Билеты по алгебре
I семестр

Тамарин Вячеслав

10 января 2020 г.

Вопрос 1 Векторное пространство

Def 1. Пусть $(V, +)$ — абелева группа, F — поле, и задана операция (умножение) $V \times F \to V$. Предположим, что $\forall u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие свойства:

1. $v(\alpha\beta) - (v\alpha)\beta$
2. $v(\alpha + \beta) = v\alpha + v\beta$
3. $(v + u)\alpha = v\alpha + v\beta$
4. $v \cdot 1 = v$

Тогда V называется векторным пространством над F.

Property.

1. $v \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$

2. $v \cdot (-1) = -v$

3. $v \cdot (-\alpha) = (-v)\alpha = -(v\alpha)$

4. $v \cdot \sum \alpha_i = \sum v\alpha_i$

5. $\sum v_i \cdot \alpha = \sum v_i\alpha$

Exs.

1. Множество векторов в $\mathbb{R}^3$
2. $$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_i \in F \right\}.$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$
3. X — множество, $F^X = \{f \mid f : X \to F\}$
$f, g : X \to F$
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4. $F[t]$ — многочлены от одной переменной t

Вопрос 2 Подпространство, линейная оболочка

Def 2. Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V.

Statement 1 (критерий подпространства)**.** *Подмножество $U \subseteq V$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\forall u, v \in U,\ \alpha \in F : u + v, u\alpha \in U$.*

Def 3. Пусть $u_1, \dots, u_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \alpha_k$$

называется линейной комбинацией векторов $u_1, \dots, u_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю.

Note. Пусть $S \subseteq V$, и задан набор чисел $\alpha_s \in F,\ s \in S$. Операция бесконечной суммы будет определена только в случае, когда почти все α_s равны нулю.

Def 4. Линейной оболочкой набора S называется подпространство, порожденное S, то есть наименьшее подпространство, содержащее S.

Designation. Линейная оболочка набора S обозначается $\langle S \rangle$.

Statement 2. $\langle S \rangle = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \alpha_k \middle| u_k \in S,\ \alpha_k \in F \right\}$

Def 5. Если $\langle S \rangle = V$, то S называется системой образующих пространства V.

Def 6. Кортеж векторов $(u_1, \dots u_n)$ называется линейно независимым, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Множество $S \subseteq V$ называется линейно независимым, если любой кортеж , составленный из конечного числа различных векторов из S, является линейно независимым.

Def 7. Базис — линейно независимая система образующих.

Вопрос 3 Матрицы

i Конечные матрицы

Def 8. Двумерный массив $m \times n$ элементов поля F называется матрицей размера $m \times n$ над F.

Designation. Множество таких матриц обозначается $M_{m \times n}(F)$. Если $m = n$, пишут $M_n(f)$. Элемент матрицы A в позиции (i, j) записывается a_{ij}.

Property.

- *Для двух матриц одинакового размера определена операция поэлементной суммы:* $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- *Также определено умножение матрицы на число:* $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.
- *Произведением матрицы* $A \in M_{m \times n}(F)$ *на матрицу* $B \in M_{n \times k}$ *называется матрица* $C = AB \in M_{m \times k}(F)$ *элементы которой вычисляются по формуле*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Theorem 1. *Множество $M_{m\times n}(F)$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством над полем F.*

Доказательство. Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число:

$$\begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B+C) = AB + BC \\ (B+C)A = BA + CA \\ (AB)\alpha = A(B\alpha) = (A\alpha)B \end{cases}.$$

Все кроме первого свойства очевидны. Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k\in K}(AB)_{ik}c_{kl} = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \\ &= \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right) = \\ &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{k\in K} a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right) = \\ &= \sum_{j\in J} a_{ij}\left(\sum_{k\in K} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j\in J} a_{ij}(BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}.$$

Def 9. Квадратная матрица E с 1 на главной диагонали и остальными нулями называется единичной.

Property. *Умножение данной матрицы на единичную справа и слева не ее не изменяет.*

Матрица E_n является нейтральным элементом в $M_n(F)$. □

Обобщение конечных матриц

Пусть даны множества X_{ij}, Y_{jh}, коммутативные моноиды $(Z_{ih}, +)$, где $i = 1, \dots m,\ j = 1, \dots n,\ h = 1, \dots k$, и функции «умножения» $X_{ij} \times Y_{jh} \to Z_{ih},\ (x, y) \mapsto xy$. Обозначим через X, Y, Z наборы множеств X_{ij}, Y_{jh}, Z_{ih}, соответственно, через $M(X)$ — множество матриц A с элементами $a_{ij} \in X_{ij}$, и аналогично $M(Y), M(Z)$. Тогда можно определить произведение матриц $A \in M(X)$ и $B \in M(Y)$ как матрицу $C = AB \in M(Z)$, где $c_{ih} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jh}$.

Если все X_{ij}, Y_{jh} будут коммутативными моноидами, а функция умножения дистрибутивной, умножение матриц тоже будет дистрибутивным и ассоциативным.

ii Произвольные матрицы

Пусть I, J — произвольные множества (возможно бесконечные), элементами которых мы будем индексировать строки и столбцы матриц. Пусть $\forall i \in I \wedge j \in J$ задано множество X_{ij}, и обозначим набор всех таких множеств через X. Тогда **матрицей размера $I \times J$ над X** называется функция $A : I \times J \to \bigcup X_{ij}\ (i, j) \mapsto a_{ij}$, такая что $a_{ij} \in X_{ij}$.

Designation. Множество матриц размера $I \times J$ над X обозначается $M_{I\times J}(X)$. Если $I = \{1\}$, то матрица размера $I \times J$ будут назваться столбцами длины J, а если $J = \{1\}$, то столбцами высоты I. Множества строк обозначим данной длины ${}^{J}X$, множество столбцов — X^{J}.

Будем считать, что все X_{ij} — абелевы группы в аддитивной записи. Тогда сумма двух матриц одного размера определяется поэлементно: $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Если все X_{ij} — векторные пространства над полем F, также можно определить умножение на число: $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$.

Умножение матриц

Пусть все операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \to Z_{ih}$ дистрибутивны (для $a \cdot 0 = 0$), и в каждом столбце матрицы Y почти все элементы равны 0.

Designation. Обозначим $M^{c.f.}_{J\times H}(Y) \subset M_{J\times H}(Y)$, состоящее из всех матриц B, у которых для любого фиксированного $h \in H$ почти все элементы b_{jh} равны 0.

Def 10. Пусть $\forall i \in I, j \in J, h \in H$ заданы операции умножения $X_{ij} \times Y_{jh} \to Z_{ih}$, причем $\forall x, x' \in X_{ij}$ и $\forall y, y' \in Y_{jh}$ выполнены равенства

$$(x + x')y = xy + x'y \wedge x(y + y') = xy + xy'.$$

Произведение матриц $A \in M_{i\times J}(X)$ и $B \in <^{c.f.}_{J\times H}(Y)$ как матрицу $AB \in M_{I\times H}(Z)$ с элементами

$$(AB)_{ih} = \sum_{j\in J} a_{ij} b_{jh}.$$

При этом суммы определены, так как почти все слагаемые равны нулю.

Note. Аналогично определяется умножение матриц $A \in M^{r.f.}_{I\times J}(X)$ и $B \in M_{J\times H}(Y)$.

Lemma 1. *Обычные свойства умножения матриц 1 выполнены, если определены все входящие в формулы операции.*

Если $\forall i, j, h \in I$ заданы дистрибутивные операции умножения $X_{ij} \times X_{jh} \to X_{ih}$, то множество $M^{c.f.}_{I\times I}(X)$ является кольцом с единицей.

Designation. Если X_{ij} одно и то же поле F для всех i, j, будем писать $M_{i\times J}(F)$ вместо $M_{I\times J}(X)$. Если $I = J$, то будем писать $M_I(F)$ вместо $M_{I\times I}(F)$. Если $I = \{1, \dots m\}, J = \{1, \dots n\}$, то можем писать $M_{m\times n}(F)$.

Другие характеристики матриц

Def 11. Множество обратимых элементов кольца $M_n(F)$ называется полной линейной группой степени n над F и обозначается $\mathrm{GL}_n(F)$.

Designation. Для множества $M^{c.f.}_{I\times\{1\}}(F)$ введем специальное обозначение F^I_{fin} и будем называть его множеством финитных столбцов высоты I над F. Другим словами, F^I_{fin} — множество финитных (у которых почти все значения равны 0) функций из I в F. Аналогично, ${}^J F_{fin} = M^{r.f.}_{\{1\}\times J}(F)$.

Def 12. Пусть $A \in M_{I\times J}(F)$. Матрица $A^T \in M_{J\times I}(F)$ с элементами $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ называется транспонированной к A.

Statement 3. $(AB)^T = B^T A^T$

Note. Для обозначения столбца часто используется строка $(a_1, \dots a_n)^T$.

Вопрос 4 Эквивалентные определения базиса

Theorem 2 (Эквивалентные определения базиса)**.** *Следующие условия на подмножество v векторного пространства V эквивалентны:*

(1) *v — линейно независимая система образующих*
(2) *v — максимальная линейно независимая система*
(3) *v — минимальная система образующих*
(4) *любой элемент $x \in V$ представляется в виде линейной комбинации набора v, причем единственным образом*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть v — не максимальная линейно независимая система. Мы знаем, что v — система образующих. Тогда любой элемент $a \in V$ представляется в виде линейной комбинации v, а значит любой набор, содержащий v, принадлежит линейной оболочке $\langle v \rangle$, следовательно, набор линейно зависимый.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Так как v максимальная линейно независимая система, любой элемент $a \in V$ выражается через элементы v. Следовательно, v — система образующих.

$\boxed{1 \Longrightarrow 3}$ Пусть из v можно убрать некоторые элементы так, что полученный набор u будет минимальной системой образующих. Тогда любой элемент набора $v \setminus u$ представим в виде линейной комбинации u. Следовательно, v линейно зависим.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Если v линейно зависим, то во всех линейных комбинациях набора v можно заменить один элемент на линейную комбинацию других. А тогда v не минимален.

$\boxed{1 \Longrightarrow 4}$ Так как v — система образующих $\langle v \rangle = V$. Теперь докажем, что представление единственно. Пусть $x = va = \sum_{y \in v} y a_y, \quad a \in F^v_{fin}$. Предположим, что $\exists b \in F^v_{fin} : x = vb$. Тогда $0 = va - vb \Longrightarrow 0 = v(a-b)$. Так как v линейно независим, можем сократить: $0 = a-b$, значит представление единственно.

$\boxed{4 \Longrightarrow 1}$ Так как любой элемент представим в виде линейной комбинации набора v, $\langle v \rangle = V$. Так как представление единственно, v линейно независим.

□

Вопрос 5 Существование базиса

Theorem 3 (О существовании базиса)**.** *Пусть $X, Y \subseteq V$, причем набор X линейно независим, а Y — система образующих. Тогда существует базис Z, содержащий X и содержащийся в Y.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — набор всех линейно независимых подмножеств Y, содержащих X. Этот набор не пуст, так как содержит X. Пусть $\mathscr{L}$ — линейно упорядоченный поднабор в $\mathscr{A}$. Обозначим через S объединение всех множеств из $\mathscr{L}$. Так как $\forall C \in \mathscr{L}$ лежит между X и Y, S обладает этим свойством. Рассмотрим конечное подмножество $\{v_1, \dots v_n\} \subseteq S$. По определению объединения множеств $\forall i = 1, \dots n \ \exists B_i \in \mathscr{L}$, содержащее v_i. Так как $\mathscr{L}$ — лум, среди множеств $B_1, \dots B_n$ найдется наибольшее B_k. Тогда $v_1, \dots v_n \in B_k$. Так как B_k линейно независимо, то и $\{v_1, \dots v_n\}$ линейно независимо. Следовательно, S линейно независимо, значит $S \in \mathscr{A}$. По лемме Цорна получаем, что $\mathscr{A}$ содержит максимальных элемент. Пусть это Z — максимальное из линейно независимых подмножеств Y, содержащих X.

Пусть $y \in Y \setminus Z$. Так как Z линейно независимо, $Z \cup \{y\}$ линейно зависимо, то есть $\exists a \in F^Z_{fin},\ a_y \in F : ya_y + Za = 0$, где $a_y \neq 0$. Следовательно, $y \in \langle Z \rangle$. Тогда $Y \subseteq \langle Z \rangle$. С другой стороны, $V = \langle Y \rangle$ — наименьшее подпространство, содержащее Y. Значит $V \subseteq \langle V \rangle$, то есть Z — система образующих, следовательно, и базис.

□

Вопрос 6 Лемма о замене

Theorem 4 (лемма о замене)**.** *Пусть $u = \{u_1, \dots u_n\}$ — линейно независимый набор из n векторов, v — система образующих пространства V. Тогда:*

1. $\exists v_1, \dots v_n \in v : v \setminus \{v_1, \dots v_n\} \cup u = w$ *— система образующих.*
2. *Причем, если u — базис, то w — базис.*

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 0$. Утверждение для нуля верно.

Переход: $n - 1 \to n$. По предположению индукции $\exists v_1, \dots v_{n_i} \in v$ такие, что $w' = v \setminus \{v_1, \dots v_{n-1}\} \cup \{u_1, \dots u_{n-1}\}$ является системой образующих. Причем, если v был линейно независимым, то w' — базис.

u_n выражается через линейную комбинацию набора w':

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \beta_j, \qquad \alpha_i, \beta_j \in F, w_j \in v \setminus \{v_1, \dots v_{n-1}\}.$$

Заметим, что кто-то из $\beta_j \neq 0$ (иначе u линейно зависим). Не умоляя общности, считаем, что $\beta_m \neq 0$. Пусть $v_n = w_m$. Тогда v_n выражается через линейную комбинацию набора $w = w' \setminus \{v_n\} \cup \{u_n\}$. Следовательно, $w' \subseteq \langle w \rangle$, значит w — система образующих.

Пусть набор v (а тогда и w') линейно независим. Рассмотрим $w'' = w' \setminus \{v_n\}$ и линейную комбинацию $w''a + u_n\alpha$ набора w, где $a \in F_{fin}^{w''}$.

$$0 = w''a + u_n\alpha = w''a + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i \alpha + \sum_{j=1}^{m} w_i \beta_j \alpha = w''b + v_n \beta_m \alpha, \qquad b \in F_{fin}^{w''}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $w''b + v_n\beta_m\alpha$ является нетривиальной линейной комбинацией набора $w'' \cup \{v_n\} = w''$, равной нулю. Значит, $\alpha = 0$, тогда $w''a = 0$. Так как $w'' \subseteq w'$, w'' линейно независим, следовательно, $a = 0$.

Получаем, что w линейно независим.

□

Вопрос 7 Количество элементов в базисе

Theorem 5 (количество элементов в базисе)**.** *Любые два базиса пространства V равномощны.*

Доказательство. Пусть $v, u = \{u_1, \dots u_n\}$ — базисы пространства V. Не умоляя общности, считаем, что мощность множества $v > n$. Перенумеруем элементы базиса u так, что $u_1, \dots u_k \notin v$ и $u_{k+1}, \dots v_n \in v$.

Тогда по лемме о замене 4 существует подмножество $\{v_1, \dots v_k\} \subseteq v : w = v \setminus \{v_1, \dots v_k\} \cup \{u_1, \dots u_k\}$ — базис. $u \subseteq w$ и $|v| = |w|$. Так как базис — максимальная линейно независимая система, то один базис не может строго содержаться в другом. Следовательно, $w = u$, откуда $|v| = n$. □

Def 13. Размерность пространства — мощность любого базиса этого пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем существует конечный базис.

Вопрос 8 Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений

i Линейные отображения

Def 14. Пусть V и U — векторные пространства, L — функция $V \to U$. L называется **линейным отображением**, если $\forall x, y \in V,\ \alpha \in F$:

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$
$$L(x\alpha) = L(x)\alpha$$

Биективное линейное отображение называется **изоморфизмом**. Линейное отображение из пространства в само себя называется **линейным оператором**. Отображение из пространства в основное поле часто называется **функционалом**.

Property. *Пусть вектор $v = (v_1, \dots v_n)$ и отображение $L : V \to U$.*

$$L(v) = (L(v_1), \dots L(v_n)) \in {}^nU.$$

Тогда

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^n.$$

<u>*Note*</u>. В случае бесконечного v можем переписать аналогично, обозначив $L(v) \in {}^nU : L(v)_x = L(x) \quad \forall x \in v$:

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^v.$$

Designation. Пусть v — базис V. Тогда $\forall x \in V\ \exists! a \in F^v_{fin} : x = va$. Тогда $a = x_v$ — столбец координат x в базисе v.

Lemma 2. *Пусть V — векторное пространство над полем F, а v — базис V. Отображение $\varphi_v : V \to F^v$, заданное равенством $\varphi_v(x) = x_v$, является изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Рассмотрим $x, y \in V$.

$$\begin{cases} vx_v = x \\ vy_v = y \end{cases} \implies v(x_v + y_v) = x + y = v(x+y)_v \implies \varphi_v(x+y) = \varphi_v(x) + \varphi_v(y).$$

$$v(x\alpha)_v = x\alpha = v(x_v\alpha) \implies \varphi_v(x\alpha) = \varphi_v(x)\alpha.$$

Построим обратное отображение: $\theta_v : F^v \to V,\ \theta_v(a) = va$. Следовательно, φ_v — биективное линейное отображение. □

Corollary 1 (классификация векторных пространств)**.** *Любое векторное пространство изоморфно пространству F^I для некоторого множества I, мощность которого равна размерности пространства.*

Два пространства изоморфны между собой тогда и только тогда, когда их размерности равны.

ii Матрицы линейных отображений

Statement 4. *Пусть $L : U \to V$ — линейное отображение, $u = (u_1, \dots u_n)$ — базис U, $v = (v_1, \dots v_m)$ — базис V.*

$$\exists! A \in M_{m\times n}(F) : \forall x \in U\ L(x)_v = Ax_u.$$

Столбцы матрицы A вычисляются по формуле $a_{*k} = L(u_k)_v$.

Доказательство. По определению столбца координат $x = ux_u$.

$$\varphi_v \circ L(x) = \varphi_v \circ L(ux_v).$$

Тогда $L_(x)_v = \varphi_v\big(L(x)\big) = \varphi_v\big(L(u)\big)x_u$. Пусть $A = \varphi_v\big(L(u)\big) = \big(L(u_1)_v, \dots L(u_n)_v\big)$.

Докажем единственность. Предположим, что $Ax = Bx$ для любого столбца x. Тогда $A = B$. □

Def 15. Матрица A из прошлого утверждения 4 называется **матрицей отображения** L в базисах u, v и обозначается через L_u^v.

Если $U = V$, $u = v$, говорят о матрице оператора L в базисе u и обозначают ее через L_u.

$$L(x)_v = L_u^v x_v \text{ или } L(x)_u = L_u x_u \text{ в случае } U = V \wedge u = v.$$

Theorem 6. *Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов.*

Если U, V, W — конечномерные линейный пространства с базисами u, v, w, соответственно, $L : U \to V$, $M : V \to W$ — линейные отображения, то $(M \circ L)_u^w = M_v^w L_u^v$.

Если $U = V = W$ и $u = v = w$, то $(M \circ L)_u = M_u L_u$.

Вопрос 9 Матрица перехода от одного базиса с другому. Замена координат и изменение матрицы оператора при замене базиса

i Матрица перехода

Theorem 7. *Пусть v — базис n-мерного пространства V над полем F. Набор $u = (u_1, \dots u_n)$ является базисом тогда и только тогда, когда существует $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ такая, что $u = vA$.*

Def 16. Если u, v — базисы, то A называется **матрицей перехода** от v к u и обозначается через $C_{v\to u}$

При этом:

(1) *Столбец матрицы $C_{v\to u}$ с номером k равен столбцу координат вектора u_k в базисе v. $(C_{v\to u})_k = (u_k)_v$*

(2) $C_{v\to u}^{-1} = C_{u\to v}$

(3) *Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Положим $\forall k \in [1, n] : a_{*k} = (u_k)_v$. Тогда $va_{*k} = u_k \Longrightarrow u = vA$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Если $u = vA$, $\langle u\rangle = \langle vA\rangle = V$. При этом u минимален, так как иначе и v не минимален, значит u — базис.

1. По построению.
2. $\begin{cases} u = vC_{v\to u} \\ v = uC_{u\to v} \end{cases} \Longrightarrow uE = uC_{u\to v}C_{v\to u} \Longrightarrow E = C_{u\to v}C_{v\to u}$
3. Пусть $B \in M_{n\times m}(F)$ двусторонне обратима. $BB_1 = E_{n\times n} \wedge B_2B = E_{m\times m}$. Тогда $B_2 = B_2E_n = B_2(BB_1) = (B_2B)B_1 = E_mB_1 = B_1$. Значит $B_1 = B_2$. $B_1B = C_{u\to v}C_{v\to u} = B_1B \Longrightarrow B$ — квадратная.

□

Note. Если пространство V бесконечномерно, почти все элементы каждого столбца должны быть равны нулю.

Note. Если $V = F^n$, e — стандартный базис, то $C_{e\to u}$ — матрица, составленная из столбцов базиса u.

ii Преобразование координат при замене базиса

Theorem 8. *Пусть u, v — базисы пространства V.*

$$\forall x \in V : x_v = C_{v \to u} x_u.$$

Доказательство. Запишем определение столбца координат $x = ux_u = vx_v$. Про базисы мы знаем, что $v = uC_{u \to v}$. Тогда

$$ux_u = uC_{u \to v} x_v \Longrightarrow x_u = C_{u \to v} x_v.$$

□

iii Преобразование матрицы оператора при замене базиса

Note. Матрица перехода $C_{u \to v}$ совпадает с матрицей тождественного отображения 1_V в базисах u и v.

Lemma 3. *Пусть $u = (u_1, \dots u_n)$ — базис пространства U, $v = (v_1, \dots v_n) \in^n V$ — набор векторов пространства V. Тогда существует единственное линейное отоббражение*

$$L : U \to V : L(u) = v.$$

При этом

L инъективно тогда и только тогда, когда и линейно независим
L сюрьективно тогда и только тогда, когда u — система образующих
L — изоморфизм тогда и только тогда, когда u — базис

Доказательство. $\forall x \in U : x = ux_u$. Тогда $\forall L : L(x) = L(u)x_u$. Зададим L так: $L(x) = vx_u$. Оно линейно и единственно. □

Note. Пусть u, v — базисы пространства V. Тогда матрица отображения L из леммы в базисе u совпадает с матрицей перехода $C_{u \to v}$.

Statement 5. *Пусть u, u' — базисы пространства U, v, v' — базисы пространства U, v, v' — базисы пространства V, $L : V \to U$ — линейное отображение. Тогда*

$$L_{u'}^{v'} = C_{v' \to v} L_u^v C_{u \to u'}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&L(x)_v = L_u^v x_u \\
&C_{v' \to v} L(x)_v = L(x)_{v'} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \to u} x_u \\
&L(x)_v = C_{v \to v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \to u} x_u \\
&L_u^v = C_{v \to v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \to u}
\end{aligned}$$

□

Note. Если $U = V$ и $u = v,\ u' = v'$,

$$L_{u'} = C_{u' \to u} L_u C_{u \to u'}.$$

Вопрос 10 Внешняя и внутренняя пряма сумма пространств, естественный изоморфизм между ними

Designation. U, V — подпространства векторного пространства W над полем F.

Def 17. Сумма $U + V$ — совокупность $\{x + y \mid x \in U, y \in V\}$.

Note. $U + V \subseteq W \land U \cap V \subseteq W$.

Def 18. Пространство W называется **внутренней прямой суммой** подпространств U и V, если

$$\forall z \in W \ \exists! x \in U, y \in V : z = x + y.$$

То есть $W = U + V \land V \cap U = \{0\}$.

Def 19. U, V — векторные пространства. Их **внешней прямой суммой** называется их декартово произведение с покомпонентыми операциями.

Designation. Обе прямые суммы обозначаются $U \oplus V$.

Note. Пространства U, V естественно вкладываются в из внешнюю прямую сумму: $\forall x \in U : x \mapsto (x, 0) \land \forall y \in V : y \mapsto (0, y)$. Если отождествить U и V с их образами, то внешняя сумма превращается в прямую сумму подпространств.

Statement 6. *$U, C \leqslant W$, $U \oplus V$ — их внешняя прямая сумма. Зададим $\varphi : U \oplus V \to W$ так $\varphi(x, y) = x + y$. φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда W является внутренней суммой подпространств U и V.*

Если $W = U \oplus V$, то объединение базисов U и V — базис W. Поэтому $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$.

Statement 7. *$\forall U \leqslant W \ \exists V \leqslant W : W = U \oplus V$.*

Доказательство. Выберем базис u подпространства U и дополним его до базиса пространства W: $u \cup v$. Тогда подойдет $V = \langle v \rangle$. $\square$

Theorem 9. *Для пространств $U_1, \dots U_n \leqslant V$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $U_1 \oplus \dots U_n \to V, \ (x_1, \dots x_n) \mapsto x_1 + \dots x_n$ — *изоморфизм*
(2) $\forall x \in V \ \exists! \big(x_1 \in U_1, \dots x_n \in U_n\big) : x = x_1 + \dots x_n$
(3) $V = U_1 + \dots U_n$ *и* $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j\right) = \{0\} \qquad i \in [1, n]$
(4) *Объединение базисов подпространств $U_1, \dots U_n$ — базис V.*

Вопрос 11 Теорема о размерности ядра и образа. Теорема о размерности прямой суммы

Def 20. Пусть $L : U \to V$ — линейное отображение. Тогда

Ядро отображения L — $\operatorname{Ker} L = L^{-1}(0) \coloneqq \{x \in U \mid L(x) = 0\}$
Образ отображения L — $\operatorname{Im} L = \{L(x) \mid x \in U\}$

Statement 8. *Пусть $L : U \to V$ — линейное отображение.*

$$\operatorname{Ker} L \leqslant U \land \operatorname{Im} L \leqslant U.$$

Def 21. $L : U \to V$ — линейное отображение. **Слой** отображения над точкой $y \in V$ — множество $\{x \in X \mid L(x) = y\} = L^{-1}(y)$

Statement 9. *Все слои отображения L являются сдвигами ядра. $L(x) = y, \ x \in U$:*

$$L^{-1}(y) = x + \operatorname{Ker} L.$$

Theorem 10 (о размерности ядра и образа)**.** *$L : U \to V$ — линейное отображение. Тогда*

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L.$$

Доказательство. $u = (u_1, \dots u_k)$ — базис $\operatorname{Ker} L$, $v = (v_1, \dots v_m)$. Дополним базис ядра до базиса U: $u \cup v$ — базис U. Докажем, что $L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots L(v_m))$ — базис образа.

$$\forall x \in \operatorname{Im} L \ \exists y \in U : L(y) = x.$$

Разложим $y = ua + vb, \qquad a \in F^k, \ b \in F^m$
Тогда

$$x = L(y) = L(u) \cdot a + L(v) \cdot b.$$

Так как $u \in \operatorname{Ker} \ : L(u) = (L(u_1), \dots L(u_k)) = (0, \dots 0)$. Следовательно, $L(v)$ — система образующих. Проверим, что $L(v)$ линейно независим. Пусть

$$L(v) \cdot c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(v)c = L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow vc = ud \text{ для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u — два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ — линейно независимый. ☐

Theorem 11 (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)**.** *Пусть $U, V \leqslant W$.*

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

Доказательство. Зададим линейное отображение $L : U \oplus V \to W : L(u, v) = u + v$. Тогда $\operatorname{Im} L = U + V$.

$$(u, v) \in \operatorname{Ker} L \iff u + v = 0 \iff u = -v \in U \cap V.$$

$$\operatorname{Ker} L = \{(u, -u) \mid u \in U \cap V\} \cong U \cap V.$$

По теореме о размерности ядра и образа

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim U \cap V + \dim U + V.$$

☐

Вопрос 12 Факторпространство и его универсальное свойство

Designation. V — векторное пространство, $U \leqslant V$.

Def 22. $x + U$ — аффинное подпространство или смежный класс V по U.
$y \sim_U x \iff y - x \in U$ — эквивалентность.

Def 23. Множество смежных классов V по U с операциями

$$(x+U)+(y+U)=(x+y)+U$$
$$(x+u)\alpha = x\alpha + U$$

называется **факторпространством** V по U и обозначается V/U.

Проверка корректности определения. Докажем, что определение операций не зависит от выбора представителей классов.

- Сложение
$$x'+U=x+U \Longrightarrow x'+0\in x+U \Longrightarrow x'\in x+U.$$
$$y'+U=y+U \Longrightarrow y'+0\in y+U \Longrightarrow y'\in y+U.$$
Тогда $\exists z\in U: x'=x+z$ и $\exists t\in U: y'=y+t$.
$$\begin{aligned}(x'+U)+(y'+U) &\coloneqq (x'+y')+U=\\ &=(x+y)+\underbrace{(z+t)}_{\in U}+U\subseteq\\ &\subseteq (x+y)+U\end{aligned}$$
Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

- Умножение
$$\begin{aligned}(x'+U)\alpha &\coloneqq x'\alpha+U=\\ &=(x+z)\alpha+U=x\alpha+\underbrace{z\alpha}_{\in U}+U\subseteq\\ &\subseteq x\alpha+U\end{aligned}$$
Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

□

Designation. $\pi_U: V\to V/U$ — естественная проекция: $\pi_U(x)=x+U$.

Note. π_U линейно и сюрьективно $\operatorname{Ker}\pi_U=U$.

По теореме о размерности ядра и образа $\dim V/U=\dim V-\dim U$.:

Statement 10. *Пусть $U\subseteq V$. Для любого линейного отображения $L: V\to W$, $U\subseteq \operatorname{Ker} L$, существует единственное отображение $\tilde{L}: V/U\to W: L=L\circ\pi_U$. При этом сюрьективность $\tilde{L}$ равносильна сюрьективности L, а инъективность $\tilde{L}$ — тому, что $\operatorname{Ker} L=U$. То есть такая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi_U"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\tilde{L}"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{L}(x+U)=L(x)$. Эта формула задает линейное отображение и равносильна $L=\tilde{\pi}_U$. Следовательно, $\tilde{L}$ существует и единственно.

π_U инъективно, следовательно, L сюрьективно $\Longleftrightarrow$ $\tilde{L}$ сюрьективно.

Отображение $\tilde{L}$ инъективно $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\tilde{L}=\{0_{V/U}+U\}$.

$$x+U\in\operatorname{Ker}\tilde{L}\Longleftrightarrow \tilde{L}(x+U)=0\Longleftrightarrow L(x)=0\Longleftrightarrow x\in\operatorname{Ker} L.$$

□

Theorem 12 (о гомоморфизме). $L : V \to W$ — *линейное отображение.*

$$V/\operatorname{Ker} L \cong \operatorname{Im} L.$$

Доказательство. Возьмем $U = \operatorname{Ker} L$ и заменим W на $\operatorname{Im} L$. Далее применим утверждение **??**. □