Конспект по матанализу
III семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

17 сентября 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: †

2 Sept

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \to f$), если

$$\forall x \in E\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0, 1)$. Так как $\forall x \in (0,1)\colon x^n \to_{n\to\infty} 0$, $f_n \to f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. *$f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что*

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \to f \implies \|f_n - f\| \to 0 \iff f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется равномерно ограниченной на E, если существует такое M, что
$$\forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leqslant M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. *Из равномерной сходимости следует поточечная*

1. *Если для всех $x \in E$ выполнено*
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$
где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E.

2. *Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что*
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$
то f_n не сходится равномерно к f на E.

3. *Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$.*

Доказательство.
$$\sup_{x\in E}|f_n(x)g_n(x)| \leqslant M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x\in E}|f_n(x)|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
□

4. **Критерий Коши**. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E, согда*[1] *для любого положительного ε существует N, что*
$$\forall n, m > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Тогда для любых $n, m > N$
$$\begin{aligned}|f_m(x) - f(x)_n| &\leqslant \\ &\leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаметальна. Следовательно, существует предел $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Устремим $m \to \infty$. Тогда
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

[1] С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

□

5. *Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f тоже непрерывна в точке a.*

Доказательство. Проверим, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\forall n > N \ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как f_n непрерывна в точке a, можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используем два полученых неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| \leqslant & \\ & \leqslant |f(x) - f_n(x)| + \\ & + |f_n(x) - f_n(a)| + \\ & + |f_n(a) - f_n(a)| < \\ & < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon \end{aligned}$$

□

6. **Теорема Стокса-Зайделя**. *Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна на E.*

Доказательство. Следствие из 5[прошлого свойства]. □

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функционоальный ряд

Рассмотрим функции $u_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — функциональный ряд,}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — частичная сумма ряда.}$$

Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.

$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \to 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K.

Свойства.

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, согда $r_n \rightrightarrows 0$ на E.*

2. **Критерий Коши**. *$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, согда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N, что*

$$\forall m > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E\colon \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x) \right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. **Необходимое условие равномерной сходимости ряда**. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E, то u_n равномерно сходится к 0.*

   Доказательство. По критерию Коши для $p = 1$. □

4. **Признак сравнения**. *Пусть $u_n, v_n\colon E \to \mathbb{R}$ [2] и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно на E.*

   Доказательство. Обозначим частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$

   Заметим, что

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \leqslant |C_m(x) - C_n(x)|.$$

   Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше ε при $m, n > N$ и $x \in E$. Тогда можем применить критерий Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. □

5. **Признак Вейерштрасса**. *Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.*

   Доказательство. Применить признак Коши. □

6. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.*

7. **Признак Дирихле**. *Пусть $u_n, v_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, обозначим $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно:*

   (a) ряд U_n равномерно ограничен на E, то есть $\exists M : \forall x \in E \ \forall n \quad |U_n(x)| \leqslant M$;
   (b) ряд v_n равномерно сходится к нулю ($v_n \rightrightarrows 0$);
   (c) для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.

   Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) v_k(x) = U_n(x) v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$

[2] Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае $\mathbb{C}$ не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

Так как $U_n(x)$ равномерно ограничено, а $v_n(x)$ равномерно сходится к нулю, $U_n(x)v_n(x)$ тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1})|.$$

Оценим частичную сумму[3]

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = \\
&\qquad = M \cdot |v_1(x) - v_n(x)|
\end{aligned}$$

Так как $v_n \rightrightarrows 0$, $|v_1(x) - v_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |v_1(x)|$. Значит, частичная сумма ряда стремится к $M \cdot |v_1(x)|$, следовательно[4], второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится. □

8. **Признак Лейбница**. *Если выполнены следующие условия, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x)$ *равномерно сходится:*

   (a) $v_n \rightrightarrows 0$ *на* E;
   (b) для любого $x \in E$, *ряд* $\{v_n(x)\}$ *монотонный.*

Доказательство. Обозначим за $u_n(x) \coloneqq (-1)^n$. Заметим, что ряд $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ ограничен, тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ равномерно сходится. □

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$. Обозначим $u_n(x) = \sin(nx)$ и $v_n(x) = \frac{1}{n}$. Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$\begin{aligned}
U_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} \cdot \left(e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} - e^{-ix\cdot\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right) = \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ixn}{2}}\right) \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

[3] В последнем переходе мы используем монотонность $v_k(x)$

[4] Например, по признаку сравнения

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ при $x \in (0,1)$. Обозначим $v_n(x) = \frac{x^n}{n}$. $v_n(x)$ монотонна для всех $x \in (0,1)$, так же $|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, поэтому v_n равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. **Признак Абеля**. *Пусть $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:*

   (a) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E;*
   (b) *ряд v_n равномерно ограничен;*
   (c) *для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.*

Доказательство. Проверим критерий Коши, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать число N такое, что

$$\forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \colon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля[5]:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) =$$
$$= \big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big) \cdot \big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)\big)$$

Так как v_n равномерно ограничено, а u_n равномерно сходится[6]:

$$\big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) \leqslant |U_{n+p}(x) - U_n(x)| \cdot M < \varepsilon \cdot M.$$

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для u_n и монотонность v_n:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big) \cdot \big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \big|U_{n+k}(x) - U_n(x)\big| \cdot \big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \big|v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}\big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon \cdot 2M$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через ε, поэтому можем им воспользоваться. □

1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

1. *Пусть $f_n, f \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E, f_n равномерно сходится к f на E и существует предел $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$. Тогда пределы $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существуют и равны.*

   То есть
   $$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

[5] Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.
[6] Поэтому можем использовать критерий Коши

Доказательство.

(a) Проверим, что у b_n есть предел. Из критерия Коши для f_n следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N, что

$$\forall n, m > N \ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $x \to a$. Тогда $f_n(x) \to b_n$ и $f_m(x) \to b_m$. Из того, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N\colon \forall n, m > N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon,$$

следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Поэтому предел b_n существует и $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Определим функции

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \neq a \\ b_n & x = a \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$$

Эти функции непрерывны в точке a. Кроме этого $g_n \rightrightarrows g$ на $E \cup \{a\}$, так как можно выбрать N из прошлого пункта.

(c) Используем свойство равномерной сходимости

$$b = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

□

Следствие 1. Если $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f_n \rightrightarrows f$ на (a,b) и f_n непрерывна, то $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Лекция 2: †

9 Sept

2. Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E и $\lim_{x\to a} u_n(x) = b_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Доказательство. Обозначим частные суммы за

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Тогда $\lim_{x\to a} S_n(x) = B_n$ и $S_n \rightrightarrows S$ на E. $S_n(x)$ — функции, поэтому можно применить свойство 1 и получить

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} S_n = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

□

3. Пусть $f_n \in C[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ [7]. Рассмотрим произвольную точку $c \in [a,b]$ и первообразную $\int_c^x f_n(t)dt$. Тогда

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ на } [a,b].$$

[7] Из этих двух условий автоматически следует, что f непрерывна

В частности,

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt.$$

Доказательство. Посмотрим на разность

$$\left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^x f_n(t)dt \right| \leqslant |c-x| \cdot \max_{t\in[c,x]} |f(t) - f_n(t)| \tag{1.3.1}$$

Расширив отрезок $[c, x]$ до $[a, b]$, получаем следующую оценку на 1.3.1

$$1.3.1 \leqslant (b-a) \cdot \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1.3.2}$$

Выражение в 1.3.2 не зависит от x, откуда и следует равномерная сходимость. □

4. **Перестановка дифференцирования и предельного перехода**. Пусть $f_n \in C[a, b]$, $f'_n \rightrightarrows g$, $c \in [a, b]$ и $f_n(c) \xrightarrow{n\to\infty}$. Тогда f_n равномерно сходится к f на $[a, b]$ и $f' = g$. То есть

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Доказательство. Так как $f'_n \rightrightarrows g$, по прошлому свойству

$$\int_c^x f'_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt.$$

Заметим, что

$$\int_c^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(c).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(c)}_{\to A} + \underbrace{\int_c^x f_n(t)dt}_{\rightrightarrows \int_c^x g(t)dt} \rightrightarrows A + \int_c^x g(t)dt.$$

□

Следствие 2 (дифференцирование равномерно сходящегося ряда)**.** Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$, $c \in [a, b]$, $\sum_{n=1}^\infty u'_n(x)$ равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(c)$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ сходится равномерно и

$$\left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^\infty u'_n(x).$$

1.4 Степенные ряды

Определение 5: Степенной ряд

Ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$, где $a_n,\ z,\ z_0 \in \mathbb{C}$, называется степенным с центром в точке z_0.

Замечание. С помощью переносов любой степенной ряд сводится к ряду с центром в нуле $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$.[8]

[8]Далее в утверждениях будет обычно фигурировать ряд с центром в нуле для упрощения рассуждений.

Теорема 1.4.1

Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при всех z, что $|z| < |z_0|$.[a]

[a]То есть для всех z внутри шара с центром в нуле и радиусом z_0.

Доказательство. Так как ряд сходится в точке z_0, $a_n z_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то есть $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

А такой ряд сходится, так как $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. □

Следствие 3. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ расходится, то для всех z, что $|z| > |z_0|$, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.

Определение 6: Радиус сходимости

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — такое число, что для всех z: $|z| < R$ ряд сходится, а для всех z: $|z| > R$ ряд расходится.

Замечание. R может быть равным нулю или бесконечности.

Теорема 1.4.2: Формула Коши-Адамара

Радиус сходимости существует и равен

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Доказательство. Зафиксируем z.

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $|z| < R_{\text{сх}}$, то $q < 1$, тогда по признаку Коши ряд сходится.
Если $|z| > R_{\text{сх}}$, то $q > 1$, аналогично по признаку Коши ряд расходится.
Если $|z| = R_{\text{сх}}$, то $q = 1$, и в этом случае ничего сказать нельзя. □

Упражнение. Придумать формулировку в стиле признака Даламбера, то есть

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Здесь, в отличии от верхнего предела в формуле Коши-Адамара, еще нужно доказать, что предел существует.

Пример 1.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\quad n! \sim e^n$, поэтому $R_{\text{сх}} = \infty$.

Пример 1.4.2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$, $\quad R_{\text{сх}} = 0$.

Пример 1.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\quad R_{\text{сх}} = 1$.

Теорема 1.4.3

Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим $0 < r < R$. Тогда в $\overline{B(0,r)}$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Возьмем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Это сходящийся числовой ряд. Если взять ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с произвольным z, то

$$\max_{\overline{B(0,r)}} |a_n z^n| = |a_n| r^n.$$

Получили что, ряд максимумов сходится, из чего про признаку Вейерштрасса следует, что ряд сходится. □

Следствие 4. Сумма степенного ряда непрерывна в шаре $B(0, R_{\text{сх}})$, так как частичные суммы будут непрерывными функциями, которые равномерно сходятся, следовательно, сходятся к непрерывной функции.

Теорема 1.4.4: Теорема Абеля

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, радиус сходимости равен R. Предположим, что в точке z есть сходимость. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $[0, R]$ равномерно. В частности,

$$\exists \lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Доказательство. Докажем, что ряд сходится равномерно. Запишем следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

По условию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (не зависит от x), а $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ — монотонна и ограничена. Тогда по признаку Абеля ряд равномерно сходится на $[0, R]$ □

Пример 1.4.4. Разложим в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{при } |x| < 1.$$

По признаку Абеля при $|x| = 1$ ряд тоже сходится. Поэтому $R_{\text{сх}} = 1$, причем на самом радиусе ряд тоже сходится.

Лемма 1. *Следующие ряды имеют одинаковые радиусы сходимости:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}.$$

Доказательство. Заметим, что если x_n сходится, то[9]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

[9] По определению верхнего предела это супремум частичных пределов последовательности, выберем такую $\{x_{k_i}, y_{k_i}\}$. Мы знаем, что $x_{k_i} \to x$, поэтому $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} y_{k_i} = x \lim_{i\to\infty} y_{k_i}$.

Теперь воспользуемся формулой Коши-Адамара. Обозначим за R_1, R_2, R_3 радиусы сходимости рядов из условия.

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{\left|a_n \cdot \frac{1}{n+1}\right|}} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}\right) \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1$$

$$R_3 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}} \sqrt[n-1]{|a_n \cdot n|} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n}\right) \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1$$

□

Теорема 1.4.5

Пусть есть вещественный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, его ряд сходимость равен R. Тогда его можно проинтегрировать почленно для всех x, что $|x-x_0| < R$:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $r = |x-x_0| < R$. В $\overline{B(x_0, r)}$ ряд равномерно сходится. Рассмотрим его частные суммы $S_n(x)$. Так как $S_n(x) \rightrightarrows S$,

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \int_{x_0}^{x} S(t) dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} S_n(t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_n(t) dt$$

□

Определение 7: Производная комплекснозначной функции

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, a — внутренняя точка E, $f\colon E \to \mathbb{C}$. Производную в точке a можно определить двумя способами:

1. это такая функция
$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$
2. f дифференцируема в точке a, если существует такое $k \in \mathbb{C}$, что
$$f(z) = f(a) = k(z-a) + o_{z\to a}(z-a).$$

Замечание. Существование $f'(a)$ равносильно тому, что f дифференцируема в точке a, и в этом случае $k = f'(a)$.

Теорема 1.4.6

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, его радиус сходимости равен R, $f(z)$ — сумма ряда внутри шара

$B(z_0, R)$. Тогда при $z\colon |z - z_0| < R$ функция f дифференцируема сколько угодно раз, при этом

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!}(z - z_0)^{n-m}.$$

Доказательство. Опять скажем, что $z_0 = 0$. Достаточно доказать для $m = 1$, а далее по индукции. Пусть $|z| < r < R$. Запишем определение

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \\ &= \lim_{w \to z} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} = \\ &= \lim_{w \to z} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^n - z^n)}{w - z} \overset{?}{=} \\ &\overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to z} a_n \underbrace{(w^{n-1} + w^{n-2} z + \ldots + z^{n-1})}_{\text{все стремятся к } z^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} \end{aligned}$$

Осталось доказать один переход. Если докажем равномерную сходимость ряда в $\overline{B(0,r)}$, то он будет верен. Обозначим

$$u_n(w) = a_n(w^{n-1} + w^{n-2} z + \ldots + z^{n-1}).$$

Заметим, что

$$|u_n(w)| \leqslant |a_n| \cdot \left(\left|w^{n-1}\right| + \left|w^{n-2} z\right| + \ldots + \left|z^{n-1}\right|\right) \leqslant |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Так как $r^{n-1} \in \overline{B(0,R)}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)$ сходится, следовательно можем переставить предел и суммирование. ☐

Теорема 1.4.7: О единственности разложения в степенной ряд

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ и сходится в круге $B(z_0, R)$, то коэффициенты задаются однозначно:

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

Доказательство. По теореме 1.4.6 можем записать следующую формулу:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (z - z_0)^{n-k}.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = a_m m! \implies a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

☐

Определение 8

Для бесконечно дифференцируемого в точке z_0 степенного ряда f имеет место формула Тейлора с центром в точке z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^m.$$

1.5 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Запишем разложения, которые нам уже известны

1. e^x
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. $\sin x$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $\cos x$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Определение 9

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Определим $\exp z, \sin z, \cos z$ для комплексного числа как ряды из формул выше.

Упражнение.
$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{x_2} \\
\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin x_2 \\
\sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\
(e^z)' &= e^z \\
(\sin z)' &= \cos z \\
(\cos z)' &= -\sin z
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.1: Формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Доказательство. Честная подстановка. Можно перегруппировывать слагаемые в рядах, так как они абсолютно сходятся. □

4. $\ln(1 + x)$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \qquad |x| < 1.$$

Доказательство.
$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Так как $1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ — равномерно сходящийся ряд при $|t| < 1$, можем интегрировать его почленно. Аналогично мы можем определить $\ln(1 + z)$ для $z \in \mathbb{C}$, если $|z| < 1$. □

5. $\operatorname{arctg} x$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Формула верна внутри круга $|t| < 1$ для равномерной сходимости. □

6. $(1+x)^p$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n.$$

Докажем, что радиус сходимости равен 1. Обозначим

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!}x^n, \qquad f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^p}, \quad x \in (-1,1).$$

Поступим хитро: докажем, что $f(x) \equiv 1$. Заметим, что $f(0) = 1$. Тогда достаточно проверить, что $f'(x) = 0$ для всех $x\colon |x| < 1$.

$$\begin{aligned}f(x) &= S(x)(1+x)^{-p} \\ f'(x) &= S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = \\ &= (1+x)^{-p-1}\big(S'(x)(1-x) - pS(x)\big)\end{aligned}$$

Проверим, что $(S'(x)(1+x) - pS(x)) = 0$.

$$\begin{aligned}p \cdot S(x) \qquad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!}x^n \cdot p \\ (1+x)\cdot S'(x) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \cdot (1+x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!}(x^{n-1} + x^n)\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$p \cdot \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} = \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n+1)!} + \frac{p(p-1)\ldots(n-p)}{n!}.$$

Поэтому коэффициенты при x^k будут одинаковыми, следовательно, разность равна нулю.

7. Частный случай для $p = -\frac{1}{2}$

$$\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

8. $\arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$