2\| \leqslant \|h\|$. Тогда можем переписать так:

$$\leqslant \|h\| \cdot \left(\sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_1} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремиться к 0 при $h \to 0$. $\square$

Corollary. Непрерывная дифференцируцемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

Theorem 0.2.3 (Теорема о конечном приращении для функций)**.** *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x + h] \in U$ и дифференцируема на $(x.x + h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x + h)$, что*

$$f(x + h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Corollary. Если U — выпуклое множество и $df(x) = 0$ для любого x из U, то $f(x) = const$ на U.

Corollary. Если U — открытое связное множество в $df(x) = 0$ для всех $x \in U$, то $f(x) = const$ на U.