Конспект по матанализу
I семестр, часть 2
Факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

Тамарин Вячеслав

3 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

   (a) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

      i. $a + b = b + a$ (коммутативность)

      ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)

      iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)

      iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

   (b) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

      i. $xy = yx$ (коммутативность)

      ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)

      iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)

      iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)

      v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \overset{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на $\mathbb{R}$

   Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

   Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

   Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

   Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} a = b \\ a > b \\ a < b \end{array}\right.$ (антисимметричность)

   (b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

   (c) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

   (d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

   (e) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в $\mathbb{R}$

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты). $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}(\text{замкнутый отрезок})$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}(\text{открытый слева отрезок})$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}(\text{открытый справа отрезок})$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}(\text{открытый отрезок})$$

Def 5 (Лучи). $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists\, x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\ \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists\, y \in \mathbb{R} : a \geqslant y\ \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A.

//$\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Axiom 1 (Архимед). *Множество натуральных чисел не ограниченно сверху.*

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Доказательство. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. □

1.3.2 Аксиома индукции

Axiom 2 (индукции). *Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

Statement (Обоснование метода математической индукции). *Пусть $P_1, P_2, \ldots$ - последовательность суждений. Предположим, что*

1. P_1 *- верно*
2. *Для любого* $k : P_k \to P_{k+1}$

Тогда все условия P_i верны.

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \varnothing$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1$, $l-1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. □

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1 (Неравенство Бернулли)**.** *Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geqslant 1 + n(a-1), \quad n \in \mathbb{N}$*

Доказательство. Индукция:
База: $n = 1: \quad a \geqslant 1 + (a-1)$
Переход: $n \to n+1$
Известно:

$$a^n \geqslant 1 + n(a-1).$$

Тогда:

$$\begin{gathered} a^{n+1} \geqslant a + n(a-1)a = (a-1) + 1 + n(a-1)a = \\ 1 + (a-1)(1+na) \geqslant 1 + (a-1)(1+n) \end{gathered}.$$

□

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Доказательство. Пусть $a^n \leqslant b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a-1)n \leqslant b \Rightarrow n \leqslant \frac{b-1}{a-1}$. Противоречие □

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B), где $A, B \subset \mathbb{R} \land A \neq \varnothing \land B \neq \varnothing$, такая что всякое число из A не более любого из B.

Def 8. Число c лежит в щели (A, B), если $\forall a \in A, b \in B : a \leqslant c \leqslant b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Axiom 3 (Кантор, Дедекинд)**.** *В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.*

Statement. *Квадратный корень из 2 существует и единственный.*

Доказательство.

1. Существование
   Рассмотрим множества:
   $$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\},\ B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$
   Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \leqslant v \leqslant b \ \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

   Lemma. *В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.*

Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \ \Rightarrow \ v \text{ - не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \ \Rightarrow \ v \text{ - не в щели} \end{array}\right.$$

Противоречие.

2. Единственность
Возьмем $c \geqslant 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \geqslant 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array}\right. \Rightarrow 2 > 2$$

Опять противоречие.

$\square$

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c, для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 2. *Квадратный корень из двух иррационален.*

Доказательство. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q$$

$\square$

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v \rangle$ - любой отрезок с концами в $u, v \quad (u \leqslant v)$. Его длина $|\langle u, v \rangle| := v - u$

Theorem 3. *Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида $(a, b), \quad$ где $a < b$ существует точка вида rc, где $r \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Заменим $c \to 1, a \to \frac{a}{c}, b \to \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leqslant r \leqslant b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geqslant b$. Среди таких p существует наименьший p_0.
Возьмем $\frac{p_0 - 1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$ $\square$

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b), где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 4. *На каждом отрезке вида (a, b), где $a < b$, существует иррациональное число.*

Доказательство. По следствию из теоремы **??** $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.3.7 Число e

Def 12. Рассмотрим последовательность $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
Число e – предел $\{a_n\}$.

Statement. $\{a_n\}$ - *сходится.*

Доказательство.

$$1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots \tfrac{1}{n!} \leqslant 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{4} \ldots + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2^{n-2}} =$$
$$= 2.5 + \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \tfrac{1}{6}\cdot 2 \approx 2.8333$$

□

Theorem 5. e - *иррационально.*

Доказательство. $2 < e < 3$
Пусть $e = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $q > 1$.

$$\frac{p}{q} = \lim_{n\to\infty}\left((1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{q!}) + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) =$$
$$= (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$
$$q!p = S + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\ldots n}\right) = S + a.$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$. Обозначим предел за a. Докажем, что $a \notin \mathbb{Z}$.

Statement. $0 < a < 1$

Доказательство.

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\ldots n} \leqslant \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}.$$
$$0 < a \leqslant \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1.$$

□

□

1.4 Свойства подмножеств $\mathbb{R}$

1.4.1 Грани

Def 13 (supremum)**.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.
Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 14 (infimum)**.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.
Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его верхних границ.

Theorem 6 (об описании точной верхней грани)**.** *Пусть $A \neq \varnothing$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x = \sup A$
2. x *– верхняя граница для A и* $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$
$x = \sup A \Rightarrow x$ - верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \varnothing$. Тогда $y \leqslant x - \varepsilon, \quad \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x. Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

$2 \Rightarrow 1$
x - верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x - наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ - верхняя граница A. Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x - не верхняя граница. □

Theorem 7 (об описании точной нижней грани)**.** *Пусть $A \neq \varnothing$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:*

1. $x = \inf A$
2. x *– нижняя граница для A и* $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 15. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 8 (о связности отрезка)**.** *Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Для любого отрезка $[a, b], \ a \leqslant b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F -$ замкнуты $\wedge E \neq \varnothing \wedge F \neq \varnothing$, то $E \cap F \neq \varnothing$.

Доказательство. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \varnothing$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x - предельная точка для E, с другой стороны, предельная точка для F. Так как E, F - замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \varnothing$. Противоречие. □

1.4.3 Предельные и изолированные точки

Def 16. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 17. Проколотая окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)$

Def 18. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.
u называется предельной точкой для A, если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \varnothing.$$

Exs.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.
3. Для $\mathbb{Q}$ все предельные точки - $\mathbb{R}$.

Def 19. Все точки множества A, не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A - \text{изолированная, если } \exists\, \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A = \varnothing$$

Exs.

1. $[1,2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1,2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. *Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ $(y = \inf A)$.*

$$\left[\begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y \text{ - предельная точка } A \\ y \in A \end{array}\right.$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 9 (о вложенных отрезках)**.** *$a \leqslant b, I = \langle a, b\rangle$.*
$\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность замкнутых отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots$$

Заметим, что $a_k \leqslant b_j\ \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leqslant t \leqslant b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j],\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Доказательство. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geqslant k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.
В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 10 (о компактности). *Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leqslant x \leqslant b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$. Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] \text{ - бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] \text{ - бесконечно} \end{cases}$ Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках **??** $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \land x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. □

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 11 (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \ldots \supset J_n \supset \ldots, \qquad \textit{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\textit{Тогда} \left[\begin{array}{l} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \varnothing \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \Longleftrightarrow \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \ldots \end{array} \right.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках **??** $\exists! t \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \land t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. □

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей

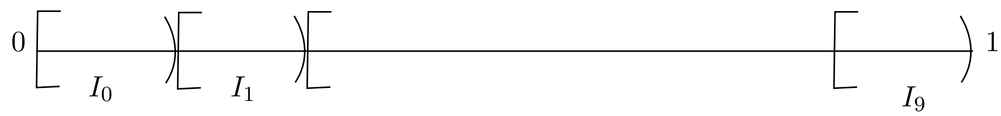

Рис. 1.1: Decimal decomposition

3. И так далее

Получим $0.i_1 i_2 i_3 \dots$ – десятичную запись числа x.

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 12. *Пусть* $(j_1, j_2, \dots)$ *- цифры от нуля до девяти.* $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9\ \forall k \geqslant n$.
Тогда $\exists! x \in [0, 1)$ *для которого* $0.j_1 j_2 \dots$ *- десятичное представление.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме **??** существует непустое пересечение, равное одной точке - и есть наше число. □

Глава 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 20. b – предел функции f в точке x_0, если для любой окрестности U в точке b существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки $x_0 : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 21. b – предел функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 22. b – предел функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim x \to x_0 |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 13. *$f : A \to \mathbb{R}$, x - предельная точка для A.*
Если a, b - предельные для f в точке x_0, то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b. Так как a, b - предельные,

$$\begin{array}{l} \exists \overset{\circ}{V}_1 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{array}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V} (x) = \overset{\circ}{V}_1 (x) \cap \overset{\circ}{V}_2 (x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Противоречие. $\square$

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 23. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 14 (о пределе сужения)**.** $f : A \to \mathbb{R}, x \in A',\ B \subset A'$
Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. *Тогда* $z = \lim_{x_0}(f \restriction_B)$.

Доказательство. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}$: $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. □

Theorem 15 (частичное обращение теоремы о пределе сужения)**.** *Если* $B = \overset{\circ}{W}_\delta (x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \restriction_B = z$, *то* $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Доказательство. $\forall U(z)\ \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : f \restriction_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.
$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0. □

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 16 (Предельный переход в неравенстве)**.** $f, g : A \to \mathbb{R},\ x \in A'$. *Предположим, что существуют пределы у* f, g *в точке* x_0 *равные соответственно* a, b. *Пусть* $a < b$.
Тогда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V} (x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Доказательство. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b. Так как a, b - предельные,

$$\begin{array}{l} \exists \overset{\circ}{V}_1 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2 (x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{array}.$$

Возьмем $\overset{\circ}{V} (x) = \overset{\circ}{V}_1 (x) \cap \overset{\circ}{V}_2 (x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. □

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 17 (Принцип двух полицейских)**.** $f, g, k : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A$
Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \forall x \in A$. *Тогда* $\lim_{x_0} g = b$.

Доказательство. Рассмотрим $\overset{\circ}{U} (b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2: \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{array}\right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$$

□

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 18 (Предел линейной комбинайии)**.** $f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x_0} h = \alpha a + \beta b$

Доказательство.

$$\begin{gathered} |\alpha f(x) = \beta g(x) - \alpha a - \beta b| = \\ = |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leqslant \\ \leqslant |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{gathered}.$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \to 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ \exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{array}.$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$:

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leqslant |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A'$
Предположим, что $\lim_{x_0} f = 0$ *и* $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leqslant c \forall x \in A$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

Доказательство. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f:

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$. □

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$
Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$.

Доказательство.

$$\begin{gathered} |f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leqslant \\ \leqslant |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{gathered}$$

$|g(x)| \leqslant c$ в некоторой проколотой окрестности x_0, а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0. Тогда можем применить утверждение **??**:

$$\left. \begin{array}{l} |g(x)||f(x) - a| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ их сумма стремится к нулю при } x \to x_0.$$

□

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R},\ f, g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A',\ \lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b,\ b \neq 0$
Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Доказательство.

Lemma. *В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окресности* $\overset{\circ}{V}(x_0)$. *То есть* $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geqslant c$

Доказательство. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) = b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leqslant |g(x) - b| \leqslant \frac{|b|}{2} \Longrightarrow \frac{|b|}{2} \leqslant |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{array}{c} |\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}| = \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{c|b|}|(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|b|c}|g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a||g(x)| \longrightarrow 0 \end{array}.$$

□

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} q^j = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \in \mathbb{R}$.

Statement. *Если $|q| < 1$, то $f(x)$ имеет предел, иначе не имеет предела.*

Доказательство.

$|q| < 1$

Lemma.

$$q^{n+1} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow |q|^n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. *Доказательство.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geqslant 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leqslant |q|^n \leqslant \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0\ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$.

□

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \longrightarrow \frac{1}{1 - q}$.

2. $q = -1$
$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$
$$\lim f(n) = \lim \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$
Эта функция не имеет предела.

5. $q < 1$
$$|f(n)| = |\frac{q^n - 1}{q - 1}| \geqslant \frac{1}{|q - 1|}(|q|^n - 1).$$
Эта функция тоже не имеет предела.

□

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 24. $f : A \to \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$
f – (строго) возрастающая, если
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \ (f(x_1) < f(x_2)).$$
f – (строго) убывающая, если
$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2)).$$
f – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 19 (о пределе монотонной функции)**.** *$f : A \to \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на $A, x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

Доказательство. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leqslant M \ \forall x \in A$.
$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.
$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$
Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \leqslant b$
Note. Доказали, что
$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$
Аналогично, если f убывает и ограничена снизу
$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$
□

2.1.13 Предел композиции

Def 25. $f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}, f(A) \subset B$. Тогда задана функция композиции $h = g \circ h$.

Theorem 20. *Пусть* $b = \lim_{x\to x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y\to b} g(y) = d$. *Тогда* $\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = d$, *если хотя бы одно условие выполнено:*

1. $f(x) \neq b, \quad x \neq x_0$
2. $b \in B, g$ *- непрерывна в точке* $b : d = g(b)$

Доказательство. Пусть U окрестность точки d ; $\exists V(b)$:

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W} (x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \to f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) inU$. Пусть выполнено второе условие. Либо $f(x) \neq b$, тогда $g(f(x)) \in U$, либо $f(x) = b$, тогда $g(f(x)) = d \in U$ □

2.2 Критерий Коши

2.2.1 Критерий Коши

Theorem 21 (Критерий Коши)**.** $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R},\ x_0 \in A'$. x *- либо число, либо* $\pm\infty$.
Функция f *имеет предел в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \to a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \overset{\circ}{V} (x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow\ \forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$.

Lemma. *Если выполнено условие Коши, то* f *ограничено вблизи* x_0.

Доказательство. Применим условие : зафиксируем какую-то точку y из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности x_0 выполнено $f(y) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(y) + \varepsilon$, то есть $f(x)$ ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности, f - ограничена.

Def 26. Пусть $g : B \to \mathbb{R}$ ограничена на $B, E \subset B$. Колебание f на E - это $\sup_{x\in E} g(x) - \inf_{x\in E} g(x) = osc_E(g)$

Если $\forall x, y \in E$ $|g(x)-g(y)| \leqslant \rho \Rightarrow osc_E(g) \leqslant \rho$: $\forall$ $x, y \in E$ $-\rho < g(x)-g(y) \leqslant g \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)+\rho \Rightarrow \sup_E g \leqslant g(y)+\rho, \sup_E g-\rho \leqslant g(y)$ $\forall$ $y \in E \Rightarrow \sup_E g-\rho$ - нижняя граница, $\inf_E g \geqslant \sup_E g-\rho$.

$/sup - inf \leqslant sup - (sup - \rho) = \rho$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$osc_B(f) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что $|f(x)-f(y)| \leqslant \rho$ $\forall$ $x, y \in B \Rightarrow osc_B(f) \leqslant \rho$. Пусть $d = osc_B(f)$; $x, y \in B$

$$m = \inf_{z\in B} f(z) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{z\in B} f(x) = M$$

$$\inf_{z\in B} f(z) \leqslant f(y) \leqslant \sup_{z\in B} f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant M-m = osc_B(f) = d$$

d - верхняя граница для множества чисел $|f(x)-f(y)|$, доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо. □

f удовлетворяет условию Коши в $x_0 : \forall\varepsilon > 0$ $\exists$ $\overset{\circ}{V}(x_0) :$ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $\forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A$. По лемме f ограничена.

Заведем вспомогательную функцию $g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$ - предельная точка для g, g ограничена на A. $\overset{\circ}{V}(x_0); m = m_{\overset{\circ}{V}} = m_{\overset{\circ}{V},g} = \inf_{x\in\overset{\circ}{V}\cap A} g(x); M = \sup_{x\in\overset{\circ}{V}\cap A} g(x)$. Всегда $m \leqslant M$, заведем еще $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\overset{\circ}{V}}$ - множество inf по всем проколотым окрестностям, аналогично заведем множество sup.

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$ образует щель. Если $\overset{\circ}{W} \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow m_{\overset{\circ}{W}} \geqslant m_{\overset{\circ}{V}}; M_{\overset{\circ}{W}} \leqslant M_{\overset{\circ}{V}}$. Пусть $a \in \Gamma, b \in \Delta$, $\exists$ $\overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{W}$: $a = m_{\overset{\circ}{V}}, b = M_{\overset{\circ}{W}}$. Пусть $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{W}$; $a \leqslant M_{\overset{\circ}{V}} \leqslant b$. Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей f это щель. $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$ узкая щель. $\varepsilon > 0$; $\exists$ $\overset{\circ}{V}$: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $\forall x, y \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow M_{\overset{\circ}{V},f} - m_{\overset{\circ}{V},f} \leqslant \varepsilon$, то есть там только одно число c.

$\forall$ $\overset{\circ}{V}(x_0)$ $m_{\overset{\circ}{V},f} \leqslant c \leqslant M_{\overset{\circ}{V},f}.x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow m_{\overset{\circ}{V},f} \leqslant f(x) \leqslant M_{\overset{\circ}{V},f} \Rightarrow |f(x)-c| \leqslant |M-m| \leqslant \varepsilon$.

$\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\overset{\circ}{V}(x_0) : osc_{\overset{\circ}{V}\cap A}(f-c) \leqslant \varepsilon$. □

2.3 Ряды

2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

Def 27. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ряд – символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – последовательность $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\quad S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \text{ - } \textit{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 22 (Лейбниц)**.** *Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательность $0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \dots$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.*

Доказательство.

$\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{array}{l} S_k = a_1, +a_2 + \ldots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots a_{2^n}) \end{array}.$$

Заменим в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leqslant a_2 \leqslant 2a_4 + 4a_8 + \ldots 2^{n-1} a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \ldots 2^n a_{2^n} \leqslant 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

$\Leftarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T. Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^n} + \ldots a_{2^{n+1}-1} \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots 2^n a_{2^n} \leqslant a_1 + T.$$

□

Theorem 23. *Пусть $s > 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$.*

2.4 Верхние и нижние пределы

2.4.1 Определение и свойства

Def 28. $f : A \to \mathbb{R}$

$$a = \overline{\lim_{x \to x_0}} = \lim_{x \to x_0} \sup f(x)$$

$$b = \underline{\lim_{x \to x_0}} = \lim_{x \to x_0} \inf f(x).$$

Число a называется верхним пределом f в точке x_0.
Число b называется нижним пределом f в точке x_0.

Property. *1.* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geqslant 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geqslant 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. *Сумма двух функций* $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0}(f+g) \leqslant \overline{\lim}_{x_0} f + \overline{\lim}_{x_0} g.$$

Рассмотрим $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f+g) \leqslant M_{\overset{\circ}{V}} \leqslant M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g).$$

Тогда

$$\overline{\lim_{x_0}}(f+g) \leqslant M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim_{x_0}}(f,g) \leqslant M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

Theorem 24 (Теорема об описании верхнего предела)**.** *Пусть f - ограниченная функция на множестве A. $x_0 \in A$. Число a является верхним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть 1 и 2 выполнены. $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$.
Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и найдем для него $\overset{\circ}{V}$.

$$\overline{\lim_{x_0}} f \leqslant M_{\overset{\circ}{V}} \leqslant a + \varepsilon.$$

Тогда $\overline{\lim}_{x_0} \leqslant a$.

$$\forall \overset{\circ}{U}\colon M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim_{x_0}} f \geqslant a + \varepsilon.$$

Так как ε любое, $\overline{\lim}_{x_0} f \geqslant a$

Теперь в обратную сторону. Пусть $a = \overline{\lim}_{x_0} f$.

$$a = \overline{\lim_{x_0}} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}\colon a \leqslant M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Рассмотрим произвольную проколотую окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0.

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

□

Theorem 25 (Теорема об описании нижнего предела)**.** *Пусть f - ограниченная функция на множестве A. $x_0 \in A$. Число b является нижним пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0):$
$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \overset{\circ}{U}(x_0):$
$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично □

2.5 Последовательности

2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Def 29. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует конечный предел $\lim_\infty x_n$.

Statement. *Пусть $\{x_n\}$ - последовательность, $b \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N}$ - *конечное* $: \forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$

Доказательство. Запишем определение того, что $\lim_\infty x_n = b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \tag{2.1}$$

$1 \Rightarrow 2$. Пусть **??** верно. Возьмем $A = \{1, \dots N\}$ - конечно. Следовательно, верно 2.
$2 \Rightarrow 1$. Возьмем $N = \max\{A\}$, получим 1. □

Def 30. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция. $y_n = x_{\varphi(n)}$ – перестановка $\{x_n\}$.

Corollary. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

Def 31. Пусть $\{n_k\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. $\{y_k\} : y_k = y_{n_k}$ - подпоследовательность $\{x_n\}$

Statement. *Если $\{x_n\}$ сходится к b, то любая подпоследовательность тоже сходится к b.*

Доказательство. Аналогично **??**. □

2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

Lemma. $x \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. x_0 *- предельная точка для* X.
2. $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x_0 : x_n \in X, x_n \neq x_0$. *Более того* $\{x_n\}$ *можно выбрать такБ что* $x_k \neq x_j, \quad i \neq j$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. Возьмем любую проколотую окрестность точки x_0. Хотим: $\overset{\circ}{V} \cap X \neq 0$.

$$\overset{\circ}{V} = (x-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x+\varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$. Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. По принципу двух полицейских $|x_n - x_0| \to 0$. Теперь сделаем все неравными: $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$, дальше возьмем $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$ и скажем, что $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X_1, x_2 \neq x_1$ и так далее, $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \ldots |x_0 - x_{n-1}|, x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$ □

Theorem 26 (Вторая форма теоремы о компактности)**.** *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\exists M : |x_n| \leqslant M, \quad \forall n$. Разберем два случая:

1. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.
2. A - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для A. Тогда по лемме **??** существует $\{a_k\} \in A, a_k \to b, a_k \neq a_l, k \neq l$.

   Тогда $\forall k \exists ! n_k : a_k = x_{n_k}$, где номера n_k попарно различны, но не упорядочены. То есть $\{x_{n_k}\}$ - перестановка $\{x_n\}$, а значит тоже сходится.

□

2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

Theorem 27. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$
2. $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \to x_0 \ f(a_n) \to a$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Берем последовательность $a_n \in A, a_n \neq x_0$. Надо $f(a_n) \to b$.

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда
$$\exists N : a_n \in V \ \forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} \ (a_n \neq x_0).$$
Получаем
$$|f(a_n) - b| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$. От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что $x_0 \in \mathbb{R}$.
$$\neg "a = \lim_{x_0} f" : \exists \varepsilon > 0 \forall \beta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x = x_0, x \in A, \quad |f(x) - a| \geqslant \varepsilon.$$
Возьмем
$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, \in A.$$
Получаем, что $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon$. С другой стороны, по принципу двух полицейских:
$$0 \leqslant |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Longrightarrow x_n \to x_0.$$
Противоречие.

Случай $x_0 = \infty$.
$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geqslant \varepsilon$$
Возьмем $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon \Rightarrow x_n \to \infty$. □

2.6 Бесконечные пределы

2.6.1 Бесконечные пределы

Def 32. $f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$. Говорят, что f имеет предел $+\infty(-\infty)$ в точке x_0, если: $\forall U(\pm\infty)$ существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

На языке неравенств: $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Def 33. Говорят, что f стремиться к бесконечности в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. То есть $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$.

Statement. *Пусть $f(x) \neq 0$ в проколотой окрестности x_0. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f - стремиться к бесконечности в точке x_0*
2. *$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ (тогда дополнительное условие **??** можно не накладывать).
$$\varepsilon > 0 M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ (здесь условие **??** необходимо). $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$. Тогда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 :
$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Longleftrightarrow |f(x)| > M.$$
□

2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

2.7.1 O и o. Соотношения транзитивности

Def 34. $f : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$.
f называется бесконечно малой в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.
f называется бесконечно большой в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Def 35. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что g доминирует функцию f вблизи x_0 и пишут $f = O(g)$ $(x \to x_0)$, если $\exists \overset{\circ}{U} (x_0), \exists C : |f(x)| \leqslant C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$.

Def 36. Функции f, g называются сравнимым вблизи x_0, если $f = O(g) \wedge g = O(f)$. Обозначение: $f \asymp g$.

Property. $f = O(g) \wedge g = O(h) \Longrightarrow f = O(h)$

Доказательство.

$$\exists \overset{\circ}{U} (x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leqslant c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$$

$$\exists \overset{\circ}{V} (x_0), \exists c_1 : |g(x)| \leqslant c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$:

$$|f(x)| \leqslant c_1|g(x)| \leqslant c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leqslant c|h_(x)|.$$

□

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0, то $f(x) = O(g(x)) \Longleftrightarrow \frac{f}{g}$ - ограниченная функция.

Def 37. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что $f(x) = o(g(x))$ вблизи x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U} (x_0)$:

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

Note. Если $g(x)$ не обращается в ноль вблизи x_0, то $f(x) = o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$ - ограниченная функция.

2.7.2 Эквивалентные функции

Def 38. $f, g : A \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$. Говорят, что f, g эквивалентны вблизи x_0 , если $f - g = o(g)$, при $x \to x_0$. Обозначение: $f \sim g$.

Note. Определение асимметрично!

Lemma. *$f \sim g$, при $x \to x_0 \Longrightarrow g \sim f$ при $x \to x_0$*

Доказательство. Проверим, что $g = O(f)$ вблизи x_0 :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} (x_0) : |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$|f(x)| - |g(x)| \leqslant \frac{1}{2}|g(x)|.$$

$$\frac{1}{2}|g(x)| \leqslant |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

□

Note. Если $g(x) \neq 0$ вблизи x_0, $f \sim g \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

Statement. *Полезные преобразования для вычисления пределов:*

1. $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n x^n, \quad a_n \neq 0$. *При* $x \to +\infty : p(x) \sim a_n x^n$
2. $p(x) = (x - x_0)^l (b + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0$. *Тогда* $p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$
3. $f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \ldots + 1} \sim \frac{x}{n} \to 0, \quad x \to x_0$

Theorem 28. *f, g не обращаются в нуль вблизи x_0, $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$ вблизи x_0. Тогда $fg, f_1 g_1$ одновременно имеют или не имеют предел в точке x_0. Ели пределы существуют, то они равны.*

Note. Аналогичная теорема верна для $\frac{f}{g}$ и $\frac{f_1}{g_1}$

Доказательство.

$$fg = f_1 g_1 \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен1}}.$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен1}}.$$

□

Глава 3

Непрерывные функции

3.1 Непрерывность в точке

Designation. $f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$

Def 39. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если

для любой окрестности U точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(V \cap A) \subset U$.

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ \big(|x - x_0| < \delta \quad x \in A \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big). \tag{3.1}$$

Note. Если $x_0 \in A'$, то условие **??** эквивалентно тому, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note. Если точка x_0 является изолированной для A, то f непрерывна в x_0.

3.2 Свойства непрерывных функций

3.2.1 Теорема об алгебраических операциях

Theorem 29 (об алгебраических операциях с непрерывными функциями)**.** *Пусть* $f : A \to \mathbb{R},\ g : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- *Если* f *и* g *непрерывны в точке* x_0*, то* $\alpha g + \beta f$ *непрерывна в точке* x_0*.*
- *Если* f *и* g *непрерывны в точке* x_0 *и* $g(x_0) \neq 0$*, то* $\frac{g}{f}$ *непрерывна в точке* x_0*.*

Доказательство. Если x_0 — изолированная, утверждение верно, иначе повторяем доказательства свойств пределов в точке. □

3.2.2 Теорема о композиции

Theorem 30 (о композиции)**.** $f : A \to \mathbb{R},\ g : B \to \mathbb{R},\ f(A) \subseteq,\ x_0 \in A$. *Пусть* f *непрерывна в точке* x_0*,* g *непрерывна в точке* $f(x_0) = y_0$*. Тогда* $g \circ f$ *непрерывна в точке* x_0*.*

Доказательство. Обозначим $z_0 = g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$. Пусть U — окрестность точки z_0. Тогда

$$\exists \text{ окрестность } V \ni y_0 : g(V \cap B) \subset U.$$

Так как f непрерывна в точке x_0:

$$\exists \text{ окрестность } W \ni x_0 : f(W \cap A) \subset V.$$

Тогда

$$(g \circ f)(W \cap A) \subset g(U \cap B).$$

□

3.2.3 Теорема о пределе последовательности

Theorem 31. $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R},\ x_0 \in A$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. f *непрерывна в точке* x_0
2. $\forall$ *последовательности* $\{x_n\} \in A,\ x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$

Доказательство.

$\boxed{1 \implies 2}$
Пусть W — окрестность точки $f(x_0)$. Так как f непрерывна,

$$\exists \text{ окрестность } V \ni x_0 : f(x) \in W \quad \forall x \in V \cap A.$$

Так как $x_n \to x_0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n \in V \implies f(x_n) \in W.$$

$\boxed{2 \implies 1}$
Пусть f не непрерывна в точке x_0, есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta_n = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \to x_0.$$

Из этого следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$. Противоречие.

□

3.3 Непрерывность на множестве

Def 40. Говорят, что функция f, заданная на множестве A, **непрерывна на некотором подмножестве** $A_1 \subset A$, если она непрерывна в каждой точке множества A_1.

3.3.1 Теоремы Вейерштрасса

Theorem 32 (Первая теорема Вейершрасса)**.** *Пусть f задана и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве A. Тогда функция f ограничена на A.*

Доказательство. От противного. Пусть f не ограничена на A. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n.$$

$\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \to x$. Так как A замкнуто, $x \in A$. Следовательно, $f(x_n) \to f(x)$. Противоречие. □

Theorem 33 (Вторая теорема Вейерштрасса)**.** *$f : A \to \mathbb{R}$ — непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве A функция. Если существуют конечные*

$$M = \sup_{x\in A} f(x), \quad m = \inf_{x\in A} f(x),$$

то

$$\exists y, z \in A : f(y) = M, \quad f(z) = m.$$

Доказательство.

- Для M:

  $$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A : M \geqslant f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

  По теореме о компактности существует подпоследовательность $x_{n_j} \to x$. Так как A замкнуто, $x \in A$.

  $$f(x_{n_j}) \to f(x) \wedge f(x_{n_j}) \to M \Longrightarrow M = f(x).$$

  Значит, M достигается.

- Для m: совершенно аналогично.

□

3.3.2 Теорема о промежуточном значении

Designation. «u между r и s» $:= \begin{cases} u \in [r,s] & r \leqslant s \\ u \in [s,r] & r > s \end{cases}$

Theorem 34 (о промежуточном значении)**.** *Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle\alpha,\beta\rangle$. Пусть $a, b \in \langle\alpha,\beta\rangle$, v находится между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда существует x между a и b такой, что $f(x) = v$.*

Доказательство. Если $a = b$, утверждение очевидно. Не умаляя общности, предположим, что $a < b$. Будем считать, что $v \neq f(a) \wedge v \neq f(b)$.

Пусть нет точки $x_0 : f(x_0) = v$. Обозначим $I = [a,b]$. Пусть $\begin{matrix} X = \{x \in I \mid f(x) \leqslant v\} \\ Y = \{x \in I \mid f(x) \geqslant v\} \end{matrix}$. Докажем, что X и Y замкнуты.

1. X замкнуто:
   x_0 — предельная точка. Следовательно, $\exists x_n \in X : x_n \to x_0,\ (x_n \neq x_0)$. Тогда $f(x_n) \to f(x_0)$.
   $$f(x_n) \leqslant v \Longrightarrow f(x) \leqslant v.$$
2. Аналогично Y замкнуто.

Следовательно, $X \cap Y \neq \varnothing$. □

Theorem 35. *Пусть f задана и непрерывна на отрезке $\langle a, b \rangle$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *f — инъекция (то есть $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)*
2. *f — строго монотонная*

Доказательство.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Очевидно.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть f не строго монотонна. Тогда $\exists x_1 < x_2 < x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle$:

$$\left[\begin{aligned} & f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3) \\ & f(x_1) > f(x_3) \wedge f(x_2) < f(x_3) \end{aligned}\right. .$$

Тогда $\exists x_1' \neq x_2'$, но $f(x_1') = f(x_2')$. Противоречие.

□

Theorem 36. *Пусть g задана на отрезке и возрастает (убывает). Тогда g непрерывна тогда и только тогда, когда образ функции есть отрезок (возможно бесконечный).*

Statement. *Если f непрерывна, задана на отрезке и инъективна, то f^{-1} тоже задана на отрезке и непрерывна.*

3.4 Степени с рациональным показателем

$m \in \mathbb{Z},\ f(x) = x^m,\ x > 0.$
$x^0 \equiv 1, \quad x > 0.$
x^m строго возрастает, если $m > 0$
x^m строго убывает, если $m < 0$
$x^m \overset{\text{def}}{\equiv} = \frac{1}{x^{-m}}$
$f(x) = x^m$ — непрерывная функция. Обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$ — корень m-й степени из $y > 0$.

Def 41. $x > 0,\ r \in \mathbb{Q},\ r = \frac{p}{q}$
$x^r = \sqrt[q]{x^p}$ — x в рациональной степени.

Note. $x \mapsto x^r$ — непрерывное отображение.

Lemma. *Результат не зависит от представления r в виде дроби.*

Property.

1. $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$
2. $\left(x^{r_1}\right)^{r_2} = x^{r_1 r_2}$
3. $x^r \cdot y^r = (xy)^r$

3.5 Равномерная непрерывность

Def 42. $A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R}$. Говорят, что f **равномерно непрерывна** на A, если

$$\big(|x - x_0| < \delta \land x \in A\big) \implies |f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A : \big(|x - y| < \delta |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Ex. $f(x) = x,\ A = \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0\ |x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \implies f \text{ равномерно непрерывна.}$$

Ex. $f(x) = x^2,\ A \subset \mathbb{R}$

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y|C\varepsilon \implies f \text{ не равномерно непрерывно.}$$

Ex. $h(x) = \sqrt{x}$ — равномерно непрерывна.

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

3.5.1 Теорема Кантора

Theorem 37 (Кантор)**.** *Пусть A замкнутое ограниченное множество. $f : A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда f равномерно непрерывна.*

Доказательство. От противного. Пусть f не является равномерно непрерывной, то есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \delta > 0\ \exists x_1', x_2'' \in A : |x_1' - x_2''| < \delta \land |f(x_1') - f(x_2'')| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$.

$$\exists x_n', x_n'' \in A : |x_n' - x_n''| < \delta \land |f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon.$$

Получили две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$. Обе замкнуты и ограничены, тогда по теореме о компактности $\exists x_{n_j}' \to x_0 \in A$.

$$x_{n_j}'' = x_{n_j}' + (x_{n_j}'' - x_{n_j}') \to x_0 + 0.$$

Посмотрим на значения в точках последовательностей:

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon.$$

Но каждое из значений стремится к $f(x_0)$, значит разность должна стремиться к нулю. Противоречие. □

Глава 4

Дифференцирование

4.1 Определения

Designation. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ x_0, x \in \langle a, b\rangle$

Def 43. Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0),$$

где $l(t) = kt,\ k \in \mathbb{R}$ — дифференциал f в точке x_0 (также обозначается $d_{f_{x_0}}(t)$ или $df(x_0, t)$).

Другая запись:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0).$$

Def 44. Если f дифференцируема в точке x_0, **производная** f в точке x_0 определяется так:

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Property.

1. *Если f дифференцируема в точке x_0, то k единственное.*
2. *Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.*
3. *f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k,\ df_{x_0}(t) = kt.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + f(x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o_{x\to x_0}(x - x_0)}{x - x_0} \to k.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) = f(x_0)}{x - x_0} = k \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + O(1),\ x \to x_0.$$

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o_{x \to x_0}(1)(x - x_0) = \\ = k(x - x_0) + o_{x \to x_0}(x - x_0)$$

□

4. *f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует β, заданная в окрестности $V \ni x$:*

   (a) β непрерывна в точке x_0

   (b) $f(x) - f(x_0) = \beta(x) \cdot (x - x_0) \qquad \forall x \in V$

   Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$

$$\beta(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ \lim_{y \to x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} & x = x_0 \end{array} \right.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\beta(x) = \beta(x_0) + o_{x \to x_0}(1)$ Подставим

$$f(x) - \underbrace{\beta(x_0)}_{k}(x - x_0) + o_{x \to x_0}(1)(x - x_0).$$

Получили определение.

□

4.2 Правила дифференцирования

0. Никогда не дифференцируй при людях!

1. $f(x) = ax + b$ дифференцируема и $\forall x_0 : f'(x_0) = a$

2. Если f, g дифференцируемы в точке x_0, $f \cdot g$ тоже дифференцируема в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Если f, g дифференцируемы в x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в x_0 и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Если $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle c, d \rangle$, $x_0 \in \langle c, d \rangle$, $g(x_0) \in \langle a, b \rangle$ и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, g дифференцируема в точке x_0, то $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

6. Производная обратной функции. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна. Пусть $x_0 \in (a, b)$, $\exists f'(x_0) \neq 0$, обозначим $g = f^{-1}$ — обратное отображение, $y_0 = f(x_0)$. Тогда g дифференцируема в точке y_0 и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. $m \in \mathbb{N},\ g(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Если $x_0 > 0$, то g дифференцируема в точке x_0 и

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}.$$

8. $x_0 > 0,\ \alpha = \frac{l}{k} > 0$. $\varphi(x) = x^\alpha = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^l$. Тогда φ дифференцируема в точке x_0 и

$$\varphi'(x) = l\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{l}{k} x^{\frac{l}{k}-1}.$$

   Аналогично для $\alpha < 0$.

9. Тайная таблице еще не пройденных функций:

Функция	Производная
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\ln x$

4.3 Производная возрастающей функции

Def 45. Пусть $f : I = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \in \langle a, b\rangle$. Говорят, что f **возрастает в точке** x_0, если $\exists$ окрестность $U \ni x_0$:

$$\begin{cases} f(y) \leqslant f(x_0) & y \in U \cap I \land y \leqslant x_0 \\ f(y) \geqslant f(x_0) & y \in U \cap I \land y \geqslant x_0 \end{cases}$$

Note. Аналогично можно дать определение убывания в точке и строгие формы, заменив знаки на строгие.

Theorem 38. *Пусть в условии определения f возрастает в точке x_0.*

1. *Если $\exists f'(x),\ f'(x_0) \geqslant 0$*
2. *Пусть $\exists f'(x_0) > 0$, тогда f строго возрастает в точке x_0*

Доказательство.

1. $$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geqslant 0\ \forall x \geqslant x_0} \to f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) \geqslant 0.$$

2. $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\gamma(x)}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \big(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\gamma(x)| \leqslant \varepsilon |x - x_0|.$$

   $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Разберем пару случаев:

(a) $x > x_0$.
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x) \geqslant (f(x) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

(b) $x < x_0$.
$$f(x) - f(x_0) \leqslant f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) > 0.$$

□

Def 46. $I = (\alpha, \beta),\ x \in I$. Говорят, что f имеет **монотонный максимум**, если
$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geqslant f(y) \quad \forall y \in I \wedge |x_0 - y| < \delta.$$

Note. Аналогично можно определить локальный минимум и строгие формы, заменив нестрогий знак на строгий.

Note. Локальный максимум и минимум — локальные экстремумы.

Theorem 39. *$x_0 \in (\alpha, \beta)$ — точка локального экстремума для $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_0 локальный максимум. Тогда $f\restriction_{(\alpha, x_0]}$ — возрастает в точке $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) \geqslant 0$. Также $f\restriction_{[x_0, \beta)}$ — убывает в точке $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) \leqslant 0$.

Для других случаев полностью аналогично. □

4.4 Формулы Коши и Лагранжа

Theorem 40 (Ролль)**.** *$I = [a, b],\ a \neq b,\ f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a, b).*

Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса №2 **??** $\exists x, y \in [a, b] : \begin{cases} f(x) = \min_{t \in [a,b]} f(t) \\ f(y) = \max_{t \in [a,b]} g(t) \end{cases}$ Если $x, y \in a, b$, то $f \equiv const$ и $f'(a) = 0$. Иначе либо $x \in (a, b)$, либо $y \in (a, b)$. Тогда в ней производная и равна нулю по прошлой теореме **??**. □

Corollary (Формула Коши)**.** Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогда $\exists c \in (a, b)$:
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Corollary (Формула Лагранжа)**.** Если f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b)$:
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Note. Если h дифференцируема на (a, b) непрерывна на $[a, b]$, при этом $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f инъективна на $[a.b]$.

Corollary. В условии замечания производная h' сохраняет знак.

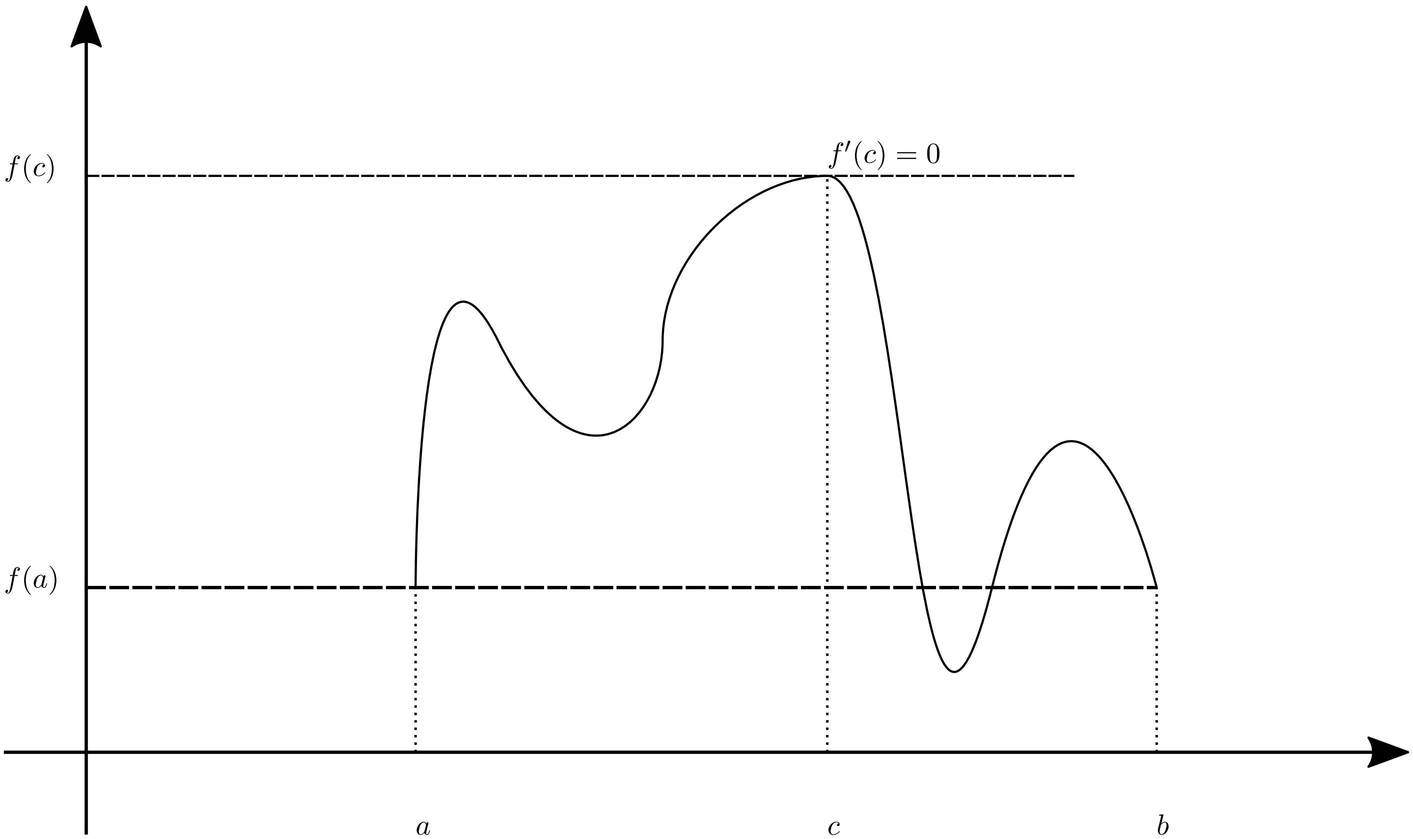

Рис. 4.1: Теорема Ролля

Следствия из формулы Лагранжа

Designation. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на (a, b)

1. $f \equiv const$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

2. Связь знака производной и монотонности.

   Theorem 41.

   (a) *Если f возрастает (убывает) на $[a, b]$, то $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$.*

   (b) *Если $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$, то f возрастает (убывает).*

   (c) *Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\quad \forall x \in (a, b)$, то f строго возрастает (убывает).*

   Statement. *Если $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f строго монотонна.*

3. $f'(x_1) = u,\ f'(x_2) = v$, w лежит между u и v. Тогда $\exists y$ между $x_1, x_2 : f'(y) = w$.

Theorem 42. *Если f дифференцируема на (a, b), непрерывна в точке a и $\exists \lim_{y \to a} f'(y) = d$, то f дифференцируема в точке a и $f'(a) = d$.*

Доказательство.
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \big(0 < |y-a| < \delta \Longrightarrow |f'(y) - d| < \varepsilon\big).$$
Если $x > a$, по формуле Лагранжа
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c), \qquad c \in (a, x).$$
Пусть $|x-a| < \delta$, тогда $|c-a| < \delta$, следовательно,
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - d\right| < \varepsilon.$$
□

4.5 Правило Лопиталя

Theorem 43 (Привило Лопиталя)**.** *f, g заданы и непрерывны на $[a, b]$, $f(a) = g(a) = 0$, f, g дифференцируемы на (a, b), $g'(y) \neq 0 \quad \forall y \in (a, b)$, $\exists \lim_{y\to a+0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = d$. Тогда*
$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

Доказательство. Рассмотрим $x > u > a$.
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \qquad y \in (a, x).$$
$$\forall\varepsilon\ \exists\delta : \left(|y-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - d\right| < \varepsilon\right).$$
Если $|x-a| < \delta$, то $|y-a| < \delta$.
$$\left|\frac{f(u)-f(x)}{g(a)-g(x)} - d\right| < \varepsilon \overset{u\to a}{\Longrightarrow} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - d\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при } |x-a| < \delta.$$
□

Theorem 44 (Вариант правила Лопиталя)**.** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. *Если $\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$, то*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

Доказательство. $x, u \in (a, a+\delta)$, $x \neq u$. $\exists y$ между x и u:
$$\frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$
$$\frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(u)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}} \tag{4.1}$$

Зафиксируем u вблизи x : $\left|\frac{g(u)}{g(x)}\right| < 1$. Тогда модуль правой части в уравнении **??** не более ε. Воспользуемся тем, что $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = d$:

$$d - \varepsilon \leqslant \left|\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{1 - \frac{g(u)}{g(x)}}\right|.$$

Домножим на знаменатель:

$$(d-\varepsilon)(1 - \frac{g(u)}{g(x)}) \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)} \leqslant (d+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(u)}{g(u)}\right).$$

x близок к a:

$$\varlimsup_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant d + \varepsilon$$
$$\varliminf_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant d - \varepsilon$$

Statement. *Если* $v(x) < w(x)$, *то* $\varlimsup_{x\to a+} v(x) \geqslant \varliminf_{x\to a+} w(x)$ *и* $\varliminf_{x\to a+} v(x) \leqslant \varlimsup_{x\to a+} w(x)$.

Применим утверждение.

$$\varlimsup_{x\to a} v(x) = \inf_{\delta>0}\sup_{|x-a|<\delta} \leqslant \lim_{x\to a} v(x).$$

$$\varliminf x \to av(x) = \sup_{\delta>0}\inf_{|x-a|<\delta} \leqslant \lim_{x\to a} v(x).$$

Значит

$$d + \varepsilon \geqslant \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant d - \varepsilon.$$

□

4.6 Старшие производные

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x\to a}(x-a).$$

Рассмотрим множество $A = \{x \mid f'(x) \text{ существует}\}$ Тогда можно смотреть на f' как на функцию, заданную на A.

Def 47. Если f' определена в точке $x \in A$, то $(f')'(x) = f''(x)$ — вторая производная в точке x.
$f^{(n)}(x)$ — n-я производная в функции f.

$$f^{(n+1)} \equiv (f^{(n)})', \text{ если такая существует.}$$

4.6.1 Полином с заданными производными

Def 48. $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ — полином степени не выше n.

Его можно разложить по степеням $x - x_0, x_0 \in \mathbb{R}$: $p = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$, где b_i — некоторые другие коэффициенты.

Как вычислить коэффициенты b_j, зная p? Нулевой – $p(x_0)$, дальше можно взять производную и посчитать следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} b_0 &= p(x_0) \\ b_1 &= p'(x_0) \\ b_2 &= \frac{1}{2!}p''(x_0) \\ b_3 &= \frac{1}{3!}p^{(3)}(x_0) \\ &\vdots \\ b_n &= \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Ex. Отсюда можно просто вывести формулу Бинома Ньютона: $q(x) = (x-a)^n$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^j(0)}{j!}x^j.$$

Одно слагаемое будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{q^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-j+1) \cdot a^{n-j}}{j!} = \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!}(-1)^{n-j}a^{n-j} \end{aligned}.$$

4.6.2 Полином Тейлора

Def 49. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Пусть p — полином степени не выше n. Говорят, что он есть **полином Тейлора** для f порядка n в точке x_0, если

$$f(x) - p(x) \leqslant o_{x \to x_0}\Big((x - x_n)^n\Big).$$

Ex. $n = 0$.

$$f(x) - c = o_{x \to x_0}(1) \iff f(x) \overset{x \to x_0}{\to} c.$$

Существует тогда и только тогда, когда действительно есть предел в точке x_0.

Ex. $n = 1$

$$p(x) = a + b(x - x_0).$$

$$f(x) = a + b(x-x_0) + o_{x \to x_0}(x - x_0) \iff b = f'(x_0), \text{ если } f'(x_0) \text{ существует}.$$

Theorem 45. *Если полином Тейлора порядка n существует для f в точке x_0, то он единственный.*

Доказательство. Пусть p, q — два различных полинома Тейлора. Тогда $p(x) - q(x) = o_{x\to x_0}(x-x_0)^n$.

$$p(x) - p(y) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_n)^n.$$

Докажем, что $c_j = 0\ \forall j$. Пусть $k = \min\{j \mid c_j \neq 0\}$.

$$r(x) = c_k(x-x_0)^k + \ldots + c_n(x-x_0)^n = o_{x\to x_0}(x-x_0)^n.$$

По определению

$$c_k(x-x_0)^k + c_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \ldots + c_n(x-x_0)^n < \varepsilon(x-x_0)^n.$$

$$c_k + c_{k+1}(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^{n-k} < \varepsilon(x-x_0)^{n-k} \qquad x \to x_0 \Longrightarrow c_k \to 0.$$

Противоречие. Значит все коэффициенты равны нулю. □

4.7 Формула Тейлора

4.7.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Theorem 46 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)**.** *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет $n-1$ производную и $x_0 \in (a,b)$, $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

является полиномом Тейлора функции f в точке x_0.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + o_{x\to x_0}(x-x_0)^n.$$

Доказательство.

Lemma. *Пусть g — дифференцируемая $n-1$ раз на (a,b) и n раз в точке $x_0 \in (a,b)$ функция.*

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда

$$g(x) = o_{x\to x_0}(x-x_0)^n.$$

Доказательство. Индукция. База $n = 1$. Действительно, $g(x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = o(1)$.

Переход $(n \to n+1)$. По теореме Лагранжа

$$g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x-x_0), \quad \xi \in (x, x_0).$$

По предположению индукции $g'(y) = o_{y\to x_0}(y-x_0)^n$. Это равносильно тому, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \big(|y-x_0| < \delta \Longrightarrow |g'(y)| \leqslant \varepsilon|y-x_0|^n\big).$$

Выберем x: $|x-x_0| < \delta$. Тогда

$$|\xi - x_0| < \varepsilon \Longrightarrow g'(\xi) < \varepsilon|\xi-x_0|^n \leqslant \varepsilon|x-x_0|^n.$$

$$|g(x)| \leqslant |x-x_0| \cdot \varepsilon|x-x_0|^n = \varepsilon|x-x_0|^{n+1}, \qquad |x-x_0| < \delta.$$

□

Доказав лемму, мы доказали и теорему. □

4.7.2 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Theorem 47 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**.** *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет n производных на (a,b) и $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ непрерывны на (a,b). Пусть $x, x_0 \in (a,b)$ и $f^{(n+1)}(y)$ существует на открытом интервале между x и x_0. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \xi \text{ между } x \text{ и } x_0.$$

Доказательство.

Lemma. *Пусть g — дифференцируемая $n-1$ раз на (a,b) и n раз в точке $x_0 \in (a,b)$ функция.*

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда $\exists \xi$ между x и x_0:

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Индукция. База: $n = 0$. По формуле Лагранжа

$$\exists \xi \in (a,b) : g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0} = g'(\xi)(x-x_0).$$

Переход: $n-1 \to n$. Рассмотрим $h(t) = (t-x_0)^{n+1}, \quad t \in (a,b)$.

$$\begin{aligned} \frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} &= \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}, \quad \text{при некотором } \xi \text{ между } x, x_0 \\ \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi-x_0)^n} \end{aligned}.$$

g' удовлетворяет условию леммы для $n-1$. Тогда по предположению индукции

$$g'(\xi) = \frac{(g')^{(n)}(\eta)(\xi-x_0)^n}{n!}, \quad \eta \text{ между } \xi, x_0.$$

Тогда

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi-x_0)^n} = \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

□

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

По лемме $\exists \xi$ между x и x_0:

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \underbrace{\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{g(x)}.$$

□

4.8 Достаточное условие экстремума

Theorem 48. *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$, $\exists f''(x_0)$. Тогда*

- *если $f''(x_0) > 0$, то f имеет локальный минимум в точке x_0*
- *если $f''(x_0) < 0$, то f имеет локальный максимум в точке x_0.*

Note. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, можно сказать, что f имеет локальный экстремум в точке x_0.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x)(x-x_0)}_{\text{нет нулевых}} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \underbrace{o_{x\to x_0}(x-x_0)^2}_{\alpha(x)}.$$

Пусть $f''(x_0) < 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\alpha(x)| \leqslant \varepsilon |x-x_0|^2\right).$$

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \varepsilon(x-x_0)^2 =$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}f''(x_0) + \varepsilon\right)}_{t}(x-x_0)^2$$

Если взять $\varepsilon = \left|\frac{1}{4}f''(x_0)\right|$, то t все еще менее нуля. Тогда во всех точках кроме $x_0 : f(x) < f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0)$ — максимум.

Аналогичные рассуждения для $f''(x_0) > 0$. □

4.9 Сходимость последовательностей

Designation. A — множество произвольной природы. $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций.

Def 50. Говорят, что f_n **поточечно сходится к функции** $f : A \to \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Пишут «$f_n \to f$».

Def 51. Говорят, что последовательность функций f_n **сходится равномерно к функции** f, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in A : \left(n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right).$$

Designation. Обозначается: $f_n \rightrightarrows f$.

Theorem 49 (Стокс-Зайдель)**.** *$A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, f_n равномерно сходится к $f : A \to \mathbb{R}$. Если все f_n непрерывны в $x_0 \in A$, то f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Используем условие равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A : \big(n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

Зафиксируем $n_0 > N$. Тогда

$$\exists \delta : \big(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

$|x - x_0| < \delta$, следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + \\ + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \\ + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \\ < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}.$$

Получили, что f непрерывна в точке x_0. □

Theorem 50. $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists M : \big(|f_n(x)| \leqslant M \quad \forall n, x \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M\big)$
2. f *ограничена:* $|f(n)| \leqslant M \quad \forall x \Longrightarrow \exists N\ \exists A : |f_n(x)| \leqslant A \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x$

Theorem 51. $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ *на* A. *Пусть* $\exists M : \forall x \in A\ \forall n |f_n(x)| \leqslant M$. *Тогда* $f_n g_n \rightrightarrows fg$

Доказательство.

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| \leqslant |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \leqslant M|g(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|.$$

□

Theorem 52 (Критерий Коши для равномерной сходимости)**.** *Пусть* f_n *— последовательность функций на множестве* A. *Она равномерно сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j > N\ \forall x : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \tag{4.2}$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $f_n \rightrightarrows f$, $\quad \varepsilon > 0$ найдем $N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in A$.

$$\forall k, l > N \quad |(f_k(x) - f_l(x)| \leqslant |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < 2\varepsilon \forall x \in A.$$

Достаточность.

Пусть **??** выполнено. $x \in A$ - фиксировано. Тогда $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть последовательность Коши (см **??**). Следовательно,

$$\forall x\ \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x).$$

$\varepsilon > 0$. Нашли $N : |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \forall k, j > N$ Зафиксируем k, x, перейдем к пределу по j :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Что верно для $\forall x \in A, \forall k > N$.

$\square$

Ex. Функция на $\mathbb{R}$, непрерывная всюду, но не дифференцируемая на в одной точке.

$$\text{(Вейерштрасс)}: f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b^j \cos l^j \pi x, \quad |b| < 1.$$

Theorem 53 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f_n — функция на множестве A.*

$$\forall x : |f_n(x)| \leqslant a_n, \text{ где ряд } \sum a_n \text{ сходится.}$$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно.

Note. Из этой теоремы следует, что функция из примера непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдем $N : \sum\limits_{n=k+1}^{l} a_n < \varepsilon \quad \forall k, l > N$.

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^{j} f_n(x).$$

$$|S_j(x) - S_k(x)| = |f_{k+1} \ldots + f_k(x)| \leqslant |f_{k+1}(x)| + \ldots + |f_l(x)| \leqslant a_{k+1} + \ldots a_l < \varepsilon.$$

$\square$

Ex (Ван дер Варден)**.** $f_1(x) = |x|, |x| < \frac{1}{2}$; продолжим с периодом 1. $f_n = \frac{1}{4^{n-1}} f(4^{n-1}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

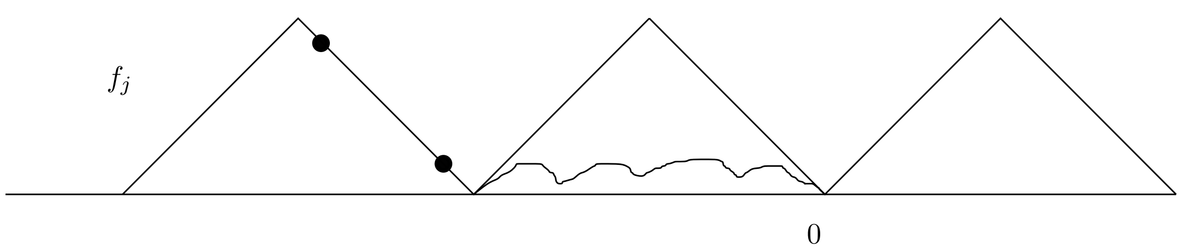

Рис. 4.2: График функции Ван дер Вардена

непрерывна, но нигде не дифференцируема, так как:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}.$$

$$h \neq 0,\ h_k = \pm\frac{1}{4^{n-1}}: \quad \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \sum_{j=1}^{\infty}(f_j(x+h_k)-f_j(x))h_k = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{f_j(x+h_k)-f_j(x)}{h_k}.$$

Будем выбирать знак в h_k $(\pm)$, чтобы во всех слагаемых значение лежал в одинаковых частях графика. Тогда при четном и нечетном j значение будет разных знаков.

Designation. Ряд из функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ сходится обозначает, что функции $S_j(x) = h_1(x)\dots h_j(x)$ сходятся в соответствующем смысле.

Ex. $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \to |x|$

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{t}{n}+|x|}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+|x|}} \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{при } |x \geqslant 1|.$$

Theorem 54. $f_n, f, g_n : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *Предположим, что* $f_n \to f$ *поточечно.* f_n *дифференцируемы и* $f_n \rightrightarrows g$ *равномерно. Тогда* f *дифференцируемая на* $\langle a,b\rangle$ *и* $f' = g$.

Доказательство. Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall eps > 0 \exists N : k,l > N \to \forall x \in \langle a,b\rangle : |f_k(x)' - f_l(x)'| < \varepsilon.$$

$$u_{k,l} - f_k(x) - f_l(x).$$

Теперь рассмотрим для $xy \in \langle a,b\rangle$:

$$\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-1} = u'k,l(c), \quad c \text{ между } x,y..$$

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : \left|\frac{u_{k,l}(x)-u_{k,l}(y)}{x-y}\right| < \varepsilon \iff \begin{array}{l}\forall x \in \langle a,b\rangle, \forall k,l > N : \\ \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f_l(x)-f_l(y)}{x-y}\rangle| < \varepsilon\right|\end{array}.$$

Фиксируем k, $l \to \infty$.

$$\left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{x-1}\right| < \varepsilon, \quad \forall x,y \in \langle a,b\rangle.$$

Оценим разность. Зафиксируем x.

$$\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \wedge x \neq y \to \left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{x-y} f_k'(x)\right| < \varepsilon.$$

Объединяем неравенства: для данных k, x:

$$|y-x| < \delta, y \neq x \to \left|f_k'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x-y| < \delta \to \left|g(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

$\square$

4.10 Первообразные

Пусть все происходит на $\langle a, b\rangle$. $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Def 52. Говорят, что f есть первообразная для g, если f дифференцируема на $\langle a, b\rangle y$ и $f' = g$ всюду.

Theorem 55 (Ньютон, Лейбниц). *Если g непрерывна, то у нее есть первообразная.*

Note. К этой теореме мы еще вернемся.

Statement. *Если $f' = g$, то $(f + c)' = g$ для любой константы c.*

Theorem 56. *Если f_1, f_2 — первообразные для g, то $f_1 - f_2 = const$*

Функция	Первообразная
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x + c,\ \alpha \neq -1$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
e^x	$e^x + c$

Designation. Пишут:

$$f = \int g \text{ или } f(x) = \int g(x)dx.$$

Statement. $\int f'(x) \cdot g' = f \circ g \pm C$

Def 53. Линейная функция — это функция вида $\varphi(h) = ch$.
Линейная форма: $\langle a, b\rangle$; Φ — отображение отрезка $\langle a, b\rangle$ в множество линейных функций.
$x \in \langle a, b\rangle$, $\Phi(x)$ — линейная функция.

$$\Phi(x)(h) = c(x)h.$$

Def 54 (дифференциал). f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$

$$df(u, h) = f'(u)h = df.$$

Ex. $x : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ — тождественная. $dx(u, h) = h$

Statement. *$\Phi = c \cdot dx$, где c - некая функция на $\langle a, b\rangle$*

$f' = g$
$df = f'dx = gdx$

Задача первообразной: дана линейная форма $\varphi = gdx$; найти функцию $f : df = \varphi$

Statement.
$$d(f\circ g) = (f'\circ g)\cdot g : dx = f'\circ gdg.$$

Ex.
$$\int \sqrt{1-x^2}dx, \quad x\in(-1,1).$$

Сделаем замену $x = \sin t$, пусть $t\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{gathered}\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos tdt = \int \cos^2(t)dt = \\ \int \tfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \tfrac{1}{2}\int((1+\cos 2t)dt = \\ \tfrac{1}{2}(t+\tfrac{1}{2}\int \cos td(2t)) = \tfrac{1}{2}(t+\tfrac{\sin 2t}{2})\end{gathered}$$

Тогда $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + \frac{\sin 2\arcsin x}{2})$

Statement (Формула интегрирования по частям)**.** $(fg)' = f'g + fg'$ *Перепишем:*
$$d(fg) = gdf + fdg.$$
$$gdf = -fdy + d(fg).$$
$$\int gdf = fg - \int fdg.$$

Ex.
$$\int \log xdx = x\log x - \int xd\log x = x\log x - \int 1dx = x\log x - x + C.$$

Ex.
$$\int e^x\sin xdx = \int \sin xde^x = \sin xe^x - \int \cos xe^x dx.$$
$$= \sin xe^x - \int xosxde^x = \sin xe^x - \cos xe^x - \int \sin xe^x dx.$$

Теперь решим уравнение и получим:
$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + c.$$

4.11 Интеграл

Def 55. A — множество произвольной природы. $\Phi : A\to\mathbb{R}$. Φ — функционал на A.

Def 56. Интеграл — функционал на множестве функций, заданных на отрезке $[a,b]$.
$f\mapsto\Phi(f)$
$$\Phi(f+g) = \Phi(f)+\Phi(g).$$
$$\Phi(\alpha f) = \alpha\Phi.$$
$$f\geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(f)\geqslant 0.$$
$$\langle c,d\rangle\subset\langle a,b\rangle, f=\Phi(\chi)\langle c,d\rangle = d-c.$$

Statement. *Каким должен быть интеграл?*

1. *Функционал, заданный на каких-то функциях сопоставляет число* ($f \mapsto I(\alpha)$)
2. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) = I(\beta)$ *(Линейность)*
3. $f \leqslant g \Longrightarrow I(f) \leqslant I(g)$
4. $\langle a, b\rangle : I(\chi_{\langle a,b\rangle}) = b - a$

Def 57. Разбиение — ступенчатая функция на отрезке $\langle a, b\rangle,\ a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle a, b\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, \beta_i\rangle, \quad \langle \alpha_i, \beta_i\rangle \cap \langle \alpha_j, \beta_j\rangle \neq \varnothing.$$

Def 58. g на $\langle a, b\rangle$ — ступенчатая, если при $i \neq j$ она постоянна на отрезках какого-то разиения нашего отрезка $\langle a, b\rangle$

Теперь можно зажать функцию между ступенчатыми. В этом состоит идея Дарбу.

4.11.1 Интеграл Дарбу

Def 59. J — конечный интервал, если его разбиение — это набор интервалов $\{J_k\}_{k=1}^{N}$, такой что J_k $capJ_s = \varnothing,\ k \neq s,\ \bigcup_{k=1}^{N} J_k = J_i$. (ДОпускаются одноточечные и пустые множества.)

Def 60. Длина интервала $\langle a, b\rangle$ — это $b - a$ Обозначается $|J| = b - a$, $|\varnothing| = 0$

Lemma. *Если* $\{J_k\}_{k=1}^{N}$ *— разбиение* J, *то* $|J| = \sum\limits_{k=1}^{N} |J_k|$

Def 61. e — множетсво, f — ограниченная функция на .

Колебание f на e :

$$esc_e(f) = \sup_{x,y\in e} |f(x) - f(y)| =$$

$$= \sup_y \left(\sup_x (f(x) - f(y))\right) = \sup_x \left(\sup_y (f(x) - f(y))\right) =$$

$$= \sup_{x\in e} f(x) + \sup_{y\in e}(-f(x) = \sup_{x\in e} f(x) - \inf_{y\in e} f(y).$$

Пока предполагаем, что f ограничена. Просуммируем отрезки $J_1, \ldots J_N$ из разбиения отрезка J.

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \inf_{x\in J_k} f(x)\underline{S}.$$

— нижняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \ldots J_N$

$$\sum_{k=1}^{N} |J_k| \sup_{x\in J_k} f(x) = \overline{S}.$$

— верхняя сумма Дарбу для f и разбиения $J_1 \ldots J_N$

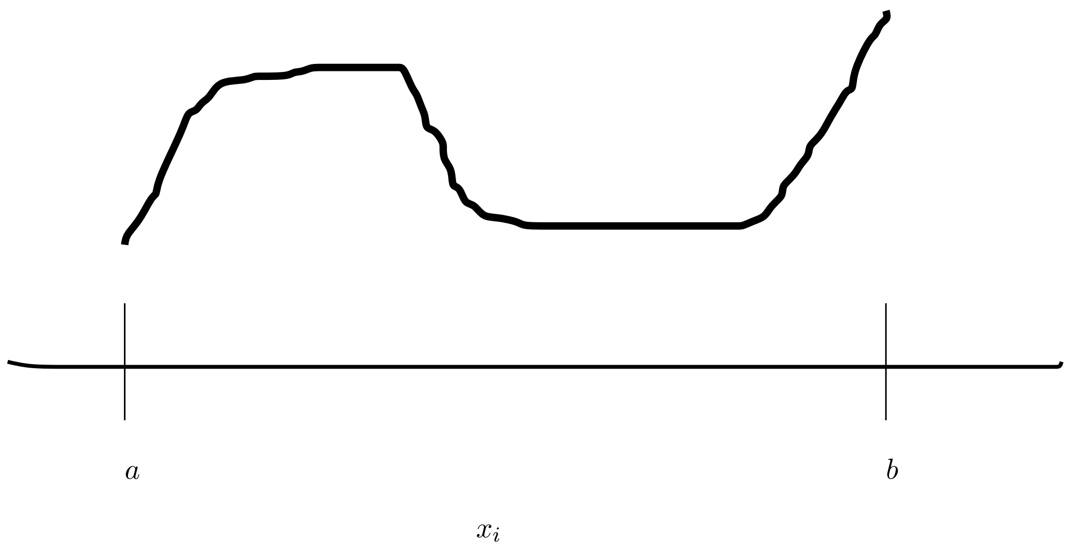

Рис. 4.3: График функции

Designation. A — множество всех нижних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

B — множество всех верхних сумм Дарбу для f по всевозможным разбиениям J_i

Statement. *Пусть* $\{A, B\}$ *— щель. Тогда*

$$\underline{I}(f) = \sup A, \quad \overline{I}(f) = \inf(B).$$

Все числа, лежащие в этой щели — это $[\underline{I}(f), \overline{I}(f)]$ *(верхний и нижний интегралы Римана-Дарбу от* f*)*

Statement. $\{A, B\}$ *— щель.*

Доказательство. ε — разбиение отрезка J_i. $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f)$, $\overline{S}_{\mathcal{E}}(f)$ — верхняя и нижняя сумма Дарбу. Очевидно, что $\underline{S}_{\mathcal{E}}(f) \leqslant \overline{S}(f)$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — разбиение $J_i : \mathcal{F}$ — измельчение $\mathcal{E}$, если $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists b \in \mathcal{E} : a < b$.

Lemma. *Если* $\mathcal{F}$ *— измельчение для* $\mathcal{E}$*, то*

$$\underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \geqslant \underline{S}_{\mathcal{E}}, \quad \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}}.$$

Lemma. *Рассмотрим* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ *— разбиения отрезка* J_i*. Тогда у них есть общее измельчение. (Можем взять пересечение всех отрезков из первого и из второго)*

Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — разбиения. $\mathcal{F}$ — общее измельчение.

$$\underline{S}_{\mathcal{E}_1}(f) \leqslant \underline{S}_{\mathcal{F}}(f) \leqslant \overline{S}_{\mathcal{F}} \leqslant \overline{S}_{\mathcal{E}_2}.$$

Следовательно, $\{A, B\}$ — щель. □

Note. Определенные величины $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ законны.

Def 62. f называется интегрируемой по Риману, если $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

Ex.

Все ступенчатые функции интегрируемы по Риману. φ— ступенчатая функция на J, Существует разбиение $\underline{S}$ отрезка на J. $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\} : \varphi(x) = \sum i = 1^k c_i \chi_{e_i}$

$$\underline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i \overline{S}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| c_i$$

Тогда $\underline{I}(\varphi) - \overline{I}\varphi = I(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{k} |e_i| c_i$

Theorem 57. *Если J — замкнутый отрезок ($J = [a, b]$), f — непрерывная функция на J, то f интегрируема по Риману.*

Note. Пусть J — произвольный отрезок, f — ограниченная функция на J, $\mathcal{E}$ — разбиение отрезка J на непустое отрезки $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\mathcal{E}}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}}(f) &= \sum_{i=1}^{k} |e_i| \sup_{e_i} f - \sum_{i=1}^{k} |e_i| \inf_{e_i} f = \\ &= \sum_{i=1}^{k} |e_i| \Big(\sup_{e_i} f - \inf_{e_i} f \Big) = \sum_{i=1}^{k} |e_i| \mathrm{osc}_{e_i} f \end{aligned}$$

Note. f интегрируема по Риману $\iff$ щель (A, B) — узкая $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \text{ — разбиения отрезка } J : \overline{S}_{\mathcal{E}_2}(f) - \underline{(S)}_{\mathcal{E}_1}(f) < \varepsilon.$$

В данный обозначениях измельчения можно считать, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ // возможно, здесь должно быть что-то другое

Theorem 58 (Критерий интегрируемости по Риману)**.** *f интегрируема по Риману на J тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разбиение $e_1, \dots, e_k$ Отрезка J, такое что*

$$\sum_{i=1}^{k} |e_k| \mathrm{osc}_{e_k} f < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Доказательство. Проверим, что f удовлетворяет условию **??** f равномерно непрерывна по теореме Кантора **??**:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \Big(x, y \in [a, b] \wedge |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big).$$

Пусть $e_1, \dots e_k$ — столь мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\forall i : |e_i| < \delta$. Тогда $\forall i : \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^{k} |e_i| \mathrm{osc}_{e_i} f \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |e_i| = \varepsilon(b - a).$$

□

Property.

1. *f непрерывна на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f$ интегрируема.*
2. *Σ — разбиение,*
$$\overline{S}_\Omega(-f) = -\underline{S}_\Omega(f).$$
3. *Если $\alpha > 0$,*
$$\bar{S}_\Sigma(\alpha f) = \alpha \bar{S}_\Sigma(f).$$
Аналогично с нижней суммой.
4. *Если f интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf интегрируема и $I(\alpha f) = \alpha I(f)$*
5. *$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ограничены. Σ разбиение.*
$$\overline{S}_\Sigma(f+g) \leqslant \overline{iS}_\Sigma(f) + \overline{S}_\Sigma(g).$$
6. $$\underline{S}_\Sigma(f+g) \geqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \underline{S}_\Sigma(g).$$
7. *Если f, g интегрируемы на $\langle a, b\rangle$, то $f+g$ интегрируема и*
$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$
Можно рассмотреть общее подразбиение и применить критерий интегрируемости и прошлым свойством. Для второго утверждения: просто записываем неравенство.
8. *f, g интегрируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема и*
$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$
9. *Монотонность. $f \geqslant 0, f$ интегрируема по Дарбу. Тогда, $I(f) \geqslant 0$.*
10. *f, g интегрируемы на $\langle a, b\rangle$. Тогда $f \cdot g$ интегрируема.*

Доказательство.
$$\exists C, D \in \mathbb{R} : |f| \leqslant C, |g| \leqslant D \text{ на } \langle a, b\rangle.$$
Пусть J — отрезок. Оценим осцилляцию.
$$\forall x, y \in J : |f(x)g(x) - f(y)g(y_| = |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(x)| =$$
$$\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| =$$
$$= |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \operatorname{osc}_J g + D \cdot \operatorname{osc}_J f.$$
f, g интегрируемы, тогда $\forall \varepsilon\ \exists \Sigma : \overline{S}_\Sigma(f) \leqslant \underline{S}_\Sigma(f) + \varepsilon \wedge \overline{S}_\Sigma(g) \leqslant \underline{S}_\Sigma(g) + \varepsilon$.

Получаем
$$\begin{matrix} \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| \operatorname{osc}_J f \leqslant \varepsilon \\ \sum\limits_{J \in \Sigma} |J| \operatorname{osc}_J g \leqslant \varepsilon \end{matrix}.$$
Тогда $\forall J \in \Sigma : \operatorname{osc}_J(fg) \leqslant C \cdot \operatorname{osc}_J g + D \cdot \operatorname{osc}_J f$.

Следовательно,
$$\sum_{J \in \Sigma} |J| \cdot \operatorname{osc}_J fg \leqslant C \cdot \sum_J |J| \cdot \operatorname{osc}_J g + D \cdot \sum_J |J| \cdot \operatorname{osc}_J f \leqslant (C+D)\varepsilon.$$

□

11. *f интегрируема на $\langle a,b\rangle$. $J \subset \langle a,b\rangle$. Тогда $f \cdot \chi_J$ интегрируема. (χ_J равна единице на J и нулю на остальных точках)*

    Если $J = \{c\}$, то $I(f\chi_J) = 0$.

12. *J_1, J_2 — два подотрезка, такие что $J_1 \cup J_2 = J \wedge J \cap J_2 = \varnothing$. Тогда*

$$I(f\chi_{J_1\cup J_2}) = I(f\chi_{J_1}) + I(f\chi_{J_2}).$$

13. *Основная оценка интеграла. f интегрируема на $\langle a,b\rangle$. $|f| \leqslant M$ на $[c,d] \subset \langle a,b\rangle$*

$$\left|\int_c^d f\right| \leqslant M(d-c).$$

Designation. $I(f\chi_J)$ не зависит от того, включает ли J концы.

$$\int_c^d f = \int_c^d f(x)dx \overset{def}{=} I(f\chi_{\langle c,d\rangle}).$$

Designation. Если $d < c$:

$$\int_c^d f = -\int_d^c f.$$

Statement. *f интегрируема на $\langle a,b\rangle$.*

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f.$$

4.11.2 Связь интеграла и производящей

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная функция f, если F дифференцируема и $F' = f$.

Theorem 59 (Ньютон-Лейбниц). *Пусть f интегрируема по Риману на $\langle a,b\rangle$ и непрерына в точке $t \in \langle a,b\rangle$. Пусть $t_0 \in \langle a,b\rangle : F(s) = \int_{t_0}^s f$. Тогда F дифференцируема в точке tи $F'(t) = f(t)$.*

Доказательство. $x \neq t$.

$$\left|\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)\right| = \left|\frac{\int_{t_0}^x f = \int_{t_0}^t f}{x-t}\right| = \left|\frac{\int_t^x}{x-t} - f(t)\right| =$$

$$\frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f - (x-t)f(x)\right| = \frac{1}{|x-t|}\left|\int_t^x f(s) - f(t)ds\right| \leqslant \sup_{s\in[t,x]} |f(s) = f(t)|.$$

f непрерывна в t. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta$. Если $|s-t| < \delta$, $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$

$$|x-t| < \delta \Longrightarrow \forall s \in [t,x] : |s-t| < \varepsilon \to |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sup s \in [t,x] |f(x) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

А значит

$$\lim_{x\to t} |\frac{F(x)-f(t)}{x-t} - f(t)| = 0 \Longrightarrow F'(t) = f(t).$$

□

Corollary. Если f дифференцируема на $\langle a,b\rangle$, то $\forall t_0 \in [a,b] : F$ —первообразная f.

Corollary (Формула Ньютона-Лейбница)**.** f непрерывна на $[a,b]$, F —первообразная f. Тогда

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Def 63. $f \in C^k\langle a,b\rangle, \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0,\infty\}$, если $f, f', \dots f^{(k)}$ непрерывны.

Theorem 60. *Если* $f, g \leqslant C^1(a,b)$ *, то*

$$\int_b^a fg' = f \cdot g \mid_a^b - \int_a^b f'g,$$

где $\Phi \mid_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

4.11.3 Формула интегрирования по частям

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g непрерывны на $[a,b]$ и f, g, f', g' непрерывны. Тогда

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Пусть Φ — первообразная для $f'g$. Запишем первообразную для fg'

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)g'(x)dt = f(x)g(x) - \Phi(x) + c.$$

$$\Phi(x) = f(x)g(x)\int_a^x f(t)g'(t)dt + c.$$

Обозначим $u|_y^x = u(x) - u(y)$.

$$\Phi(x) - \Phi(y) = fg|_y^x - \int_y^x f(t)g'(t)dt.$$

Получаем

$$\int_y^x f'(t)g(t)dt = fg|_y^x - \int f(t)g'(t)dt.$$

Theorem 61. f_n, f — *Заданы на* $\langle a,b\rangle; n \in \mathbb{N}$ *Пусть*

1. *все* f_n *интегрируемы по Риману на* $\langle a,b\rangle$
2. $f_n \rightrightarrows f$. *Тогда* f *интегрируема по Риману*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

Lemma. *E — множество, u, v — вещественные функции на E. $|u(x) - v(x)| \leqslant \lambda\ \forall E$. Тогда $|\operatorname{osc}_E(u) - \operatorname{osc}_E(v)| \leqslant 2\lambda$*

$$\varepsilon > 0 : \exists n : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

$$|\operatorname{osc}_{\langle a,b\rangle} - \operatorname{osc}_{\langle a,b\rangle(f)}| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\exists \{I_1, \dots I_N\}$ — отрезки $\langle a, b\rangle$:

$$\sum_{j=1}^{N} |I_j| \operatorname{osc}_{I_j} < \varepsilon.$$

$$\sum_{j=1}^{N} |I_j| \operatorname{osc}_{I_j}(f) \leqslant \varepsilon + \sum_{j=1}^{N} |I_j|(2\varepsilon) = \varepsilon(2(b-a)+1).$$

Следовательно, f интегрируема.

$$\left| \int_a^b f_n(x_) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_1(x) - f(x) dx \right| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

$$\varepsilon > 0\ \exists M : \forall n \geqslant M\ \forall x \in \langle a, b\rangle : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым получили последнее неравенство в прошлой строке. □

Statement. *Если f интегрируема по Риману на $\langle a, b\rangle$, то $|f|$ тоже интегрируема и*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx.$$

4.12 Логарифм и экспонента

Пусть функция l удовлетворяет соотношению

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

и ноль лежит в ее области определения.

$$l(0) = l(0, a) = l(0) + l(a) \Longrightarrow l(0) = 0.$$

Будем искать l, заданную на $\mathbb{R}_+$.

$$l(x^2) = l((-x)^2).$$

$$2l(x) = 2l(-x).$$

То есть

$$l(x) = l(|x|).$$

Def 64. Логарифм — строго монотонная функция, заданная на $\mathbb{R}_+$, такая что

$$f(xy) = l(x) + l(y) \quad x, y > 0.$$

Statement. *Для* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$l(x^n) = n \cdot l(x),$$

$$l(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} l(x).$$

$$l(1) = l(1^2) = 2l(1) \Longrightarrow l(1) = 0.$$

Statement. *Если* l *— логарифм,* $c \neq 0$*, то* cl *— тоже логарифм.*

Lemma. *Если* l *— логарифм, то* l *непрерывна на всей области определения.*

Доказательство. Пусть l — логарифм. Считаем, что fстрого возрастает.

$$t = \lim_{x \to 1+0} f(x).$$

Покажем, что $t = l(1) = 0$. Пусть $t > 0$.

$$l((1+x)^2) = 1l(1+x).$$

При $xto1+$ получаем, что $t = 0$. Если $x \to 1-$, получаем тое самое. Значит l непрерывна в 1. И равна нулю в этой точке. □

Lemma. *Если* l *— логарифм, то функция* l *дифференцируема.*

Доказательство.

$$\Phi(x) - \int_1^x l(t)dt \quad x \in (0, +\infty).$$

Φ дифференцируема.

$$\begin{array}{c} \Phi(2x) = \int_1^{2x} l(t)dt = \int_1^x l(t)dt + \int_x^{2x} l(t)dt = \Phi(x) = \\ x \int_x^{2x} l(x \cdot \frac{t}{x}) d(\frac{t}{x}) = \Phi(x) + x \int_1^2 l(x \cdot y)dy = \\ \Phi(x) + xl(x) + x \int_1^2 l(y)dy \end{array}.$$

$l(x) = \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} - C$. А Φ дифференцируема, следовательно, f тоже дифференцируема. □

Theorem 62 (Производная логарифма)**.**
$l(xy) = l(x) + l(y)$. Зафиксируем y и возьмем производную:

$$yl'(xy) = l'(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

$$l'(x) = \frac{C}{x}, \quad C = l'(y).$$

Theorem 63. *Если* l *логарифм, то*

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Только что доказали. □

Theorem 64. $\Phi(x) = \int_1^x \frac{C}{t}dt$ *— логарифм.*
Сама $l(x) = C \cdot \int_1^x \frac{dt}{t}$

Theorem 65. *Если* $C \neq 0$, *то*

$$\varphi(x) = C\int_1^x \frac{dt}{t} \text{ — есть логарифм.}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $C = 1$.

$$\varphi(x) = \int_1^x, \quad x > 0.$$

Если $x_1 > x$,

$$\varphi(x_1) - \varphi(x) = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{x_1}(x_1 - x) > 0.$$

Следовательно, φ строго возрастает.

Проверим:

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

$$\in t_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^y \frac{dt}{t} = \varphi(x) + \frac{1}{x}\int_x^{xy} \frac{d(\frac{t}{x}}{)}\frac{t}{x}.$$

$$\varphi(x) + \int_1^y \frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) - \varphi(y).$$

□

Designation. Натуральный логарифм –

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t.$$

Property. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{x} \; x \xrightarrow{to} 0 \; \log'(1) = 1.$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

Statement. *Образ функции* $\log$ *есть все вещественные числа.*

Доказательство. При $x_1 > x,\ \log(x_1) - \log(x) > \frac{x_1 - x}{x_1}$. Рассмотрим $x_1 = 2^{n+1}, x = 2^n$:

$$\log 2^{n+1} - \log 2^n \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда $\lim_{x\to\infty} \log x = +\infty$. □

Def 65 (Обратная функция к логарифму)**.** У функции $\log$ есть обратная функция, называющаяся экспонентой:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Property. *1.* $\exp$ *строго возрастает*

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty.$$

3.
$$\lim_{x\to-\infty} \exp = 0.$$

4.
$$\log 1 = 0 \Leftrightarrow \exp 0 = 1.$$

5.
$$\exp x \exp y = \exp(x+y).$$

Statement. *Экспонента дифференцируема:*
$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x.$$

Statement.
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)} j!^{j}}{x} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Пусть f имеет производную любого порядка
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

Ряд Тейлора для f в окрестности точки x :
$$\sum_{j=0}^{\infty} = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Theorem 66. *Ряд Тейлора для экспоненты, $x_0 = 0$:*
$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Для любого x этот ряд сходится к $epx(x)$, сходимость равномерна на каждом конечном отрезке.

Доказательство.
$$\left| \exp x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right| = \frac{\exp c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad c \text{ между } 0 \text{ и } x.$$

Выберем $R > 0$, пусть $|x| \leqslant R$ Применим:
$$\leqslant \exp \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Проверим, что полученное выражена стремиться к нулю.

Lemma. *Пусть $a_0, a_1, a_2 \ldots$ — положительные числа и $\exists N : a_j < \eta < 1\ \forall j > N$. Тогда $a_0 a_1 \ldots a_j \to 0 \quad j \to \infty$*

Corollary. Если $a_j \geqslant 0,\ a_j \to 0$, то $a_0 \dots a_j \to 0$

По лемме $\frac{R}{1} \cdot \frac{R}{2} \dots \frac{R}{n+1}$ стремиться к нулю. Доказали равномерную сходимость. □

Note.

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n! = e.$$

Corollary (быстрый рост экспоненты)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0.$$

Доказательство.

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\frac{x^n}{\exp x} \leqslant (n+1)! \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad x \to \infty.$$

□

Note.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(-x) = 0.$$

Corollary.

$$\frac{\log x}{x^k} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ex (Полезный пример)**.**

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

g непрерывна на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$,

$$g'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0.$$

g дифференцируема а нуле и $g'(0) = 0$.

$$g^{(j)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) p_j\left(\frac{1}{x}\right), \quad p_j \text{ — полином.}$$

Значит, g бесконечно дифференцируемая функция и $g^{(j)}(0) = 0$.

Напишем полином Тейлора:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j \cong 0.$$

Нулевой, но не сходится к g.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \geqslant 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

h — бесконечно дифференцируема.

$$u(x) = h(x-a)h(b-x), \quad a < b.$$

Corollary. Пусть $I = (a,b),\ a < b$. Существует бесконечно дифференцируемая функция u :

$$\begin{matrix} u(x) > 0 & x \in (a,b) \\ u(x) = 0 & x \notin (a,b) \end{matrix}.$$

Designation. l— логарифм.

$$\exists! a \in (0,+\infty) : l(a) = 1.$$

тТакое число называется основанием логарифма l.

Note. $l = \log$. Тогда основание равно e.

Designation (общий случай)**.**

$$\exists C \neq 0 : l(x) = C \log x.$$

a — ан для l.

$$1 = l(x) = C \log a \implies C = \frac{1}{\log a}.$$

Обозначим логарифм с основанием a так

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Designation. Степень с произвольным показателем:

$$u > 0 \wedge v \in \mathbb{R} :\ u^v \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v \log u).$$

Note. Натуральная степень: $\exp(n \log u) = \exp(\underbrace{\log u \ldots \log u}_{n}) = u^n$

Целая отрицательная степень: $\exp(-k \log u) = \frac{1}{\exp(k \log u)} = \frac{1}{u^k}$
Рациональная степень: $v = \frac{a}{p}, \quad a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$

$$u^v = \exp \frac{a \log u}{p} = \sqrt[p]{\exp a \log u} = \sqrt[p]{u^a}.$$

Property.

1. $u^{v_1+v_2} = \exp((v_1+v_2)\log u) = \exp v_1 \exp u \cdot \exp v_2 \log u = u^{v_1} u^{v_2}$

2. $(u_1 u_2)^v = u_1^v u_2^v$

3. $(u^{v_1})^{v_2} = \exp v_2 \log u^{v_1} = \exp(v_2 v_2 \log u) = u^{v_1 v_2}$

4.12.1 Показательная функция

Def 66. Показательная функция $f(x) = a^x$.

Property. $f'(x) = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) = \log a \cdot a^x$

Property. $\exp x = e^x = \exp(x \log e) = \exp x$

Def 67. Пусть $\neq 1$.

$$a^x = y : \exp x \log a \Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log a} = \log_a y.$$

4.12.2 Степенная функция

Def 68. Степенная функция $g(x) = x^b, \quad x \in (0, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$.

Statement.

$$g'(x) = (\exp b \log x)' = (\exp b \log x) \cdot \frac{b}{x} = x^b \frac{1}{x} b = b \cdot x^{b-1}.$$

Statement. *Если* $a > 1$, *то* $\forall b \in \mathbb{R} : x^b = o(a^x, \quad x \to \infty$

Доказательство.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{\exp b \log x}{\exp x \log a} = e^{blogx - xloga}.$$

А логарифм растет медленнее линейной функции, тогда полученное выражение стремится к нолю при $x \to \infty$. □

Practice.
$\forall \beta : \log u = o(x^\beta)$
$\forall \alpha : \lim_{x \to 0} x^\alpha \log x = 0$

Statement. *Ранее доказали , что*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится при любых x. *Экспонента равномерна на любом конечном отрезка.*

Ряд для e^x *по степеням* $(x - x_0)$:

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0) \tag{4.4}$$

Экспонента раскладывается в ряд Тейлора в центром в любой точка. Такое свойство называется „аналитичность"

Ex. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos n^2 x$ — непрерывная, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса)

$$|2^n \cos n^2 x| \leqslant 2^n.$$

Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^2 (-\sin n^2 x)$ сходится равномерно. Дальше будет происходить тоже самое при взятии производной. Значит, она дифференцируема бесконечное число раз. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Тогда можем записать ряд Тейлора в нуле:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}}{(2k)!} x^{2k} \tag{4.5}$$

Этот ряд вообще не сходится! Докажем это:

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{4k} (-1)^k.$$

Statement. *В **??** общий член стремиться к нулю, если* $|x| > 0$.

Доказательство.

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)!} x^{2k} \geqslant \frac{2^{-n} n^{4k}}{(2k)^{2k}} x^{2k}.$$

Подставим $n = 2k$:

$$\left(\frac{|x| n^2}{2k}\right)^{2k} 2^{-n} = (2kx)^{2k} 2^{-2k} = (k|x|)^{2k}.$$

А это стремиться к нулю. □

4.12.3 Разложение Тейлора для логарифма

Theorem 67 (разложение Тейлора для $\log(1+x)$ центром в 0)**.**
$f(x) = \log(1+x),\ f'(x) = (1+x)^{-1},\ f^{(2)} = -(1+x)^{-2},\ f^{(3)} = 2(1+x)^{-3}\ \ldots$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)(1+x)^{-n}.$$

Запишем локальную формулу Тейлора:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{\log^{(n)} 1}{n!} x^n + \frac{\log^{k+1}(1+c)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{k+1}} x^{k+1}.$$

Тогда

$$\log(1+x) \sim x, \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Statement. $e^x = \lim_{n\to 0} (1+ux)^{\frac{1}{n}}$

Доказательство. $(1+ux)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(1+ux)}$

$$\frac{1}{n} \log(1+ux) = x + O(u) \longleftarrow x, \quad b \to 0.$$

$$\log(1+ux) = ux + O(n^2).$$

$$e = \lim_{n\to 0} (1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Statement. *Раскладывается ли логарифм ряд Тейлора:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} \tag{4.6}$$

Посмотрим на модуль:

$$\frac{1}{n}|x|^n \longleftarrow +\infty, \quad |x| > 1.$$

Тогда имеет смысл рассматривать только $x \in (-1, 1]$.

Theorem 68. $x \in (-1, 1]$. *Тогда ряд* **??** *равномерно сходится равномерно на любом* $(r, 1], \quad r > -1$.

Доказательство. 1. $x \in [0, 1]$.

$$\left|\log(1+x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\right| \leqslant \frac{1}{k+1} x^{k+1} \left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1} x^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1}, \quad c \in lra \tag{4.7}$$

В частности, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

2. $-1 < x \leqslant 0$

$$\left|\log(1+x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\right| \leqslant \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \left(\frac{1}{1+c}\right)^{k+1} \leqslant \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{k+1} \tag{4.8}$$

Удачным случаем **??** будет $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \leqslant \frac{1}{2},\ x \in (-\frac{1}{2}, 0]$. Чтобы разобраться с оставшимися вариантами, воспользуемся формулой: $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1 - x^{n+1}$. Подставим $x = -x$:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k dt = \int_0^t \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

$$\log(1+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \qquad -1 < t \leqslant 0, t < x \leqslant 0.$$

$$\int_0^t \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^t (\frac{|x|^n}{1-|x|} dx \leqslant \frac{1}{1-|t|} \int_t^0 |x|^n dx = \frac{1}{1-|t|} \frac{1}{n+1} |t|^{n+1}.$$

Это выражение стремится к нулю при $n \to \infty,\ t > -1$, если $t \in (-1, 0], |t| \leqslant r < 1$, равномерно сходится. Удачный случай: $\leqslant \frac{1}{1+|t|} \frac{1}{n+1} |t|^n \leqslant \frac{1}{1-r} \frac{1}{n} r^n$.

□

Note. Логарифм — аналитическая функция.

Доказательство. Выберем $\left|1 - \frac{x}{x_0}\right| < 1$.

$$\log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0} = \log(1 - (1 - \frac{x}{x_0})) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (\frac{x}{x_0} - 1)^n.$$

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \frac{1}{x_0} (x - x_0)^n.$$

А это ряд Тейлора. □

4.12.4 Формула Ньютона-Лейбница для большей производной. Еще один подход к формуле Тейлора

f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(x)d(x-t) = f'(x)(x-t)\mid_{x=a}^{x=t} - \int_a^t f''(x)(x-t)dx =$$

$$= f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

То есть:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \int_a^t f''(x)(t-x)dx.$$

И так далее

Theorem 69. *f имеет $n+1$ производную на отрезке I, $t, a \in I$.*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{n!}\int_a^t f^{(n+1)}(z)(t-x)^{n+1}dx.$$

Ex. $x \rightsquigarrow u$, $x = a(1-u) + tu$
$u \in [0,1]$, $dx = (t-a)du$

$$\begin{aligned} t - x &= t - a(1-u) - tu = \\ &= t - a + au - tu = \\ &= t - a + u(t-a) = \\ &= (t-a)(1-u) \end{aligned}$$

$$r_n(a,t) = \frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a(1-u)+tu)(t-a)^n(1-u)^n(t-a)^n du.$$

Если $a = 0$:

.

$f(x) = (1+x)^m, \qquad m \in \mathbb{R}$
$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$
$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-1}$
$\vdots$
$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k-1)(1+x)^{m-k}$

Designation.

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

$|x| < 1$

$$(1+t)^m = 1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots + \binom{m}{n}t^n + \frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du.$$

Theorem 70 (Ряд Ньютона)**.** *Ряд*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} t^k$$

сходится к $(1+t)^m$*, при* $|t| < 1$

Доказательство. $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 m(m-1)\dots(m-n)(1+tu)^{m-n+1}(1-u)^n du$. $0 \leqslant t < 1$.

$$|R_n(t)| \leqslant |t|^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| |m| \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right|.$$

□

Theorem 71. $R_n(t) \to 0$ *при* $|t| < 1$*, и сходится равномерно при* $|t| < \phi < 1$*.*

Доказательство. Пусть $\int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{(1+tu)^{n-m+1}} du \right| = I$

1. Сначала $0 \leqslant t_0$:

$$I \leqslant \int_0^1 (1-u)^n du = \frac{1}{n+1} \longleftarrow 0.$$

$$|R_n(t)| \leqslant t^{n+1} \left| \binom{m-1}{n} \right| \frac{m}{n+1} = a_n(t).$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{n+1}{n+2} \frac{|m-n-1|}{n+2} t.$$

$t < 1, \ t + \varepsilon < 1$, следовательно, рано или поздно $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)(t)} < t + \varepsilon$

2. Следующий случай $-1 < t < 0$ Подынтегральное выражение:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right|^n \left| \frac{1}{1+tu} \right|^{m-1}.$$

$$1 + |t| \geqslant |1+tu| \geqslant 1 - |t||u|.$$

Первый множитель:

$$\left| \frac{1-u}{1+tu} \right| \leqslant \frac{1-u}{1-|t|u} = \frac{1-|t|u + u(|t|-1)}{1-|t|u} = 1 - \left(n \frac{1-|t|}{1-|t|u} \right).$$

Это не превосходит $1 - n(1-|t|)$.

Второй множитель:

(a) $m \leqslant 1$

$$\left| \frac{1}{1+tu} \right|^{-m+1} \leqslant \left(\frac{1}{1-|t|u} \right)^{-m+1} \leqslant \left(\frac{1}{1-|t|} \right)^{-m+1}.$$

(b) $m > 1$

$$|1+tu|^{m-1} \leqslant (1+|t|).$$

Обозначим полученную оценку $C_m(t)$.

$$I \leqslant C_m(t)\int_0^1 (1-n(1-|t|))du = C_m(t)\left(-\frac{1}{1-|t|}\right)\frac{1}{n+1}(1-n(1-|t|))^{n+1}\,|_{n=0}^{n=1}=$$

$$= C_m(t)\frac{1}{1-|t|}\frac{1}{n+1}(1-|t|^{n+1}) \leqslant C_m(t)\frac{1}{n+1}.$$

Получили

$$R_n(t) \leqslant |t|^{n+1}\left|\binom{m-1}{n}\right||m|\frac{1}{n+1}\bar{C}_m(t) = \sigma_n(t).$$

Хотим доказать, что это стремиться к нулю.

$$\frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} = \frac{n+1}{n+2}|t|\left|\frac{m-n+1}{n+2}\right| \longleftarrow |t|, \qquad n\to\infty.$$

$$\exists k_0 : n>k_0 \quad \frac{\sigma_{n+1}(t)}{\sigma_n(t)} \leqslant \rho \quad \sigma_n(t) \leqslant A\rho^{n-1}, \quad |t|\leqslant\rho<1.$$

Доказали сходимость.

$\square$

$x, x_0 > 0$

$$x^m = x_0^m\left(\frac{x}{x_0})\right)^m = x_0^m(1-(1-\frac{x}{x_0}))^m =$$

$$= x -^n (1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(-1)^n\left(1\frac{x}{x_0}\right)^m = x_0^m + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}(x-x_0)^m.$$

Значит ряд Тейлора аналитичен.

Theorem 72 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** *Если f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке с концами a, t:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-a)^n dx}_{R_n(t,a)} \tag{4.9}$$

Statement. *Если f дифференцируема $n+1$ раз:*

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } t\ : R_n(t,a) = \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \tag{4.10}$$

Note. Если $f \in C^{(n+1)}$, то **??** можно вывести из **??**.

Theorem 73 (о среднем)**.** *φ, ψ — функции на $[c,d]$, φ непрерывна, ψ - интегрируема по Риману и не меняет знака. Тогда*

$$\exists\psi \in [c,d] : \int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\psi)\int_c^d \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Можно считать, что $\psi \geqslant 0$. Пусть $m = \min_{x\in[c,d]} \varphi(x), \quad M = \max_{x\in[c,d]}$.

$$m\int_c^d \varphi(x)dx \leqslant \int_c^d \varphi(x)\psi(x)x \leqslant M\int_x^d \varphi(x)dx.$$

$$m\psi(x) \leqslant \varphi(x)\psi(x) \leqslant M\psi(x).$$

Если $\int_c^d \psi(x)dx = 0$, теорема верна. Предположим, что этот интеграл не равен нулю.

$$m \leqslant \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx} \leqslant M.$$

Следовательно,

$$\exists\ \zeta \in [c,d] : \psi(\zeta) = \frac{\int_c^d \varphi(x)\psi(x)dx}{\int_c^d \psi(x)dx}.$$

□

Statement (оценка остатка)**.**

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(x), \psi(x) = (t-x)^n.$$

$$\exists\zeta : R_n(t,a) = \frac{1}{n!}f(^{(n+1)}(\zeta)\int_a^t (t-x)^n dx.$$

$$f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}\left[-(t-x)^{n+1}\Big|_{x=a}^{x=t}\right] = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{1}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}.$$

4.13 Дифференциальные уравнения

$$\Phi\left(f'(t), f(t), t\right) = 0.$$

Theorem 74. *Пусть f — непрерывная дифференцируемая функция на (a,b). Следующие условия эквивалентны:*

1. $f'(t) = cf(t) \quad \forall t \in (a,b)$
2. $\exists A: \ f(t) = Ae^{ct}$

Доказательство. $2 \Longrightarrow 1$ — очевидно
$1 \Longrightarrow 2$

$$g(t) = f'(t)e^{-ct}.$$

$$g'(t) = f'(t)e^{-ct} + f(t)(-ce^{-ct}) = cf(t)e^{-ct} - cf(t)e^{-ct} = 0.$$

Тогда $g(t) \equiv A \in R$.

□