Конспект по топологии
I семестр
(лекции Иванова Сергея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

25 декабря 2019 г.

Оглавление

Глава 1

Общая топология

1.1 Метрические пространства

1.2 Топологические пространства

1.3 Внутренность, замыкание, граница

1.4 Подпространства

1.5 Сравнение топологий

1.6 База топологии

1.7 Произведение топологических пространств

Def 1. X, Y - топологические пространства.
Топология произведения на $X \times Y$ – топология, база которой равна

$$\{A \times B \mid A \subset X, B \subset Y \text{ - открыты.}\}.$$

$X \times Y$ с такой топологией – произведение X и Y.

Theorem 1. *Определение 1 корректно.*

Доказательство.

1. Все пространство открыто
2. Пересечение двух множеств из базы = объединение множеств базы.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Получили объединение открытого в X и в Y, а значит принадлежит базе.

□

Theorem 2. $A \cap X$ *– замкнуто,* $B \cap Y$ *– замкнуто. Тогда* $A \times B$ *– замкнуто в* $X \times Y$*.*

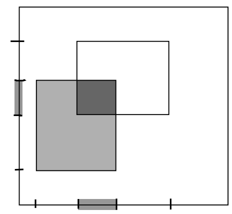

Рис. 1.1: Пересечение

Доказательство. Докажем, что дополнение открыто.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y.$$

$Y \setminus B$ открыто в Y, а $X \setminus A$ открыто в X. Тогда объединение произведений с X и Y есть объединение открытых в $X \times Y$. □

Practice. Для любых $A \subset X, \ B \subset Y$:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$
2. $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$
3. $A \times B$ как произведение подпространств равно $A \times B$ как подпространство произведения.

1.7.1 Произведение параметризуемых метрических пространств

Здесь все также, только топология задается метрикой. d_X, d_Y - метрики.

Theorem 3.

$$d((x, y), (x', y')) = max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

d - метрика на $X \times Y$. Произведение метризуемых пространств метризуемо.

Доказательство. 1. Проверим, что d - метрика. Очевидно, что $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff d_X(x, x') = d_Y(y, y') = 0 \iff x = y \wedge x' = y'$. Также значение не зависит от порядка. Осталось проверить неравенство треугольника.

$$d(p, p') + d(p', p'') \overset{?}{\geq} d(p, p'') \overset{\text{НУО}}{=} d_X(x, x'').$$

$$d_X(x, x') + d_X(x', x'') \geq d_X(x, x'').$$

2. $\Omega_d \subset \Omega_{X \times Y}$

$$B_r((x, y)) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y).$$

А это базовое множество, которое мы представили через базовые множества X и Y.

3. $\Omega_{X \times Y} \subset \Omega_d$ Рассмотрим $W \in \Omega_{X \times Y}$.

$$\exists A \subset X, \ B \subset Y\text{- открытые}, (x, y) \in A \times B \subset W.$$

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}^X(x) \subset A.$$

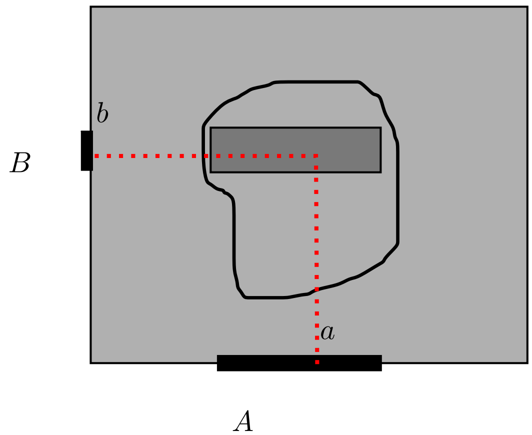

Рис. 1.2: Произведение метрических пространств

$$\exists r_2 > 0 : B^Y_{r_2}(y) \subset B.$$

Теперь возьмем $r = \min(r_1, r_2)$

$$B^{X\times Y}_r((x,y)) = B^X_r(x) \times B^Y_r(y) \subset A \times B \subset W.$$

□

Statement (Согласование метрик)**.**

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$
$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}.$$

Доказательство. Проверим неравенство треугольника для второй метрики (для первого - очевидно).

$$\begin{array}{ccc} d_2((x,y),(x'',y'')) & \overset{?}{\leq} & d_2((x,y),(x',y')) + d_2((x',y'),(x'',y'')) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & \leq & \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \end{array}.$$

□

Def 2. Бесконечное произведение пространств

$\{X_i\}_{i\in I}$ - семейство топологических пространств. Ω_i - топология.

Множество $\prod_{i\in I} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} \mid \forall i, x_i \in X_i\}$.

Тогда рассмотрим отображение $p_i : X \mapsto X_i$ - проекция.

Тихоновская топология на X − топология с предбазой

$$\left\{p_i^{-1}(U)\right\}_{i\in I,\ U\in\Omega}.$$

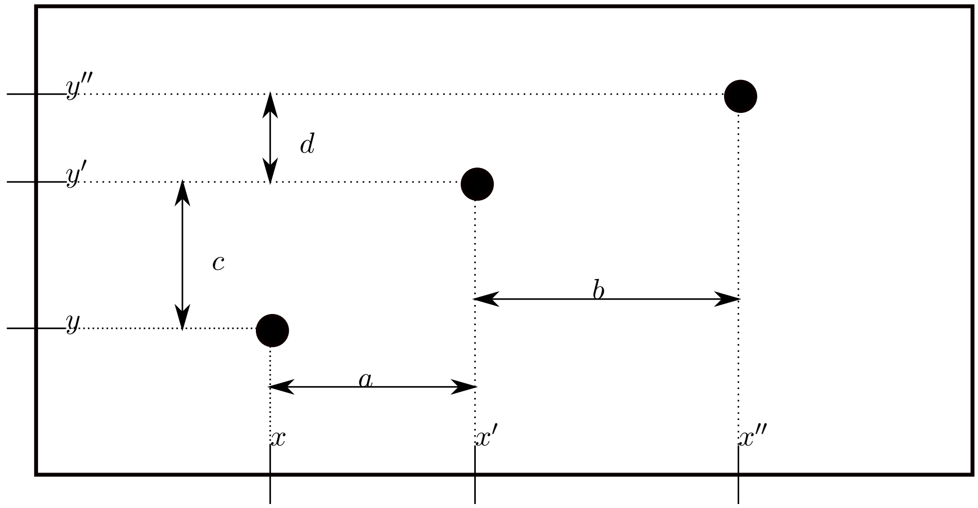

Рис. 1.3: Неравенство треугольника

Tasks. 1. Счетное произведение метризуемых – метризуемо. Сначала можно разобраться с отрезком $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1]$.

2. Канторовское множество $\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1.8 Непрерывность

X, Y - топологические пространства, Ω_1, Ω_2 - топологии, $f : X \to Y$.

Def 3. f – непрерывна, если $\forall U \subset \Omega_Y :\ f^{-1}(U) \subset \Omega_X$.

Note.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exs. 1. Тождественное отображение непрерывно. $id_X : X \to X$

2. Константа тоже непрерывна. $Const_{y_0} : X \to Y,\ \forall x \in X \quad x \mapsto y_0$

3. Если X - дискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

4. Если Y - антидискретно, $\forall f : X \to Y$ - непрерывно.

Def 4. $f : X \to Y,\ x_0 \in Y\ f$ непрерывна в точке x_0, если

$$\forall \text{ окрестности } U \ni y_0 = f(x_0) \exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(U) \subset V.$$

Theorem 4. *f - непрерывна тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in X : f$ - непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. $\Rightarrow$)
$y_0 \in U$.

$$\begin{cases} f^{-1}(U) \text{ открыт} & V := f^{-1}(U) \\ x_0 \in f^{-1}(U) & f(V) \subset U \end{cases}.$$

$\Leftarrow$)
$U \subset Y$ - открыто, хотим доказать, что $f^{-1}(U)$ - открыто. Достаточно доказать, что $\forall x \in f^{-1}(x)$- внутренняя.

$$\exists V \ni x : f(V) \subset U \Leftrightarrow x \in V \subset f^{-1}(U).$$

Тогда x - внутренняя точка $f^{-1}(U)$. □

1.8.1 Непрерывность в метрических пространствах

Theorem 5. *X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y,\ x_0 \in X$.*
Тогда f – непрерывна в точка x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > \exists \delta > 0 : f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Или можем записать альтернативную формулировку непрерывности:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x' \in X \wedge d(x, x') < d \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Так как f – непрерывна в точке x, существует окрестность $V \ni x : f(v) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как V открыто, $\exists \delta > 0 : B_\delta \subset V$.

$\Leftarrow$) Рассмотрим $U \ni f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset U$:
$\exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Можем взять $V := B_\delta(x)$. □

1.8.2 Липшицевы отображения

Def 5. X, Y – метрические пространства.
$f : X \to Y$ – липшицево, если $\exists c > 0 \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \le c d_X(x, x')$. C – константа Липшица данного отображения.

Corollary. Все липшицевы отображения непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \le C\delta = \varepsilon.$$

□

Ex. X – метрика, $x0 \in X$. $f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, x_0)$

$$|f(x) = f(y)| = f(y) - f(x) = d(y, x_0) - d(x, x_0) \le d(x, y).$$

Получили, что липшицево с константой 1.

Task. $A \subset X$

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Доказать, что X тоже липшицево с константой 1.

Ex. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ – непрерывна.

1.8.3 Композиция непрерывных отображений

Theorem 6. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

1.9 Аксиомы

1.9.1 Аксиомы счетности

Def 6. $X = (X, \Omega)$ База в точке $x \in X$ – такое множество $\Sigma_x \subset \Omega$, что:

1. $\forall V \in \Sigma_x : x \in V$
2. $\forall U \not\ni x \exists V \in \Sigma_x : V \subset U$

Designation. Счетное множество – не более, чем счетное.

Def 7. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме сетности (1AC), если для любой точки $x \in X$ существует счетная база в этой точке.

Def 8. Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности (2AC), если у него есть счетная база топологии.

Theorem 7. *2AC $\Rightarrow$ 1AC*

Доказательство. Пусть Σ – база топологии, $x \in X$. Пусть ... □

Theorem 8. *Все метрические пространства удовлетворяют второй аксиоме счетности.*

Statement. $\mathbb{R}$ *имеет счетную базу.*

Theorem 9. *Если X и Y имеют счетную базу, то $X \times Y$ тоже имеет счетную базу.*

Theorem 10. *Если X имеет счетную базу, то любое его подпространство тоже имеет счетную базу.*

Corollary. $\mathbb{R}^n$ имеет счетную базу.

Practice. 1AC тоже наследуется подпространствами и произведениями.

Def 9. Топологические свойство – наследственное, если оно сохраняется при замене пространства на любое подпространство.

Ex. Дискретность, антидискретность, 1AC, 2AC – наследственные свойства.

Theorem 11. *Линделёф Если X удовлетворяет 2AC, то из любого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Λ – множество тех элементов базы, которые содержатся хотя бы в одном из элементов покрытия. Λ – счетное покрытие.

Каждому $U \in A$ сопоставим V из исходного покрытия, для которого $U \subset V$.

Все такие V образуют искомое счетное покрытие. □

1.9.2 Сеперабельность

Def 10. Всюду плотное множество – множество, замыканние которого есть все пространство.

Def 11. Множество всюду плотно тогда и только тогда, когда оно не пересекается с любым непустым открытым множеством.

Ex. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Def 12. Топологическое пространство сепарабельно, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Property. *X, Y – сепарабельны $\Longrightarrow X \times Y$ тоже.*

Note. Сепарабельность – не наследственное свойство.

Theorem 12.

- *Счетная база $\Longrightarrow$ сепарабельность.*
- *Для метризуемых пространств сеперабельность $\Longrightarrow$ счетная база*

1.10 Аксиомы отделимости

Def 13. X обладает свойтсвом T_1, если для любой различных точек $x, y \in X$ существует такое открытое U, что $x \notin U \wedge y \notin U$.

Theorem 13. *$T_1 \Longleftrightarrow$ любая точка является замкнутым множеством.*

Def 14. X – хаусдорфово, если для любых $x, y \in X$ существуют окрестности $U \ni x \wedge V \ni y :\ U \cap V = \varnothing$.

Def 15. X хаусдорфово $\Longleftrightarrow$ Диагональ $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ замкнута в $X \times X$

Def 16. X – регулярно, если

- обладает T_1
- $\forall$ замкнутого $A \subset X$ $\forall x \in X \setminus A$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \varnothing$
  Другое название T_3-пространство

Def 17. X – нормально, если

- обладает T_1
- $\forall A, B \in X (A \cap B = \varnothing)$ $\exists$ открытые $U, V : A \subset U, B \subset V \wedge U \cap V = \varnothing$

Другое название T_4-пространство

Statement. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Practice. Свойства $T_1 - T_3$ наследуются подпространствами и произведениям.
Нормальность не наследственная.

Def 18. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Хороший метод.
$f : X \to Y$

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Она корректна, непрерывна, и принимает значение ноль на A и единице B. □

Lemma (Урысон)**.** X *– нормально,* $A, B \subset X$ *– замкнуты,* $A \cap B = \varnothing$*. Тогда существует непрерывна функция* $f : X \to [0, 1] :$ $f \restriction_A = 0 \wedge f \restriction_B = 1$

1.10.1 Факторизация

Ex. Склеим в квадрате $ABCD$ стороны $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ по аффинной биекции между ними, сохраняющей отученное направление. Получим цилиндр $S^1 \times [0, 1]$.

Ex. Если склеить $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, получи **лента Мебиуса**.

Def 19. Пусть X – топологическое пространство. Γ – подгруппа группы $Homeo(X)$ – группы всех гомеоморфизмов из X в себя.
Введем отношение эквивалентности $\sim$ на X :

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists g \in \Gamma : g(a) = b.$$

Фактор пространство $X \diagup \sim$ обозначается X/F или $X \backslash F$

Theorem 14. *Пусть* $p : X \to X/\sim$ *– каноническая проекция.* $f : X \to Y$ *переводит эквивалентные точки в равные:*

$$\forall x, y \in X : \ x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Тогда

1. $\exists \overline{f} : X/\sim \to Y : f = \overline{f} \circ p.$
2. $\overline{f}$ *непрерывно тогда и только тогда, когда* f *непрерывно.*

Доказательство.

- Определим $\overline{f}([x]) = f(x)$ для всех $x \in X$
- По непрерывности композиции, если $\overline{f}$ непрерывна, то f тоже.
- В обратную сторону – по определению фактортопологии. (проверим определение непрерывности)

□

Theorem 15. $[0, 1]/\{1, 0\} \cong S^1$

Theorem 16. X *– замкнуто,* Y *– хаусдорфово.* $f : X \to Y$ *– непрерывно и сюрьективно. Тогда* $X/_\sim \cong Y$*. Где* $\sim$ *– эквивалентность .*

Theorem 17. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Доказательство. Вместо D^n возьмем B – замкнутый шар радиуса π с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. По прошлой теореме 16 достаточно построить сюрьективный гомеоморфизм $f : B \to S^n$, отображающий край шара в одну точку, а в остальном инъективен. Сойдет такое

$$f(x) = \left(\frac{1}{|x|} \sin(|x|) \cos(|x|)\right), f(0) = (0_{\mathbb{R}_{n-1}}, 1).$$

□

1.11 Многообразия

Designation. Здесь и далее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 20. n-мерное многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, обладающее свойством локальной евклидовости: у любой точки $x \in M$ есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.

Число n – размерность многообразия.

Theorem 18. *При $m \neq n$ никакие непустые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Corollary. Многообразие размерности n не гомеоморфно многообразию размерности m.

Ex. 0-мерные многообразия – не более чем счетные дискретные пространства.

Ex. Любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или любого многообразия – многообразие той же размерности.

Ex. Сфера S^n – n-мерное многообразие

Ex. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n = S^n/\{id, -id\}$ – многообразие

Practice. В диске D^n склеим противоположные точки границы. Полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$.

Def 21. n-мерное многообразие с краем – хаусдорфово пространство M со счетной базой и такое, что у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+$.

Множество точек, у которых нет окрестностей первого вида, называются краем M и обозначаются ∂M.

Def 22. Поверхность – двумерное многообразие.

Theorem 19.

- *Пусть дан правильный $2n$ угольник D^2 с границей разбитой на части), стороны которого разбиты на пары и ориентированы. Склеим кажу пару сторон по естественному отображению с учетом ориентации. Тогда получится двумерное многообразие.*
- *Пусть дан m-угольник некоторые $2n$ сторон ($2n < m$) которого разбиты на пары, ориентированы и склеены аналогично. Тогда получается двумерное многообразие.*

Note. Можно брать и несколько многоугольников и склеивать из между собой.

1.11.1 Классификация многообразий

Note. Любое многообразие локально линейно связно. Следовательно, компоненты линейной связности совпадают с комнопнентами связности и открыты. Будем исследовать только связные многообразия.

Theorem 20. *Пусть M – непустое связное 1-мерное многообразие. Тогда*

1. *M – компактно, без края $\Longrightarrow M \cong S^1$*
2. *M – некомпактно, без края $\Longrightarrow M \cong \mathbb{R}$*
3. *M –*

Def 23. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Сфера с p ручками строится так: берем сфер S^2, вырезаем p не пересекающихся дырок D^2. Далее берем p торов с такими же дырками и приклеиваем по дыркам торы к сфере.

Def 24. Сфера с пленками – аналогично, только приклеиваем ленты Мебиуса.

Practice. Сфера с одной пленкой – $\mathbb{R}P^3$, сфера с двумя пленками – бутылка Клейна.

Statement. *Поверхность – связное двумерное многообразие.*

Theorem 21.

- *Компактная поверхность без края гомеоморфна сфере или сфере с ручками или сфере с пленками.*
- *Поверхности разного типа, сферы с разным числом ручек, сферы с разным числом пленок попарно не гомеоморфны.*
- *Компактная поверхность с краем гомеоморфна одному из этих цилиндров с несколькими дырками.*

Поверхности с разным числом дырок негомеоморфны.

1.11.2 Эйлерова характеристика

Def 25. ПУсть M – компактная поверхность, разбитая вложенныам связным графом на области-диски (замыкание области гомеоморфно диску, граница – цикл в графе). Эйлерова характеристика M – целое число:

$$\chi(M) = V - E + F.$$

Theorem 22. *Эйлерова характеристика – топологический инвариант.*

Exs.

- $\chi(S^2) = 2$
- $\chi(T^2) = 0$
- $\chi(\text{бутылки Клейна}) = 0$
- При вырезании дырки χ уменьшается на 1
- $\chi(\text{сферы с } n \text{ дырками}) = 2 - n, \chi(\text{тора с дыркой}) = -1$
- $\chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cup B)$
- $\chi(\text{сферы с p ручками}) = 2 - 2p$
- $\chi(\text{сферы с q пленками}) = 2 - q$