Конспект по матанализу
II семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

2 сентября 2020 г.

Оглавление

Исходный код на github.com

Глава 1

Интергирование

1.1 Интегральное исчисление

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Теорема 1.1.1: Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle),\ x, x_0 \in (a, b)$. Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n.

База: $n = 0$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Переход: $n - 1 \to n$.

$$\begin{aligned}
R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x-t)^{n-1}dt = \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\
&= \underbrace{-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x}}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)}
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Теорема 1.1.2: Хитрая теорема о среднем

$f, g \in C[a,b],\ g \geqslant 0$. Тогда

$$\exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a,b]$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)d(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a,b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Следствие 1. Если $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, то существует понятно какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Теорема 1.1.3

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 1.1.2, где $g(t) = (x-t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\theta)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n+1)}(\theta)\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Определение 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a,b]$.
Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i)$.
θ называется оснащением дробления τ, если $\theta = \{t_1, \dots t_n\} : t_j = [x_{j-1}, x_j]$.
Пара (τ, θ) называется оснащенным дроблением.

Определение 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a,b]$, (τ, θ) — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$, интегральной суммой называется

$$S_{\tau,\theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Теорема 1.2.1

$f \in C[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall (\tau, \theta)$— оснащенное дробление отрезка $[a,b]$, $|\tau| < \delta :$

$$\left| S_{\tau,\theta}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau|\to 0} = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall s,t \in [a,b] : \left(|s-t| < \delta \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_i)} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big| f(t_j) - f(c_j) \Big| (x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{|b-a|} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла

Определение 3: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $a < x_0 < \ldots < x_n < b$. Тогда τ называется дроблением отрезка $[a,b]$.

Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \ldots t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, θ)

Определение 4

$f \in C[a,b]$, (θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a,b]$. Тогда

$$S_{\tau,\theta}(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j+1})$$

называется интегральной суммой.

Теорема 1.3.1

$f \in C[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такие, что для любого оснащенного дробления (τ, θ) отрезка $[a,b]$, $|\tau| < \delta :$

$$\left| S_{\tau,\theta}(t) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_{\tau,\theta} \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \big(\forall s, t \in [a, b], |s-t| < S \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}\big)$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx\right| &\leqslant \\ \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(r_j)|\,(x_j - x_{j-1})\right| &\leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon\end{aligned}$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$. □

Определение 5

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и

$$\exists A\colon \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \forall(\tau,\theta)\ |\tau| < \delta \quad |S_{\tau,\theta} - A| < \varepsilon.$$

Тогда A — интеграл по Риману от функции f на отрезке $[a, b]$.

Упражнение. Доказать, что, если f кусочно-непрерывна (то есть имеет 1 разрыв первого рода в точке c), то f интегрируема по Риману и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Пример 1.3.1.

$$\int_0^a e^x dx = ?$$

Рассмотрим $\tau = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, a\}$ и $\theta = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, a\frac{n-1}{n}\}$.

$$\int_0^a e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{ja}{n}\right)\cdot\frac{a}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\left(1 + e^{\frac{a}{n}} + \ldots + e^{a\frac{n-1}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\frac{e^{\frac{an}{n}} - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{a}{n}\cdot\frac{1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}}_{\to 0} e^a - 1 = e^a - 1$$

Пример 1.3.2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

Пример 1.3.3. $p > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^{1+p}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right)\cdot\frac{1}{n} =$$
$$= n^{1+p}\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}\cdot n^{p+1}$$

1.3.1 Интеграл Пуассона

$$I(a) = \int_0^\pi \underbrace{\ln(1-2a\cos x + a^2}_{f(x)} dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n} f\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\ln\left(1-2a\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right)+a^2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} 1-2a\cos\frac{(k-1)\pi}{n}+a^2\right) = .$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a+1}\cdot(a-1)\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{n}\right) =$$
$$= \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 2\ln a & |a| > 1 \end{cases}$$

Упражнение.

$$\int_0^\pi \ln(\cos x)dx = ?.$$

Упражнение.

- $I(a) = I(-a)$
- $I(-a) + I(a) = I(a^2)$

1.3.2 Формула трапеции

Утверждение. *Пусть* $|f'| \leqslant c$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_{\tau,\theta}(f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t_j,c_i\in[x_{j-1},x_j]} |f(t_j)-f(c_j)|\,(x_j - x_{j-1}) \leqslant C\cdot|b-a|$$

Формула трапеции

$$\sum \frac{f(x_j)+f(x_{j-1})}{2}(x_j - x_{j-1}) \approx \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 1.3.2: о погрешности в формуле трапеции

$f \in C^2[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_{j-1})+f(x_j)}{2}(x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{1}{8}|\tau|^2\int_a^b |f''(x)|dx.$$

Для равномерного дробления

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{f\left(a+\frac{j-1}{n}b\right)+f\left(a+\frac{j}{n}b\right)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{n^2}\int_a^b |f''(x)|dx$$

Доказательство. Рассмотрим один участок разбиения $[x_{j-1}, x_j]$ и докажем неравенство для него. Пусть g — линейная функция, соединяющая вершины столбцов на каждом участке разбиения. Определим $h = f - g$. $h(x_j) = h(x_{j-1}) = 0$, $h'' = (f-g)'' = f''$. Обозначим $x_{j-1} = \alpha,\ x_j = \beta$.

Перепишем нужное неравенство

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)dx\right| \overset{?}{\leqslant} \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta |h''(x)|dx.$$

Проинтегрируем, где c любая константа, c_1, c_2 корни уравнения $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} = 0$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta h(x)dx &= \int_\alpha^\beta h(x)d(x-c) = (x-c)h(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h'(x)(x-c)dx = \\ &= (x-c)h(x)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta h'(x)d\left(\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2\right) = \\ &= (x-c)h(x)\Big|_\alpha^\beta - h'(x)\left(\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2\right)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta h''(x)\left(\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2\right)dx = \\ &= \int_\alpha^\beta h''(x)\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2}dx\end{aligned}$$

Так как $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \leqslant \frac{\alpha-\beta}{2}$, можем переписать

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)fx\right| \leqslant \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|h''(x)\right|dx = \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta\left|h''(x)\right|dx.$$

□

Следствие 2 (Формула Эйлера-Маклорена)**.**

$$\begin{aligned}f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n) &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \frac{f(m)}{2} + f(m+1)+\ldots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2} = \\ &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + T(f,m,n)\end{aligned}$$

Воспользуемся рассуждениями из доказательства выше. Так, можно получить, что

$$\begin{aligned}T(f,m,n) &= \int_m^n f(x)dx + \sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1} f''(x)\frac{(x-k)(k+1-x)}{2}dx = \\ &= \int_m^n f(x)dx + \int_m^n f''(x)\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx\end{aligned}$$

Пример 1.3.4. Рассмотрим $1^p + \ldots + n^p$ при $p = -1$ — гармоническая сумма.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{2}{x^3}\frac{\{x\}(1-\{x\})}{2}dx}_{\leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^n \leqslant \frac{1}{2}} =$$

$$= \ln n + \gamma + o(1)$$

1.3.3 Формула Стирлинга

$$\begin{aligned}\ln(n!) &= \ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(n) = \\ &= \frac{1}{2}\ln(n) + \int_1^n \ln x dx - \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{2x^2}dx =. \\ &= \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n - 0 + 1 + C + o(1)\end{aligned}$$

Следовательно, $n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\tilde{C}$. Тогда, используя формулу Валлиса, получаем $C_{2n}^n \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Подставим в формулу $n!$:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!^2} - \frac{\tilde{C}\left(\frac{2n}{e}\right)\sqrt{2n}}{(\tilde{C})^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{1}{\tilde{C}} \cdot \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Из чего следует, что $\tilde{C} = \sqrt{2\pi}$.

Теорема 1.3.3: Формула Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi}.$$

1.4 Несобственные интегралы

Определение 6: Несобственный интеграл

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$. Тогда несобственным интегралом называется

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)dx.$$

Если предел существует, то $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, иначе расходится.

Аналогично определяется $\int_{\to a}^b f(x)dx$.

Теорема 1.4.1: Критерий Больцано-Коши

$\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) \colon \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) \colon \left|\int_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(B) \coloneqq \int_a^B f(x)dx$. Тогда, если $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, то $\exists \lim_{B\to b-} F(B)$, а значит

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \colon \forall B_1, B_2 \in (\delta, B) \colon |F(B_1) - F(B_2)| < \varepsilon.$$

В обратную сторону следует из того, что последовательность $F(B_i)$ фундаментальна. □

Замечание. Критерий Коши чаще используется для расходимости.

Пример 1.4.1. $\int_0^1 x^\alpha dx$. Если $\alpha \geqslant 0$, то все легко. Но если $\alpha < 0$, то необходимо считать предел

$$\lim_{A\to 0+} \int_A^1 x^\alpha dx = \lim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_A^1 .$$

Предел существует только при $\alpha > -1$, а при $\alpha \leqslant -1$ ряд расходится.

Пример 1.4.2. $\int^{+\infty} x^\alpha$. При $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^B x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^B .$$

При $\alpha < -1$ интеграл сходится, а при $\alpha \geqslant -1$ расходится.

Лекция 2

21 feb

1.4.1 Свойства

Свойства.

1 *$c \in (a,b)$:*

$$\int_a^{\to b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\to b}.$$

2 $\int_a^{\to b} f dx$ — *сходится* $\Longrightarrow \lim_{A\to b} \int_A^{\to b} f = 0$

2' *Если* $\int_A^{\to b} f \not\to_{A\to b-} \Longrightarrow \int_a^{\to b}$ *расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).*

$\boxed{\textbf{линейность}}$ *f, g — функции на $[a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^{\to b} f,\ \int_a^{\to b} g \text{ сходятся } \Longrightarrow \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g.$$

$\boxed{\textbf{монотонность}}$ *$f \leqslant g$, $\int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$ сходятся.*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

Определение 7: Абсолютная сходимость

Говорят, что $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, *если сходится $\int_a^{\to b} |f|$.*

Если $\int_a^{\to b} f$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\to b} f$ сходится и верно неравенство

$$\left|\int_a^{\to b} f\right| \leqslant \int_a^{\to b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\to b} |f| \text{ сходится } \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \Longrightarrow \left|\int_{B_1}^{B_2} f dx\right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left|\int_a^B f\right| \leqslant \int_a^B |f| dx.$$

Определение 8: Условная сходимость

$\int_a^{\to b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} |f|$ расходится.

<u>интегрирование по частям</u>: $f, g \in C^1[a,b)$

$$\int_a^{\to b} fg' = fg\,\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g, \quad fg\,\Big|_a^{\to b} = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. □

$\boxed{\textbf{замена переменной}}$ *$\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$, $f \in C[a, b)$. Если существует предел, обозначим его так: $\exists \lim_{x\to\beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.*

$$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy.$$

Доказательство. $\gamma \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y)dy.$$

Обычная формула замены перменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta), \gamma_n \to \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} \to \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\exists \int_{\alpha}^{\to\beta} (f \circ g)\varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.
2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b),\ c_n \to b-\ \ \exists \gamma_{n \in [\alpha,\beta)} : \varphi(\gamma_n) = c_n$.
   Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β, либо к числу меньшему β.
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \beta$
   $$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k} = c_{n_k}}.$$
   - $\{\gamma_{n_k}\} \to \tilde{\beta} < \beta$
   $$\varphi(\gamma_{n_k}) \to \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$
   Но должно быть равно b. Противоречие.

   Значит $\gamma_n \to b$.
   $$\int_{alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{phi(alpha)}^{phi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

Теорема 1.4.2: Признаки сравнения

Пусть $0 \leqslant f \leqslant g,\ f, g \in C[a, b)$. Тогда

1. если $\int_a^{\to b} g$ сходится, то $\int_a^{\to b} f$ сходится,
2. если $\int_a^{\to b} g$ расходится, то $\int_a^{\to b} f$ расходится.

Доказательство.

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) :\ \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \Longrightarrow \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$
2. Аналогично

□

Теорема 1.4.3: Признаки Абеля и Дирихле

$f \in C[a, b),\ g \in C^1[a, b)$, g монотонна.

Признак Дирихле Если f имеет ограниченную первообразную на $[a, b), g \to 0$, то $\int^{\to b} fg$ сходится.

Признак Абеля Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, g ограничена, то $\int_a^{\to b} fg$ сходится.

Доказательство. F — первообразная f. $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\to b} fg dx = \int_a^{\to b} g dF == Fg \Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} Fg' dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B \to b-} F(B)g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\to b} Fg' dx \leqslant M \cdot \int_a^{\to b} |g| dx = M \cdot \left| \int_a^{\to b} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)| .$$

$\square$

Пример 1.4.3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \leqslant Cx^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \ \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^b = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\to\infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln\frac{1}{2}}^\infty y^\beta dy.$$

Тоже сходтся.

Пример 1.4.4.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{s^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

$\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leqslant 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ – ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ – убывает. Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

Пример 1.4.5 (Более общий вид)**.**

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$f \in C^1[0, +\infty)$, f монотонна.

Если при $x \to +\infty$ $f \to 0$, то интегралы сходятся,
Если при $x \to +\infty$ $f \not\to 0$, то интегралы расходятся.

Ремарка.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \to 0, \text{ при } x \to +\infty.$$

Упражнение.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится}, \ f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3\, dx \text{ сходится?}$$

1.5 Вычисление площадей и объемов

1.5.1 Площади

1. $f \in C[a, b], \ f \geqslant 0, \ P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \ y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x)dx$

2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b], \ f \geqslant g, \ T_{f,g} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \ y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x)dx$

   Следствие 3 (Принцип Кавальери)**.** Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

   Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функции.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \ \beta - \alpha \leqslant 2\pi, \ f \geqslant 0$, g непрерывна.

   $$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [a, b], \ r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

   Пусть τ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n, \quad \alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}}, \ m_j = \min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$.

   $$\sum \frac{m_j^2}{2}(\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leqslant S(\tilde{P}_f) \leqslant \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

   Крайние стремятся к $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$. Значит

   $$S(\tilde{P}_f)\frac{1}{2}\int_a^b fst(\varphi)d\varphi.$$

4. Площадь фигуры, ограниченной праметрически заданной кривой. $x, y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\forall t \colon x(t + T) = x(t), \ y(t + T) = y(T)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$

   $$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx.$$

   $$\int_A^B g(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[b,a+T]\\ dx=x'(t)dt\\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t)dt$$

   $$\int_A^B f(x)dx \underset{\substack{x=x(t)\\ t\in[a,b]}}{=} -\int_b^a y(t)x'(t)dt$$

   $$S = \int_A^B (f(x) - g(x))dx = -\int_a^{a+T} y(t)x'(t)dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t)dt.$$

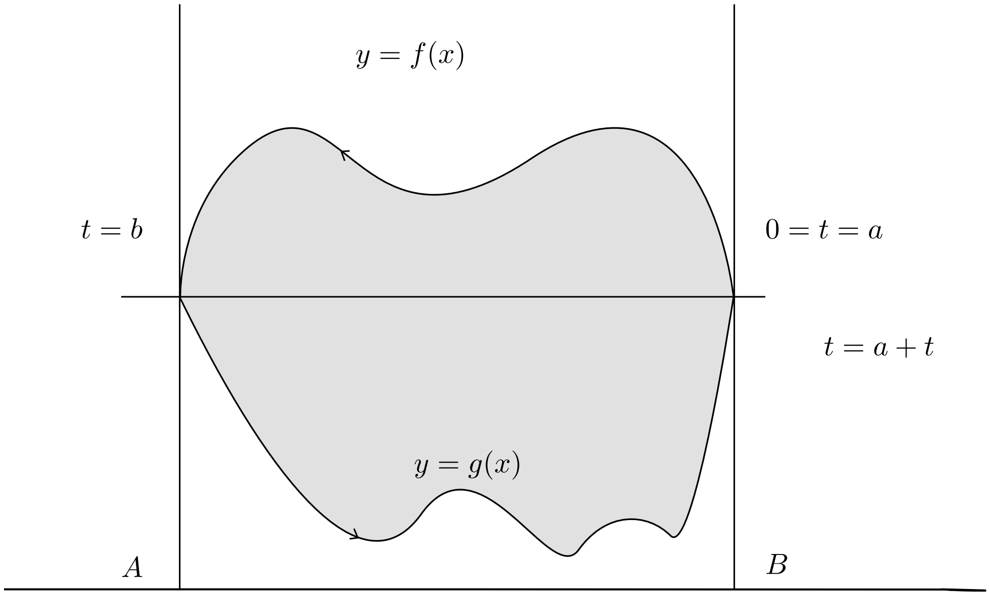


Рис. 1.1: Фигура, ограниченная параметрически заданной кривой

1.5.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3,\ T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

   Определение 9

   Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

   $\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

   $$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение не T:

   $$\forall \Delta \subset [a, b]\ \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta\ T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

Пример 1.5.1. T — тело вращения, $f \in C[a, b],\ f \geqslant 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x)\}.$$

Доказательство формулы. Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело T и τ дробление отрезка $[a, b]$. Поместим его между двумя цилиндрами.

$$\sum (x_j - x_{j-1}) S(T(x_* \Delta_j)) \leqslant V \leqslant (x_j - x_{j-1}) S(T(x^* \Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы. □

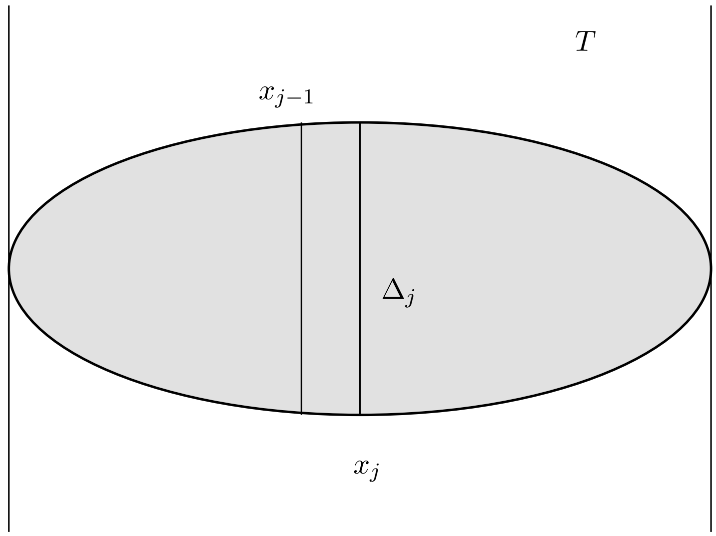


Рис. 1.2: Цилиндр

Пример 1.5.2 (Интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$T = \{0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+y^2)}\}$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} = I e^{-x^2}.$$

Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi(y \ln y - y) \Bigg|_0^1 = \pi.$$

1.6 Кривые в $\mathbb{R}^n$ и их площади

Определение 10: Путь

Путь в $\mathbb{R}^n$ — отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C[a,b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\,,\ \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути — $\gamma(a)$, **конец пути** — $\gamma(b)$.
Носители пути — $\gamma([a,b])$.
γ **замкнут**, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.
$\gamma \in C^n[a,b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^r[a,b] \iff \gamma$ — r-гладкий путь.
γ^{-1} — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a-b-t),\ \forall t \in [a,b]$.

Замечание. Разные пути могут иметь один общий носитель.

Определение 11

Два пути $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ **эквивалентны**, если существует строго возрастающая сюрьекция

$$\varphi : [a,b] \to [c,d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Утверждение. *Это отношение эквивалентности.*

Определение 12: Кривая

Кривая в $\mathbb{R}^n$ — класс эквивалентности путей. **Параметризация кривой** — путь, представляющий кривую.

Пример 1.6.1.

$$\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t_0).$$

$$\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}).$$

Можно определить:
начало кривой
- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривя r-гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

1.6.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ c \in (a,b)$.

$$\gamma = \gamma\,|_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma\,|_{[c,b]} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geqslant |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geqslant \sum_1^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$, где $\forall$ дробления $[a,b]$ $\tau = \{x_j\}$

Определение 13: Длина пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_\tau l_\tau$, где

$$l_\tau = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|,\ \tau = \{x_j\}_{j=0}^m\,.$$

Упражнение. Придумать пример бесконечно длинного пути.

Определение 14: Спрямляемый путь

Если путь имеет конечную длину, он называется спрямляемым.

Определение 15: Длина кривой

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

Свойства.

$\boxed{1.}$ $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Longrightarrow l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

$\boxed{2.}$ *Аддитивность*

$$\gamma : [a, b], c \in (ab) \qquad \gamma^l = \gamma \Big|_{[a,c]}, \ \gamma^r \gamma \Big|_{[c,b]} .$$

Тогда $l(\gamma) = l(\gamma^l) + l(\gamma^r)$.

Доказательство.

$\boxed{\leqslant}$ τ — дробление $[a, b]$.

$$\tau^l \left(\tau \cap [a, c] \cup \{c\}\right)$$
$$\tau^r = \left(\tau \cap [c, b] \cup \{c\}\right)$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1}| \leqslant l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{\tau^r}(\gamma^r) \leqslant l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

$\boxed{\geqslant}$ τ^l — дробление $[a, b]$, τ^r — дробление $[c, d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$l(\gamma) \leqslant l_\tau(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r)$$
$$\sup_{\tau^l} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^l$$
$$\sup_{\tau^r} l(\gamma) \geqslant l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \qquad \forall \tau^r$$

□

Теорема 1.6.1: Длина гладкого пути

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий путь. Тогда γ обязательно спрямляемый и

$$l(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt.$$

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \ldots \gamma_n'(\tau)\right).$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{|\gamma_1'(t)^2 + \ldots \gamma_n'(t)^2|}.$$

Доказательство.

1. $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t\in\Delta}|\gamma_j'(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(m_j(\Delta))^2}, \qquad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a, b]$ чему равно $l(\gamma \mid_\Delta)$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$. Тогда

$$l_\tau(\gamma\mid_\Delta) = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1})|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_\tau(\gamma\mid_\Delta) = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n \left|\gamma_k'(c_i)\right|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} = \sum_{j=1}^m (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n \left|\gamma_k'(c_i)\right|^2}.$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant l_\tau(\gamma\mid_\Delta) \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

2. Докажем утверждение для интеграла. Так как

$$m(\Delta) \leqslant \min_\Delta \sqrt{|\gamma_i'(t)|^2 + \ldots + |\gamma_n'(t)|^2} \leqslant \max_\Delta \sqrt{|\gamma_1'(t)|^2 + \ldots + |\gamma_n'(t)|^2} \leqslant M(\Delta),$$

$$\int_\Delta \left|\gamma_k'(t)\right| dt = \int_\Delta \sqrt{|\gamma_1'(t)|\, sr + \ldots |\gamma_n'(t)|} dt.$$

Тогда

$$|\Delta|\, m(\Delta) \leqslant \int_\Delta \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant |\Delta|\, M(\Delta).$$

3. Докажем равенство величин, зажатых между одинаковыми границами: так как кривая гладкая, первая производная непрерывна

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon s, t \in [a,b],\ |s - t| < \delta \quad \forall j \in [1,k]\colon \left|\gamma_j'(s) - \gamma_j'(t)\right| < \varepsilon.$$

$|\Delta| < \delta \implies M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leqslant \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta)| \leqslant \varepsilon n$. Распишем предпоследний переход: пусть $a_j = M_j(\Delta),\ b_j = m_j(\Delta)$,

$$\left|\sum a_j^2 - \sum b_j^2\right| = \frac{\left|\sum a_j^2 - \sum b_j^2\right|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}} \leqslant \frac{\sum |a_j - b_j| \cdot |a_j + b_j|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}} \leqslant \sum |a_j - b_j| \cdot \underbrace{\frac{|a_j + b_j|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}}}_{\leqslant 1} \leqslant \sum |a_j - b_j|.$$

4. Теперь возьмем дробление $[a,b]$ на кусочки длиной меньше δ.

$$[a,b] = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant l(\gamma\mid_{\Delta_j}) \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j)|\Delta_j| \leqslant \int_{\Delta_j} \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant M(\Delta_j)|\Delta_j|.$$

$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant l(\gamma) \leqslant \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \int_a^b \left|\gamma'\right| \leqslant \sum_{j=1}^k M_{j=1}^k M(\Delta_j)\,|\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j)\,|\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_i| = \varepsilon n(b-a).$$

$\square$

Пример 1.6.2. Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

1.6.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в $\mathbb{R}^3$.

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2| + |y'(t)^2| + |z'(t)^2|}.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a, b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(t)) \mid x \in [a, b]\}$.

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha h}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Ремарка. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок.

$$l(\gamma\,\big|_\Delta) = \int_\Delta \underbrace{\big|\gamma'(t)\big|\, dt}_{\text{Дифференциал дуги}}.$$

Если f задана на носителе пути γ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t)\,|\gamma'(t)|\,dt$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

2.1 Нормированные пространства

Пример 2.1.1. $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

Если $p = +\infty$, $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m}$.

Замечание. Все нормы в $\mathbb{R}^m$ эквивалентны.

Пример 2.1.2. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывна}\},$$

оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Теорема 2.1.1

$C(K)$— полно.

Доказательство. Рассмотрим фундментальную последовательность функций $|f_n| \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательности фундаментальны, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \ \forall x \in K \ \ |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \to \infty$. $f_k(x) \to f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. f_{n_0} — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)|\,|f_{n_0}(x_1 - f(x_2)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K\ \ |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon}_{\max_{x \in K}|f - f_n| \leqslant \varepsilon}.$$

□

Пример 2.1.3. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — ограничена$\}$, оно линейно над $\mathbb{R}^m$. Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Теорема 2.1.2

$l_\infty(X)$ — полно.

Доказательство. Аналогично. □

Замечание. $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

Замечание. Замкнутое подпространство полного пространства полно.

Пример 2.1.4. $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a,b] = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a,b], f' \in C[a,b]\right\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Теорема 2.1.3

$(C^1[a, b], \varphi_3)$ полно.

Доказательство. $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \to_{n,kro\infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \to 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \to 0$. Тогда $\|f_n - f_k\| \to 0$ и $\|f'_n - f'_k\| \to 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f'_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, то есть $\exists g = f'$.
2. $f_3(f_n - f) \to 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \to 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N : \max|f_n - f| < \varepsilon \wedge \max\left|f'_n - g\right| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$= \left| f_n(x) - \left(\int_a^x f'_n(t)dt + f(a)\right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x \left(g(t) - f'_n(t)\right) dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x \left|g(x) - f'_n(t)\right| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2)$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \to f \wedge f'_n \to g$. □

Ремарка. $\|f_n - f\| \to 0, \quad f_n \in C(K) \Longrightarrow f \in C(k)$.

$$x_k \to x_0 \Longrightarrow f(x_k) \to f(x_0).$$

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (x_k) = f(n).$$

Ремарка. Из того, что $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ и $\|f_n' - g\|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Упражнение. $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

Лекция 4

6 march

2.1.1 Продолжение примеров

1. $C_p[a,b] = \{f \in C[a,b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a,b]} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

Это норма:

- Не меньше нуля
- $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- Неравенство треугольника $\|f\| + \|g\| \geqslant \|f + g\|$ (сейчас доказывать не будем)

Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

Теорема 2.1.4: (без доказательства)

(X,ρ) — метрическое пространство. Тогда $\exists!(Y,\tilde\rho)$ — полное метрическое пространство, такое что

(a) $X \subset Y$
(b) $\rho = \tilde\rho\,\big|_{X\times X}$
(c) $Y = dX$

Такое пространство пополняется до $L_p(a,b)$.

2. $l_p = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n |x_j|^p\}$, $\qquad p \geqslant 1$ Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Упражнение. l_p полно

Замечание. В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- l_p. Возьмем шар $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leqslant 1\}$

$$\begin{aligned} e^1 &= (1,0,0,\dots)\\ e^2 &= (0,1,0,0,\dots)\\ &\vdots\\ e^k &= (\underbrace{0,\dots 0}_{k-1},1,0,\dots)\\ &\vdots \end{aligned}$$

Упражнение. Проверить не компактность $B = \{f \in C[a,b] \mid \|f\| = 1\}$ в $C[a,b]$.

2.2 Сжимающие отображения

Определение 16

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \to X$. U называется сжимающим отображением, если

$$\exists \gamma < 1 \ \forall x_1, x_2 \in X \colon \rho(U(x_1), U(x_2)) \leqslant \gamma \rho(x_1, x_2).$$

Теорема 2.2.1: Принцип сжимающих отображений

(X, ρ) полно.

1. U — сжимающее отображение $\Longrightarrow \exists! x_* \colon U(x_*) = x_*$ — неподвижная точка
2. Если $\exists N \colon U^N$ — сжимающее отображение $\Longrightarrow \exists! x_* \colon U(x_* = x_*$

Доказательство.

1. Рассмотрим траекторию точки x_1.

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \ldots x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \\ \gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \\ \ldots \\ \leqslant \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d \end{aligned}$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n \colon \rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d (1 + \gamma + \ldots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как наше пространство полно,существует предел этой последовательности. $U(x_n) = x_{n+1}$. Первое стремиться к $U(x_*)$, второе — к x_*.

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2. $\exists x_*$, посмотрим на $U^N(x_*)$. Посмотрим на последовательное применение U несколько раз. На N-ом шаге мы придем в x_*.

   Единственность уже доказали.

□

Пример 2.2.1 (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка)**.**

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \qquad a, b \in C[0,1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти $f \in C^1[0,1]$. То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt.$$

Заведем отображение $U : C[0,1] \to C[0,1]$, что $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))\, dt$. Хотим найти неподвижную точку отображения U (то есть такую f).

Пусть $(U_0(f))(x) = -\int_0^x a(t)f(t)dt$. Правда ли, что

1. $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2. $\exists n\colon U_0^n$ — сжимающее отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Проверим

1. При $n = 1$, очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U\left(U^{n-1}(f)\right) - U\left(U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f)\right) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0\left(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0\left(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)\right) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2. $\|U_0^n(f-g)\|_\infty \leqslant \gamma\|f-g\|$

   Пусть $f - g = h$. $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma\|h\|$. Пусть $M = \max|a|$, $\|h\|_\infty\, |h(x)|$.

$$\begin{aligned} \left(U_0^1(h)\right)(x) &= -\int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ \left(U_0^2(h)\right)(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2)\left(\int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1\right) dt_2 \\ &\vdots \\ \left(U_0^n(h)\right)(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\ldots)\, dt_n \end{aligned}$$

   Оценим

$$|\left(U_0^n(h)\right)(x)| \leqslant M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \ldots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \ldots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}.$$

$$\|U_0^n(h)\|_\infty \leqslant \left(M^n \frac{x^n}{n!}\right) \|h\|_\infty.$$

   Выражение в скобках стремиться к нулю при $n \to \infty$. Значит, U_0^n сжимающее.

   Замечание. На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

   $f \in C[0,1]$. Так как $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$, $f \in C^1[a,b]$

Упражнение. X полно, $U : X \to X$, $\forall x, y\colon \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$.

1. Верно ли, что U сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

Определение 17: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$). $U : X \to Y$ называется **линейным**, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X : U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X,\ \lambda$ — скаляр: $U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Замечание. Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейный отображений: $U(x_1) = Ux_1$

Обозначение. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y.

Определение 18: Полилинейное отображение

$X_1, \dots X_n$ — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$ — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

Обозначение. $\mathrm{Poly}(X_1, \dots X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Определение 19

Если Y — поле скаляров, линейное отображение $U : X \to Y$ называется **линейным функционалом**.

Пример 2.2.2. $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R},$ лишь конечное число отлично от нуля$\}$
$U : X \to X,\ x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

Пример 2.2.3 (δ-функция)**.** $\delta : C[-1, 1] \to \mathbb{R},\ \delta(f) = f(0)$.

Пример 2.2.4. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf = \int_a^b f(x)dx$

Пример 2.2.5. $U : C[a, b] \to \mathbb{R},\ Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

Пример 2.2.6. $U \in \mathrm{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots \mathbb{R}}_{n}; \mathbb{R}),\ U(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

Пример 2.2.7. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}),\ U(x, y) = (x, y)$

Пример 2.2.8. $U \in \mathrm{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), U(x, y) - [x, y]$ — векторное произведение.

Пример 2.2.9. Определитель, все возможные формы объема.

Пример 2.2.10. $U_j \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Можно сделать из этого полилинейное $U \in \mathrm{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$, $U(x_1, \dots x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots U_n x_n$.

Пример 2.2.11. $U : C^1[a, b] \to C[a, b],\ Uf = f'$

Теорема 2.2.2: Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения

X, Y — линейный нормированные пространства с одним полем скаляров, $U \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C\ \forall x \in X : \|Ux\|_Y \leqslant C\|x\|_X$

Определение 20: Операторная норма

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y.

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X,\ \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Замечание. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Замечание.

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Пример 2.2.12. Нормы в прошлых примерах

2.2.2 $\|U\| = \infty$

2.2.3 $\|U\| = 1$

2.2.4 $\|U\| = b - a$

2.2.5 $\|U\| = b - a$

2.2.11 $\|U\| = 1$

Теорема 2.2.3: Условие непрерывности полилинейного отображения

$U \in \mathrm{Poly}(X_1, \dots X_m; Y)$, X_i, Y — линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C\ \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots x_n \in X_n \colon \|U(x_1, \dots x_n)\| \leqslant C\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$

Замечание. В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots \|x_n\|_{X_n}\}.$$

Определение 21: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf\left\{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots x_n \in X_n\ \|U(x_1, \dots x_n)\| < C\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|\right\}.$$

Теорема 2.2.4: Эквивалентные способы вычисления опереатора

U — линейное непрерывное отображение $X \to Y$. Тогда

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|U\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\|.$$

Доказательство. Обозначим супремумы за A, B, C, D. Очевидно, что $C \geqslant B$ и $C \geqslant D$

$$C = \sup_{\|x\|<1} \|Ux\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{\|Ux\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что $B \geqslant A$. $x \neq 0$, $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|Ux\| \leqslant B.$$

Значит, $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant B$.

Теперь докажем, что $D \geqslant A$.

$$x \neq 0,\ \varepsilon > 0\colon \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - e\varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leqslant D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|}\|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant \frac{D}{1-\varepsilon} \to 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D \implies \sup_{x\neq} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D.$$

□

Ремарка. В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

Теорема 2.2.5: эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора

$U : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$.

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \ldots x_n)\|}{\|x_1\| \cdot \ldots \|x_n\|} = \sup_{\|x_j = 1\| \|U(x_1, \ldots x_n)\|} = \sup_{\|x_j\| < 1} = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1}.$$

2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

Теорема 2.2.6: О свойствах операторной нормы

$U_1, U_2, U_3 : X \to Y$ — линейные непрерывные операторы, λ — скаляр. Тогда

1. $\|U_1 + U_2\| \leqslant \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \iff U = 0$
4. $U : X \to Y, V : Y \to Z$ — линейные отображения.

$$\|VU\| \leqslant \|V\| \cdot \|U\|$$
$$VU = V \circ U$$
$$VUx = V(U(x))$$

Обозначение. $L(X, Y) \subset \mathrm{Hom}(X, Y)$ — пространство линейных операторов.

Лекция 5

13 march
18 апреля
в 11:00
в каб 301
коллоквиум

Замечание. $L(X; Y) \subset \mathrm{Hom}(X; Y)$ — линейные отображения из X в Y. Это линейное нормированное пространство.

Замечание. Тоже самое верно для полилинейных отобранной. То есть выполнены аксиомы нормы, доказательство аналогичное. $L(X_1, X_2, \ldots X_n; Y) \subset \mathrm{Poly}(X_1, \ldots X_n; Y)$.

Теорема 2.2.7: О полноте пространства операторов

Если Y полно, то $L(X; Y)$ Тоже полно.

Доказательство.

1. Построение предельного оператора.

$$\{U_n\} \subset L(X, Y) \text{ — фундаментальна, то есть } \|U_n - U_m\| \to 0, n, m \to \infty.$$

Рассмотрим $x \in X$:

$$\|U_m x - U_n x\|_Y = \|(U_m - U_n)x\|_Y \leqslant \|U_m - U_n\| \cdot \|x\|_X \to 0,\ n, m \to \infty.$$

Тогда $\{U_m x\}$ фундаментальна в Y, следовательно, $\exists \lim_{m\to\infty} U_m x =: U(x)$

2. Линейность предельного отображения.

$$U(x_1 + x_2) = \lim_{mto\infty} (U_m(x_1 + x_2)) = \lim U_m x_1 + \operatorname{Im} U_m x_2 = Ux_1 + Ux_2$$
$$U(\lambda x) = \lambda U x$$

3. Непрерывность U.

$$\varepsilon = 1\ \exists N\colon \forall n, m \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leqslant 1 \cdot \|x\|.$$

Устремим $n \to \infty$:

$$\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in X : \|U_m x - Ux\| \leqslant \|x\|.$$

По неравенству треугольника, при достаточно большом $m > N$

$$\|Ux\| \leqslant \|Ux - U_m x\| + \|U_m x\| \leqslant \|x\| + \|Um\| \cdot \|x\| \leqslant (1 + \|U_m\|) \cdot \|x\|.$$

Следовательно, U непрерывно.

4. Сходимость $\{Um\}$ к U по норме $L(X, Y)$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in X\colon \|U_m x - U_n x\| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

При $x \to \infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m > N\ \forall x \in X\colon \|U_m x - Ux\| \leqslant \varepsilon\|x\| \iff \|Um - U\| \leqslant \varepsilon.$$

□

Теорема 2.2.8

Если Y полно, то $L(X_1, \dots X_n; Y)$ полно.

Пример 2.2.13 (Самый важный случай)**.** Y — пространство скаляров. $L(X, Y) = X^*$ — сопряженное пространство — пространство линейных непрерывных функционалов.

Теорема 2.2.9

$L_1 = L(X_1 \dots X_k; L(X_{k+1}, \dots X_n; Y) \backsimeq L(X_1, \dots X_n; Y) = L_2$, то есть существует изометрический (сохраняющий норму) изоморфизм.

Доказательство. Построим биекцию. $U \in L_1\colon U(x_1, \dots, x_k) \in L(X_{k+1}, \dots X_n; Y)$,
$U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n) \in Y$.

Определим $\tilde{U}(x_1, \dots x_n) \coloneqq U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n)$. Оно будет полилинейно непрерывно. Это же определение работает и в обратную сторону.

Теперь нужно понять, что с нормой все в порядке.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1\leqslant i\leqslant k}} \|U(x_1, \dots x_n)\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1\leqslant i\leqslant k}} \left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ k< i\leqslant n}} \|U(x_1, \dots x_k)(x_{k+1}, \dots x_n)\| \right) = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1\leqslant i\leqslant n}} \|\tilde{U}(x_1, \dots x_n)\| = \tilde{U}.$$

□

2.3 Дифференциальные отображения

Определение 22

X, Y — нормированные пространства, $E \subset X$, $x \in E$, x — внутренняя точка, $f : E \to Y$. f — дифференцируемо в точке x, если $\exists L \in L(X, Y)$:

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h), \qquad h \to 0, x+h \in E.$$

Замечание. $x, h \in X$, $f(x), f(x+h) \in Y$, $Lh \in Y$

Что такое $o(h)$:

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \alpha(x, h).$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\alpha(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Определение 23

L — дифференциал f в точке x.

Обозначение. Обозначения дифференциала $D_x f, f'(x), d_x f, df(x)$

Формула из определения выглядит так

$$f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h), \quad h \to 0.$$

Замечание. Это определение — дифференцируемость по Фреше.

Замечание. В конечномерном случае из линейности L автоматически следует непрерывность.

Теорема 2.3.1

Если дифференциал в точке x существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists L_1, L_2$: $f(x+h) - f(x) = L_i h + o(h)$. Тогда $L_1 h - L_2 h - o(h)$, докажем, что $L = L_1 - L_2$ равно нулю.

Зафиксируем $h \neq 0$.

$$\|Lh\| = \frac{\|L(th)\|}{\|t\|} = \underbrace{\frac{\|L(th)\|}{\|th\|}}_{\to 0,\ t \to 0} \|x\| \to 0, \quad t \to 0.$$

Следовательно, $\|Lh\| = 0 \Longrightarrow L = 0$. $\square$

Определение 24

Если $f : E \subset X \to Y$ (E открыто), f дифференцируема во всех точках E, $df : E \to L(X, Y)$ — производное отображение.

Замечание. Если f дифференцируема в точке x, то f непрерывна.

Правила дифференцирования

Линейность $f_1, f_2 : E \subset XtoY$, f_1, f_2 непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2$ — скаляры: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ дифференцируема в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

Дифференциал композиции X, Y, Z — линейные нормируемые пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$, U, V открыты, $f : UtoY, g : V \to Z$, $x \in U, f(x) inV$, f дифференцируема в точке x, g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x.

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\
&= dg(f(x)\,(f(x+h)-f(x)) + o(f(x+h)-f(x)) \\
&= dg(f(x)\,(df(x)h + o(h)) + o(f(x+h)-f(x)) = \\
&= dg(f(x))df(x)h + \underbrace{dg(f(x)(o(h)) + o(f(x+h)-f(x))}_{?=o(h)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\|dg(f(x))(o(h))\|_Z}{\|h\|_X} \leqslant \frac{\|dg(f(x))\|\|o(h)\|}{\|h\|_X} \to 0.$$

$$\frac{\|o(f(x+h)-f(x))\|}{\|h\|} = \underbrace{\frac{\|o(f(x+h)-f(x))\|}{\|f(x+h)-f(x)\|}}_{\to 0, h\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|f(x+h)-f(x)\|}{\|h\|}}_{\text{ограничено}} \to 0,\ h \to 0.$$

□

Дифференцирование обратного $x \in U \subset X$, U открыто, $f : U \to Y$, существует окрестность $V(f(x))$ в Y, в которой $\exists f^{-1}$. Предположим, что f дифференцируема в точке x, $\exists\,(df(x))^{-1} \in L(Y,X)$, f^{-1} непрерывна в точке $f(x)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y,X)} = (df(x))^{-1}.$$

Замечание. Здесь слишком много условий

Доказательство. $f(x) = y,\ f^{-1}(y) = x,\ f(x+h) = y+t,\ f^{-1}(y+t) = x+h$. $h \to 0 \iff t \to 0$. Давайте запишем

$$t = f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h).$$

Тогда $\|t\| \leqslant C\|h\|$. Воспользуемся тем, что $df(x)$ обратим.

$$(df(x))^{-1}\,t = h + (df(x))^{-1}\,(o(h)) \tag{2.3.1}$$

$$\|\,(df(x))^{-1}\,(o(h))\| \leqslant \|\,(df(x))^{-1}\,\| \cdot \|o(h)\| \leqslant \frac{\|h\|}{2}, \quad \|h\| < \delta.$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\colon \left(\|h\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|\,(df(x))^{-1}\,\|}\right).$$

Тогда $\forall \|h\| < \delta\colon \|(df(x))^{-1}t\| \geqslant \frac{\|h\|}{2} \Longrightarrow \|h\| \leqslant C\|t\|$. Перепишем 2.3.1

$$f^{-1}(y+t) - f(y) = (df(x))^{-1}t + o(t).$$

Это определение дифференцируемости. Тогда

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}.$$

□

2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования

0. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f дифференцируема.
$$df(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h\mapsto f'(x)h.$$

1. $f:U\subset X\to Y$, f постоянно, то есть $f(x)=y_0\quad\forall x\in U$. Тогда $df(x)=0$ (нулевое линейное отображение, все переводит в нуль).

2. $f\in L(X,Y)$, $df(x)=f$.
$$f(x+h)-f(x)=f(h)=(df(x))(h).$$

3. $f(x,y)=x^2+2xy$. $h=(h_x,h_y)$
$$f(x+h_x,y+h_y)-f(x,y)=x^2+xh_x+h_x^2+3xy+3xh_y+3yh_x-x^2-3xy+3h_xh_y=$$
$$=(2x+3y)h_x+3xh_y+\underbrace{h_x^2+3h_xh_y}_{o(h)}$$

   В матричной форме
$$\begin{pmatrix}2x+3y & 3x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_x\\h_y\end{pmatrix}.$$

4. $x\in U\subset X,\ f:U\to Y,\ A\in L(Y,Z)$. Если f дифференцируема в точке x, то $A\circ f$ дифференцируема в точке x и $d(A\circ f)(x)=Adf(x)$

5. $x\in U\subset X,\ f:U\to Y_1\times\ldots\times Y_n$. Это n отображений: $f(x)=(f_1(x),\ldots f_n(x))\,,\quad f_j:U\to Y_j$. f дифференцируема в точек x, тогда и только тогда, когда $f_1,\ldots f_n$ дифференцируемы в точке x_0.

   Доказательство. $f(x+h)-f(x)=df(x)h+o(h)\in Y$. Левая часть равна
$$(f_1(x+h)-f_1(x),\ldots f_n(x+h)-f_n(x))\,.$$

   А правая
$$(L_1h,L_2h,\ldots L_nh)+o(h).$$

   □

6. $x_j:X_1\times X_2\times\ldots X_n\to X_j,\quad (x_1,\ldots x_n)\mapsto x_j$.
$$dx_j(x)h=h_j.$$

   Это удобное обозначение базиса, которое мы будем дальше использовать.

7. $A:X_1\times X_n\to Y$ — полилинейное и непрерывное. Оставим только два сомножителя. $A:X_1\times X_2\to Y$.
$$A(x_1+h_1,x_2+h_2)-A(x_1,x_2)=A(x_1,h_1)+A(h_1,x_2)+\underbrace{A(h_1,h_2)}_{o(h)}.$$
$$dA(x_1,x_2)h=A(h_1,x_1)+A(x_1,h_2).$$

   Или можно записать так:
$$dA(x_1,x_2)=A(dx_1,x_2)+A(x_1,dx_2).$$

   Совершенно аналогично для n координат.

Свойства.

1) $f(x) = x_1 \cdot \ldots x_n,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

$$df(x)h = \sum_{j=1}^{n} \left(h_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

2) $f_1, \ldots f_n : X \to \mathbb{R}$.

$$d(f_1 f_2 ... f_n)(x) = f_2(x) f_3(x) \ldots df_1(x) + \ldots.$$

3) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *скалярное произведение.*

$$d\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle.$$

4) $f, g : X \to \mathbb{R}^n$

$$d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle.$$

5) $f : X \to Y$ *над* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda : X \to \mathbb{R}$

$$d(\lambda f) = \underbrace{f}_{\in Y} \underbrace{d\lambda}_{L(X,\mathbb{R})} + \lambda \underbrace{df}_{\in L(X,Y)}.$$

Упражнение. $U = \{A \in L(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in L(X, Y)\}$ — множество обратимых линейных отображений. $f : U \to L(X, Y),\ f(A) = A^{-1}$. Найти df.

2.5 Частные производные

Определение 25: Частные производные

Пусть $a \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. U — окрестность точки a. $f : U \to Y$. $f(x) = f(x_1, \ldots x_n)$.

Определим $\varphi_j : X_j \to Y,\ \varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \ldots x_j, a_{j+1}, \ldots a_n)$.

$d\varphi_j(a_j)$ называется частным дифференциалом (частной производной) f по x_j в точке a, если существует.

Обозначение. Частный дифференциал обозначается кучей способов

$$\partial_{x_j} f(a),\ \frac{\partial f}{\partial x_j}, \partial_j f(a) \in L(x_i, Y).$$

Лекция 6: †[1]

20 march

Утверждение. *Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in X_1 \times \ldots \times X_m$, то у него есть все частные дифференциалы и*

$$df(a)h = \partial_{x_1} f(a)h_1 + \ldots + \partial_{x_m} f(a)h_m, \qquad h = (h_1, \ldots h_m).$$

Доказательство. По определению,

$$f(a + h) - f(a) = df(a)h + o(h), \qquad a, h \in X_1 \times \ldots \times X_m.$$

Разобьем вектор h:

$$h = t_1 + \ldots + t_m = (h_1, \ldots 0) + (0, h_2, \ldots 0) + \ldots + (0, \ldots, h_m).$$

Тогда

$$df(a)t_i = \partial_{x_i} f(a)h_i = L_i h_i + o(h_i).$$

В сумме получаем

$$df(a)h = \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_i} f(a)h_i.$$

□

[1] Online лекции помечены символом †

2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m,\ Y = \mathbb{R}^n$

Утверждение. *Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда $f_1, f_2, \dots f_n$ дифференцируемы в точке x и*

$$df(x) = (df_1(x), \dots df_n(x))), \qquad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}),\ f_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$$

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Запишем по определению

$$df(x)h = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots f_n(x+h) - f_n(x)) = (df_1(x)h, \dots df_n(x)h) = f(x+h) - f(x).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$

- Если $n = 1$, то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x, то существуют все частные производные и

$$df(x)h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j, \quad h = (h_1, \dots h_n)^\top,$$

при этом

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}\right), \quad h = (h_1, \dots h_m)^\top.$$

Можно завести вектор-градиент

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right)^\top,$$

И тогда

$$df(x)h = \langle \operatorname{grad}(x), h\rangle \text{ — скалярное произведение.}$$

- Вернемся к 2.6. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x и существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$, $j = 1, \dots m$, $k = 1, \dots n$

$$\partial f(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \vdots \\ df_n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу дифференциала, которая называется **матрицей Якоби**, а если она квадратная, то ее определитель — **якобиан**.

□

Утверждение. *Если есть отображения $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, и они дифференцируемы, то $d(f \circ f)(x) = dg(f(x)) \cdot df(x)$:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_m} \\ \dots & \frac{(\partial g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \\ \frac{\partial(g_k \circ f)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g_k \circ f)}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1(x_1)} f(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial f_n(x)} f(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial f_1(x)} f(x) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial f_n(x)} f(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial f_1(x)}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Правило цепочки:

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

Пример 2.6.1 (вычисление частных производных). Пусть $f(x,y) = x^3 + 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x.$$

То есть

$$df(x,y)h = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y & 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Утверждение. *Если $f\colon \mathbb{R}^m \to R$, то частные производные можно определять формулами*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underset{j}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

Определение 26: Производная по вектору

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v. Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v.

Свойства (Экстремальное свойство градиента). *В случае $\mathbb{R}^m$*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leqslant |\operatorname{grad} f(x)|\,|v|.$$

Функция растет быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right|.$$

Доказательство. Все рассуждения предполагают, что f дифференцируема в x.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x+tv) - f(x) = df(x)(tv) + o_{t\to 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = df(x)v + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\to 0}.$$

□

2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

Теорема 2.7.1: Теорема о конечном приращении

Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ непрерывно на $[x, x+t] \subset U$ и дифференцируемо на $(x, x+h)$. Тогда

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leqslant \sup_{\xi \in (x,x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

Доказательство. Обозначим супремум $M = \sup_{\xi\in(x,x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\Theta\in(0,1)} \|df(x, +\Theta h)\|_{L(X,Y)}$. Достаточно проверить

$$\forall [\xi', \xi''] \subsetneq (x, x+h)\colon \|f(\xi') - f(\xi'')\| \leqslant M\|\xi' - \xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1 = [\xi_1', \xi_1'']\colon \|f(\xi_1') - f(\xi_1'')\| \geqslant (M+\varepsilon_0)\|\xi_1' - \xi_1''\|, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Разделим отрезок пополам: $\Delta_1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 = [\xi_1', \frac{\xi_1'+\xi_1''}{2}] \cup [\frac{\xi_1'+\xi_1''}{2}, \xi_1'']$. На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность $\Delta_1 \supset \Delta 2 \ldots$. Пусть $\{\xi_0\} = \cap \Delta_i$. Тогда

$$f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0) = df(\xi_0)\delta + \alpha(\delta), \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \overset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\colon \left(\|\delta\| < \varepsilon \Longrightarrow \|f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\delta\|, \quad \frac{\alpha(\delta)}{\|\delta\|} \overset{\delta\to 0}{\to} 0\right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности $\exists N\colon \forall n > N \quad \Delta_n \subset B(\xi_0, \varepsilon)$.

$$\|f(\xi_n') - f(\xi_m'')\| \leqslant + \begin{cases} \|f(\xi_n') - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n' - \xi_0\| \\ \|f(\xi_n'') - f(\xi_0)\| \leqslant \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n'' - \xi_0\| \end{cases} = \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|\xi_n' - \xi_n''\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

Замечание. На прямой теорема Лагранжа дает существование $\xi \in (x, x+\varepsilon)$:

$$|f(x+h) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

Замечание. В $\mathbb{R}^n$ есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

Следствие 4. Если f из теоремы и $A \in L(X,Y)$, то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leqslant \sup_{\xi\in(x,x+h)} \|df(\xi - Ah)\|\|h\| = \sup_{v\in(0,1)} \|df(x + vh - Ah\|\|h\|.$$

Это теорема при $g(x) = f(x) - Ax$.

Следствие 5. Если K — выпуклый компакт в X, $f \in C^1(K,Y)$, то f — Липшицево на K.

Определение 27

Если $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо во всех точках U и $df\colon U \to L(X,Y)$ непрерывно, то говорят, что f непрерывно дифференцируемо на U и пишут $f \in C^1(U,Y)$

Замечание. $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ непрерывно дифференцируемо на U тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

Доказательство. Запишем

$$df(x) = (\partial x_1 f(x), \ldots \partial x_m f(x)).$$

Применим это неравенство в следующем выражении

$$\sup_{\|h\|=1} \|\partial x_j f(x+\delta)h_j - \partial x_j f(x)h_j\| = \sup_{\|h\|=1} \|\partial x_j f(x+\delta) - \partial x_j f(x)\|.$$

$$\|df(x+\delta) - df(x)\| = \sup_{\|h\|=1} \|df(x+\delta)h - df(x)h\| = \sup_{\|h\|=1} \left\| \sum_{j=1}^{m} \partial x_j f(x_j+\delta) - \partial x_j f(x)h_j \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|=1} \sum_{j=1}^{m} \|\partial x_j f(x+\delta) - \partial x_j f(x)\|$$

□

Теорема 2.7.2: Признак дифференцируемости

Пусть $f\colon U \subset X_1 \times \ldots \times X_m \to Y,\ x \in U$. Предположим, что f имеет все частные дифференциалы в U и они непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке x.

Доказательство. Докажем для $m=2$. Дифференциал должен выглядеть так: $Lh = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \partial_{x_2} f(x)h_2$. $x \in U \subset X_1 \times X_2$.

Проверим $\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = o(h)$ при $h \to 0$.

$$..(x) \leqslant \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1) - \partial_{x_2} f(x_1 x_2)h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1+h_1, x_2+\Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1,x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1,x_2) - \partial_{x_1} f(x)h_1\|}_{\leqslant \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1+\Theta h, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leqslant .$$

Заметим, что $\|h_1\| \leqslant \|h\| \wedge \|h_2\| \leqslant \|h\|$. Тогда можем переписать так:

$$\leqslant \|h\| \cdot \left(\sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_1} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремиться к 0 при $h \to 0$. □

Следствие 6. Непрерывная дифференцируцемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

Теорема 2.7.3: Теорема о конечном приращении для функций

Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x+h] \in U$ и дифференцируема на $(x.x+h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x+h)$, что

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Следствие 7. Если U — выпуклое множество и $df(x) = 0$ для любого x из U, то $f(x) = const$ на U.

Следствие 8. Если U — открытое связное множество в $df(x) = 0$ для всех $x \in U$, то $f(x) = const$ на U.

Лекция 7: †

20 march

2.8 Производные высших порядков

Определение 28

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}$, то есть $f(x) = f(x_1, \ldots x_n)$. Частная производная

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t}$$

может быть определена на каком-то подмножестве U (для простоты будем считать, что на всем U).

То есть $\partial_j f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция, у которой могут быть частные производные

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial_{x_k} \partial_{x_j}}(x) = \partial^2_{x_j x_k} f(x)$$

— вторая частная производная по x_i и x_j в точке x. По индукции можно определить k-ю производную.

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{x_{j_k}} \dots \partial_{x_{j_1}}}(x) = \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f(x).$$

Теорема 2.8.1: о перестановочности производных

Пусть функция $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеет вторые частные производные $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f$ и $\partial_{x_k}\partial_{x_j}$ в U и они непрерывны в точке $x \in U$. Тогда $\partial_{x_j}\partial_{x_j} f(x) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x)$.

Доказательство. Зафиксируем все переменные кроме x_k и x_j. Тогда можем думать, что это и есть функция от двух переменных.

$$f(x) = f(x_1, x_2).$$

Рассмотрим точку (x_1, x_2) и точки на малом расстоянии, принадлежащие U. Изучим следующее вы-

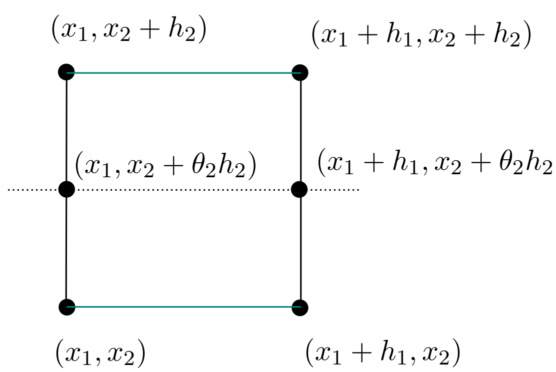


Рис. 2.1:

ражение:

$$\underbrace{F(h_1, h_2)}_{\varphi(1)-\varphi(0)} = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, h_2) + f(x_1, x_2),$$

где $\varphi(t) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)$. Оценим двумя способами по направлениям. Сначала фиксируем x и группируем пары 1-2 и 3-4.

Это дифференцируемая функция. Можем взять производную

$$\varphi'(t) = \partial_{x_2} f(x_1 + h_2, x_2 + h_2) \cdot h_2 - \partial_{x_2} f(x_1, x_2 + h_2) \cdot h_2.$$

По теореме Лагранжа $F(h_1, h_2) = \varphi'(\theta_2)$. Перепишем значение F и воспользуемся тем, что $x_2 + \theta_2 h_2$ зафиксировано, поэтому нужно посчитать производную по первой координате, взяв промежуточную точку

$x_1 + \theta_1 h_1$:
$$F(h_1,h_2) = \varphi'(\theta_2) = h_2 \cdot (\partial_{x_2} f(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2+\theta_2 h_2)) = \\ = h_2 h_1 \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2) =$$

Совершенно аналогично можно было сгруппировать другие пары слагаемых, поэтому существуют $\tilde\theta_1, \tilde\theta_2 \in (0,1)$, что
$$= h_1 h_2 \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1+\tilde\theta_1 h_1, x_2+\tilde\theta_2 h_2).$$

Посчитаем предел (с одной стороны, это $\partial_{x_1}\partial_{x_2}$, с другой, $\partial_{x_2}\partial_{x_1}$) и воспользуемся непрерывностью производных
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h_1,h_2)}{h_1 h_2} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2)}_{\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1,x_2)} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1+\tilde\theta_1 h_1, x_2+\tilde\theta_2 h_2)}_{\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1,x_2)}.$$

□

Определение 29

$C^k(U,\mathbb{R})$ — множество функций, имеющих все k-ые частные производные, непрерывные в U.

Следствие 9. Если $f \in C^k(U,\mathbb{R})$, то для всех $n \leqslant k$, $1 \leqslant j_1, \ldots j_n \leqslant m$, $\sigma \in S_n$, $x \in U$ верно равенство
$$\partial_{j_n} \ldots \partial_{j_1} f(x) = \partial_{j_{\sigma(n)}} \ldots \partial_{j_{\sigma(1)}}.$$

2.8.1 Общий случай

Подход первый Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо на U, тогда $df\colon U \to L(X,Y)$ тоже отображение между нормированными пространствами и может оказаться дифференцируемо в точке $x \in U$.

Определение 30: Страшие дифференциалы

Если отображение df определено в окрестности точки x и дифференцируемо в этой точке, то говорят, что f дважды дифференцируемо в точке x.

Дифференциал отображения df называется вторым дифференциалом.
$$d^2 f(x) = d(df)(x) \in L(X, L(X,Y)) = L(X,X;Y) \text{ — билинейное отображение на } X\times X.$$

По индукции можно определить полилинейное отображение на X^n:
$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f)(x) \in L(\underbrace{X,\ldots X}_{n};Y).$$

Подход второй

Определение 31: Производная по вектору

Пусть $f\colon U\subset X \to Y$. Определим
$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Если ∂_k существует в U, то $\partial_h f\colon U \to Y$ и может оказаться, что существует производная по какому-нибудь еще вектору. То есть можно определить вторую производную по паре векторов
$$\partial_{h_2}\partial_{h_1} f(x).$$

Аналогично можно определить более старшие производные

$$\partial_{h_n}\partial_{h_{h-1}}\dots\partial_{h_1}.$$

Замечание. Наличие непрерывных производных по всем направлениях в точке не гарантирует дифференцируемость в бесконечном случае.

Свойства.

1. $\partial_{\lambda h} f(x) = \lambda \partial_h f(x)$

   Доказательство. По определению □

2. *Если f дифференцируема в точке x, то $\partial_h f(x) = df(x)h$*

   Доказательство. Посчитаем

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \frac{\cancel{f(x)} + df(x)(th) + o(\dots) - \cancel{f(x)}}{t} = df(x)(h).$$

□

3. *Если $A \in L(Y,Z)$, то $\partial_h(A \circ f)(x) = A\partial_h f(x)$*

   Доказательство.

$$\frac{Af(x+th)-Af(x)}{t} = A\left(\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\right).$$

   Так как A — непрерывное отображение, в пределе тоже можем вынести A. □

2.8.2 Связь между двумя подходами

Теорема 2.8.2: о связи старших дифференциалов и производных по векторам

Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ n раз дифференцируемо в точке x. Тогда $\forall h_1, \dots h_n \in X$:

$$(d^n f(x)(h_1, \dots h_n) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_n}) f(x).$$

Доказательство. Докажем для двух, то есть $\partial^2 f(x)(h_1,h_2) = \partial_{h_1}\partial_{h_2} f(x)$.

$$\Big(d(df)(x))h_1\Big)h_2 = \Big(\partial_{h_1}(df)(x)\Big)h_2.$$

Это равно по определению

$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{df(x+th_1)-df(x)}{t}\right)h_2 =$$

Если последовательность операторов A_n сходится к оператору A_0, то есть $\|A_0 - A_n\| \to 0_{L(X,Y)}$, то $A_n h_2 \to A_0 h_2$:

$$= \lim_{t\to 0}\frac{df(x+th_1)h_2 - df(x)h_2}{t} = \partial_{h_1}\left(df(x)h_2\right) = \partial_{h_1}\left(\partial_{h_1} f(x)\right).$$

По индукции можно доказать, что что утверждение верно для n переменных. □

2.8.3 Симметричность дифференциалов

Теорема 2.8.3: О симметричности n-го дифференциала

Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо n раз в точке $x \in U$. Тогда полилинейное отображение $d^n f(x)$ является симметричной относительно любой пары своих аргументов.

$$d^n f(x)(h_1, \dots h_n) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_n} f(x).$$

Доказательство. Докажем, что второй дифференциал симметричный. Пусть $\exists d^2f(x)$ и для всех h_1, h_2: $d^2f(h_1,h_2) = d^2f(h_2,h_1)$.

Рассмотрим функцию

$$F(t,h_1,h_2) = f(x+t(h_1+h_2)) - f(x+th_1) - f(x+th_2) + f(x).$$

Хотим доказать, что

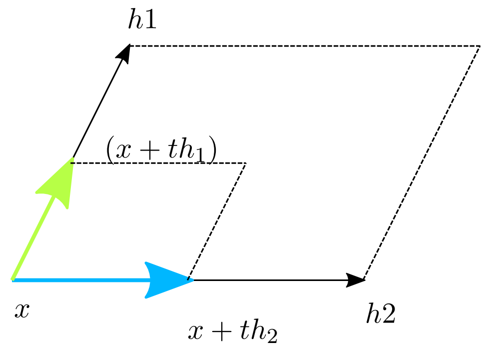


Рис. 2.2:

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t,h_1,h_2)}{t^2} = d^2f(x)h_1h_2.$$

То есть

$$\|F(t,h_1,h_2) - t^2d^2f(h_1,h_2)\| = o(t^2).$$

Заведем отображение $\varphi(v) = f(x+t(h_2+v)) - f(x+tv)$, где v сонаправлен с h_2 и $\|v\| \leqslant \|h_2\|$. Тогда

$$F(t,h_1,h_2) = \varphi(h_2) - \varphi(0).$$

Применим теорему о конечном приращении

$$\|\varphi(h_2) - \varphi(0) - \underbrace{(t^2d^2f(x)h_1)}_{A}h_2\| \leqslant \sup_{\theta\in(0,1)} \|d\varphi(\theta h_2 - t^2d^2f(x)h_1\|_{L(X,Y)} \cdot \|h_2\|_{\|X\|} =$$

$$= \sup_{\theta\in(0,1)} \|df(x+t(h_1+\theta h_2))\cdot t - df(x+t\theta h_2)\cdot t - t^2d^2f(x)h_1\| \cdot \|h_2\|_{\|X\|} =$$

Воспользуемся тем, что $df(x)$ дифференцируемо. Известно, что $df(x+\tilde{h}) = df(x) + d^2f(x)\tilde{h} + \alpha(\tilde{h})$, где $\alpha(\tilde{h}) = o(\tilde{h})$ (это все операторы). Выносим t и получаем

$$= \cancel{df(x)} + \underline{d^2f\Big(t(h_1+\theta h_2)\Big)} + \alpha\big(t(h_1+\theta h_2)\big) - \cancel{df(x)} - \underline{d^2f(t\theta h_1)} - \alpha(t\theta h_2) - \underline{td^2f(x)h_1}$$

Первое и четвертое сокращаются, подчеркнутые в сумме дают 0, третье и шестое равны $o(t)$. Всего осталось $o(t^2)$. □

Теорема 2.8.4: частный случай, $X = \mathbb{R}^m\ \mathbb{R}^n$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^m$ — стандартный базис.

$$h_j = \left(h_j^{(1)}, \dots h_j^{(m)}\right) \sum_{k=1}^m h_j^{(k)} e_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^n f(x)(h_1, \dots h_n) &= d^n f(x) \left(\sum_{k=1}^m h_1^{(k)} e_k, \dots \sum_{k=1}^m x_m^{(k)} e_k \right) = \\ &= \sum_{1 \leqslant k_1, \dots k_n \leqslant m} h_1^{(k_1)} \cdot \dots \cdot h_n^{(k_n)} d^n f(x)(e_{k_1}, \dots e_{k_n}) = \\ &= \sum_{1 \leqslant k_1, \dots k_n \leqslant m} h_1^{(k_1)} \cdot \dots \cdot h_n^{(k_n)} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} f(x) \end{aligned}$$

Теорема 2.8.5: еще более частный случай, $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}, h_i = h_j$

Если $h = (h^{(1)}, \dots h^{(n)})$, То

$$d^n f(x)(h_1, \dots h_n) = \sum_{1 \leqslant k_i \leqslant m} \prod_{i=1}^n h_i^{(k_j)} \partial_{k_i} f(x).$$

$$d^n f(x) = \sum_{1 \leqslant k_i \leqslant m} \frac{\partial^n f}{\partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}}(x) \partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}.$$

Еще более частный случай, все h_i равны:

$$\partial^n f(x)(\underbrace{h, \dots h}_{n}) = \ = \sum_{1 \leqslant k_i \leqslant m} h^{(k_1)} \dots h^{(k_n)} \frac{\partial^n f}{\partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}}(x) =$$

Сгруппируем одинаковые слагаемые, в которых α_1 раз происходит дифференцирование по x_1, α_2 — по $x_2 \dots a_m$ по x_m, $\sum \alpha_j = n,\ \alpha_j \in \mathbb{Z}^+$.

$$= \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_m)} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^n f(x)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_1)^{\alpha_m}} \left(h^{(1)}\right)^{\alpha_1} \dots \left(h^{(n)}\right)^{\alpha_m}$$

Обозначение. $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$, $|\alpha| = \sum \alpha_j$ — высота α, $\alpha! = \prod \alpha_j! = \prod (h^{(j)} \alpha_j)$.

Можно переписать формулу из теоремы

$$= \left(h^{(1)} \partial_{x_1} + \dots + h^{(m)} \partial_{x_m}\right)^n f(x) = \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^\alpha} h^\alpha.$$

Упражнение. В случае $\mathbb{R}^2$ написать, что такое

$$d^2 f(x, y)(h, h), \quad h = (h_1, h_2).$$

2.9 Многомерная формула Тейлора

Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $[x, x+h] \subset U, t \in (0,1)$.Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Если $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, то $\varphi \in C^k[0,1]$.

$$\begin{aligned} \varphi' &= df(x+th)h = \partial_h f(x+th) \\ \varphi''(t) &= \partial_h \partial_h f(x+th) = d^2 f(x+ht)(h,h) \\ &\vdots \\ \varphi^{(n)} &= \sum_{|a| \leqslant n} \frac{n!}{a!} \frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha}(x+th)h^\alpha = d^n f(x+th)(h, \dots h) \end{aligned}$$

Теорема 2.9.1: Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Если $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0,1)$:

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \leqslant n} \frac{h^{|a|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^\alpha}(x + \vartheta h).$$

Доказательство. Запишем формулу Тейлора с остатком форме Лагранжа для функции $\varphi(t) = f(x+th)$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}.$$

Подставим в $\varphi(0)$ вместо φ соответствующее f и получим нужную формулу. □

Теорема 2.9.2: Формула Тейлора в дифференциалах

Если $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0,1)$:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x + \vartheta h) h^{k+1}.$$

Теорема 2.9.3: Формула Тейлора в дифференциалах в общем случае (без доказательства)

Если $f\colon X \to Y$, $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0,1)$:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x + \vartheta h) h^{k+1}.$$

2.10 Исследование внутренних экстремумов

Определение 32

Определение экстремумов, максимумов, минимумов, локальных и глобальных аналогично одномерным.

Теорема 2.10.1: необходимое условие экструмума

Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Тогда

1. Если для какого-то h существует $\partial_h f(x_0)$, то она равна 0.
2. Если f дифференцируема в точке x_0, то $df(x_0) = 0$

Доказательство. Подставим $\varphi(t) = f(x+th)$. □

Замечание. В случае дифференцируемости и $X = \mathbb{R}^m$ на m координат точки x_0 получаем m уравнений.

$$\partial_1 f(x_0) = \ldots = \partial_m f(x_m) = 0.$$

Определение 33

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется **стационарной** для f, если $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Теорема 2.10.2: достаточное условие экструмума

Пусть $f : U \subset X \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in U$ и $df(x_0) = 0$.

- Если для некоторого $\nu > 0$ и любого h верно $d^2 f(x_0)(h,h) \geqslant \nu \|h\|^2$, то x_0 — точка локального минимума.
- Если для некоторого $\nu > 0$ и любого h верно $-d^2 f(x_0)(h,h) \geqslant \nu \|h\|^2$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x) + \underbrace{df(x_0)}_{=0} h + \frac{d^2 f(x_0)(h,h)}{2} + \text{остаток}.$$

Разберем случай $d^2 f(x_0)(h,h) \geqslant v \cdot \|h^2\|$, еще мы знаем, что остаток равен $o(h^2)$. Тогда

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0).$$

Поэтому x_0 — точка локального минимума. □

Замечание. В $\mathbb{R}^m$ сводится к положительной или отрицательной определенности матрицы, составленной из вторых частных производных.

$$h^\top \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) h.$$

Для этого существует критерий Сильвестра.

Лекция 8: † 3 Apr

2.11 Странные примеры экстремумов

2.11.1 Задача Гюйгенса

Описание 1. Есть два шара с массами M и $m \in (0, M)$. Шар с массой M летит со скоростью V на покоящийся нар массой m. Какая скорость будет у малого шара после столкновения? И как ее вообще найти?

После столкновения посчитаем импульс и энергию. По закону сохранения импульса и закону сохранения энергии

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \widetilde{v_1} + m_2 \widetilde{v_2}$$
$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 \widetilde{v_1}^2 + m_2 \widetilde{v_2}^2$$

$$m_1 (v_1 - \widetilde{v_1}) = m_2 (\widetilde{v_2} - v_2)$$
$$m_1 (v_1^2 - \widetilde{v_1}^2) = m_2 (\widetilde{v_2}^2 - v_2^2)$$

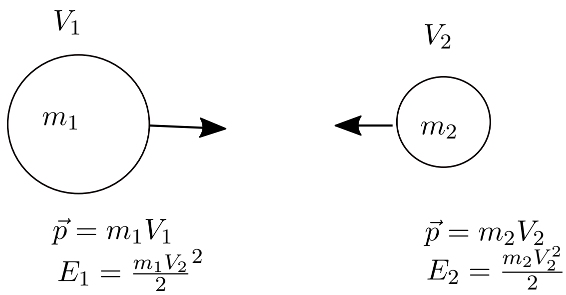


Рис. 2.3: Столкновение шаров

Поделим одно на другое и получим, что $v_1 + \widetilde{v_1} = v_2 + \widetilde{v_2}$. Дальше можно подставить в первое уравнение и получить

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \widetilde{v_1} + m_2(v_1 + \widetilde{v_1} - v_2).$$

Тогда

$$\widetilde{v_1} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\widetilde{v_2} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Если $v_2 = 0$,

$$\widetilde{v_2} = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \in (v_1, 2v_1).$$

Определение 34: Задача Гюйгенса

С какими массами $m_1, \dots m_n$ разместить по пути покоящиеся шары, чтобы передался максимальный импульс?

$$\widetilde{v} = v \cdot \frac{2M}{M + m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \ldots \cdot \frac{2m_n}{m_n + m} = f(m_1, \dots m_n) \cdot v \cdot 2^{n+1}.$$

Нужно найти максимум этой функции. Он существует, так как в бесконечности одной и переменных значение стремиться к 0. Обозначим $m_0 = M, \ m_{n+1} = m$.

Посчитаем частные производные и приравняем к 0

$$\partial_j f(\dots) = 0 \Longleftrightarrow m_j^2 = m_{j-1} m_{j+1}.$$

Тогда

$$q = \frac{M}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \ldots = \frac{m_n}{m}.$$

$$q^{n+1} = \frac{M}{m}, \quad q = \sqrt[n+1]{\frac{M}{m}}.$$

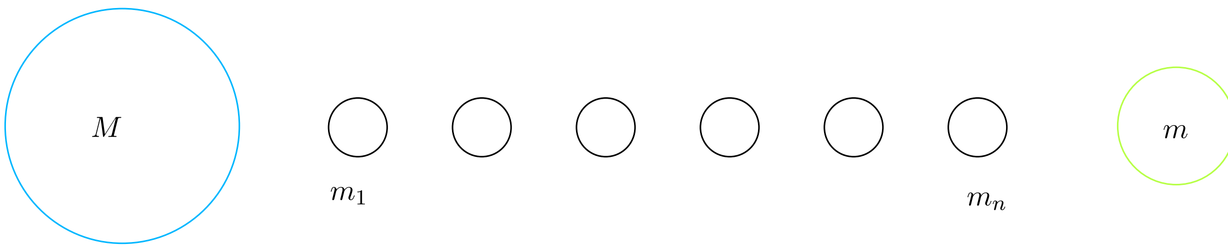


Рис. 2.4: Задача Гюйгенса

А скорость

$$\widetilde{v} = 2^{n+1} \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n+1} v.$$

При $n = 0$, получается $\widetilde{v} = 2 \cdot \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{n}+1} < 2$

Упражнение.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\sqrt[n]{\frac{M}{m}}}{\sqrt[n]{\frac{M}{m}}+1} \right)^{n+1} =?.$$

2.11.2 Кратчайшее расстояние до линейного подпространства

Теорема 2.11.1

Пусть H — пространство со скалярным произведением, $L \subset H$ — линейное подмножество (подпространство), $x_0 \in H$. Пусть z_0 — наилучшее приближение к x_0 в L, то есть

$$\|x_0 - z_0\| = \min_{z \in L} \|x_0 - z\|,$$

тогда $x_0 - z_0 \perp L$, то есть $\forall z \in L$: $\langle x_0 - z_0, z \rangle = 0$.

Доказательство. Введем функцию $f\colon L \to R$, $f(z) = \|x_0 - z\|^2$. В точке z_0 эта функция имеет минимум. Хотим минимизировать f.

$$f(z) = \langle x_0 - z, x_0 - z \rangle = \langle z, z \rangle - \langle x_0, z \rangle - \langle z, x_0 \rangle + \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Продифференцируем:

$$\begin{aligned} df(z_0)h &= \langle z_0, h \rangle + \langle h, z_0 \rangle - \langle x_0, h \rangle - \langle h, x_0 \rangle \\ &= \langle z_0 - x_0, h \rangle + \langle h, z_0 - x_0 \rangle = \qquad . \\ &= 2\,\mathrm{Re}\langle h, z_0 - x_0 \rangle \end{aligned}$$

Так как $\forall h \in L\colon df(z_0)h = 0$, в веществевственном случае получаем перпендикулярность.

Если поле комплексное, то для всех θ

$$2\operatorname{Re}\langle he^{i\theta}, z_0 - x_0\rangle = 0.$$

Выберем θ так, что $\langle he^{i\theta}, z_0 - x_0\rangle \in \mathbb{R}$, поэтому можно вынести скаляр $e^{i\theta}$ и получить $\langle h, z_0 - x_0\rangle = 0$. $\square$

Определение 35: Аффинное подпространство

Пусть $L \subset X$, $x_0, l_0 \in H$, $L_0 \subset H$ — линейное подпространство. Подпространство $L = \{l_0 + z \mid z \in L_0\}$ называется **аффинным**.

Рассмотрим функцию $f\colon L \to \mathbb{R}$, $f(z) = \|z - x_0\|^2$. Нужно найти ее минимум. Пусть z_0 — точка минимума.

$$df(z_0)\colon L_0 \to \mathbb{R}.$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + df(z_0)h + o(h).$$

Будем брать $h\colon z_0 + h \in L \iff h \in L_0$ — область допустимых приращений.

2.11.3 Задача о брахистороне

Постановка задачи Пусть есть координатная плоскость с осями x и y. Мы находимся в точке $(0,0)$ и хотим попасть в точку (x', y'), выбрав оптимальную траекторию. Хотим минимизировать время, затраченное

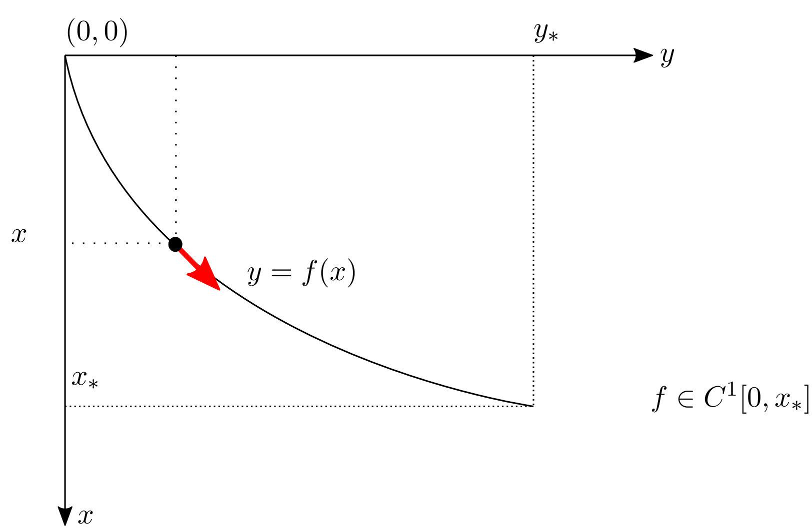


Рис. 2.5: Задача о брахистороне

на спуск, по всем функциям f. Обозначим множество функций

$$L = \{f \in C^1[0, x_* \mid f(0) = 0,\ f(x_*) = y_*\}.$$

Посчитаем мгновенную скорость:

$$\frac{mv(x)^2}{2} = mgx \Longrightarrow v(x) = \sqrt{2gx}.$$

Чтобы найти время, нужно разбить путь на малые отрезки, на них разделить расстояние на скорость и просуммировать. То есть проинтегрировать функцию. Воспользуемся утверждением о том, что при достаточно малом кусочке длина дуги будет равна $\sqrt{1+f'(x)^2}$:

$$T(f) = \int_0^{x_*} \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

Заведем функционал $J\colon L \to \mathbb{R}$:

$$J[f] = \int_0^{x_*} \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{x}} dx.$$

Общий вид В более общем виде функционал $J[f]$, где $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимает такой вид:

$$J[f] = \int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx.$$

В нашем случае $F(u_1, u_2, u_3) = \frac{\sqrt{1+u_3^2}}{\sqrt{u_1}}$.

Упражнение. Если $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, то J дифференцируема.

Доказательство. Пусть $F \in C^1(\mathbb{R}^3),\ F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ J\colon L \to \mathbb{R}$

$$L = \{f \in C^1[a,b] \mid f(a) = A,\ f(b) = B\}.$$

Определим L_0 — пространство допустимых приращений к функции:

$$L_0 = \{f \in C^1[a,b] \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

Тогда $dJ(f)\colon L_0 \to \mathbb{R}$ — линейное непрерывное отображение.

Пусть $J = J_2 \circ J_1$, где

$$\begin{aligned} &J_2\colon C[a,b] \to \mathbb{R}, && J_2(f) = \int_a^b f(x)dx \\ &J_1\colon C^1[a,b] \to C[a,b], && J_1(f)(x) = F(x, f(x), f'(x)) \end{aligned}$$

Тогда $dJ(f) = J_2 \circ dJ_1(f)$. Чтобы доказать это, докажем, что $dJ_2(J_1(f)) = J_2$. Пусть $q = J_1(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h \to 0$ — приращение. Тогда

$$J_2(q+h) - J_2(q) = \int_a^b q(x)dx = J_2(q).$$

Теперь нужно проверить, что J_1 дифференцируемо, так как с J_2 уже все в порядке.

$$d_h J(f) = J_2 \circ d_h J_1(f).$$

$$h \in L_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{J_1(f+th) - J_1(f)}{t}.$$

Таким образом, для всех x нужно посчитать

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)) - F(x, f(x), f'(x))}{t} \tag{2.11.1}$$

Пусть

$$\varphi(t) = F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)).$$

Тогда 2.11.1 равна $\varphi'(0)$. При этом

$$\varphi'(t) = \partial_2 F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x))h'(x),$$

из чего следует, что 2.11.1 равно

$$\partial_2 F(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x), f'(x))h'(x).$$

Проинтегрируем

$$\partial_h J(f) = \int_a^b \partial_2 F(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x), f'(x))h'(x)dx.$$

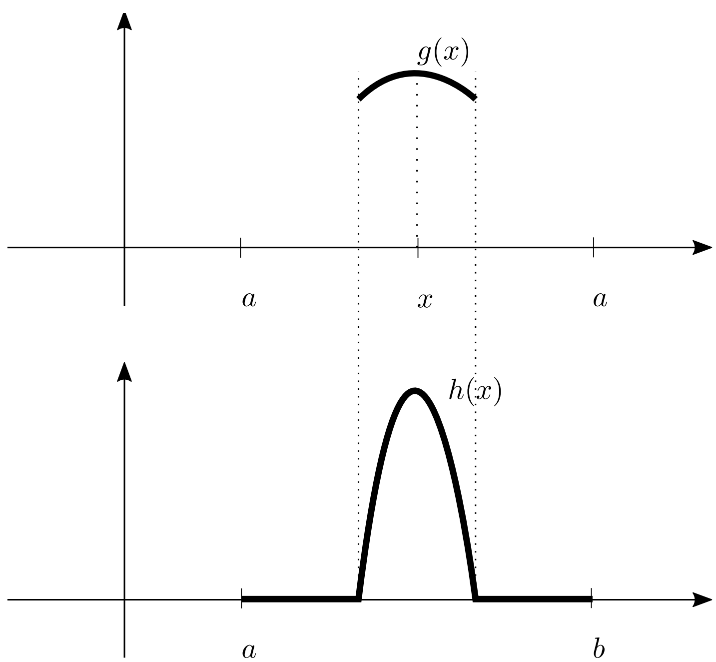
Необходимое условие экстремума состоит в том, что $\forall h \in L_0$: $\partial_h J(f) = 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\partial_h J(f) &= \int_a^b \left(\partial_2 F(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\Big(\partial_3 F(\ldots)\Big)\right) h(x)dx + \partial_3 F(\ldots)h(x)\Big|_a^b = \\ &= \int_a^b g(x)h(x)dx = 0\end{aligned}$$

Так как это равенство верно для всех h из L_0, $g(x) = 0$: пусть $g(x') \neq 0$. Тогда по непрерывности $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности x'. Тогда существует h такое, что $h(x) \neq 0$ только в этой окрестности x', поэтому

$$\int_a^b g(x)h(x)dx \neq 0.$$



Следовательно, f — экстремум. Тогда

$$\partial_2 F(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 f(x, f(x), f'(x)) = 0,\ f(a) = A,\ f(b) = B.$$

Полученное дифференциальное уравнение от f называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Применим для решения первоначальной задачи

$$F(u_1, u_2, u_3) = F(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{x}}.$$

Тогда $\partial_2 F(\ldots)$ в уравнении просто равно 0, а

$$\partial_3 F(\ldots) = \frac{f'(x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)' = 0, \quad f(x) = y', \quad f(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}} = c.$$

Возведем в квадрат и получим, что

$$\frac{x}{c^2} = \frac{1}{f'(x)^2} + 1 \Longrightarrow \frac{const - x}{x} = \frac{1}{f'(x)^2} \Longrightarrow f'(x) - \sqrt{\frac{x}{const - x}}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{const - s}} dx,$$

при этом $const$ можно подобрать так, что $f(x^*) = y^*$. Это циклоида. $\square$

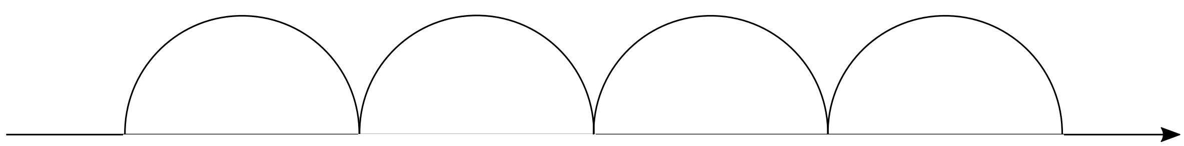


Рис. 2.6: Циклоида

Лекция 9: †

10 Apr

2.12 Поверхности и криволинейные координаты

Определение 36: Поверхность-график

Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на открытом множестве. Поверхность-график функции

—

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in U\}.$$

Определение 37: Параметризация

Параметризация S — отображение $F\colon U \to S$, такое что $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ — непрерывное, Биективное отображение

Пути на S Если $\gamma\colon [a, b] \to U$ — путь в U, то $F \circ \gamma$ – путь в S, и наоборот.

Криволинейные координаты на S (x, y) выполняют роль координат на S. Образы координатных линий — координатные кривые на S.

2.12.1 Касательная плоскость к графику функции

Пусть f дифференцируемо в точке $(x_0, y_0) \in U$. Тогда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\dots), \qquad (x, y) \to (x_0, y_0).$$

$$df(x_0, y_0) = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)).$$

Определение 38: Касательная плоскость

Множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий уравнению

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

называется касательной плоскостью к S в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Замечание. Эта плоскость единственна и

$$A = \partial_x f(x_0, y_0), \qquad B = \partial_y f(x_0, y_0).$$

Замечание. Нормаль к плоскости

$$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) = (\nabla f(x_0, y_0), -1).$$

2.12.2 Касательный вектор

Определение 39: Касательный вектор к пути

Если гладкий путь в $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то касательный вектор к нему — это $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Если путь лежит на поверхности S, то есть $\Gamma = F \circ \gamma$, то

$$\Gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t), \partial_x f(x(t), y(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t)\right).$$

- Касательный вектор к пути на поверхности перпендикулярен нормали и лежит в касательной плоскости.

  Уравнение нормали
  $$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y (x_0, y_0), -1).$$

- Верно и обратное: любой вектор из касательной плоскости является касательным к некоторому пути на поверхности.
  $$(u, v, w) \perp n \qquad x(t) = x_0 + ut,\ y(t) = y_0 + vt \text{ — путь в } U.$$
  $$\Gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

  Продифференцировав это, мы получим равенство выше.

2.12.3 Чуть более общая ситуация

- Если $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, \dots f_m)$, то получим график отображения

$$S = \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y \in f(x)\}$$

  — n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+m}$.

- $F\colon U \to S,\ F(x) - (x, f(x)$ — параметризация поверхности.
- Касательное пространство n-мерно и состоит из касательных векторов.
- Пространство нормалей m-мерное.

2.13 Теорема о неявном отображении (функции)

2.13.1 Мотивация

- Рассмотрим множество $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ — окружность на плоскости. Это не график функции $y = f(x)$, но почти для всех точек можем взять окрестность, которая будет графиком.
- Можно честно решить относительно y уравнение $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

2.13.2 Подстановка

- Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0 \end{cases}.$$

- Хотим разрешить относительно $y = (y_1, \dots y_n)$

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots x_n) \end{cases}.$$

- Тем самым, получить задание m-мерной поверхности в $\mathbb{R}^{m+n}$.

2.14 Теорема о неявном отображении

Теорема 2.14.1: О неявном отображении

- Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, Y— полное, $(x_0, y_0) \in W \subset X \times Y$.
- Отображение непрерывно $F\colon W \to Z$ в точке (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$
- В W существует частный дифференциал F по y ($\exists \partial_y F\colon W \to L(Y, Z)$) и непрерывен в точке (x_0, y_0).
- Оператор обратим $(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$

Тогда существуют $U \subset X$ — окрестность точки x_0, $V \subset Y$ — окрестность точки y_0, $f\colon U \to V$ такие, что $U \times V \subset W$ и

$$\{F(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$

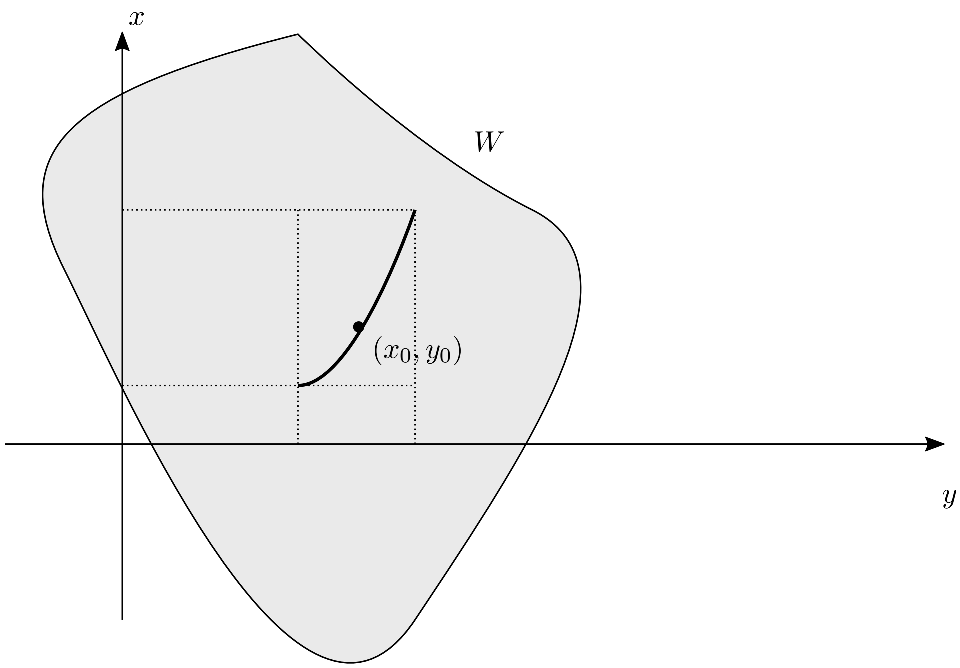


Рис. 2.7: График функции в окрестности

1. Пусть $g_x(y) = y - (\partial_y F(0,0))^{-1} F(x,y), \quad g_x \colon Y \to Y$.

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y \text{ — неподвижная точка } g_x.$$

Докажем это. Нужно выделить подмножество Y, где отображение действует.

$$dg_x(y) = I_Y - (\partial_y F(0,0))^{-1} \partial_y F(x,y).$$

Если (x,y) стремиться к $(0,0)$, то последнее слагаемое будет стремиться к тождественному отображению I_Y, то есть правая часть равенства стремиться к 0.

$$\exists \Delta > 0 \colon \|x\| < \Delta, \|y\| < \Delta \Longrightarrow \|dg_x(y)\| < \frac{1}{2}.$$

Возьмем $\Delta > \varepsilon > 0$. $g_0(0) = 0$

$$\exists \delta > 0 \ \forall x, \|x\| < \delta \colon \|g_x(0)\| \leqslant \varepsilon/2.$$

2. **Ключевой момент:** так как производные меньше $\frac{1}{2}$, и $\|g_x(0)\| \leqslant \varepsilon/2$

$$g_x\left(\{\|y\| \leqslant \varepsilon\}\right) \subset \{\|y\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Применим теорему о сжимающем отображении (так как производная ограничена $\frac{1}{2}$ и Y полное): $g_x \colon V \to V, \quad V = B_\varepsilon(0) \subset Y$, поэтому

$$\exists y \colon \|y\| \leqslant \varepsilon, \quad \|g_x(y) - g_y(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|dg_x(\theta y)\| \cdot \|y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как Y полное, шар M, где действует g, является метрическим,отображение g_x сжимающее. Следовательно, существует единственная неподвижная точка

$$\exists!\ y \colon \|y\| \leqslant \varepsilon, g_x(y) = y.$$

Рассмотрим $U = B_\delta(0)$. Оно подойдет.

□

Замечание. Отображение f непрерывно в точке x_0, так как Δ мы выбираем сами.

Замечание. Если случай конечномерный, то достаточно требовать только обратимость (без непрерывности):

$$\exists\left(\partial_y F(x_0,y_0)\right)^{-1} \Longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x_0,y_0)\right).$$

Теорема 2.14.2

Если в условиях прошлой теоремы 2.14.1 отображения F, $\partial_y F$ непрерывны не только в точке (x_0,y_0), но в целой окрестности, то f непрерывно в окрестности точки x_0

Доказательство. Хотим проверить, что $\exists\left(d_y D(x,y)\right)^{-1} \in L(Z,Y)$, при (x,y) близких к (x_0,y_0). Уже знаем, что $\exists\ \left(\partial_y F(x_0,y_0)\right)^{-1} \in L(Z,Y)$.

Лемма 1 (об обратимости оператора близкого к тождественному). *Y — полное, $B \in L(Y,Y)$, $\|B\| \leqslant 1$. Тогда $\exists (I-B)^{-1} \in L(Y,Y)$.*

Доказательство. Сначала проверим обратимость, а потом непрерывность обратного отображения.

- Докажем, что
$$\forall v \in\ \exists!\ u \in Y : (I-B)u = v.$$
Последнее утверждение равносильно тому, что
$$u = c + Bu \quad g_v(u) = v + Bu.$$
Теперь хотим найти неподвижную точку g_v. Это сжимающее отображение так как
$$\|g_v(u_1) - g_v(u_2)\| = \|Bu_1 - Bu_2\| \leqslant \|B\| \cdot \|u_1 - u_2\| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$
Тогда по теореме сжимающем отображении существует неподвижная точка.

- Проверим непрерывность: пусть u_n — решение для v_n, u — решение для v,
$$v_n \to v_0 \Longrightarrow u_n \to u,\ \ u_n = v_n + Bu_n \wedge u_0 = v_0 + Bu_0.$$
Вычтем одно из другого
$$u_n - u_0 = v_n - v_0 + B\left(u_n - u_0\right).$$
Теперь запишем неравенство треугольника для норм
$$\|u_n - u_0\| \leqslant \|v_n - v_0\| + \|B\| \cdot \|u_n - u_0\|.$$
$$\|u_n - u_0\| \leqslant \frac{1}{1 - \|B\|}\|v_n - v_0\| \to 0.$$

□

Лемма 2 (об обратимости оберbegin оператора близкого к обратимому). *Y — полное пространство. $A, A_0 \in L(Y,Z)$, $\exists A_0^{-1} \in L(Z,Y)$. Если $\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, то $\exists A^{-1} \in L(Z,Y)$*

Доказательство. Применяем лемму 1

$$\underbrace{A}_{L(Y,Z)} = A_0 + A - A_0 = \underbrace{\left(I_Y + (A - A_0)A_0^{-1}\right)}_{L(Y,Y)}\underbrace{A_0}_{L(Y,Z)}, \quad \|B\| \leqslant \|A - A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1.$$

Знаем, что $A_0 \in L(Y,Z)$ обратимо и непрерывно. Проверим, что $I_Y + B = I_Y + (A - A_0)A_0^{-1}$ Обратимо и непрерывно.

$$\|B\| \leqslant \|A_0^{-1}\| \cdot \|A - A_0\| < 1.$$

Теперь можем применить 1 и получить обратимость непрерывность обратного. Поэтому $I_Y + B$ тоже обратимо и обратное непрерывно. □

Итого, можем применить для всех (x, y) таких, что

$$\|\partial_y F(x,y) - \partial_y F(x_0,y_0)\| < \frac{1}{\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|},$$

теорему о неявной функции. Так как $\partial_Y F(x,y)$ непрерывно, можем взять шар с центром в (x_0, y_0), где все точки обладают этим свойством. □

Теорема 2.14.3

Если в условиях теоремы 2.14.1 дополнительно отображение F дифференцируемо в точке (x_0, y_0), то и f дифференцируемо в точке x_0 и

$$df(x_0) = -(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\partial_x F(x_0,y_0).$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$. по определнию дифференциала

$$F(x,y) = F(0,0) - \partial_x F(0,0)x + \partial_y F(0,0)_y + \underbrace{o(\|x\| + \|y\|)}_{\alpha(x,y)}.$$

Пусть мы уже живем в множестве, где определеная неявная функция f. Тогда $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$ и

$$0 = \partial_x F(0,0)x + \partial_y F(0,0)f(x) + \alpha(x, f(x)).$$

Выразим $f(x)$:

$$f(x) = -\left(\partial_y F(0,0)\right)^{-1} \partial_x F(0,0)x - \underbrace{(\partial_y F(0,0))^{-1}\alpha(x, f(x))}_{\text{проверим, что } = o(\|x\|)}.$$

Так как f непрерывно (x_0, y_0), если $x \to 0$, $f(x) \to 0$.

$$\exists \delta > 0\colon \|x\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|\alpha(x, f(x))\|}{\|x\| + \|f(x)\|} \leqslant \frac{1}{\|d_y F(0,0)^{-1}\|} \cdot \frac{1}{2}.$$

Все вместе

$$\|\partial_y F(0,0)^{-1}\alpha(x, f(x))\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|f(x)\|\right).$$

Тогда

$$\|f(x)\| \leqslant C\|x\| + \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|f(x)\|\right).$$

Переносим $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|f(x)\| &\leqslant C\|x\| + \frac{1}{2}\|x\| \\ &\Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \widetilde{c}\|x\| \\ &\Longrightarrow o(\|x\| + \|f(x)\|) = o(\|x\|) \end{aligned}$$

□

Замечание. Можно попросить большую дифференцируемость F и получить большую дифференцируемость f. Аналогично можно попросить дифференцируемость в окрестности и получить дифференцируемостьв окрестности.

Теорема 2.14.4: об обратном отображении

Пусть $F\colon W \subset Y \to X$, Y — полно, $F(y_0) = x_0$, F дифференцируемо в W, dF непрерывна в точке y_0 и существует $(dF(y_0))^{-1} \in L(X, Y)$.

Тогда существуют окрестности $U \subset W$ точки x_0 и V точка y_0 такие, что $F\colon V \to U$ — биекция, то есть существует $F^{-1}\colon U \to V$, F^{-1} — дифференцируемо в точке x_0 и

$$d(F^{-1})(x_0) = (dF(y_0))^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x,y) = x - F(y)$, $\quad G\colon X \times Y \to X$. Заметим, что $G(x,y) = 0 \iff x = F(y)$. Поэтому $G(x_0, y_0) = 0$.

$$\partial_y G(x_0, y_0) = -dF(y_0) \text{ — обратимо.}$$
$$\exists (\partial_y G(x_0, y_0))^{-1} \in L(Y, X).$$

По теореме о неявной функции получаем, что существует

$$f\colon U \to V \qquad G(x, f(x)) = 0 \iff x - F(f(x)) = 0.$$

И $f = F^{-1}$ на U.

$$dF^{-1}(x_0) = df(x_0) = -\left(\partial_y G(x, y_0)\right)^{-1} \partial_x G(x_0, y_0) = (dF(y_0))^{-1}.$$

□

Замечание. Можно попросить большую дифференцируемость F и получить большую дифференцируемость f.

Лекция 10: † 17 Apr

2.15 Условные экстремумы

Определение 40: Локальный максимум

Пусть $f\colon W \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^m$, $z_0 \in W$, $\Phi(z_0) = 0$ и существует такая окрестность $U \subset W$ точки z_0, что

$$\forall z \in U \cap \{\Phi = 0\} \quad f(z) \leqslant f(z_0).$$

Тогда точка z_0 называется **точкой условного локального максимума** функции f при условии $\Phi = 0$.

Замечание. Аналогично определяется локальный минимум и экстремум, также строгие аналоги.

Замечание (уравнения связи). $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \ldots \Phi_m(z))$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi_1(z) = 0, \ldots \Phi_m(z) = 0$$

— m уравнений связи — часто задают n-мерную поверхность.

Когда такие поверхности получаются?

Пусть Φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $z_0 \in W$, рассмотрим матрицу дифференциала

$$d\Phi(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}(z_0) & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{n+m}}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1}(z_0) & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_{n+m}}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{rank} d\Phi(z_0) = m$, то в окрестности точки z_0 уравнение $\Phi(z) = 0$ задает n-мерную плоскость в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Если $\operatorname{rank} dq(z_0) = m$, то в матрице есть m линейно независимых столбцов. Будем считать, что последние m линейно независимы и обозначим

$$x_1 = z_1, \ldots \; x_n = z_n, \quad y_1 = z_{n+1}, \ldots \; y_m = z_{n+m}.$$

Тогда $\det \partial_y \Phi(z_0) \neq 0$, существует $\left(\partial_y \Phi(z_0)\right)^{-1}$ и выполнена теорема о неявной функции:

$$\Phi(z) = 0 \iff y = g(x)$$

в окрестности точки z_0, $g(x)$ — неявная функция.

Приходим к тому, что надо искать экстремум функции

$$\widetilde{f}(x) = f(x,y) = f(x, g(x)), \qquad x = (x_1, \dots x_n).$$

Но возникает проблемка: g задана неявно.

Если z_0 — локальный экстремум функции f при условии, что $\Phi(z) = 0$, то x_0 — локальный экстремум функции $\widetilde{f}$. В случае гладкости обеих функций для этого есть необходимое условие экстремума

$$d\widetilde{f}(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \partial_x f(x_0, g(x_0)) + \partial_y f(x_0, g(x_0)) dy(x_0) = 0.$$

Еще $\Phi(x, g(x)) = 0$ в окрестности x_0. Поэтому

$$\partial_x \Phi(x_0, g(x_0)) + \partial_y \Phi(x_0, g(x_0)) dg(x_0) = 0.$$

Получили условие на x_0:

$$\begin{cases} \partial_x f(x_0, g(x_0)) + \partial_y f(x_0, g(x_0)) dy(x_0) = 0 \\ \partial_x \Phi(x_0, g(x_0)) + \partial_y \Phi(x_0, g(x_0)) dg(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Воспользуемся обратимостью $\partial_y \Phi(x_0, g(x_0))$:

$$dg(x_0) = -\left(\partial_y \varphi(x_0, g(x_0))\right)^{-1} \partial_x \Phi(x_0, g(x_0)).$$

Подставим $dg(x_0)$ в первое уравнение:

$$\partial_x f(x_0, g(x_0)) - \underbrace{\partial_y f(x_0, g(x_0)) \left(\partial_y \Phi(x_0, g(x_0))\right)^{-1} \partial_x \Phi(x_0, g(x_0))}_{\lambda} = 0.$$

$$\begin{cases} \partial_x f(z_0) - \lambda \partial_x \Phi(z_0) = 0 \\ \partial_y f(z_0) - \lambda \partial_y \Phi(z_0) = 0 \end{cases}$$

Получаем

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) = 0 \tag{2.15.1}$$

λ — вектор-строка длины m, так как $\partial_y f(z_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Тогда выражение 2.15.1 — $n + m$ уравнений и еще есть m уравнений на $\Phi(z_0) = 0$.

Теорема 2.15.1: Необходимое условие условного экстремума

$W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in C^1(W, \mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$, $z_0 \in W$, $\operatorname{rank} d\Phi(z_0) = m$, $\Phi(z_0) = 0$. Если z_0 — точка условного локального экстремума функции f при условии $\Phi(z) = 0$, то существует $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такое, что

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) = 0.$$

Определение 41

λ называется множителем Лагранжа, а метод называется методом неопределенных множителей Лагранжа.

Замечание. Система

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) - 0, \quad \Phi(z_0) = 0$$

состоит из $2m + n$ уравнений с $2m + n$ неизвестным z_0 и λ.

2.15.1 Примеры

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, где норма евклидова:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k = x^T A x, \quad x = (x_1, \dots x_n).$$

Можно считать, что матрица A, задающая a_{jk}, симметрична ($a_{jk} = a_{kj}$).

Запишем уравнение связи:

$$\Phi(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1.$$

Тогда S^{n-1} — множество нулей этой функции, а S^{n-1} компактно, следовательно экстремумы достигаются.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \colon d\left(f - \lambda\varphi\right)(x) = 0.$$

Посчитаем

$$\frac{\partial(f - \lambda\Phi)}{\partial x_j}(x) = 2\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - 2\lambda x_j,$$

что равносильно $Ax = \lambda x$. Следовательно, x — собственный вектор матрицы A, а λ — ее собственное число. Обозначим их за x_s и λ_s. Можно считать, что собственный вектор нормирован $|x_s| = 1$.

$$f(x_s) = x_s^\top A x_s = \lambda_s \underbrace{x_s^\top x_s}_{|x_s|^2} = \lambda_s.$$

Значит, нужно выбрать максимальное собственное число для максимального значения и минимальное — для минимального.

Задача Дидоны Хотим найти максимальную площадь S ограниченную кривой фиксированной длины P, при этом $L = \{f \in C^2[0,l] \mid f(0) = f(l) = 0\}$. Мы считаем, что кривая — график некоторой функции.

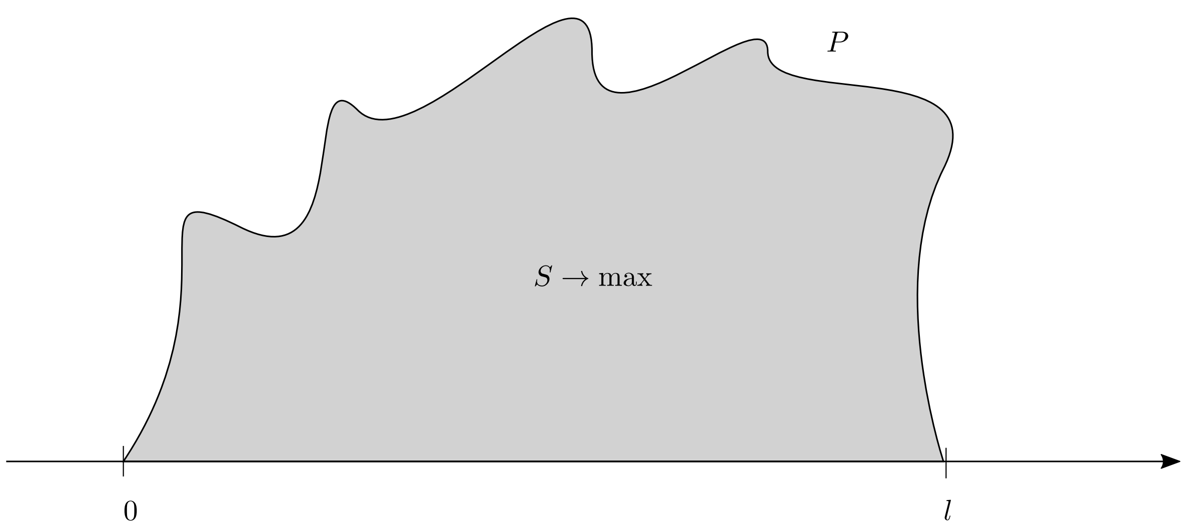


Рис. 2.8: Задача Дидоны

Для решения задачи нужно максимизировать следующий функционал

$$S(t) = \int_0^l f(x)dx \text{ при условии}$$

$$\Phi(f) = \int_0^l \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx - P = 0$$

В данном случае нам требуется более общая формулировка метода множителей Лагранжа, которую мы не доказывали, но здесь он тоже работает: если f — условный экстремум (экстрималь).

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \colon \forall h \in L \quad \partial_h (S - \lambda \Phi)(f) = 0.$$

Это выражение переписывается с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа

$$(S - \lambda\Phi)(f) = \int_0^l F(x, f(x), f'(x))dx \qquad F(u_1, u_2, u_3) = u_2 - \lambda\sqrt{1 + u_3^2}.$$

Мы знаем, что

$$\begin{aligned} \partial F - \frac{d}{dx}\partial_{x_1} F = 0 \\ \partial_2 F = 1 \\ \partial_3 F = -\lambda \frac{u_3}{\sqrt{1+u_3^2}} \\ f(l) = f(0) = 0 \end{aligned}$$

Подставим и перепишем

$$1 + \lambda \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' = 0$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = -\frac{x + C}{\lambda}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{(f'(x))^2}{1 + (f'(x))^2} = \frac{(x+C)^2}{\lambda^2}.$$

Выразим $f'(x)$:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{(x+C)^2}{\lambda^2 - (x+C)^2}}.$$

$$y = f(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x+C)^2} + C_1.$$

$$(y - C_1)^2 + (x + C)^2 = \lambda^2.$$

Получаем, что это действительно часть окружности, которая проходит через точки 0 и l и определяется длиной веревки.

Задача про цепную линию Есть два гвоздя и цепочка длины P. Необходимо понять, какую форму она примет для минимизации потенциальной энергии.

$$\Phi(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx - P = 0.$$

Хотим минимизировать потенциальную энергию, то есть

$$J(f) = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Множество подходящих функций

$$L = \{f \in C^2[a, b] \mid f(x) = A, f(b) = B\}.$$

Множество допустимых приращений

$$L_0 = \{f \in C^2[a, b] \mid f(a) = 0, f(b) = 0\}.$$

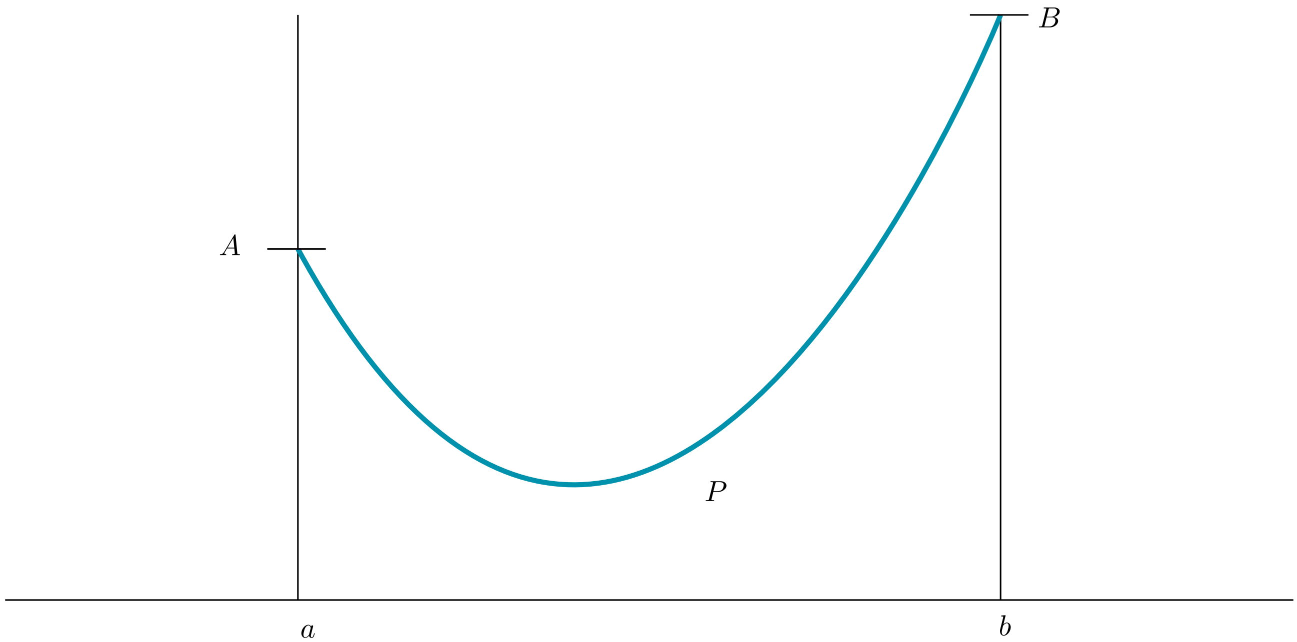


Рис. 2.9: Задача про цепную линию

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для бесконечномерного случая.

$$\exists\lambda\colon \forall h \in L_0\ \partial_n(J - \lambda\Phi)(f) = 0.$$

Далее воспользуемся уравнением Эйлера-Лагранжа, где

$$F(u_1, u_2, u_3) = (u_2 - \lambda)\sqrt{1 + u_3^2}.$$

Первая переменная опять не используется. Получаем следующее уравнение:

$$\partial_2 F(f, f') - \frac{d}{dx}(\partial_3 F(f, f')) = 0 \tag{2.15.2}$$

Если считать в лоб, то будет не понятно, как решать дифференциальное уравнение. Но мы воспользуемся тем, что F не зависит от u_1. Докажем, что из уравнения 2.15.2 следует следующее:

$$F(f, f') - f'\partial_3 F(f, f') = C.$$

Доказательство. Продифференцируем это выражение по x

$$\partial_2 F(f, f')f' + \cancel{\partial_3 F(f, f')f''} - \cancel{f''\partial_3 F(f, f')} - f'(\partial_3 F(f, f')) = 0.$$

Получили, что это была константа, раз производная 0. □

Теперь раскроем F:

$$(f(x) - \lambda)\sqrt{1 + (f'(x))^2} - f'(x)(f(x) - \lambda)\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = C.$$

Здесь нужно найти минимальное значение.

Глава 3

Ряды

3.1 Определения и примеры

Определение 42

X — нормированное пространство, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд, x_k — члены ряда.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ — частичная сумма ряда.

Определение 43: сходимость ряда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется сходящимся, если

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n =: S.$$

Иначе ряд называется расходящимся.

Ремарка. В $\mathbb{R}$ сумма ряда может быть равна $\pm\infty$.

Ремарка. Ряд может не начинаться с 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k,\ \sum_{k=n}^{\infty} x_k.$$

Пример 3.1.1. $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$, этот ряд сходится.

Пример 3.1.2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ расходится.

Пример 3.1.3. $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Посчитаем частичную сумму $S_n \overset{z\neq 1}{=} \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. $\lim_{n\to\infty} z^n$ существует, если $|z| < 1$.

Пример 3.1.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ расходится, так как $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

Пример 3.1.5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ тоже сходится.

Пример 3.1.6. Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

3.1.1 Свойства

Свойства.

$\boxed{1}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* $\Longleftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ *сходится ряд* $\sum_{k=k+1}^{\infty} x_k$ *и при этом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty}}_{\text{остаток}}.$$

$\boxed{2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* $\Longrightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k \overset{m\to\infty}{\to} 0$

Доказательство. Распишем формулу суммы ряда:

$$S = S_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k.$$

S_m стремиться к S при $m \to \infty$, поэтому

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k = S - S_m \overset{m\to\infty}{\to 0}.$$

□

$\boxed{\texttt{линейность}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *сходятся. Тогда*

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) \text{ сходится}$$

при этом

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Замечание. Если один ряд сходится, а второй расходится, то их сумма расходится.

$\boxed{x_k \in \mathbb{R}^m}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(m)} \right).$$

$\boxed{z_k \in \mathbb{C}.\ z_k = x_k + i y_k}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + i y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

$\boxed{\texttt{монотонность}}$ $a_k,\ b_k \in \mathbb{R},\ a_k \leqslant b_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} {}_k$ *сходится (возможно с* $\pm\infty$*), тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

$\boxed{\texttt{необходимое условие сходимости}}$ $\{x_k\} \subset X$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится, тогда* $x_k \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\texttt{критерий Больцано-Коши}}$ *Пусть* X *полно.* $\{x_k\} \subset X$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ равносильна тому, что $\{S_n\}$ сходится, что равносильно тому, что S_n фундаментальна в X. То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N : \|S_m - S_n\| < \varepsilon.$$

$$m > n \Longrightarrow m = n + p,\ p \in \mathbb{N} : S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k.$$

□

Лекция 11: † 23 Apr

Определение 44: Группировка ряда

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ — группировка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если

$$A_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1},$$

$$A_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},$$

то есть n_j — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. $A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k$.

Теорема 3.1.1: о группировке ряда

Пусть есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и его группировка $\sum_{k=1}^{A+k}$

1. Если ряд сходится, его группировка тоже сходится, причем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

   Доказательство. Частичные суммы группировки — это частичные суммы исходного ряда, поэтому их подпоследовательность сходится к тому же числу, что и вся последовательность. □

2. Пусть $a_n \to 0$ и в каждом A_k не более L слагаемых. Тогда, если $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

   Доказательство. Рассмотрим $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $n_j < n \leqslant n_{j+1}$, где S_{n_j} и $S_{n_{j+1}}$ — частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

   $$\exists \varepsilon\ \forall N\colon \big(n_j > N \Longrightarrow |S_{n_j} - S| < \varepsilon\big).$$

   Еще потребуем, чтобы при $k > N$ значение $|a_k| < \frac{\varepsilon}{L}$. Тогда

   $$S_n = S_{n_j} + \underbrace{a_{n_j+1} + \ldots + a_n}_{\leqslant L \text{ слагаемых}}.$$

   Каждое из дополнительных слагаемых не больше $\frac{\varepsilon}{L}$, поэтому

   $$|S_{n_j+1} - S_n| \leqslant L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \Longrightarrow |S - S_n| < 2\varepsilon.$$

   □

3. Пусть ряд числовой ($\mathbb{R}$). Для любого A_k в сумме участвуют только слагаемые одного знака. Тогда, если $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

   Доказательство. Если $n_i < n < n_j$, то S_n лежит между S_{n_j} и S_{n_i}. Можно добиться, чтобы расстояния были меньше ε, тогда и S_n будет отличаться на малую величину. Следовательно, и у S_n есть предел. □

3.2 Положительные ряды

Определение 45: положительный ряд

Числовой ряд называется положительным, если все его члены неотрицательны.

Свойства.

$\boxed{1}$ *Ряд сходится тогда и только тогда, когда $\{S_n\}$ ограничена (сверху).*

$\boxed{\text{Признак сравнения}}$ $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *то*

1. $\sum_{=1}^{\infty} b_n$ *сходится, тогда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*

2. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Тоже расходится.*

$\boxed{\texttt{2'}}$ *$0 \leqslant a_n, b_n$, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

$\boxed{\texttt{2''}}$ *$0 \leqslant a_n, b_n$, если $a_n \sim b_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.*

$\boxed{\texttt{Признак Коши}}$ *Пусть $a_n \geqslant 0$ и $q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$*

1. *$q < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится*
2. *$q > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится*

Доказательство.

1. Выберем любое $0 < \tilde{q} < 1$, с некоторого места мы не выходим сильно правее q, поэтому $\exists N\ \forall n > N\colon \sqrt[n]{a_n} < \tilde{q}$, тогда $a_n < (\tilde{q})^n$. А ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.
2. $\forall N\ \exists n > N\colon a_n > 1 \Longrightarrow a_n \not\to 0$, следовательно, ряд расходится.

□

Замечание. Обычно достаточно использовать обычный предел в этом признаке.

$\boxed{\texttt{Признак Даламбера}}$ *$a_n > 0$ и $\exists \lim_{nto+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда*

1. *$q > 1$, то ряд расходится*
2. *$q < 1$, то ряд сходится*

Доказательство.

1. Если $q > 1$, $a_{n+1} > a_n$, поэтому ряд точно не сходится.
2. Если $q < 1$, возьмем $q < \tilde{q} < 1$, тогда $\exists N\ \forall n > N\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q}$. Запишем

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N < (q)^{n-N+1} \cdot a_{N^2} = C(\tilde{q})^{n+1}.$$

□

$\boxed{\texttt{Интегральный признак}}$ *Пусть $f \geqslant 0$, монотонно убывает $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ сходится} \iff \int_1^k f(x)dx \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot (k+1-k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Так как конечная сумма сходится, интеграл тоже сходится.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)dx = f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Так как интеграл сходится, сумма ограничена сверху, поэтому ряд сходится.

□

3.3 Числовые ряды с произвольными членами

Определение 46: Абсолютная сходимость

$x_k \in X$ — нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Свойства.

1 *$\sum x_k, \sum y_k$ абсолютно сходятся, α, β — скаляры. Тогда ряд $\sum(\alpha x_k + \beta y_k)$ абсолютно сходится, так как*

$$\|\alpha x_k + \beta y_k\| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|x_k\| + \|\beta\| \cdot \|y_k\|.$$

2 *Если $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, то $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, так как*

$$\|S\| \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \|S_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

3 *X — полное нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.*

Доказательство. По критерию Больцано-Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N,\ p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

А тогда по критерию Больцано-Коши получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. $\square$

Определение 47

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, он называется условно сходящимся.

4 *В полном нормированном пространстве $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится условно, тогда $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ сходится условно.*

5 *Если X — полное, то в признаках Коши и Даламбера можно считать*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}$$

соответственно.

Лемма 3 (преобразование Абеля). *Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ — последовательности. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ и $A_0 = 0$. Рассмотрим*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = $$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Получили дискретный аналог интегрирования по частям.

Теорема 3.3.1: Признаки Дирихле и Абеля

Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ — числовые последовательности. b_n — монотонная последовательность, $b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

`Признак Дирихле` $\{A_n\}$ — ограниченная последовательность, $b_n \to 0$.

`Признак Абеля` $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, b_n ограничено

Если выполнен один из признаков, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Из преобразования Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Хотим доказать, что у обоих слагаемых есть предел.Первое слагаемое сходится при условии обоих признаков.

Докажем, что $\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ абсолютно сходится (значит, и просто сходится, так как пространство полное).

Заметим, что в обоих признаках $\{A_k\}$ ограничена: в признаке Дирихле явно сказано, в признаке Абеля должно сходится. Пусть $|A_k| \leqslant C$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|.$$

Так как $\{b_n\}$ монотонна, $b_k - b_{k+1}$ всегда одного знака. Пусть $b_k \geqslant b_{k+1}$ (иначе домноожим на -1). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} = b_1 - b_{n+1}.$$

Из обоих признаков следует, что у $b_1 - b_{n+1}$ есть предел, поэтому следующий ряд сходится

$$C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|.$$

Следовательно, сходится и

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k-1}).$$

□

Теорема 3.3.2: Признак Лейбница

Пусть b_n убывает к нулю. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится.

Доказательство. Обозначим $a_n = (-1)^n$, $A_n \in \{1, 0\}$ — ограничено. По признаку Дирихле ряд произведения сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_k.$$

□

Замечание. Если

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \Longrightarrow |S - S_n| \leqslant b_{n+1}.$$

Пример 3.3.1 (Ряд Лейбница).

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} \text{ сходится условно }.$$

Пример 3.3.2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \text{ тоже сходится условно.}$$

Пример 3.3.3.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k} \text{ сходятся.}$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}(x\cos k i\sin k) = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}e^{ik}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ik} = e^i\frac{e^{n_i}-1}{e^i-1} = e^i\frac{e^{\frac{ni}{2}}\left(e^{\frac{ni}{2}}-e^{-\frac{ni}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2i}}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{-\frac{i}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2i}} = e^{\frac{n+1}{2}i}\frac{\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Теперь берем мнимую часть

$$A_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Для косинуса аналогично.

Теорема 3.3.3: О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ — абсолютно сходящийся ряд. $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция, тогда $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\phi(k)}$ сходится к той же сумме.

Доказательство.

1. Пусть $a_k > 0$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$ и $T_n = \sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}$. Тогда

$$\forall n\ \exists n_1, n_2\colon S_n \leqslant T_{n_1} \leqslant S_{n_2} \Longrightarrow T_n \to S = \lim_{n\to\infty}S_n.$$

2. Пусть $a_k\in\mathbb{R}$. Запишем $a_k = (a_k)_+ - (a_k)_-,\ |a_k| = (a_k)_+(a_k)_-$. Тогда

$$\sum|a_k| \text{ сходится } \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)_+,\ \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)_- \text{ сходятся..}$$

   Применим прошлый пункт: $\sum(a_k)_\pm = \sum(a_{\varphi(k)})_\pm$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)_+ - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k)_- = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{\varphi(k)})_+ - \sum_{k=1}^{\infty}(a_{\varphi(k)})_- = \sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(t)}.$$

3. Последний случай $a_k\in\mathbb{C}$, $a_k = b_k + ic_k$. Применяем второй пункт.

□

Теорема 3.3.4: Теорема Римана

$a_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Тогда

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$$

3.4 Умножение рядов

Теорема 3.4.1: Коши об умножении рядов

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ — абсолютно сходящиеся численные ряды. Тогда $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n$ сходится при любых порядках слагаемых, при этом

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = A_k, \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \overline{A_n}, \sum_{k=1}^{\infty} = A, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \overline{A},$$

и аналогично для b.

Зафиксируем на множестве пар некоторый порядок.

Пусть S_m — частичная сумма $\sum |a_k||b_n|$, N — максимальный из встречающихся индексов.

$$S_m \leqslant \sum_{k=1}^{N} |a_k| \sum_{k=1}^{N} |b_k| \leqslant \overline{AB} \Longrightarrow \text{ ряд } \sum |a_k||b_n| \text{сходится.}$$

Теперь просуммируем с заданным порядком по квадратам: $1 \times 1,\ 2 \times 2, \ldots$ Пусть мы взяли m слагаемых

$$n^2 \leqslant m < (n+1)^2.$$

Тогда

$$S \leftarrow S_{n^2} = A_n \cdot B_n \to A \cdot B.$$

$$|S_{n^2} - S_m| \leqslant |a_{n+1}| \cdot \overline{B} + |b_{n+1}| \cdot \overline{A} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Значит,

$$S_m \to A \cdot B \Longrightarrow \sum_{k,n=1}^{\infty} = A \cdot B.$$

□

Определение 48: Произведение рядов по Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды. $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots a_n b_1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется произведением рядов.

Теорема 3.4.2: Мергенс

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и равно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 3.4.3: Абель

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Пример 3.4.1. $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow |a_n| \geqslant 1$

3.5 Бесконечные произведения

Определение 49: Частичные произведения

Частичные произведения $\prod_{k=1}^{n} p_k = P_n$.

Частичные произведения сходятся к P, если $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P$ и $P \neq 0, P \neq \infty$.

Если $P = 0$, говорят, что расходится к 0, если к $\pm\infty$, говорят, что расходится к $\pm\infty$.

Пример 3.5.1.

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

Пример 3.5.2 (Формула Ваниса)**.**

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Свойства. *Будем считать, что $p_n \neq 0$.*

$\boxed{1}$ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится, тогда* $p_n \to 1$

$\boxed{2}$ *Первые несколько слагаемых ряда можно отбросить, на сходимость это не повлияет*

$\boxed{3}$ *Всегда можно считать, что $p_n > 0$, так как, если ряд сходится, то $p_n \to 1$.*

$\boxed{4}$ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0.$

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится} \iff \prod_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

Используем $\ln P_n = S_n$.

Пример 3.5.3. Пусть p_n — n-ое простое число.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n-1} \text{ расходится.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^k} \overset{?}{=}.$$

Оценим

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_k-1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{p_k^m} = \sum_{0\leqslant\alpha_j\leqslant n}\frac{1}{p_1^{\alpha_j}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}} \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + C.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right),\ \ln\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ расходится.

Следовательно,

$$\overset{?}{=} \sum \frac{1}{p_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to +\infty.$$