Глава 1

Интергирование

1.1

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x),$$

где

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1.1.1 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle),\ x, x_0 \in (a, b)$. *Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде*

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0} f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) dt.$$

Переход: $n - 1 \to n$.

$$\begin{aligned}
R_{n-1,x_0} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x - t)^{n-1} dt = \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\
&= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n \Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt}_{R_{n,x_0} f(x)}
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 1.1.2 (Хитрая теорема о среднем). $f, g \in C[a,b]$, $g \geqslant 0$. *Тогда*

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary 1

Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 1.1.3. *Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.*

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 1.1.2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\theta)\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^x.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Definition 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a, b]$.
Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} x_i)$.
θ называется оснащением дробления τ, если $\theta = \{t_1, \dots t_n\} : t_j = [x_{j-1}, x_j]$.
Пара (τ, θ) называется оснащенным дроблением.

Definition 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a, b]$, (τ, θ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, интегральной суммой называется

$$S_{\tau,\theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Theorem 1.2.1. $f \in C[a, b]$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (\tau, \theta)$— *оснащенное дробление отрезка* $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau,\theta}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau| \to 0} = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall s, t \in [a, b] : \left(|s - t| < \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_i)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big| f(t_j) - f(c_j) \Big| (x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{|b - a|} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла

Definition 3: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a, b]$.
Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, θ)

Definition 4

$f \in C[a,b]$, (θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$. Тогда

$$S_{\tau,\theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j+1})$$

называется **интегральной суммой**.

Theorem 1.3.1. $f \in C[a,b]$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такие, что для любого оснащенного дробления* (τ, θ) *отрезка* $[a,b]$, $|\tau| < \delta$ *:*

$$\left| S_{\tau,\theta}(t) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \to 0} S_{\tau,\theta} \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \big(\forall s, t \in [a,b], |s-t| < S \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}\big)$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \right| &\leqslant \\ \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(r_j)|\,(x_j - x_{j-1}) \right| &\leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$. ∎

Definition 5

Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и

$$\exists A\colon \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall (\tau, \theta)\ |\tau| < \delta \quad |S_{\tau,\theta} - A| < \varepsilon.$$

Тогда A — **интеграл по Риману от функции** f **на отрезке** $[a,b]$.

Practice. Доказать, что, если f кусочно-непрерывна (то есть имеет 1 разрыв первого рода в точке c), то f интегрируема по Риману и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Example 1.3.1.

$$\int_0^a e^x dx = ?$$

Рассмотрим $\tau = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, a\right\}$ и $\theta = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, a\frac{n-1}{n}\right\}$.

$$\int_0^a e^x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{ja}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(1 + e^{\frac{a}{n}} + \ldots + e^{a\frac{n-1}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \frac{e^{\frac{an}{n}-1}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{a}{n}-1}}}_{\to 0} e^a - 1 = e^a - 1$$

Example 1.3.2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

Example 1.3.3. $p > 0$

$$\sum_{k=1}^n k^p = n^{1+p}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= n^{1+p}\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \cdot n^{p+1}$$

1.3.1 Интеграл Пуассона

$$I(a) = \int_0^\pi \underbrace{\ln(1 - 2a\cos x + a^2}_{f(x)} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \ln\left(1 - 2a\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) + a^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n 1 - 2a\cos\frac{(k-1)\pi}{n} + a^2\right) = .$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a+1} \cdot (a-1)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a^{2n}-1}{n}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 2\ln a & |a| > 1 \end{cases}$$

Practice.

$$\int_0^\pi \ln(\cos x) dx = ?.$$

Practice.

- $I(a) = I(-a)$
- $I(-a) + I(a) = I(a^2)$

1.3.2 Формула трапеции

Statement. *Пусть* $|f'| \leqslant c$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_{\tau,\theta}(f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t_j, c_i \in [x_{j-1}, x_j]} |f(t_j) - f(c_j)|\,(x_j - x_{j-1}) \leqslant C \cdot |b-a|$$

Формула трапеции

$$\sum \frac{f(x_j) + f(x_{j-1})}{2}(x_j - x_{j-1}) \approx \int_a^b f(x)dx.$$

Theorem 1.3.2 (о погрешности в формуле трапеции)**.** $f \in C^2[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}(x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{1}{8}|\tau|^2 \int_a^b |f''(x)|dx.$$

Для равномерного дробления

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{f\left(a + \frac{j-1}{n}b\right) + f\left(a + \frac{j}{n}b\right)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{n^2}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Доказательство. Рассмотрим один участок разбиения $[x_{j-1}, x_j]$ и докажем неравенство для него. Пусть g — линейная функция, соединяющая вершины столбцов на каждом участке разбиения. Определим $h = f - g$. $h(x_j) = h(x_{j-1}) = 0$, $h'' = (f-g)'' = f''$. Обозначим $x_{j-1} = \alpha,\ x_j = \beta$.

Перепишем нужное неравенство

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)dx\right| \overset{?}{\leqslant} \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2 \int_\alpha^\beta |h''(x)|dx.$$

Проинтегрируем, где c любая константа, c_1, c_2 корни уравнения $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} = 0$:

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx = \int_\alpha^\beta h(x)d(x-c) = (x-c)h(x)\,\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h'(x)(x-c)dx =$$

$$= (x-c)h(x)\,\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h'(x)d\left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right) =$$

$$= (x-c)h(x)\,\Big|_\alpha^\beta - h'(x)\left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta h''(x)\left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right)dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta h''(x)\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2}dx$$

Так как $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \leqslant \frac{\alpha-\beta}{2}$, можем переписать

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)fx\right| \leqslant \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|h''(x)\right|dx = \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta \left|h''(x)\right|dx.$$

□

Corollary 2: Формула Эйлера-Маклорена

$$f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\frac{f(m)}{2}+f(m+1)+\ldots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}=$$
$$=\frac{f(m)+f(n)}{2}+T(f,m,n)$$

Воспользуемся рассуждениями из доказательства выше. Так, можно получить, что

$$T(f,m,n)=\int_m^n f(x)dx+\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1} f''(x)\frac{(x-k)(k+1-x)}{2}dx=$$
$$=\int_m^n f(x)dx+\int_m^n f''(x)\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx$$

Example 1.3.4. Рассмотрим $1^p+\ldots+n^p$ при $p=-1$ — гармоническая сумма.

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\underbrace{\int_1^n\frac{dx}{x}}_{\ln n}+\underbrace{\int_1^n\frac{2}{x^3}\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx}_{\leqslant\int_1^n\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^n\leqslant\frac{1}{2}}=$$
$$=\ln n+\gamma+o(1)$$

1.3.3 Формула Стирлинга

$$\ln(n!)=\ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(n)=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(n)+\int_1^n\ln x dx-\int_1^n\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2x^2}dx=.$$
$$=\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n-0+1+C+o(1)$$

Следовательно, $n!\approx\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\tilde{C}$. Тогда, используя формулу Валлиса, получаем $C_{2n}^n\approx\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Подставим в формулу $n!$:

$$C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!^2}-\frac{\tilde{C}\left(\frac{2n}{e}\right)\sqrt{2n}}{(\tilde{C})^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}n}=\frac{1}{\tilde{C}}\cdot\frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Из чего следует, что $\tilde{C}=\sqrt{2\pi}$.

Theorem 1.3.3 (Формула Стирлинга)**.**

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi}.$$

1.4 Несобственные интегралы

Definition 6: Несобственный интеграл

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$. Тогда **несобственным интегралом** называется

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{B\to b-} \int_a^B f(x)dx.$$

Если предел существует, то $\int_a^{\to b} f(x)dx$ **сходится**, иначе **расходится**.

Аналогично определяется $\int_{\to a}^b f(x)dx$.

Theorem 1.4.1 (Критерий Больцано-Коши)**.** $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b)\colon \forall B_1, B_2 \in (\delta, b)\colon \left|\int_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(B) \coloneqq \int_a^B f(x)dx$. Тогда, если $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, то $\exists \lim_{B\to b-} F(B)$, а значит

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \forall B_1, B_2 \in (\delta, B)\colon |F(B_1) - F(B_2)| < \varepsilon.$$

В обратную сторону следует из того, что последовательность $F(B_i)$ фундаментальна. ☐

Note. Критерий Коши чаще используется для расходимости.

Example 1.4.1. $\int_0^1 x^\alpha dx$. Если $\alpha \geqslant 0$, то все легко. Но если $\alpha < 0$, то необходимо считать предел

$$\lim_{A\to 0+} \int_A^1 x^\alpha dx = \lim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_A^1 .$$

Предел существует только при $\alpha > -1$, а при $\alpha \leqslant -1$ ряд расходится.

Example 1.4.2. $\int^{+\infty} x^\alpha$. При $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^B x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^B .$$

При $\alpha < -1$ интеграл сходится, а при $\alpha \geqslant -1$ расходится.