

Билеты по алгебре
I семестр

Тамарин Вячеслав

14 января 2020 г.

Вопрос 1 Векторное пространство

Def 1. Пусть $(V, +)$ — абелева группа, F — поле, и задана операция (умножение) $V \times F \rightarrow V$. Предположим, что $\forall u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие свойства:

1. $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$
2. $v(\alpha + \beta) = v\alpha + v\beta$
3. $(v + u)\alpha = v\alpha + u\alpha$
4. $v \cdot 1 = v$

Тогда V называется **векторным пространством** над полем F .

Property.

1. $v \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
2. $v \cdot (-1) = -v$
3. $v \cdot (-\alpha) = (-v)\alpha = -(v\alpha)$
4. $v \cdot \sum \alpha_i = \sum v\alpha_i$
5. $\sum v_i \cdot \alpha = \sum v_i\alpha$

Exs.

1. Множество векторов в \mathbb{R}^3
- 2.

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

3. X — множество, $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$
 $f, g : X \rightarrow F$
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ — многочлены от одной переменной t

Вопрос 2 Подпространство, линейная оболочка

Def 2. Подмножество $U \subseteq V$ называется **подпространством**, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V .

Statement 1 (критерий подпространства). Подмножество $U \subseteq V$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\forall u, v \in U, \alpha \in F : u + v, u\alpha \in U$.

Def 3. Пусть $u_1, \dots, u_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Сумма

$$\sum_{k=1}^n u_k \alpha_k$$

называется **линейной комбинацией** векторов u_1, \dots, u_n с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Линейная комбинация называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю.

Note. Пусть $S \subseteq V$, и задан набор чисел $\alpha_s \in F$, $s \in S$. Операция бесконечной суммы будет определена только в случае, когда почти все α_s равны нулю.

Def 4. Линейной оболочкой набора S называется подпространство, порожденное S , то есть наименьшее подпространство, содержащее S .

Designation. Линейная оболочка набора S обозначается $\langle S \rangle$.

Statement 2. $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \alpha_k \mid u_k \in S, \alpha_k \in F \right\}$

Def 5. Если $\langle S \rangle = V$, то S называется **системой образующих** пространства V .

Def 6. Кортеж векторов (u_1, \dots, u_n) называется **линейно независимым**, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Множество $S \subseteq V$ называется **линейно независимым**, если любой кортеж, составленный из конечного числа различных векторов из S , является линейно независимым.

Def 7. Базис — линейно независимая система образующих.

Вопрос 3 Матрицы

i Конечные матрицы

Def 8. Двумерный массив $m \times n$ элементов поля F называется **матрицей** размера $m \times n$ над F .

Designation. Множество таких матриц обозначается $M_{m \times n}(F)$. Если $m = n$, пишут $M_n(F)$. Элемент матрицы A в позиции (i, j) записывается a_{ij} .

Property.

- Для двух матриц одинакового размера определена операция поэлементной суммы: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Также определено умножение матрицы на число: $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.
- Произведением матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$ на матрицу $B \in M_{n \times k}$ называется матрица $C = AB \in M_{m \times k}(F)$ элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

Theorem 1. Множество $M_{m \times n}(F)$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством над полем F .

Доказательство. Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число:

$$\begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \\ (AB)\alpha = A(B\alpha) = (A\alpha)B \end{cases}.$$

Все кроме первого свойства очевидны. Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k \in K} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \\ &= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left(\sum_{k \in K} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j \in J} a_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}$$

Def 9. Квадратная матрица E с 1 на главной диагонали и остальными нулями называется **единичной**.

Property. Умножение данной матрицы на единичную справа и слева не ее не изменяет.

Матрица E_n является нейтральным элементом в $M_n(F)$. □

Обобщение конечных матриц

Пусть даны множества X_{ij}, Y_{jh} , коммутативные моноиды $(Z_{ih}, +)$, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $h = 1, \dots, k$, и функции «умножения» $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$, $(x, y) \mapsto xy$. Обозначим через X, Y, Z наборы множеств X_{ij}, Y_{jh}, Z_{ih} , соответственно, через $M(X)$ — множество матриц A с элементами $a_{ij} \in X_{ij}$, и аналогично $M(Y), M(Z)$. Тогда можно определить произведение матриц $A \in M(X)$ и $B \in M(Y)$ как матрицу $C = AB \in M(Z)$, где $c_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh}$.

Если все X_{ij}, Y_{jh} будут коммутативными моноидами, а функция умножения дистрибутивной, умножение матриц тоже будет дистрибутивным и ассоциативным.

ii Произвольные матрицы

Пусть I, J — произвольные множества (возможно бесконечные), элементами которых мы будем индексировать строки и столбцы матриц. Пусть $\forall i \in I \wedge j \in J$ задано множество X_{ij} , и обозначим набор всех таких множеств через X . Тогда матрицей размера $I \times J$ над X называется функция $A : I \times J \rightarrow \bigcup X_{ij}$ $(i, j) \mapsto a_{ij}$, такая что $a_{ij} \in X_{ij}$.

Designation. Множество матриц размера $I \times J$ над X обозначается $M_{I \times J}(X)$. Если $I = \{1\}$, то матрица размера $I \times J$ будут называться столбцами длины J , а если $J = \{1\}$, то столбцами высоты I . Множества строк обозначим данной длины ${}^J X$, множество столбцов — X^J .

Будем считать, что все X_{ij} — абелевы группы в аддитивной записи. Тогда сумма двух матриц одного размера определяется поэлементно: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Если все X_{ij} — векторные пространства над полем F , также можно определить умножение на число: $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.

Умножение матриц

Пусть все операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ дистрибутивны (для $a \cdot 0 = 0$), и в каждом столбце матрицы Y почти все элементы равны 0.

Designation. Обозначим $M_{J \times H}^{c.f.}(Y) \subset M_{J \times H}(Y)$, состоящее из всех матриц B , у которых для любого фиксированного $h \in H$ почти все элементы b_{jh} равны 0.

Def 10. Пусть $\forall i \in I, j \in J, h \in H$ заданы операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$, причем $\forall x, x' \in X_{ij}$ и $\forall y, y' \in Y_{jh}$ выполнены равенства

$$(x + x')y = xy + x'y \wedge x(y + y') = xy + xy'.$$

Произведение матриц $A \in M_{i \times J}(X)$ и $B \in M_{J \times H}^{c.f.}(Y)$ как матрицу $AB \in M_{I \times H}(Z)$ с элементами

$$(AB)_{ih} = \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jh}.$$

При этом суммы определены, так как почти все слагаемые равны нулю.

Note. Аналогично определяется умножение матриц $A \in M_{I \times J}^{r.f.}(X)$ и $B \in M_{J \times H}(Y)$.

Lemma 1. Обычные свойства умножения матриц 1 выполнены, если определены все входящие в формулы операции.

Если $\forall i, j, h \in I$ заданы дистрибутивные операции умножения $X_{ij} \times X_{jh} \rightarrow X_{ih}$, то множество $M_{I \times I}^{c.f.}(X)$ является кольцом с единицей.

Designation. Если X_{ij} одно и то же поле F для всех i, j , будем писать $M_{i \times J}(F)$ вместо $M_{i \times J}(X)$. Если $I = J$, то будем писать $M_I(F)$ вместо $M_{I \times I}(F)$. Если $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$, то можем писать $M_{m \times n}(F)$.

Другие характеристики матриц

Def 11. Множество обратимых элементов кольца $M_n(F)$ называется полной линейной группой степени n над F и обозначается $GL_n(F)$.

Designation. Для множества $M_{I \times \{1\}}^{c.f.}(F)$ введем специальное обозначение F_{fin}^I и будем называть его множеством финитных столбцов высоты I над F . Другим словами, F_{fin}^I — множество финитных (у которых почти все значения равны 0) функций из I в F . Аналогично, ${}^J F_{fin} = M_{\{1\} \times J}^{r.f.}(F)$.

Def 12. Пусть $A \in M_{I \times J}(F)$. Матрица $A^T \in M_{J \times I}(F)$ с элементами $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ называется транспонированной к A .

Statement 3. $(AB)^T = B^T A^T$

Note. Для обозначения столбца часто используется строка $(a_1, \dots, a_n)^T$.

Вопрос 4 Эквивалентные определения базиса

Theorem 2 (Эквивалентные определения базиса). *Следующие условия на подмножество v векторного пространства V эквивалентны:*

- (1) v — линейно независимая система образующих
- (2) v — максимальная линейно независимая система
- (3) v — минимальная система образующих
- (4) любой элемент $x \in V$ представляется в виде линейной комбинации набора v , причем единственным образом

Доказательство.

1 \implies 2 Пусть v — не максимальная линейно независимая система. Мы знаем, что v — система образующих. Тогда любой элемент $a \in V$ представляется в виде линейной комбинации v , а значит любой набор, содержащий v , принадлежит линейной оболочке $\langle v \rangle$, следовательно, набор линейно зависимый.

2 \implies 1 Так как v максимальная линейно независимая система, любой элемент $a \in V$ выражается через элементы v . Следовательно, v — система образующих.

1 \implies 3 Пусть из v можно убрать некоторые элементы так, что полученный набор u будет минимальной системой образующих. Тогда любой элемент набора $v \setminus u$ представим в виде линейной комбинации u . Следовательно, v линейно зависим.

3 \implies 1 Если v линейно зависим, то во всех линейных комбинациях набора v можно заменить один элемент на линейную комбинацию других. А тогда v не минимален.

1 \implies 4 Так как v — система образующих $\langle v \rangle = V$. Теперь докажем, что представление единственно. Пусть $x = va = \sum_{y \in v} ya_y$, $a \in F_{fin}^v$. Предположим, что $\exists b \in F_{fin}^v : x = vb$. Тогда $0 = va - vb \implies 0 = v(a - b)$. Так как v линейно независим, можем сократить: $0 = a - b$, значит представление единственно.

4 \implies 1 Так как любой элемент представим в виде линейной комбинации набора v , $\langle v \rangle = V$. Так как представление единственно, v линейно независим.

□

Вопрос 5 Существование базиса

Theorem 3 (О существовании базиса). *Пусть $X, Y \subseteq V$, причем набор X линейно независим, а Y — система образующих. Тогда существует базис Z , содержащий X и содержащийся в Y .*

Доказательство. Пусть \mathcal{A} — набор всех линейно независимых подмножеств Y , содержащих X . Этот набор не пуст, так как содержит X . Пусть \mathcal{L} — линейно упорядоченный поднабор в \mathcal{A} . Обозначим через S объединение всех множеств из \mathcal{L} . Так как $\forall C \in \mathcal{L}$ лежит между X и Y , S обладает этим свойством. Рассмотрим конечное подмножество $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq S$. По определению объединения множеств $\forall i = 1, \dots, n \exists B_i \in \mathcal{L}$, содержащее v_i . Так как \mathcal{L} — лум, среди множеств B_1, \dots, B_n найдется наибольшее B_k . Тогда $v_1, \dots, v_n \in B_k$. Так как B_k линейно независимо, то и $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно независимо. Следовательно, S линейно независимо, значит $S \in \mathcal{A}$. По лемме Цорна получаем, что \mathcal{A} содержит максимальных элемент. Пусть это Z — максимальное из линейно независимых подмножеств Y , содержащих X .

Пусть $y \in Y \setminus Z$. Так как Z линейно независимо, $Z \cup \{y\}$ линейно зависимо, то есть $\exists a \in F_{fin}^Z$, $a_y \in F : ya_y + Za = 0$, где $a_y \neq 0$. Следовательно, $y \in \langle Z \rangle$. Тогда $Y \subseteq \langle Z \rangle$. С другой стороны, $V = \langle Y \rangle$ — наименьшее подпространство, содержащее Y . Значит $V \subseteq \langle V \rangle$, то есть Z — система образующих, следовательно, и базис.

□

Вопрос 6 Лемма о замене

Theorem 4 (лемма о замене). Пусть $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ — линейно независимый набор из n векторов, v — система образующих пространства V . Тогда:

1. $\exists v_1, \dots, v_n \in v : v \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \cup u = w$ — система образующих.
2. Причем, если u — базис, то w — базис.

Доказательство. Индукция по n .

База: $n = 0$. Утверждение для нуля верно.

Переход: $n - 1 \rightarrow n$. По предположению индукции $\exists v_1, \dots, v_{n-1} \in v$ такие, что $w' = v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \cup \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ является системой образующих. Причем, если v был линейно независимым, то w' — базис.

u_n выражается через линейную комбинацию набора w' :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in F, w_j \in v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

Заметим, что кто-то из $\beta_j \neq 0$ (иначе u линейно зависим). Не умоляя общности, считаем, что $\beta_m \neq 0$. Пусть $v_n = w_m$. Тогда v_n выражается через линейную комбинацию набора $w = w' \setminus \{v_n\} \cup \{u_n\}$. Следовательно, $w' \subseteq \langle w \rangle$, значит w — система образующих.

Пусть набор v (а тогда и w') линейно независим. Рассмотрим $w'' = w' \setminus \{v_n\}$ и линейную комбинацию $w''a + u_n \alpha$ набора w , где $a \in F_{fin}^{w''}$.

$$0 = w''a + u_n \alpha = w''a + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i \alpha + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j \alpha = w''b + v_n \beta_m \alpha, \quad b \in F_{fin}^{w''}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $w''b + v_n \beta_m \alpha$ является нетривиальной линейной комбинацией набора $w'' \cup \{v_n\} = w''$, равной нулю. Значит, $\alpha = 0$, тогда $w''a = 0$. Так как $w'' \subseteq w'$, w'' линейно независим, следовательно, $a = 0$.

Получаем, что w линейно независим.

□

Вопрос 7 Количество элементов в базисе

Theorem 5 (количество элементов в базисе). Любые два базиса пространства V равномощны.

Доказательство. Пусть $v, u = \{u_1, \dots, u_n\}$ — базисы пространства V . Не умоляя общности, считаем, что мощность множества $v > n$. Перенумеруем элементы базиса u так, что $u_1, \dots, u_k \notin v$ и $u_{k+1}, \dots, u_n \in v$.

Тогда по лемме о замене 4 существует подмножество $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq v : w = v \setminus \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$ — базис. $u \subseteq w$ и $|v| = |w|$. Так как базис — максимальная линейно независимая система, то один базис не может строго содержаться в другом. Следовательно, $w = u$, откуда $|v| = n$. □

Def 13. Размерность пространства — мощность любого базиса этого пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем существует конечный базис.

Вопрос 8 Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений

i Линейные отображения

Def 14. Пусть V и U — векторные пространства, L — функция $V \rightarrow U$. L называется **линейным отображением**, если $\forall x, y \in V, \alpha \in F$:

$$\begin{aligned} L(x + y) &= L(x) + L(y) \\ L(x\alpha) &= L(x)\alpha \end{aligned}$$

Биективное линейное отображение называется **изоморфизмом**. Линейное отображение из пространства в само себя называется **линейным оператором**. Отображение из пространства в основное поле часто называется **функционалом**.

Property. Пусть вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ и отображение $L : V \rightarrow U$.

$$L(v) = (L(v_1), \dots, L(v_n)) \in {}^nU.$$

Тогда

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^n.$$

Note. В случае бесконечного v можем переписать аналогично, обозначив $L(v) \in {}^nU : L(v)_x = L(x) \quad \forall x \in v$:

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^v.$$

Designation. Пусть v — базис V . Тогда $\forall x \in V \exists! a \in F_{fin}^v : x = va$. Тогда $a = x_v$ — столбец координат x в базисе v .

Lemma 2. Пусть V — векторное пространство над полем F , а v — базис V . Отображение $\varphi_v : V \rightarrow F^v$, заданное равенством $\varphi_v(x) = x_v$, является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Рассмотрим $x, y \in V$.

$$\begin{cases} vx_v = x \\ vy_v = y \end{cases} \implies v(x_v + y_v) = x + y = v(x + y)_v \implies \varphi_v(x + y) = \varphi_v(x) + \varphi_v(y).$$

$$v(x\alpha)_v = x\alpha = v(x_v\alpha) \implies \varphi_v(x\alpha) = \varphi_v(x)\alpha.$$

Построим обратное отображение: $\theta_v : F^v \rightarrow V$, $\theta_v(a) = va$. Следовательно, φ_v — биективное линейное отображение. \square

Corollary 1 (классификация векторных пространств). Любое векторное пространство изоморфно пространству F^I для некоторого множества I , мощность которого равна размерности пространства.

Два пространства изоморфны между собой тогда и только тогда, когда их размерности равны.

ii Матрицы линейных отображений

Statement 4. Пусть $L : U \rightarrow V$ — линейное отображение, $u = (u_1, \dots, u_n)$ — базис U , $v = (v_1, \dots, v_m)$ — базис V .

$$\exists! A \in M_{m \times n}(F) : \forall x \in U \quad L(x)_v = Ax_u.$$

Столбцы матрицы A вычисляются по формуле $a_{*k} = L(u_k)_v$.

Доказательство. По определению столбца координат $x = ux_u$.

$$\varphi_v \circ L(x) = \varphi_v \circ L(ux_u).$$

Тогда $L(x)_v = \varphi_v(L(x)) = \varphi_v(L(u))x_u$. Пусть $A = \varphi_v(L(u)) = (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$.

Докажем единственность. Предположим, что $Ax = Bx$ для любого столбца x . Тогда $A = B$. \square

Def 15. Матрица A из прошлого утверждения 4 называется матрицей отображения L в базисах u, v и обозначается через L_u^v .

Если $U = V$, $u = v$, говорят о матрице оператора L в базисе u и обозначают ее через L_u .

$$L(x)_v = L_u^v x_v \text{ или } L(x)_u = L_u x_u \text{ в случае } U = V \wedge u = v.$$

Theorem 6. Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов.

Если U, V, W — конечномерные линейные пространства с базисами u, v, w , соответственно, $L : U \rightarrow V$, $M : V \rightarrow W$ — линейные отображения, то $(M \circ L)_u^w = M_v^w L_u^v$.

Если $U = V = W$ и $u = v = w$, то $(M \circ L)_u = M_u L_u$.

Вопрос 9 Матрица перехода от одного базиса с другому. Замена координат и изменение матрицы оператора при замене базиса

i Матрица перехода

Theorem 7. Пусть v — базис n -мерного пространства V над полем F . Набор $u = (u_1, \dots, u_n)$ является базисом тогда и только тогда, когда существует $A \in \text{GL}_n(F)$ такая, что $u = vA$.

Def 16. Если u, v — базисы, то A называется матрицей перехода от v к u и обозначается через $C_{v \rightarrow u}$

При этом:

- (1) Столбец матрицы $C_{v \rightarrow u}$ с номером k равен столбцу координат вектора u_k в базисе v . $(C_{v \rightarrow u})_k = (u_k)_v$
- (2) $C_{v \rightarrow u}^{-1} = C_{u \rightarrow v}$
- (3) Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

Доказательство.

\implies Положим $\forall k \in [1, n] : a_{*k} = (u_k)_v$. Тогда $va_{*k} = u_k \implies u = vA$

\implies Если $u = vA$, $\langle u \rangle = \langle vA \rangle = V$. При этом u минимален, так как иначе и v не минимален, значит u — базис.

1. По построению.

$$2. \begin{cases} u = vC_{v \rightarrow u} \\ v = uC_{u \rightarrow v} \end{cases} \implies uE = uC_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} \implies E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

3. Пусть $B \in M_{n \times m}(F)$ двусторонне обратима. $BB_1 = E_{n \times n} \wedge B_2B = E_{m \times m}$. Тогда $B_2 = B_2E_n = B_2(BB_1) = (B_2B)B_1 = E_m B_1 = B_1$. Значит $B_1 = B_2$. $B_1B = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} = B_1B \implies B$ — квадратная.

□

Note. Если пространство V бесконечномерно, почти все элементы каждого столбца должны быть равны нулю.

Note. Если $V = F^n$, e — стандартный базис, то $C_{e \rightarrow u}$ — матрица, составленная из столбцов базиса u .

ii Преобразование координат при замене базиса

Theorem 8. Пусть u, v — базисы пространства V .

$$\forall x \in V : x_v = C_{v \rightarrow u} x_u.$$

Доказательство. Запишем определение столбца координат $x = ux_u = vx_v$. Про базисы мы знаем, что $v = uC_{u \rightarrow v}$. Тогда

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \implies x_u = C_{u \rightarrow v}x_v.$$

□

iii Преобразование матрицы оператора при замене базиса

Note. Матрица перехода $C_{u \rightarrow v}$ совпадает с матрицей тождественного отображения 1_V в базисах u и v .

Lemma 3. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)$ — базис пространства U , $v = (v_1, \dots, v_n) \in^n V$ — набор векторов пространства V . Тогда существует единственное линейное отображение

$$L : U \rightarrow V : L(u) = v.$$

При этом

L инъективно тогда и только тогда, когда u линейно независим

L сюръективно тогда и только тогда, когда u — система образующих

L — изоморфизм тогда и только тогда, когда u — базис

Доказательство. $\forall x \in U : x = ux_u$. Тогда $\forall L : L(x) = L(u)x_u$. Зададим L так: $L(x) = vx_u$. Оно линейно и единственно. □

Note. Пусть u, v — базисы пространства V . Тогда матрица отображения L из леммы в базисе u совпадает с матрицей перехода $C_{u \rightarrow v}$.

Statement 5. Пусть u, u' — базисы пространства U , v, v' — базисы пространства V , $L : V \rightarrow U$ — линейное отображение. Тогда

$$L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} L_u^v C_{u \rightarrow u'}.$$

Доказательство.

$$L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v'} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}$$

□

Note. Если $U = V$ и $u = v$, $u' = v'$,

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

Вопрос 10 Внешняя и внутренняя пряма сумма пространств, естественный изоморфизм между ними

Designation. U, V — подпространства векторного пространства W над полем F .

Def 17. Сумма $U + V$ — совокупность $\{x + y \mid x \in U, y \in V\}$.

Note. $U + V \subseteq W \wedge U \cap V \subseteq W$.

Def 18. Пространство W называется внутренней прямой суммой подпространств U и V , если

$$\forall z \in W \exists! x \in U, y \in V : z = x + y.$$

То есть $W = U + V \wedge V \cap U = \{0\}$.

Def 19. U, V — векторные пространства. Их внешней прямой суммой называется их декартово произведение с покомпонентными операциями.

Designation. Обе прямые суммы обозначаются $U \oplus V$.

Note. Пространства U, V естественно вкладываются в из внешнюю прямую сумму: $\forall x \in U : x \mapsto (x, 0) \wedge \forall y \in V : y \mapsto (0, y)$. Если отождествить U и V с их образами, то внешняя сумма превращается в прямую сумму подпространств.

Statement 6. $U, C \leq W, U \oplus V$ — их внешняя прямая сумма. Зададим $\varphi : U \oplus V \rightarrow W$ так $\varphi(x, y) = x + y$. φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда W является внутренней суммой подпространств U и V .

Если $W = U \oplus V$, то объединение базисов U и V — базис W . Поэтому $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$.

Statement 7. $\forall U \leq W \exists V \leq W : W = U \oplus V$.

Доказательство. Выберем базис u подпространства U и дополним его до базиса пространства W : $u \cup v$. Тогда подойдет $V = \langle v \rangle$. \square

Theorem 9. Для пространств $U_1, \dots, U_n \leq V$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow V, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ — изоморфизм
- (2) $\forall x \in V \exists! (x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n) : x = x_1 + \dots + x_n$
- (3) $V = U_1 + \dots + U_n$ и $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\} \quad i \in [1, n]$
- (4) Объединение базисов подпространств U_1, \dots, U_n — базис V .

Вопрос 11 Ядро и образ линейного отображения. Слои линейного отображения

Def 20. Пусть $L : U \rightarrow V$ — линейное отображение. Тогда

Ядро отображения L — $\text{Ker } L = L^{-1}(0) := \{x \in U \mid L(x) = 0\}$

Образ отображения L — $\text{Im } L = \{L(x) \mid x \in U\}$

Statement 8. Пусть $L : U \rightarrow V$ — линейное отображение.

$$\text{Ker } L \leq U \wedge \text{Im } L \leq V.$$

Def 21. $L : U \rightarrow V$ — линейное отображение. Слой отображения над точкой $y \in V$ — множество $\{x \in U \mid L(x) = y\} = L^{-1}(y)$

Statement 9. Все слои отображения L являются сдвигами ядра. $L(x) = y, x \in U$:

$$L^{-1}(y) = x + \text{Ker } L.$$

Вопрос 12 Теорема о размерности ядра и образа. Теорема о размерности прямой суммы

Theorem 10 (о размерности ядра и образа). $L : U \rightarrow V$ — линейное отображение. Тогда

$$\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L.$$

Доказательство. $u = (u_1, \dots, u_k)$ — базис $\text{Ker } L$, $v = (v_1, \dots, v_m)$. Дополним базис ядра до базиса U : $u \cup v$ — базис U . Докажем, что $L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$ — базис образа.

$$\forall x \in \text{Im } L \exists y \in U : L(y) = x.$$

Разложим $y = ua + vb$, $a \in F^k, b \in F^m$

Тогда

$$x = L(y) = L(u) \cdot a + L(v) \cdot b.$$

Так как $u \in \text{Ker } L$: $L(u) = (L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)$. Следовательно, $L(v)$ — система образующих. Проверим, что $L(v)$ линейно независим. Пусть

$$L(v) \cdot c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(v)c = L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \text{Ker } L \Rightarrow vc = ud \text{ для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u — два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ — линейно независимый. \square

Theorem 11 (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения). Пусть $U, V \leq W$.

$$\dim U \cap V + \dim U + \dim V = \dim U + \dim V.$$

Доказательство. Зададим линейное отображение $L : U \oplus V \rightarrow W : L(u, v) = u + v$. Тогда $\text{Im } L = U + V$.

$$(u, v) \in \text{Ker } L \iff u + v = 0 \iff u = -v \in U \cap V.$$

$$\text{Ker } L = \{(u, -u) \mid u \in U \cap V\} \cong U \cap V.$$

По теореме о размерности ядра и образа

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = \dim U \cap V + \dim U + \dim V.$$

\square

Вопрос 13 Факторпространство и его универсальное свойство

Designation. V — векторное пространство, $U \leq V$.

Def 22. $x + U$ — аффинное подпространство или смежный класс V по U .

$y \sim_U x \iff y - x \in U$ — эквивалентность.

Def 23. Множество смежных классов V по U с операциями

$$(x + U) + (y + U) = (x + y) + U$$

$$(x + U)\alpha = x\alpha + U$$

называется факторпространством V по U и обозначается V/U .

Проверка корректности определения. Докажем, что определение операций не зависит от выбора представителей классов.

- Сложение

$$x' + U = x + U \implies x' + 0 \in x + U \implies x' \in x + U.$$

$$y' + U = y + U \implies y' + 0 \in y + U \implies y' \in y + U.$$

Тогда $\exists z \in U : x' = x + z$ и $\exists t \in U : y' = y + t$.

$$\begin{aligned} (x' + U) + (y' + U) &:= (x' + y') + U = \\ &= (x + y) + \underbrace{(z + t)}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq (x + y) + U \end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

- Умножение

$$\begin{aligned} (x' + U)\alpha &:= x'\alpha + U = \\ &= (x + z)\alpha + U = x\alpha + \underbrace{z\alpha}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq x\alpha + U \end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

□

Designation. $\pi_U : V \rightarrow V/U$ — естественная проекция: $\pi_U(x) = x + U$.

Note. π_U линейно и сюръективно $\text{Ker } \pi_U = U$.

По теореме о размерности ядра и образа $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Statement 10. Пусть $U \subseteq V$. Для любого линейного отображения $L : V \rightarrow W$, $U \subseteq \text{Ker } L$, существует единственное отображение $\tilde{L} : V/U \rightarrow W : L = L \circ \pi_U$. При этом сюръективность \tilde{L} равносильна сюръективности L , а инъективность \tilde{L} — тому, что $\text{Ker } L = U$. То есть такая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \tilde{L} & \\ V/U & & \end{array}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{L}(x + U) = L(x)$. Эта формула задает линейное отображение и равносильна $L = \tilde{\pi}_U$. Следовательно, \tilde{L} существует и единственно.

π_U инъективно, следовательно, L сюръективно $\iff \tilde{L}$ сюръективно.

Отображение \tilde{L} инъективно $\iff \text{Ker } \tilde{L} = \{0_{V/U} + U\}$.

$$x + U \in \text{Ker } \tilde{L} \iff \tilde{L}(x + U) = 0 \iff L(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } L.$$

□

Theorem 12 (о гомоморфизме). $L : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

$$V/\text{Ker } L \cong \text{Im } L.$$

Доказательство. Возьмем $U = \text{Ker } L$ и заменим W на $\text{Im } L$. Далее применим утверждение 10. □

Вопрос 14 Ранг набора элементов векторного пространства, ранг оператора, строчной и столбцовый ранг матрицы

Def 24.

Рангом набора векторов называется размерность линейной оболочки этого набора.

Рангом линейного оператора называется размерность образа этого оператора.

Столбцовым (строчным) рангом матрицы называется ранг набора ее столбцов (строк).

Note. Из любой системы образующих можно выбрать базис, следовательно, ранг набора векторов — наибольшее количество линейно независимых векторов из этого набора. Так как образы базисных векторов порождают образ оператора, то ранг оператора равен рангу набора базисных векторов, а он равен столбцовому рангу матрицы оператора (вне зависимости от выбора базиса).

Theorem 13. Пусть $A \in M_{m \times n}(F)$.

- (1) Набор столбцов матрицы A линейно независим тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен n .
- (2) Набор столбцов матрицы A порождает F^m тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен m .
- (3) Набор столбцов матрицы A является базисом в F^m тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг $m = n$. В этом случае A обратима.
- (4) Если все строки матрицы A линейно независимы, и все столбцы линейно независимы, то $m = n$, а A обратима.

Доказательство. Пункты (1) и (2) очевидны. Из них следует, что столбцовый ранг равен $m = n$ тогда и только тогда, когда набор столбцов — базис в F^m . В этом случае A — матрица перехода от стандартного базиса к базису из столбцов матрицы A , а значит A обратима.

Количество линейно независимых столбцов и строк не может быть больше размерности, следовательно, $n \leq m \wedge m \leq n \implies n = m$. □

Lemma 4. Умножение матрицы на обратимую (слева или справа) не меняет ее столбцовый и строчной ранги.

Доказательство. Умножение матрицы оператора слева на обратимую матрицу соответствует замене базиса в его области значений, а справа — в области определения. Так как столбцовый ранг оператора не зависит от выбора базиса, то столбцовый ранг не меняется при умножении.

Строчный ранг равен столбцовому рангу транспонированной к ней, а транспонированная к обратной — обратима. \square

Вопрос 15 PDQ-разложение. Равенство строчного и столбцового рангов матрицы

Theorem 14 (PDQ-разложение). Пусть U, V — конечномерные пространства. Для любого линейного отображения $L : U \rightarrow V$ существуют базисы пространств U и V , в которых матрица отображения L имеет вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Любая матрица $A \in M_{m \times n}(F)$ представляется в виде $A = PDQ$, где $P \in GL_m(F)$, $Q \in GL_n(F)$, а D записывается в блочном виде $D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом размер единичной матрицы равен строчному и столбцовому рангу A .

Доказательство.

Первое утверждение Выберем базис (f_1, \dots, f_k) ядра оператора L и дополним его до базиса $u = (g_1, \dots, g_l, f_1, \dots, f_k)$ пространства U . Тогда векторы $L(g_1), \dots, L(g_l)$ линейно независимы и их можно дополнить до базиса v пространства V . Получаем нужную матрицу отображения L в базисах u, v .

Второе утверждение Пусть $L : F^n \rightarrow F^m$ — оператор умножения на матрицу A . Выберем базис u пространства F^n и v — пространства F^m так, чтобы $L_v^u = D$. Тогда

$$A = A_e^e = C_{e \rightarrow u} L_v^u C_{v \rightarrow e} = PQD,$$

где e — стандартный базис пространства столбцов.

Так как ранги при умножении обратимую матрицу не меняются, столбцовый и строчный ранги равны рангу единичной матрицы. \square

Lemma 5. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда ее ранг равен ее размеру.

Theorem 15 (Кронекера-Капелли). Система $Ax = b$ совместима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (Ab) .

Вопрос 16 Разложение Брюа

Def 25. Матрица A называется верхней (нижней) треугольной, если $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$ ($i < j$).

Треугольная матрица с 1 на диагонали называется унитреугольной.

Designation.

$B = B_n(F)$ — множество верхних треугольных матриц.

$B^- = B_n^-(F)$ — множество нижних треугольных матриц.

$U = U_n(F)$ — множество верхних унитреугольных матриц.

$U^- = U_n^-(F)$ — множество нижних унитреугольных матриц.

$W = W_n$ — множество матриц перестановок, то есть матрицы, отличающиеся от единичной перестановкой столбцов.

Lemma 6. Множества W, B, B^-, U, U^- являются подгруппами в $GL_n(F)$.

Theorem 16 (разложение Брюа). $\mathrm{GL}_n(F) = BWB$

Доказательство. Докажем, что $\forall a \in \mathrm{GL}_n(F) \exists b, c \in D, w \in W : a = bwc$.

По индукции по n докажем, что, домножая a слева и справа на верхнетреугольные матрицы, можно получить матрицу перестановки.

Пусть i — наибольший индекс, для которого $a_{i1} \neq 0$. Запишем a в виде

$$a = \begin{pmatrix} x & * \\ a_{i1} & z \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i-11} \end{pmatrix}, \quad \text{а } z = (a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

Домножая a слева на верхнетреугольную матрицу, получим матрицу, у которой первый столбец совпадает с i -м столбцом единичной матрицы. После этого, домножая справа на подходящую верхнетреугольную матрицу можем сделать i -ю строку равной первой строке единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} E & -\frac{x}{a_{i1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ a_{i1} & z \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{a_{i1}} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых матриц } f, g.$$

Заметим, что так как строки полученной матрицы линейно независимы, то и строки матрицы $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ тоже линейно независимы. Поэтому последняя матрица обратима и к ней можно применить индукционное предположение. Следовательно, существуют матрицы $u, v \in B_{n-1}(F) : u \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} v \in W_{n-1}$. Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ 0 & u^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \text{где } u^{(1)} \in B_{i-1}(F), \quad u^{(3)} \in B_{n-i}(F).$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ 0 & u^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot v$$

является матрицей-перестановкой, следовательно,

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} & 0 & u^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

— тоже матрица-перестановка.

Так как обратная к верхнетреугольной — верхнетреугольная, получаем нужное утверждение. □

Def 26. Множество BwB при фиксированном w называется клеткой Брюа.

Statement 11. Две различные клетки Брюа не пересекаются.

Вопрос 17 Разложение Гаусса

Def 27. Главная подматрица матрица A порядка k — подматрица, стоящая на пересечении первых k строк и первых k столбцов.

Lemma 7. Умножение матрицы на нижнюю унитреугольную слева и на верхнюю унитреугольную справа не меняет обратимости главных подматриц.

Доказательство. $a^{(k)}$ — главная подматрица $k \times k$ в a . Умножим на нижнюю унитреугольную матрицу слева:

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где $b \in U^-(F)$. Обратимость $a^{(k)}$ равносильна обратимости $ba^{(k)}$, так как b обратима. □

Lemma 8. Все главные подматрицы обратимы тогда и только тогда, когда матрица раскладывается в произведение обратимых унитреугольных верхнетреугольной и нижнетреугольной.

Доказательство. Доказываем следствие влево. Индукция по n .

База: $n = 1$ — очевидно

Переход:

$$a^{(n)} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к $a^{(n-1)}$. Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. □

Lemma 9. $\forall a \in \text{GL}_n(F) \exists w \in W$: все подматрицы в wa обратимы.

Доказательство. Индукция по k . Докажем, что существует перестановка $a \in \text{GL}_n(F)$ такая, что главные подматрицы размера не более $k \times k$ обратимы.

База: $k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем i -ю строку с первой.

Переход: $k \rightarrow k+1$ Все столбцы обратимой матрицы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы, составленной из первых k столбцов, равен k Тогда существует k линейно независимых строк этой матрицы. Переставим эти строки на первые k мест.

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы $a^{(k)}$ главная подматрица порядка k обратима. По индукционному предположению все меньшие главные подматрицы в $a^{(k)}$ обратимы. □

Theorem 17 (Разложение Гаусса). $\mathrm{GL}_n(F) = WB^-B$

Доказательство. Рассмотрим $a \in \mathrm{GL}_n(F)$. Построим перестановку w , чтобы все главные подматрицы были обратимы. Далее домножим справа и слева на унитарные матрицы так, чтобы получить верхнетреугольную матрицу: $wa \in B^-B$. Домножая на B, B^- , получим, что хотели. \square

Вопрос 18 Определение группы, подгруппы, прямое произведение групп

Def 28. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее

1. $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность);
2. $\exists e \in X \forall a \in X : e * a = a * e = a$ (нейтральный элемент);
3. $\forall a \in X \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$ (обратный элемент),

называется группой.

Def 29. Непустое подмножество $H \subset G$ называется подгруппой G , если H — группа относительно операции, заданной в G .

Designation. Обозначается: $H \leq G$

Lemma 10. $H \subset B$. H — подгруппа тогда и только тогда, когда $\forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$.

Property. Любая группа имеет две тривиальные подгруппы: сама группа и множество, состоящее из одного нейтрального элемента.

Def 30. Пусть G_1, G_2 — группы с операциями $*_1$ и $*_2$ соответственно. Прямое произведение $G = G_1 \times G_2$ — декартово произведение G_1 и G_2 с операцией $*$:

$$(g_1, g_2) * (g'_1, g'_2) = (g_1 *_1 g'_1, g_2 *_2 g'_2), \quad g_1, g'_1 \in G_1, \quad g_2, g'_2 \in G_2.$$

Аналогично определяется произведение любого семейства групп.

Вопрос 19 Подгруппа, порожденная множеством. Классификация циклических подгрупп

Def 31. Пусть X — подмножество группы G . Подгруппой, порожденной множеством X , называется наименьшая группа по включению, содержащая X .

Designation. Подгруппа, порожденная X , обозначается $\langle X \rangle$.

Def 32. Группа, порожденная одним элементом, называется циклической.

Lemma 11. $\langle X \rangle = \{x_1 \dots x_k \mid k \in \mathbb{Z}_+, x_i \in X \cap X^{-1}\}$.

Statement 12. Любая циклическая группа изоморфна \mathbb{Z} или \mathbb{Z}_n .

Доказательство. $G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Разберем два случая:

1. $g^m \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \implies \nexists a, b \in \mathbb{Z} : g^a = g^b$. Тогда отображение

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad \varphi(m) = g^m \text{ — изоморфизм.}$$

$$\varphi(m+k) = g^{m+k} = g^m g^k = \varphi(m)\varphi(k).$$

2. Пусть n — наименьшее натуральное число, такое, что $g^n = 1$. Заметим, что любое целое l можно с остатком разделить на $n : l = ns + r, \quad 0 \leq r < n$. Тогда

$$g^l = g^{ns} g^r = g^r.$$

Следовательно, $\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Тогда отображение

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad k \rightarrow g^k \text{ — изоморфизм.}$$

□

Вопрос 20 Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа

Def 33. Пусть $H \leq G$. Множества gH и Hg называются левым и правым смежными классами по подгруппе H соответственно.

Designation.

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$ — множество левых смежных классов.

$H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ — множество правых смежных классов.

Def 34. Отношение сравнимости по модулю H :

$$a \equiv b \pmod{H} \iff a \in bH.$$

Lemma 12. Сравнимость по модулю H — отношение эквивалентности. Два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство.

Рефлексивность: $a = ae \in aH$

Симметричность: $a \in bH \implies \exists h \in H : a = bh \implies b = ah^{-1} \in aH$

Транзитивность: $a \in bH, b \in cH \implies a = bh, b = ch' \implies a = chh' \in cH$

Второе утверждение вытекает из того, что классы сравнимости — левые смежные классы по подгруппе. □

Corollary 2.

$$G = \bigsqcup_{g \in X} gH, \text{ где } X \text{ — множество представителей левых смежных классов по } H$$

Lemma 13.

$$|g_1H| = |g_2H|, \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad H \leq G.$$

Доказательство. Такое отображение будет изоморфизмом:

$$\left(\begin{array}{c} g_1H \rightarrow g_2H \\ x \mapsto g_2g_1^{-1}x \end{array} \right).$$

Обратное: $y \mapsto g_1g_2^{-1}y$

□

Theorem 18 (Лагранж). G — конечная группа. Тогда $|G| = |H| \cdot |G : H|$, где $|G : H|$ — количество левых смежных классов G по H . $|G : H|$ — индекс H в G .

Доказательство. Из прошлой леммы и следствия □

Lemma 14. Множества G/H и $H \setminus G$ равномощны.

Доказательство. Зададим биекцию $\varphi : G/H \rightarrow H \setminus G$, $aH \mapsto (aH)^{-1} = Ha^{-1}$. □

Вопрос 21 Порядок элемента группы.

Def 35. Порядок $g \in G$ — наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$.
Второе определение: $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

Theorem 19. Пусть G — группа, $g \in G$. Тогда $|G| : \text{ord}(g)$

Доказательство. Применим теорему Лагранжа для подгруппы порожденной g : $|G| : |\langle g \rangle|$, $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ □

Theorem 20. Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм. $g \in G$, $\text{ord}(g) = n$. Тогда $\text{ord}(g) : \text{ord}(f(g))$.

Доказательство.

$$1_H = f(1_G) = f(g^n) = f(g)^n \implies n : \text{ord}(f(g)).$$

□

Statement 13. Пусть G — абелева группа, $a, b \in G$. Тогда $\text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) : \text{ord}(ab)$.

Доказательство. Обозначим $\text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = n$, $\text{ord}(ab) = m$

$$(ab)^n = a^n b^n = 1 \implies n : m.$$

□

Theorem 21. Пусть G — абелева группа, $a, b \in G$, $\text{gcd}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1$. Тогда $\text{ord}(ab) = \text{ord}(a)\text{ord}(b)$.

Доказательство. Рассмотрим $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = H$. Это подгруппа $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$. По теореме Лагранжа $\text{ord}(a) : |H|$ и $\text{ord}(b) : |H|$. Так как порядки a и b взаимно просты, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. Тогда

$$a^s = b^t \iff a^s = b^t = e.$$

Это равносильно тому, что

$$s : \text{ord}(a), \quad t : \text{ord}(b).$$

Если $(ab)^n = e$, то $a^n = b^{-n}$, значит $n : \text{ord}(a) \wedge n : \text{ord}(b)$. Порядки взаимно просты, следовательно $n : \text{ord}(a)\text{ord}(b)$. С другой стороны, по прошлому утверждению $\text{ord}(a)\text{ord}(b) : \text{ord}(ab)$. Следовательно,

$$\text{ord}(a)\text{ord}(b) = \text{ord}(ab).$$

□

Вопрос 22 Экспонента группы, критерий цикличности группы

Def 36. Экспонентой или показателем группы G называется натуральное число $d : g^d = e \quad \forall g \in G$. Если такого d не существует, то говорят, что экспонента группы равна бесконечности.

Theorem 22 (свойства экспоненты группы).

- (1) Экспонента группы равна НОКу всех порядков ее элементов.
- (2) Если группа конечна, то ее экспонента делит ее порядок.
- (3) Экспонента прямого произведения групп $G_1 \times \dots \times G_l$ равна НОКу экспонент этих групп.
- (4) Если G — абелева группа конечной экспоненты, то существует элемент, порядок которого равен ее экспоненте.
- (5) Конечная абелева группа является циклической тогда и только тогда, когда ее экспонента равна ее порядку.

Доказательство. Докажем пункт (4). Пусть $d = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$ — экспонента группы G , где $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{P}$. Тогда $\exists g_1, \dots, g_l \in G$, порядки которых делятся на $p_1^{k_1}, \dots, p_l^{k_l}$ соответственно.

Если $\text{ord}(g) = mn$, то $\text{ord}(g^m) = n$. Возведем g_1, \dots, g_l в нужные степени и считаем, что $\text{ord}(g_i) = p_i^{k_i} \quad \forall i \in [1, l]$.

Воспользуемся теоремой 21, и по индукции докажем, что $\text{ord}(g_1 \cdot \dots \cdot g_l) = \text{ord}(g_1) \cdot \dots \cdot \text{ord}(g_l) = d$. \square

Вопрос 23 Нормальные подгруппы. Гомоморфизмы групп. Свойства ядра и образа.

i Нормальные подгруппы

Def 37. Пусть $H \leq G$. H называется нормальной подгруппой, если $gH = Hg \quad g \in G$.

Designation. Обозначается: $H \trianglelefteq G$.

Note. $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G \iff g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall g \in G \iff H \trianglelefteq G$

ii Гомоморфизмы групп

Def 38. Пусть $(G, *)$, $(H, \#)$ — группы. Функция $f : G \rightarrow H$ называется гомоморфизмом, если $f(a \cdot b) = f(a) \# f(b) \quad \forall a, b \in G$.

Образ гомоморфизма $\text{Im } f = \{f(g) \mid g \in G\}$.

Ядро гомоморфизма $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$.

Def 39.

Мономорфизм — инъективный гомоморфизм.

Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Lemma 15. Если $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп, $f(e_G) = e_H$ и $\forall x \in G : f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Lemma 16. Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп, $g \in G$, $h = g(g)$. Тогда $f^{-1}(h) = g\text{Ker } f$.

Гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро состоит из одного элемента.

Lemma 17. Образ гомоморфизма групп является подгруппой, а ядро — нормальной подгруппой.

Вопрос 24 Существование эпиморфизма групп с данным ядром, факторгруппа.

Statement 14. Для любой нормальной подгруппы H группы G существует группа F и эпиморфизм $\pi : G \rightarrow F$, ядро которого равно H .

Доказательство. Пусть $F = G/H$ и зададим отображение $\pi : G \rightarrow F$ по формуле $\pi(x) = xH$. Зададим операцию в F по формуле $(xH) \cdot (yH) = xyH$. Так как $H \trianglelefteq G$, эта операция не зависит от выбора представителей x и y смежных классов xH и yH :

$$xhyh' = xy(y^{-1}hy)h' \in xyH.$$

Ассоциативность операции следует из ассоциативности операций в G . Нейтральный элемент — смежный класс $eH = H$, обратный для xH — смежный класс $x^{-1}H$. Следовательно, H — группа. По построению F сразу получаем, что π — гомоморфизм. При этом π сюръективно.

$$\pi(x) = e_{G/H} = H \iff x \in H.$$

Следовательно, $\text{Ker } \pi = H$. □

Def 40. Группа, построенная в доказательстве, называется факторгруппой G по H , а отображение π — канонической проекцией или гомоморфизмом редукции по модулю H .

Вопрос 25 Универсальное свойство факторгруппы и теорема о гомоморфизме

Theorem 23 (универсальное свойство факторгруппы). Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм, а $N \trianglelefteq G$. Если $\text{Ker } f \geq N$, то существует единственный гомоморфизм $g : G/N \rightarrow H$, такой что $f = g \circ \pi$. Если f — эпиморфизм, то g — эпиморфизм. Если $\text{Ker } f = N$, то g — мономорфизм.

Доказательство. Пусть $x \in G$. $f = g \circ \pi \implies$

$$g(xN) = f(x) \tag{1}$$

Если y — другой представитель смежного класса xN , то $y = xn$ для некоторого $n \in N$, и $g(yN) = f(y) = f(x)f(n) = g(x)$, так как $n \in N \leq \text{Ker } f$. Следовательно, формула 1 корректно определяет отображение g . Оно является гомоморфизмом из определения умножения смежных классов. Очевидно, что g единственно, так как удовлетворяет $f = g \circ \pi$.

Если композиция сюръективна, то g обязан быть сюръективным, так как применяется последним.

Если $\text{Ker } f = N$,

$$xN \in \text{Ker } g \iff x \in \text{Ker } f = N \iff xN = 1_{G/N}.$$

□

Theorem 24 (о гомоморфизме групп). Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп. Тогда

$$\text{Im } f \cong G/\text{Ker } f.$$

Доказательство. Отображение $\bar{f} : G \rightarrow \text{Im } f$, заданное формулой $\bar{f}(x) = f(x)$ является эпиморфизмом, причем его ядро равно $\text{Ker } f$. По универсальному свойству факторгруппы существует изоморфизм $\text{Im } f \rightarrow G/\text{Ker } f$. □

Вопрос 26 Сопряженные элементы, коммутаторы, коммутант.

i Сопряженные элементы

Def 41. Пусть $x, y \in G$. Элемент $x^y := y^{-1}xy$ называется *правым сопряженным* к x при помощи y . А ${}_y x = x^{y^{-1}} = yxy^{-1}$ — *левым сопряженным* к x при помощи y .

Lemma 18. Пусть $x, y, z \in G$. Тогда

1. $(xy)^z = x^z \cdot y^z$ и ${}^z(xy) = {}^z x \cdot {}^z y$, то есть сопряжение при помощи z — гомоморфизм.
2. ${}^y {}^z x = {}^z ({}_y x)$, то есть отображение из группы G в группу автоморфизмов группы G , переводящее элемент в левое сопряжение при помощи этого элемента, является гомоморфизмом.

Note. Отношение « x сопряжено с y » — отношение эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *классами сопряженных элементов*.

Lemma 19. Пусть $H = \langle X \rangle$ — подгруппа в группе $G = \langle Y \rangle$. Тогда $H \trianglelefteq G$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in X, y \in Y : x^y \in H$

Доказательство.

\Rightarrow Очевидно.

\Leftarrow Пусть $h \in H$, а $g = y_1 \cdot \dots \cdot y_m \in G, y_i \in Y$.

Индукция по m .

База: $m = 0, g = 1$.

Переход: $m - 1 \rightarrow m$. По предположению индукции $h^{y_1 \dots y_{m-1}} \in H$, следовательно, $h^{y_1 \dots y_{m-1}} = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in X$. Тогда $h^g = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{y_m} = x_1^{y_m} \cdot \dots \cdot x_n^{y_m}$, а каждый сомножитель лежит в H по условию.

□

Def 42. Наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу H называется *порождающим замыканием* H и G .

Designation. Обозначается: H^G .

Note. H^G порождается всеми элементами вида $h^g, h \in H, g \in G$.

ii Коммутатор

Def 43. Коммутатором называется элемент $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Property. Выполнены следующие коммутаторные формулы:

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$
2. $[x, yz] = [x, y] \cdot {}^y[x, z]$
3. $[x, y]^z = [x^z, y^z]$

iii Коммутант

Def 44. Пусть X, Y — подгруппы G . Взаимным коммутантом этих подгрупп называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[x, y]$, $x \in X, y \in Y$.

Designation. Обозначается: $[X, Y]$.

Lemma 20. Пусть X и Y — подгруппы в G . Тогда $[X, Y] \subseteq \langle X \cup Y \rangle$.

Доказательство. По формуле 2 из свойств коммутаторов ii

$$[x, y]^z = z^{-1}[x, y] = [x, z^{-1}]^{-1} \cdot [x, z^{-1}y] \in [X, Y].$$

Аналогично, для $x, z \in X, y \in Y$:

$$[x, y]^z = ([y, z]^{-1})^z = \left(z^{-1}[y, x] \right)^{-1} = ([y, x^{-1}]^{-1} \cdot [y, z^{-1}x])^{-1} = [z^{-1}z, y] \cdot [z^{-1}, y]^{-1} \in [X, Y].$$

По лемме 19 получаем нормальную подгруппу. □

Lemma 21. ?? Пусть S_X и S_Y — множества образующих подгрупп X и Y соответственно. Тогда $[X, Y] = \langle [s, t] \mid s \in S_X, t \in S_Y \rangle^{\langle X \cup Y \rangle} = Z$.

Доказательство. По лемме 20 $Z \subseteq [X, Y]$. Докажем, что любой образующий элемент $[X, Y]$ содержится в Z .

Пусть $s \in S_X, y = t_1 \dots t_n, t_i \in S_Y$. По индукции докажем, что $[s, y] \in Z$.

База: $n = 1$. По определению Z .

Переход: $n - 1 \rightarrow n$.

$$[s, y] = [s, t_1] \cdot {}^{t_1}[s, t_2 \dots t_n].$$

По индукционному предположению $[s, t_2 \dots t_n] \in Z$, следовательно, $[s, y] \in Z \quad \forall s \in S_X, y \in Y$.

Аналогично для $s \in S_Y, x = t_1, \dots, t_n, t_i \in S_X$. □

Statement 15. $\varphi : G \rightarrow A$ — гомоморфизм. A — абелева $\implies [G, G] \subseteq \text{Ker } \varphi$.

Доказательство.

$$\varphi([g, h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1.$$

Тогда

$$[g, h] \in \text{Ker } \varphi, \quad \forall g, h \in G.$$

Из этого следует, что $[G, G] \subseteq \text{Ker } \varphi$. □

Вопрос 27 Соотношения между трансвекциями. Взаимные коммутанты верхнетреугольных групп. Порождение верхнетреугольной группы.

Designation. Пусть F — поле,

$$U_n^{(k)} = U_n^{(k)}(F) = \{a \in M_n(F) \mid a_{ii} = 1, a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, j - i < k\}.$$

$$U_n = U_n F := U_n^{(1)}(F) \wedge U_n^{(k)} = \{1\} \quad k \geq n.$$

Lemma 22. Группа $U_n^{(k)}$ порождена трансвекциями $t_{ij}(\alpha)$ по всем $\alpha \in F \wedge j - i \geq k$.

Statement 16. Пусть i, j, k, h — попарно различные индексы. Тогда

$$\begin{aligned} t_{ij}(\alpha)t_{ij}(\beta) &= t_{ij}(\alpha + \beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{jk}(\beta)] &= t_{ik}(\alpha\beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{ki}(\beta)] &= t_{kj}(-\alpha\beta) \\ [t_{ij}(\alpha), t_{hk}(\beta)] &= e. \end{aligned}$$

Lemma 23. Группа $U_n^{(k)}$ нормальна в U_n . Более того, $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] = U_n^{(k+m)}$.

Доказательство. Используем лемму ?? и формулы из прошлого утверждения, чтобы доказать нормальность.

Из формул прошлого утверждения также следует

$$[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] \subset U_n^{(k+m)}.$$

Так как $U_n^{(k+m)}$ нормальна, из леммы ?? следует, что $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}]$ содержится в этой подгруппе. С другой стороны, каждая образующая группы $U_n^{(k+m)}$ — коммутатор образующих $U_n^{(k)}$ и $U_n^{(m)}$. А тогда выполнено требуемое равенство. \square

Вопрос 28 Приведенное разложение Брюа. Соотношение между клетками Брюа и Гаусса.

Вопрос 29 Симметрическая группа. Циклическая запись перестановки. Классы сопряженных элементов в S_n .

i Симметрическая группа

Def 45. Пусть X — множество. Множество биекций $X \rightarrow X$ с операцией композиции называется симметрической группой множества X и обозначается через S_X .

Def 46 (Перестановка). $\sigma \in S_n \iff \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$

Табличная запись перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j \neq i_k (j \neq k).$$

Циклическая запись перестановки:

$$\tau = (j_1, \dots, j_n) \iff \tau(j_1) = j_2, \tau(j_2) = j_3, \dots, \tau(j_{n-1}) = j_n, \tau(j_n) = j_1, \quad \tau(i) = i, \forall i \neq j_k.$$

Def 47. Перестановки $(j_1 \dots j_n)$, $(k_1 \dots k_m)$ называются независимыми, если $j_h \neq j_l \quad \forall h, l$.

Lemma 24. Любая перестановка равна произведению независимых (композиции) циклов.

Def 48. Циклический (цикленный) тип перестановки — набор из длин независимых циклов, в произведение которых раскладывается перестановка.

Note. В определении слово «набор» подразумевает мультимножество, то есть порядок не важен, но элементы повторяются.

Ех. $(12)(345) \in S_6$ записывают $2 + 3$.

Lemma 25.

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)).$$

Следовательно, сопряжение не меняет циклический тип.

Доказательство. $\sigma(i_1 \dots i_k) \sigma^{-1}(\sigma(t_j)) = \sigma \circ (i_1 \dots i_k) \sigma(i_{l+1 \bmod m})$, где $\bmod m$ — почти модуль (вместо 0 будет m). \square

Def 49. Отношение на группе G :

$$x \sim_c y \iff \exists z : x = y^z.$$

$$x = y^z \wedge y = ab \implies x = (a^b)^z = a^{bz}.$$

Класс эквивалентности « \sim_c » — класс сопряженных элементов.

Theorem 25. Класс сопряженных элементов в S_n состоит из всех перестановок фиксированного циклического типа.

Доказательство. Следует из леммы 25 \square

Ех. Рассмотрим группу S_4 и перестановки циклического типа $2 + 2$:

$$\begin{aligned} &(12)(34) \\ &(13)(24) \\ &(14)(32) \end{aligned}$$

$$\sigma(12)(34) \sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$$

Еще есть нейтральный класс e и $2, 3, 4$. Двумерная группа Клейна

$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

— единственная нормальная подгруппа в S_n для любого n , индекс которой более 2.

Statement 17. $\text{ord}(ab) \mid \text{lcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$. Порядок перестановки равен НОКу порядков независимых циклов.

Вопрос 30 Транспозиции и инверсии. Четность перестановки.

Def 50 (Инверсия). Пусть $\sigma \in S_n$. Инверсия в перестановке σ — пара $(i, j) : i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$.

Def 51 (Четность перестановки).

$$\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\sigma \mapsto$ количество инверсий по модулю 2.

Def 52. Транспозиция — циклическая перестановка длины 2.

$$\tau(i) = \tau(j), \tau(j) = \tau(i), \tau(k) = k.$$

Lemma 26. Любая перестановка σ раскладывается в произведение транспозиций соседних индексов.

$$S_n = \langle (12), (23), \dots, (n-1 \ n) \rangle.$$

Доказательство. Индукция по количеству инверсий I в $\sigma \in S_n$.

База: $I = 0$ Это $\sigma = id$.

Переход: $I > 0$. Заметим, что

$$\exists i : \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

Тогда рассмотрим $\tau = \sigma \circ (i, i+1)$.

$$\tau(i) = \sigma(i+1) < \tau(i+1) = \sigma(i).$$

Так как $\tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k \notin \{i, i+1\}$, количество инверсий стало на одну меньше, чем количество инверсий в σ . Теперь по предположению индукции полученная перестановка раскладывается, а тогда и σ раскладывается. \square

Lemma 27. $\tau = \sigma \circ (i, i+1) \Rightarrow |I(\tau) - I(\sigma)| = 1$

Lemma 28. Если $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$, $\forall i : \tau_i$ — транспозиция соседних индексов, то

$$\varepsilon(\sigma) \equiv k \pmod{2}.$$

Theorem 26. $\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — гомоморфизм групп.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k \\ \rho &= \tau_{k+1} \cdot \dots \cdot \tau_n \quad \forall i : \tau_i = (j, j+1). \\ \sigma \cdot \rho &= \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_n \end{aligned}$$

Проверим требуемые свойства:

$$\varepsilon \equiv k \pmod{2}, \quad \varepsilon(\rho) \equiv n - k \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\sigma\rho) \equiv m \pmod{2} \equiv \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho) \pmod{2}$$

$$\varepsilon(\rho^{-1}\sigma\rho) \equiv -\varepsilon(\rho) + \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho)$$

$$\varepsilon((i_1, \dots, i_k)) = \varepsilon((1, \dots, k)) \equiv k - 1 \pmod{2}$$

\square

Вопрос 31 Определение кольца, подкольца, идеала, прямое произведение колец

i Кольцо

Def 53. Кольцо — множество R , на котором заданы операции $+$, \times , обладающие следующими свойствами $\forall a, b, c \in R$:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in R : a + 0 = 0 + a = a$ (нейтральный элемент по сложению)
4. $\forall a \in R \exists b \in R : a + b = b + a = 0$ (обратный элемент по сложению)
5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (ассоциативность умножения)
6. $\begin{cases} a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$ (дистрибутивность)

Кольцо является кольцом с единицей, если

$$\exists e \in R \forall a \in R : a \times e = e \times a = a.$$

Кольцо является коммутативным кольцом, если

$$\forall a, b \in R : a \times b = b \times a.$$

Property.

1. *Нейтральный по сложению единственный.*
2. *Обратный элемент по сложению существует и единственен для любого элемента кольца.*
3. *Нейтральный по умножению единственен, если существуют.*
4. $\forall a \in R : a \times 0 = 0$
5. $-b = (-1) \times b$
6. $(-a) \times b = (-ab)$
7. $(-a) \times (-b) = (ab)$

ii Подкольцо

Def 54. Подмножество $A \subset R$ называется **подкольцом** R , если A само является кольцом относительно операций, определенных в R .

Designation. Говорят, что R — расширение кольца A .

Property.

1. *Ноль и единица кольца являются нулем и единицей в подкольце.*
2. *Подкольцо наследует свойство коммутативности.*
3. *Пересечение любого набора подколец — подкольцо.*

Def 55. Пусть X — подмножество кольца R . Подкольцом, порожденным множеством X , называется наименьшее подкольцо в R , содержащее X .

Lemma 29. Подкольцо, порожденное X , состоит из всевозможных сумм элементов вида $x_1 \times \dots \times x_k$, где $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in X \cup \{1\}$ (если имеется ввиду кольцо без 1, то $x_i \in X$).

iii Идеалы

Def 56. Аддитивная подгруппа I кольца R называется **левым (правым) идеалом**, если $\forall r \in R, x \in I : rx \in I$ ($xr \in I$).

Двусторонний идеал — идеал, являющийся левым и правым.

Property.

1. *Пересечение любого числа идеалов — идеал.*

Def 57. (Левым, правым или двусторонним) идеалом, порожденным подмножеством X кольца R , называется наименьший (левый, правый или двусторонний) идеал, содержащий X .

Идеал коммутативного кольца, порожденный одним элементом, называется **главным идеалом**.

Designation. Левый идеал, порожденный множеством X , обозначается $\sum_{x \in X} xR$ (правый — $\sum_{x \in X} Rx$). Если R — коммутативное кольцо, то идеал, порожденный $X \subseteq R$ обозначают (X) .

Lemma 30. (Левый, правый или двусторонний) идеал, порожденный X , состоит из всевозможных сумм элементов вида $(rx, xr$ или $rxs)$, где $r, s \in R$, $x \in X \cup \{1\}$ (если имеется ввиду кольцо без 1, то $x_i \in X$).

iv Прямое произведение колец

Def 58. Произведение колец R и S — множество пар (r, s) , $r \in R$, $s \in S$ с покомпонентными операциями $\forall r_1, r_2 \in R, s_1, s_2 \in S$:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$\bullet (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

Вопрос 32 Гомоморфизмы колец, ядро, образ, слои

Def 59. Пусть R, A — кольца. Функция $f : R \rightarrow A$ называется гомоморфизмом колец, если

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned} \quad \forall a, b \in R.$$

Для гомоморфизмов колец с единицей будем требовать также, чтобы $f(1_R) = 1_A$.

Def 60. $f : R \rightarrow A$ — гомоморфизм.

Образ гомоморфизма f — $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in R\}$

Ядро гомоморфизма f — $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$

Мономорфизм — инъективный гомоморфизм.

Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Если между двумя кольцами существует изоморфизм, они называются **изоморфными**.

Lemma 31. Пусть $f : R \rightarrow A$ — гомоморфизм колец. Тогда $f(0) = 0$, и $\forall x \in R : f(-x) = -f(x)$.

Если f — гомоморфизм колец с единицей, и $x \in R^*$, то $f(x) \in A^*$ и $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Lemma 32. Пусть $f : R \rightarrow A$ — гомоморфизм, $x \in R$, $y = f(x)$. Тогда $f^{-1}(y) = x + \text{Ker } f$.

Гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро равно $\{0\}$.

Lemma 33. Образ гомоморфизма колец является подкольцом, а ядро — двусторонним идеалом.

Вопрос 33 Факторкольцо, существование эпиморфизма с данным ядром

Theorem 27. Для любого двустороннего идеала I кольца R существует кольцо A и эпиморфизм $\pi : R \rightarrow A$, ядро которого равно I .

Доказательство. Так как I — подгруппа аддитивной группы кольца, то можно рассмотреть факторгруппу R/I . Зададим умножение:

$$(r + I) \cdot (s + I) = rs + I, \quad r, s \in R.$$

Если $r + x \in r + I$ и $s + y \in s + I$ — другие представители классов,

$$(r + x)(s + y) = rs + (ry + xs + xy) \in rs + I.$$

Следовательно, определение корректно. Операции в R/I удовлетворяют свойствам кольца, так как операции в R удовлетворяют.

Отображение π зададим аналогично группам: $\pi(x) = x + I$ — это гомоморфизм, причем сюръективный. Найдем его ядро:

$$\pi(x) = e_{R/I} = e + I = I \iff x \in I.$$

Значит, $\text{Ker } \pi = I$. □

Def 61. Кольцо R/I называется фактокольцом R по I , а отображение $\pi = \pi_I$ — канонической проекцией или гомоморфизмом редукции по модулю I .

Вопрос 34 Универсальное свойство факторкольца и теорема о гомоморфизме

Theorem 28 (Универсальное свойство факторкольца). Пусть R, R' — кольца, I — двусторонний идеал в R , $f : R \rightarrow R'$. Если $I \subseteq \text{Ker } f$, то существует единственный гомоморфизм $g : R/I \rightarrow R'$ такой, что $f = g \circ \pi$.

Если $\text{Ker } f = I$, то g инъективен. Если f сюръективен, то g сюръективен.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ R/I & & \end{array}$$

Доказательство. Пусть $x \in R$. $f = g \circ \pi \implies$

$$g(x + I) = f(x) \tag{2}$$

Если y — другой представитель $x + I$, то $y = x + a$ для некоторого $a \in I$, и $g(y + I) = f(y) = f(x) + f(a) = g(x)$, так как $a \in I \subseteq \text{Ker } f$. Проверим $g(xy + I) = g(x + I)g(y + I)$:

$$g(xy + I) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x + I)g(y + I).$$

Также

$$g((x + y) + I) = f(x + y) = f(x) + f(y) = g(x + I) + g(y + I).$$

Следовательно, формула 2 корректно определяет отображение g . Оно является гомоморфизмом (проверили выше). Очевидно, что g единственно, так как удовлетворяет $f = g \circ \pi$.

Если композиция сюръективна, то g обязан быть сюръективным, так как применяется последним.

Если $\text{Ker } f = I$,

$$x + I \in \text{Ker } g \iff x \in \text{Ker } f = I \iff x + I = 1_{R/I}.$$

□

Вопрос 35 Определение комплексных чисел, арифметические операции, геометрическое представление

i Определение и арифметика

Def 62. Факторкольцо $\mathbb{C} = \mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ называется полем комплексных чисел.

Композиция отображений $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ является гомоморфизмом колец с единицей. Так как \mathbb{R} — поле, то она инъективна, ее ядро — идеал в \mathbb{R} , который тривиален. Будем отождествлять элементы поля \mathbb{R} с их образами под действием этого мономорфизма и считать, что \mathbb{R} — подполе в \mathbb{C} :

$$r \in \mathbb{R} \longleftrightarrow r + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t].$$

Обозначим через i смежный класс $t + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t]$. Заметим, что

$$i^2 + 1 = t^2 + 1 + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t] = 0_{\mathbb{C}} \implies i^2 = -1.$$

Рассмотрим элемент поля $p \in \mathbb{R}[t]$:

$$\begin{aligned} p &= (t^2 + 1) \cdot f + (a + bt) \in a + bt + (t^2 + 1)\mathbb{R}[t] \\ p + (t^2 + 1)\mathbb{R}[x] &= a + bi \end{aligned}$$

Значит, любой элемент поля может быть однозначно записан в виде $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Сложение определено по правилу:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Так как $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Def 63. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ и $z = x + yi$. Тогда $x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть, а $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Число $\bar{z} = x - yi$ называется комплексно сопряженным к z .

Property.

1. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
2. $(a + bi) + (a - bi) = 2a$
3. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
4. $z \in \mathbb{R} \iff z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
5. $z \in \mathbb{R} \iff z\bar{z} \in \mathbb{R}$
6. Мультипликативный обратный:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

Statement 18. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ — автоморфизм поля \mathbb{C} .

ii Геометрическое представление

Def 64. Модуль комплексного числа z — $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{z\bar{z}}$

Def 65. $\arg z := \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z} & a > 0 \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} + 2\pi\mathbb{Z} & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(b) & a = 0 \end{cases}$$

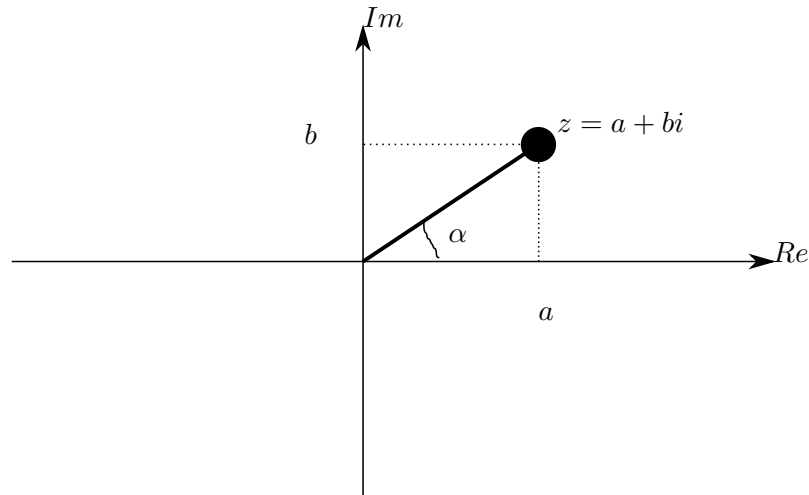


Рис. 1: Комплексное число на плоскости

Можем выразить через аргумент:

$$\begin{aligned} a &= |z| \cdot \cos \alpha \\ b &= |z| \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Тогда $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Вопрос 36 Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Операции в тригонометрической форме

i Тригонометрическая форма

Тригонометрическая форма: $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Операции в тригонометрической форме

Умножение:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) \cdot |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w) = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left(\cos(\arg z) \cos(\arg w) - \sin(\arg z) \sin(\arg w) + i(\cos(\arg z) \sin(\arg w) + \sin(\arg z) \cos(\arg w)) \right) = \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left(\cos(\arg z + \arg w) + i \sin(\arg z + \arg w) \right) \end{aligned}$$

Для целого n выполняется **формула Муавра**:

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z) \right).$$

Единственность представления комплексного числа в тригонометрической форме и формулу произведения в тригонометрической форме можно выразить так:

$$\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0}^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Так как $\ln : \mathbb{R}_{>0}^* \rightarrow \mathbb{R}$ — изоморфизм:

Statement 19. $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Доказательство. Отображения $z \mapsto (\ln |z|, \arg z)$ и $(r, x) \mapsto e^r (\cos x + i \sin x)$ являются взаимно обратными гомоморфизмами. □

ii Показательная форма

Statement 20. Напишем степенные ряды для экспоненты и тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ \sin t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &= \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ e^{i\alpha} &:= \cos \alpha + i \sin \alpha. \\ \varepsilon(\alpha) &= e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Def 66 (Показательная форма комплексного числа).

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \text{Arg} z}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

2π — период для экспоненты.

$$e^{\alpha+2\pi i} = e^{\alpha}.$$

$$a, b \in \mathbb{R} : e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^{a(\cos b + i \sin b)}.$$

Вопрос 37 Строение мультипликативной группы комплексных чисел, корни из 1, уравнение $z^n = w$

Вопрос 38 Евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Def 67. Элемент a кольца R называется делителем нуля, если существует $b \in R \setminus \{0\}$ такой, что $ab = 0$.

Область целостности — коммутативное кольцо с единицей без нетривиальных делителей нуля (то есть кроме нуля).

Designation. R — коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля.

Def 68. Пусть задана функция $f : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, обладающая следующими свойствами:

1. $f(0) < f(r), \quad \forall r \in R \setminus \{0\};$
2. $\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists q, r \in R : a = bq + r \wedge f(r) < f(b).$

Тогда R — евклидова кольцо с евклидовой нормой f .

Def 69. Кольцо R называется **кольцом главных идеалов**, если любой идеал в R является главным, то есть имеет вид aR для некоторого $a \in R$.

Область главных идеалов (ОГИ) — область целостности, в которой любой идеал главный.

Theorem 29. Евклидово кольцо является областью главных идеалов.

Доказательство. Пусть $I \triangleleft R$ — нетривиальный идеал. Рассмотрим $b \in I$ с минимальной возможной евклидовой нормой.

$$b \in I \setminus \{0\} : f(b) \leq f(a) \quad \forall a \in I \setminus \{0\}.$$

Тогда $\exists q, r \in R$:

$$a = bq + r, \quad f(r) < f(b).$$

$$r = \underbrace{a}_{\in I} - \underbrace{bq}_{\in I} \in I.$$

Если $r \neq 0$, то $f(b) \leq f(r) < f(b)$. Противоречие.

Значит, произвольный элемент из I делится на b , следовательно, $I \subseteq bR$. С другой стороны, $b \in I \implies bR \subseteq I$, из чего следует равенство. \square

Exs. Примеры евклидовых колец и их норм:

Кольцо	Норма
\mathbb{Z}	$ \cdot $
$F[x]$, F — поле	\deg
Гауссовы целые числа: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$ \cdot $

Ex. $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ — не евклидово кольцо, но кольцо главных идеалов.

Вопрос 39 Взаимно простые идеалы, их пересечение и произведение

Пусть R — кольцо, I, J — идеалы в R .

Statement 21. Сумма идеалов $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ является идеалом, причем это наименьший идеал, содержащий $I \cup J$.

Def 70. Произведение идеалов — идеал IJ , порожденный элементами ab по всем $a \in I, b \in J$:

$$\left\{ \sum_{i=1}^k a_i b_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}.$$

Def 71. Идеалы I и J кольца R называются **взаимно простыми**, если $I + J = R$.

Lemma 34. Если I и J — взаимно простые идеалы, то $IJ = I \cap J$.

Доказательство.

\subseteq По определению идеала.

\supseteq Пусть $x \in I \cap J$. Так как I и J взаимно просты, то $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$. Тогда $x = xa + xb \in (I \cap J)I + (I \cap J)J \subset IJ$

\square

Def 72. A, B — кольца. Декартово произведение колец — множество

$$A \oplus B = A \times B$$

с покомпонентными операциями:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2) \end{aligned}.$$

Theorem 30. Пусть $I + J = R$. Тогда

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow R/I \oplus R/J \\ r &\mapsto (r + I, r + J) \end{aligned}$$

Посмотрим на ядро φ :

$$\text{Ker } \varphi \ni r \iff \begin{cases} r + I = I \\ r + J = J \end{cases} \iff r \in I \cap J = I \cdot J$$

Докажем, что φ — сюръекция:

Пусть $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$.

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_1 \pmod{I}.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_2 \pmod{J}.$$

То есть $\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J)$, следовательно, φ — сюръективно.

По теореме о гомоморфизме колец

$$R/IJ \cong R/I \oplus R/J.$$

□

Вопрос 40 Китайская теорема об остатках

Lemma 35. Пусть J, I_1, \dots, I_n — идеалы в R и J взаимно прост с каждым из I_i . Тогда он взаимно прост с их произведением.

Доказательство. Индукция.

База для $k = 2$.

$$R = J + I_1 = J + I_1 R = J + I_1 (J + I_2) = (J + I_1 J) + I_1 I_2 \subseteq J + I_1 I_2 \quad (3)$$

Переход $n - 1 \rightarrow n$:

По предположению индукции $J + \underbrace{I_1 + \dots + I_{n-1}}_I = R$. Нужно доказать, что $J + I \cdot I_n = R$. Проведем действия из базы ??.

□

Theorem 31 (Китайская теорема об остатках). I_1, \dots, I_n — попарно взаимно простые идеалы, то есть $\forall j \neq k : I_j + I_k = R$. Тогда

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I_1} \oplus \dots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Note. Здесь дробью обозначается фактор кольцо.

Доказательство. Индукция по n . Так как I_k взаимно просто с $I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}$

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_n} \cong \frac{R}{I_1 \cdot \dots \cdot I_{n-1}} \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Дальше по предположению индукции получаем то, что хотим. □

Statement 22. Если $x \equiv x_k \pmod{I_k}$, $k = 1, \dots, n$, то

$$x \equiv \sum_{k=1}^n x_k c_k \pmod{I_1 \cdot \dots \cdot I_n}, \quad c_k \in \left(\prod_{j \neq k} I_j \right) \cap (1 + I_k).$$

Note. В целых числах:

$$x \equiv x_k \pmod{m_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Чтобы найти c_k , нужно решить диофантово уравнение:

$$y \cdot m_k + z \cdot \underbrace{\prod_{j \neq k} m_j}_{=c_k} = 1.$$

Statement 23 (применение КТО). В $F[t]$:

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, \dots, n, x_i \neq x_k \quad \forall i \neq k$$

равносильно

$$p \equiv y_k \pmod{(t - x_k)}.$$

$$p(t) \equiv \sum_{k=1}^n y_k \prod_{i=1}^n \frac{t - x_i}{x_k - x_i} \pmod{(t - x_1) \dots (t - x_n)}.$$