Конспект по матанализу
III семестр
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

10 октября 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

Лекция 1: †

2 Sept

1.1 Равномерная и поточечная сходимости

Определение 1: Поточечная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f поточечно ($f_n \to f$), если

$$\forall x \in E\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

То есть для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(x,\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Это определение можно обобщить куда угодно, где есть мера. В данном курсе под E обычно подразумевается подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 2: Равномерная сходимость

Пусть определена последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, и $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда говорят, что f_n сходится к f равномерно на E ($f_n \rightrightarrows f$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_{(\varepsilon)}$ такое, что

$$\forall n > N\ \forall x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 1.1.1. Рассмотрим функции $f_n(x) = x^n$ на отрезке $(0, 1)$. Так как $\forall x \in (0,1)\colon x^n \to_{n\to\infty} 0$, $f_n \to f \equiv 0$. Но $f_n \not\rightrightarrows 0$, потому что, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ каким бы ни было N для всех $n > N$ можно взять такое x рядом с единицей, что $|x^n - 0| > \frac{1}{2}$.

Утверждение. *$f_n \rightrightarrows f$ на E равносильно тому, что*

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ремарка. Если мы смотрим на множество непрерывных функций на компакте $C(K)$, где норма

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|,$$

то из поточечной сходимости следует равномерная:

$$f_n \to f \Longrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Longleftrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } K.$$

Аналогично будет с множеством ограниченных функций на E ($l^\infty(E)$) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|.$$

Определение 3: Равномерная ограниченность

Последовательность функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется равномерно ограниченной на E, если существует такое M, что
$$\forall x \in E\, \forall n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leqslant M.$$

Пример 1.1.2. Пусть $f_n \in C(K)$. Тогда равномерная ограниченность $\{f_n\}$ равносильна ограниченности по норме, то есть все функции содержатся в некотором шаре с центром в нуле.

Свойства.

0. *Из равномерной сходимости следует поточечная*

1. *Если для всех $x \in E$ выполнено*
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n,$$
где $\{a_n\}$ — последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, то f_n равномерно сходится к f на E.

2. *Если существует ε_0 и $x_n \in E$ для всех n такие, что*
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$
то f_n не сходится равномерно к f на E.

3. *Пусть $\{f_n\} \rightrightarrows f$ на E и $\{g_n\}$ равномерно ограничена на E. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$.* ■
$$\sup_{x\in E}|f_n(x)g_n(x)| \leqslant M_{g_n} \cdot \underbrace{\sup_{x\in E}|f_n(x)|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
■

4. Критерий Коши. *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. f_n равномерно сходится на E, согда*[1] *для любого положительного ε существует N, что*
$$\forall n, m > N\, \forall x \in E\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

■

$\boxed{1 \implies 2}$ *Запишем определение равномерной сходимости на E для $\frac{\varepsilon}{2}$:*
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\, \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n, m > N$
$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)_n| &\leqslant \\ &\leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\boxed{2 \implies 1}$ *Из условия Коши получаем, что для всех $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаметальна. Следовательно, существует предел $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*
Устремим $m \to \infty$. Тогда
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
По определению равномерной сходимости получаем, что $f_n \rightrightarrows f$ на E.

■

[1] С этого момента буду писать «согда» вместо «тогда и только тогда, когда», чтобы упростить формулировки

5. *Пусть E — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность непрерывных в точке $x \in E$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f тоже непрерывна в точке a.* ■ *Проверим, что*
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
А именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что
$$\forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
Используем равномерную сходимость: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что
$$\forall n > N\, \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Так как f_n непрерывна в точке a, можем записать определение для $\frac{\varepsilon}{3}$ и заодно взять $n > N$:
$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in E \quad \rho(x, a) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$
Используем два полученых неравенства:
$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| \leqslant&\\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(a)| + \\ &+ |f_n(a) - f_n(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon\end{aligned}$$
■

6. Теорема Стокса-Зайделя. *Пусть $f_n \in C(E)$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то f непрерывна на E.* ■ *Следствие из 5[прошлого свойства].* ■

1.2 Равномерные и поточечные сходимости рядов

Определение 4: Функционоальный ряд

Рассмотрим функции $u_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ — функциональный ряд,}$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ — частичная сумма ряда.}$$
Если S_n сходится к S поточечно, то говорят, что ряд сходится поточечно. Если S_n сходится к S равномерно, то говорят, что ряд сходится равномерно.
$$r_n = S(x) - S_n(x) \text{ — остаток ряда.}$$

Замечание. Если рассматриваемые функции ограничены ($u_n \in C(K)$), то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд в нормированном пространстве, поэтому сходимость в $C(K)$ равносильна тому, что $\|S_n - S\|_{C(K)} \to 0$. Это в свою очередь равносильно тому, что S_n сходится равномерно к S на K.

Свойства.

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, согда $r_n \rightrightarrows 0$ на E.*

2. Критерий Коши. *$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, согда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N, что*
$$\forall m > N\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in E\colon \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(x)\right| = |S_{m+p} - S_m| < \varepsilon.$$

3. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E, то u_n равномерно сходится к 0.* ■ *По критерию Коши для $p=1$.* ■

4. Признак сравнения. *Пусть $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}$[2] и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно на E.* ■ *Обозначим частичные суммы*
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$
Заметим, что
$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \leqslant |C_m(x) - C_n(x)|.$$
Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, можно воспользоваться критерием Коши и получить, что последний модуль меньше ε при $m, n > N$ и $x \in E$. Тогда можем применить критерий Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. ■

5. Признак Вейерштрасса. *Пусть $u_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и для всех $x \in E$ выполнено неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.* ■ *Применить признак Коши.* ■

6. *Если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.*

7. Признак Дирихле. *Пусть $u_n, v_n \colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, обозначим $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно:*

   (a) *ряд U_n равномерно ограничен на E, то есть $\exists M \colon \forall x \in E\, \forall n \quad |U_n(x)| \leqslant M$;*
   (b) *ряд v_n равномерно сходится к нулю ($v_n \rightrightarrows 0$);*
   (c) *для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.*

   ■ *Воспользуемся преобразованием Абеля:*
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) v_k(x) = U_n(x) v_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)).$$
Так как $U_n(x)$ равномерно ограничено, а $v_n(x)$ равномерно сходится к нулю, $U_n(x)v_n(x)$ тоже равномерно сходится к нулю. Теперь докажем, что второе слагаемое тоже равномерно сходится. Для этого достаточно проверить, что следующий ряд равномерно сходится
$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1})|.$$
Оценим частичную сумму[3]
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x))| \leqslant& \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |U_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = \\ &= M \cdot |v_1(x) - v_n(x)|\end{aligned}$$
Так как $v_n \rightrightarrows 0$, $|v_1(x) - v_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |v_1(x)|$. Значит, частичная сумма ряда стремится к $M \cdot |v_1(x)|$, следовательно[4]*, второе слагаемое тоже равномерно сходится, а тогда и сумма равномерно сходится.* ■

8. Признак Лейбница. *Если выполнены следующие условия, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n(x)$ равномерно сходится:*

---

[2] Здесь на лекции u_n, v_n были определены как $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, но случае $\mathbb{C}$ не понятно сравнение комплексного и вещественного числа в следующем неравенстве

[3] В последнем переходе мы используем монотонность $v_k(x)$

[4] Например, по признаку сравнения

(a) $v_n \rightrightarrows 0$ на E;
(b) для любого $x \in E$, ряд $\{v_n(x)\}$ монотонный.

■ *Обозначим за $u_n(x) \coloneqq (-1)^n$. Заметим, что ряд $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ ограничен, тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ равномерно сходится.* ■

Пример 1.2.1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$. Обозначим $u_n(x) = \sin(nx)$ и $v_n(x) = \frac{1}{n}$. Последний равномерно сходится к нулю и монотонно убывает.

$$\begin{aligned}
U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) = \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} \cdot \left(e^{ix\cdot\frac{n+1}{2}} - e^{-ix\cdot\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}\right) = \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ixn}{2}}\right) \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Пример 1.2.2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ при $x \in (0,1)$. Обозначим $v_n(x) = \frac{x^n}{n}$. $v_n(x)$ монотонна для всех $x \in (0,1)$, так же $|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, поэтому v_n равномерно сходится к нулю. По признаку Лейбница исходный ряд равномерно сходится.

9. Признак Абеля. *Пусть $u_n, v_n\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Если выполнены следующие условия, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно:*

   (a) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E;*
   (b) *ряд v_n равномерно ограничен;*
   (c) *для любого $x \in E$ последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна.*

■ *Проверим критерий Коши, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать число N такое, что*

$$\forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\colon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Используем преобразование Абеля[5]*:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) + v_{n+k}(x) = \\
&= \big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \big(U_{n+k}(x) - U_n(x)\big) \cdot \big(v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)\big)
\end{aligned}$$

Так как v_n равномерно ограничено, а u_n равномерно сходится[6]*:*

$$\big(U_{n+p}(x) - U_n(x)\big) \cdot v_{n+p}(x) \leqslant |U_{n+p}(x) - U_n(x)| \cdot M < \varepsilon \cdot M.$$

[5] Для удобства сделаем, чтобы сумма начиналась с единицы. Из-за этого придется писать больше скобок.
[6] Поэтому можем использовать критерий Коши

Для второго слагаемого аналогично используем критерий Коши для u_n и монотонность v_n:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\big(U_{n+k}(x)-U_n(x)\big)\cdot\big(v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}\big)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\big|U_{n+k}(x)-U_n(x)\big|\cdot\big|v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}\big|\quad\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{p-1}\big|v_{n+k}(x)-v_{n+k+1}\big|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\cdot|v_{n+1}(x)-v_{n+p}(x)|\leqslant\varepsilon\cdot 2M$$

Итого, оценили сумму из критерия Коши через ε, поэтому можем им воспользоваться. ■

1.3 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Свойства.

1. *Пусть $f_n, f\colon E\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E, f_n равномерно сходится к f на E и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$. Тогда пределы $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существуют и равны.*

   То есть
   $$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

   ■

   (a) *Проверим, что у b_n есть предел. Из критерия Коши для f_n следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует N, что*
   $$\forall n,m>N\;\forall x\in E\colon |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$
   Устремим $x\to a$. Тогда $f_n(x)\to b_n$ и $f_m(x)\to b_m$. Из того, что
   $$\forall\varepsilon>0\;\exists N\colon\forall n,m>N\quad |b_n-b_m|<\varepsilon,$$
   следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Поэтому предел b_n существует и $b:=\lim_{n\to\infty} b_n$.

   (b) *Определим функции*
   $$g_n(x)=\begin{cases} f_n(x) & x\neq a\\ b_n & x=a\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a\\ b & x=a\end{cases}$$
   Эти функции непрерывны в точке a. Кроме этого $g_n\rightrightarrows g$ на $E\cup\{a\}$, так как можно выбрать N из прошлого пункта.

   (c) *Используем свойство равномерной сходимости*
   $$b=\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} f(x).$$

   ■

> Следствие 1. Если $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f_n\rightrightarrows f$ на (a,b) и f_n непрерывна, то $f_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Лекция 2: † 9 Sept

2. Пусть $u_n\colon E\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка E и $\lim_{x\to a} u_n(x)=b_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} u_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

■ Обозначим частные суммы за

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Тогда $\lim_{x\to a} S_n(x) = B_n$ и $S_n \rightrightarrows S$ на E. $S_n(x)$ — функции, поэтому можно применить свойство 1 и получить

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} S_n = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

■

3. Пусть $f_n \in C[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ [7]. Рассмотрим произвольную точку $c \in [a,b]$ и первообразную $\int_c^x f_n(t)dt$. Тогда

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ на } [a,b].$$

В частности,

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt.$$

■ Посмотрим на разность

$$\left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^x f_n(t)dt \right| \leqslant |c-x| \cdot \max_{t\in[c,x]} |f(t) - f_n(t)| \tag{1.3.1}$$

Расширив отрезок $[c,x]$ до $[a,b]$, получаем следующую оценку на 1.3.1

$$1.3.1 \leqslant (b-a) \cdot \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1.3.2}$$

Выражение в 1.3.2 не зависит от x, откуда и следует равномерная сходимость. ■

4. Перестановка дифференцирования и предельного перехода. Пусть $f_n \in C[a,b]$, $f_n' \rightrightarrows g$, $c \in [a,b]$ и $f_n(c) \xrightarrow{n\to\infty}$. Тогда f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$ и $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

■ Так как $f_n' \rightrightarrows g$, по прошлому свойству

$$\int_c^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt.$$

Заметим, что

$$\int_c^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(c).$$

Поэтому

$$f_n(x) = \underbrace{f_n(c)}_{\to A} + \underbrace{\int_c^x f_n(t)dt}_{\rightrightarrows \int_c^x g(t)dt} \rightrightarrows A + \int_c^x g(t)dt.$$

■

Следствие 2 (дифференцирование равномерно сходящегося ряда). Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $c \in [a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

[7] Из этих двух условий автоматически следует, что f непрерывна

1.4 Степенные ряды

Определение 5: Степенной ряд

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $a_n,\ z,\ z_0 \in \mathbb{C}$, называется степенным с центром в точке z_0.

Замечание. С помощью переносов любой степенной ряд сводится к ряду с центром в нуле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.[8]

Теорема 1.4.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *сходится в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *сходится при всех* z, *что* $|z| < |z_0|$.[a]

[a] То есть для всех z внутри шара с центром в нуле и радиусом z_0.

■ Так как ряд сходится в точке z_0, $a_n z_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то есть $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

А такой ряд сходится, так как $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. ■

Следствие 3. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ расходится, то для всех z, что $|z| > |z_0|$, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.

Определение 6: Радиус сходимости

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — такое число, что для всех $z\colon |z| < R$ ряд сходится, а для всех $z\colon |z| > R$ ряд расходится.

Замечание. R может быть равным нулю или бесконечности.

Теорема 1.4.2 (Формула Коши-Адамара). *Радиус сходимости существует и равен*

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

■ Зафиксируем z.

$$q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $|z| < R_{\text{сх}}$, то $q < 1$, тогда по признаку Коши ряд сходится.
Если $|z| > R_{\text{сх}}$, то $q > 1$, аналогично по признаку Коши ряд расходится.
Если $|z| = R_{\text{сх}}$, то $q = 1$, и в этом случае ничего сказать нельзя. ■

Упражнение. Придумать формулировку в стиле признака Даламбера, то есть

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Здесь, в отличии от верхнего предела в формуле Коши-Адамара, еще нужно доказать, что предел существует.

Пример 1.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $n! \sim e^n$, поэтому $R_{\text{сх}} = \infty$.

Пример 1.4.2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n n!$, $R_{\text{сх}} = 0$.

Пример 1.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $R_{\text{сх}} = 1$.

[8] Далее в утверждениях будет обычно фигурировать ряд с центром в нуле для упрощения рассуждений.

Теорема 1.4.3. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим $0 < r < R$. Тогда в $\overline{B(0,r)}$ ряд сходится равномерно.*

■ Возьмем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Это сходящийся числовой ряд. Если взять ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с произвольным z, то

$$\max_{\overline{B(0,r)}} |a_n z^n| = |a_n| r^n.$$

Получили что, ряд максимумов сходится, из чего про признаку Вейерштрасса следует, что ряд сходится. ■

Следствие 4. Сумма степенного ряда непрерывна в шаре $B(0, R_{\text{сх}})$, так как частичные суммы будут непрерывными функциями, которые равномерно сходятся, следовательно, сходятся к непрерывной функции.

Теорема 1.4.4 (Теорема Абеля). *Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, радиус сходимости равен R. Предположим, что в точке z есть сходимость. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $[0, R]$ равномерно. В частности,*

$$\exists \lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

■ Докажем, что ряд сходится равномерно. Запишем следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

По условию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (не зависит от x), а $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ — монотонна и ограничена. Тогда по признаку Абеля ряд равномерно сходится на $[0, R]$ ■

Пример 1.4.4. Разложим в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{при } |x| < 1.$$

По признаку Абеля при $|x| = 1$ ряд тоже сходится. Поэтому $R_{\text{сх}} = 1$, причем на самом радиусе ряд тоже сходится.

Лемма 1. *Следующие ряды имеют одинаковые радиусы сходимости:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}.$$

■ Заметим, что если x_n сходится, то[9]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Теперь воспользуемся формулой Коши-Адамара. Обозначим за R_1, R_2, R_3 радиусы сходимости рядов из условия.

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{\left|a_n \cdot \frac{1}{n+1}\right|}} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}\right) \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|}} = \\
&= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1 \\
R_3 &= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}} \sqrt[n-1]{|a_n \cdot n|} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n}\right) \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|}} = \\
&= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R_1
\end{aligned}$$

■

[9] По определению верхнего предела это супремум частичных пределов последовательности, выберем такую $\{x_{k_i}, y_{k_i}\}$. Мы знаем, что $x_{k_i} \to x$, поэтому $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} y_{k_i} = x \lim_{i\to\infty} y_{k_i}$.

Теорема 1.4.5. *Пусть есть вещественный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, его ряд сходимость равен R. Тогда его можно проинтегрировать почленно для всех x, что $|x-x_0|<R$:*

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

■ Пусть $r=|x-x_0|<R$. В $\overline{B(x_0,r)}$ ряд равномерно сходится. Рассмотрим его частные суммы $S_n(x)$. Так как $S_n(x)\rightrightarrows S$,

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt = $$
$$= \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} S_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt$$

■

Определение 7: Производная комплекснозначной функции

Пусть $E\subset\mathbb{C}$, a — внутренняя точка E, $f\colon E\to\mathbb{C}$. Производную в точке a можно определить двумя способами:

1. это такая функция
$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$
2. f дифференцируема в точке a, если существует такое $k\in\mathbb{C}$, что
$$f(z)=f(a)=k(z-a)+o_{z\to a}(z-a).$$

Замечание. Существование $f'(a)$ равносильно тому, что f дифференцируема в точке a, и в этом случае $k=f'(a)$.

Теорема 1.4.6. *Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, его радиус сходимости равен R, $f(z)$ — сумма ряда внутри шара $B(z_0,R)$. Тогда при $z\colon |z-z_0|<R$ функция f дифференцируема сколько угодно раз, при этом*

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty} a_n\frac{n!}{(n-m)!}(z-z_0)^{n-m}.$$

■ Опять скажем, что $z_0=0$. Достаточно доказать для $m=1$, а далее по индукции. Пусть $|z|<r<R$. Запишем определение

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \\ &= \lim_{w\to z}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w-z} = \\ &= \lim_{w\to z}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^n-z^n)}{w-z} \overset{?}{=} \\ &\overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to z} a_n\underbrace{\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right)}_{\text{все стремятся к } z^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n\cdot z^{n-1} \end{aligned}$$

Осталось доказать один переход. Если докажем равномерную сходимость ряда в $\overline{B(0,r)}$, то он будет верен. Обозначим

$$u_n(w)=a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}).$$

Заметим, что

$$|u_n(w)|\leqslant|a_n|\cdot\left(\left|w^{n-1}\right|+\left|w^{n-2}z\right|+\ldots+\left|z^{n-1}\right|\right)\leqslant|a_n|\cdot n\cdot r^{n-1}.$$

Так как $r^{n-1}\in\overline{B(0,R)}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot n\cdot r^{n-1}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(w)$ сходится, следовательно можем переставить предел и суммирование. ■

Теорема 1.4.7 (О единственности разложения в степенной ряд). *Если* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *и сходится в круге* $B(z_0, R)$, *то коэффициенты задаются однозначно:*

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

■ По теореме 1.4.6 можем записать следующую формулу:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (z-z_0)^{n-k}.$$

Тогда

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = a_m m! \implies a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

■

Определение 8

Для бесконечно дифференцируемого в точке z_0 степенного ряда f имеет место формула Тейлора с центром в точке z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^m.$$

1.5 Разложение элементарных функций в ряды Тейлора

Запишем разложения, которые нам уже известны

1. e^x

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. $\sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $\cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Определение 9

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Определим $\exp z, \sin z, \cos z$ для комплексного числа как ряды из формул выше.

Упражнение.

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}e^{x_2} \\
\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
\sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin x_2 \\
\sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\
(e^z)' &= e^z \\
(\sin z)' &= \cos z \\
(\cos z)' &= -\sin z
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.1 (Формула Эйлера).
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

■ Честная подстановка. Можно перегруппировывать слагаемые в рядах, так как они абсолютно сходятся. ■

4. $\ln(1+x)$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots \qquad |x| < 1.$$
■
$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - \ldots)dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$
Так как $1-t+t^2-t^3+\ldots$ — равномерно сходящийся ряд при $|t| < 1$, можем интегрировать его почленно. Аналогично мы можем определить $\ln(1+z)$ для $z \in \mathbb{C}$, если $|z| < 1$. ■

5. $\operatorname{arctg} x$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
■
$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$
Формула верна внутри круга $|t| < 1$ для равномерной сходимости. ■

6. $(1+x)^p$
$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n.$$
Докажем, что радиус сходимости равен 1. Обозначим
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!}x^n, \qquad f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^p}, \quad x \in (-1, 1).$$
Поступим хитро: докажем, что $f(x) \equiv 1$. Заметим, что $f(0) = 1$. Тогда достаточно проверить, что $f'(x) = 0$ для всех $x\colon\ |x| < 1$.
$$\begin{aligned}f(x) &= S(x)(1+x)^{-p} \\ f'(x) &= S'(x)(1+x)^{-p} - pS(x)(1+x)^{-p-1} = \\ &= (1+x)^{-p-1}\big(S'(x)(1-x) - pS(x)\big)\end{aligned}$$
Проверим, что $(S'(x)(1+x) - pS(x)) = 0$.
$$\begin{aligned}p \cdot S(x) \qquad &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!}x^n \cdot p \\ (1+x) \cdot S'(x) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \cdot (1+x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n-1)!}(x^{n-1} + x^n)\end{aligned}$$
Теперь заметим, что
$$p \cdot \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{n!} = \frac{p(p-1)\ldots(n-p+1)}{(n+1)!} + \frac{p(p-1)\ldots(n-p)}{n!}.$$

Поэтому коэффициенты при x^k будут одинаковыми, следовательно, разность равна нулю.

7. Частный случай для $p = -\frac{1}{2}$

$$\frac{p(p-1)\dots(n-p+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

8. $\arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Глава 2

Теория меры и интегрирования

Лекция 3: † 16 Sept

2.1 Системы множеств

Определение 10: Алгебра подмножеств

Пусть T — произвольное множество, 2^T — система подмножеств. $\mathfrak{A} \subset 2^T$ — алгебра подмножеств, если

(i) $\varnothing \in \mathfrak{A}$
(ii) $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$
(iii) $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow T \setminus A \in \mathfrak{A}$

Свойства.

1. $T \in \mathfrak{A}$
2. $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \setminus B = A \cap (T \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3. $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cup B = T \setminus \big((T \setminus A) \cap (T \setminus B)\big) \in \mathfrak{A}$
4. $A_j \in \mathfrak{A},\ j = 1, \dots n \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A},\ \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$

Определение 11: σ-алгебра

$\mathfrak{A} \subset 2^T$ — σ-алгебра, если $\mathfrak{A}$ – алгебра и

(ii σ) $\forall A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N}\colon\ \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Замечание. $\forall A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$

Пример 2.1.1.

1. $2^T = \mathfrak{A}$
2. $\{\varnothing, T\} = \mathfrak{A}$

Теорема 2.1.1. *Пусть T произвольное множество и $\mathcal{E} \subset 2^T$ — какая-то система подмножеств. Тогда существует минимальная по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

■ Возьмем пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. ■

Определение 12: Борелевская оболочка

σ-алгебра из прошлой теоремы называется борелевской оболочкой. Обозначается $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$

Определение 13

Рассмотрим топологическое пространство (T, τ) (τ — система отрытых множеств). Тогда $\mathfrak{B}(\tau)$ — борелевская σ-алгебра в T. Обозначается $\mathfrak{B}(T)$.

Определение 14: Полукольцо

Набор подмножеств $\mathcal{P} \subset 2^T$ называется полукольцом, если выполнены следующие аксиомы:

(i) $\varnothing \in \mathcal{P}$

(ii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$

(iii) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \implies P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнктны.

Пример 2.1.2. $T = \mathbb{R}, \mathcal{P} = \{[a, b)\}$

Теорема 2.1.2 (о свойствах полукольца). *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $P, P_1, \ldots P_n \in \mathcal{P}$. Тогда*

1. $P \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} P_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, *где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнктны;*
2. $\bigcup\limits_{j=1}^{n} P_j = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, *где $Q_{k_j} \in \mathcal{P}$, Q_{k_j} дизъюнктны и $\forall j \colon Q_{k_j} \subset P_k$;*
3. *в предыдущем пункте можно заменить n на ∞.*

■

1. Очевидно
2. Заметим, что
$$\bigcup_{j=1}^{n} P_j = \underbrace{P_1}_{\in \mathcal{P}} \cup \overbrace{(P_2 \setminus P_1)}^{\bigsqcup Q_j} \cup \overbrace{(P_3 \setminus (P_1 \cup P_2))}^{\bigsqcup Q_j} \cup \ldots.$$
При этом все полученные множества дизъюнктны.
3. В предыдущем пункте мы не пользовались конечностью объединения.

■

Пример 2.1.3 (Важный пример: полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^n$ и полукольцо биодических ячеек в $\mathbb{R}^n$). Первое обозначается $\mathcal{P}^n$, второе — $\mathcal{P}^n_d$.

Рассмотрим два вектора
$$\begin{matrix} a = (a_1, \ldots a_n) \\ b = (b_1, \ldots b_n) \end{matrix}, \quad \forall i \colon b_i \geqslant a_i$$
Тогда $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \colon a_j \leqslant x < b_j\} = \prod [a_j, b_j)$ — ячейка.

Ячейка называется кубической, если $\forall j, k \colon |a_j - b_j| = |a_k - b_k|$.

Возьмем $e = (1, \ldots 1)$ и $\overline{k} = (k_1, \ldots k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}^n$. $[\overline{k}, \overline{k} + e)$ — кубик с целочисленными координатами. Такие ячейки назовем ячейками ранга I. Они покрывают все $\mathbb{R}^n$ и дизъюнктны.

Такие ячейки можно разбить на 2^n меньших ячеек второго ранга: $\left[\frac{\overline{k}}{2}, \frac{\overline{k}+e}{2}\right)$. Аналогично можно продолжить до ранга $S + 1$: $\left[\frac{\overline{k}}{2^S}, \frac{\overline{k}+e}{2^S}\right)$.

Свойства.

- *внутри ранга ячейки не пересекаются*
- *ячейки разных рангов либо не пересекаются, либо одна содержится в другой*
- *если Q — ячейка ранга k, Q' — ячейка ранга $k+1$, то $Q \setminus Q'$ — объединение ячеек ранга $k+1$*

$\mathcal{P}'_d$ — множество всех ячеек $\left[\frac{\overline{k}}{2^S}, \frac{\overline{k}+e}{2^S}\right)$, для $s = 0, 1, \ldots d$ и $\overline{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Теорема 2.1.3. *$\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_d$ — полукольца.*

Теорема 2.1.4. *Для любого открытого непустого $\varnothing \neq G \subset \mathbb{R}^n$ существует счетный набор $P_k \in \mathcal{P}^n_d$*[a] *такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G.$$

[a] Можно считать, что P_k не пересекаются

■ Рассмотрим точку $x \in G$ и шар $B(x,r) \subset G$. Тогда существует такая ячейка S, что существует P_x ранга S, что $x \in P_x \subset B(x,r)$ (просто берем диаметр ячейки менее x).

Всего ячеек счетное число, поэтому в покрытии тоже будет счетное, при этом $\bigcup_{x\in G} P_x = G$. ■

2.2 Объем

Определение 15: Объем

Рассмотрим множество T, полукольцо $\mathcal{P} \subset 2^T$. Тогда $\mu\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — объем, если

(i) $\mu \geqslant 0$
(ii) $\mu(\varnothing) = 0$
(iii) μ конечноаддитивна:

$$P, P_1, \dots P_k \in \mathcal{P},\ \bigsqcup_{j=1}^{k} P_j = P \Longrightarrow \mu(P) = \sum_{j=1}^{k} \mu(P_j).$$

Пример 2.2.1. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 = \{[a,b)\}$, $\mu([a,b)) = b - a$.

Пример 2.2.2. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g монотонно возрастает. Тогда $\nu_g([a,b)) = g(b) - g(a)$ — тоже объем.

Пример 2.2.3. $\mathcal{P}$ — множества на плоскости, которые либо ограничены, либо дополнение ограничено.

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1 & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}, \quad \mu_2(A) = \begin{cases} +\infty & A \text{ неограничено} \\ 0 & A \text{ ограничено} \end{cases}$$

Пример 2.2.4 (классический объем в $\mathbb{R}^n$). Рассмотрим $\mathcal{P}^n$, $P = \prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$, где $\lambda_n(P) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Упражнение. Проверить, что это объем.

Теорема 2.2.1 (о свойствах объема). *Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P}$, μ — объем на $\mathcal{P}$. $P, P_1, \dots P_n \in \mathcal{P}$.*

1. *(монотонность) $P' \subset P \Longrightarrow \mu(P') \leqslant \mu(P)$*
2. *(усиленная монотонность) P_k — дизъюнктны,*

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \subset P \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \leqslant \mu(P).$$

3. *(конечная полуаддитивность)*[a]

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k \Longrightarrow \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

[a]Здесь не предполагается, что $\bigcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$

■

1. Если $P \subset P'$, то $P \setminus P' = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P}$ и Q_k дизъюнктны.

   Тогда $P = P' \cup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$.

$$\mu(P) = \mu(P') + \sum_{k=1}^{n} \mu(Q_k) \geqslant \mu(P').$$

2. $P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и Q_j дизъюнктны.

   Тогда $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \cup \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) + \sum_{j=1}^{N} (Q_j) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

3. Пусть $P \cap P_k = P'_k \in \mathcal{P}$. Тогда $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m_k} \underbrace{Q_{k_j}}_{\subset P'_k}$ — дизъюнктны.

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{k_j}) \overset{\text{по 2}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \mu(P'_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

■

Замечание. Если $\mathcal{P}$ — алгебра, то по аксиоме (iii) можно проверять только для двух множеств, а далее по индукции.

Замечание. Если $\mathcal{P}$ — алгебра, $A, B \in \mathcal{P}$, $B \subset A$, то

$$\mu(B) < +\infty \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

2.3 Мера и ее свойства

Определение 16: Мера

Пусть $\mathcal{P}$ — подкольцо, μ — объем на $\mathcal{P}$. μ называется мерой, если μ счетно-аддитивен:

$$P, P_k \in \mathcal{P},\ P_k - \text{дизъюнктны}, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \Longrightarrow \mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

[a]

[a]Сумма в этом ряду не зависит от порядка, так как он положительный.

Пример 2.3.1.

- Классический объем λ_n в $\mathbb{R}^n$ (докажем позже)
- $\left.\begin{array}{l} \nu_g([a,b)) = g(b) - g(a) \\ g \nearrow \text{ и непрерывна слева} \end{array}\right\} \Longrightarrow \nu_g$ — мера (Упражнение)

Теорема 2.3.1 (о счетной полуаддитивности меры). *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — объем на $\mathcal{P}$. Тогда μ — мера, когда* *для любых $P, P_k \in \mathcal{P}$*

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \Longrightarrow \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

■

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ $P'_k = P_k \cap P$, $P = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P'_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, где Q_{k_j} — дизъюнктны. Тогда

$$\mu(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \underbrace{\mu(Q_{k_j})}_{\leqslant \mu(P'_k) \leqslant \mu(P_k)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Пусть $Q, Q_j \in \mathcal{P}$, Q_j — дизъюнктны и $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$.

Из полуаддитивности следует, что $\mu(Q) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j)$. Теперь заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{n} Q_j \subset Q \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_j) \leqslant \mu(Q).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) \leqslant \mu(Q).$$

■

Теорема 2.3.2 (о нерпрерывности меры снизу). *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, μ — объем на $\mathfrak{A}$. μ — мера, согда для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ таких, что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ верно следующее свойство*[a]

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \Longrightarrow \mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

[a]Это свойство называется «непрерывностью меры снизу»

■

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Рассмотрим новую систему дизъюнктных множеств из $\mathfrak{A}$:

$$A'_1 = A_1,\ A'_2 = A_2 \setminus A_1,\ A'_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A, \quad A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A'_n.$$

Так как A'_j дизъюнктны,

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A'_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнктны. Рассмотрим такие $A_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_j$. Так как $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$,

$$\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

Из конечной аддитивности объема следует, что

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A).$$

Значит, μ — мера.

■

Определение 17: Конечный объем

Рассмотрим множество T, полукольцо $\mathcal{P}$ и объем μ на $\mathcal{P}$. Тогда μ называется конечным объемом, если $\mu(T) < \infty$.

Теорема 2.3.3 (о непрерывности меры сверху). *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, μ — конечный объем на $\mathfrak{A}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) μ — *мера*

(ii) *для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено*[a]

$$A_{k+1} \subset A_k,\ A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \mu(A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(A).$$

(iii) *для всех $A_k \in \mathfrak{A}$ выполнено*

$$A_{k+1} \subset A_k,\ \varnothing = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Longrightarrow \mu(A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

[a] Это и называется непрерывностью меры сверху

■

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Пусть $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$, тогда $A_1 = A \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ и B_j дизъюнктны. Следовательно,

$$\mu(A_1) = \mu(A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu(A) + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)}_{\mu(A_1)-\mu(A_{n+1})}$$

$$\underbrace{\cancel{\mu(A_1)}}_{\text{конечно}} = \mu(A) + \cancel{\mu(A_1)} - \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Очевидно

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где B_j дизъюнктны и $B_j, A \in \mathfrak{A}$. Проверим счетную аддитивность. Рассмотрим

$$A_k = B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \ldots = A \setminus B_1 \setminus B_2 \setminus \ldots \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \infty$. Следовательно,

$$= \mu(A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$= \mu\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_j\Big) = \mu(A) - \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)$$

Получили, что $\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j)$, значит, μ — мера.

■

2.4 Продолжение меры. Построение меры по внешней мере.

Определение 18: Внешняя мера

T — произвольное множество, $\tau\colon 2^T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. τ — внешняя мера, если

(i) $\tau \geqslant 0$

(ii) $\tau(\varnothing) = 0$

(iii) (счетная полуаддитивность)

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Longrightarrow \tau(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k).$$

Замечание. τ конечно полуаддитивна.

Замечание. τ монотонна: $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \tau(E_1) \leqslant \tau(E_2)$

Определение 19: τ-измеримо

Пусть τ — внешняя мера на T. Множество A — τ-**измеримо**, если для любого $E \subset T$[a]

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{2.4.1}$$

[a]В этом неравенстве знак $\leqslant$ есть всегда

Теорема 2.4.1. *Пусть τ — внешняя мера, $\mathfrak{A}_\tau$ — система τ-измеримых множеств. Тогда $\mathfrak{A}_\tau$ — σ-алгебра и $\tau \mid_{\mathfrak{A}_\tau}$ — мера.*

■

0. $\varnothing \in \mathfrak{A}_\tau$

1. Докажем, что $A \in \mathfrak{A}_\tau \Longrightarrow T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$ Заметим, что

$$E \setminus A = E \cap (T \setminus A) \quad E \setminus (T \setminus A) = E \cap A.$$

По определению τ-измеримости 2.4.1 для всех $E \subset T$

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)) = \tau(E \setminus (T \setminus A)) + \tau(E \cap (T \setminus A)).$$

Следовательно, $T \setminus A \in \mathfrak{A}_\tau$.

2. Докажем, что $A, B \in \mathfrak{A}_\tau \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}_\tau$. Рассмотрим произвольное множество $E \subset T$. Запишем для него условие 2.4.1 для A

$$\begin{aligned}\tau(E) &= \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \\ &= \tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B) + \tau((E \setminus A) \setminus B) = \\ &= \big(\tau(E \cap A) + \tau((E \setminus A) \cap B)\big) + \tau(E \setminus (A \cup B)) \geqslant \\ &\geqslant \tau(E \cap (A \cup B)) + \tau(E \setminus (A \cup B))\end{aligned}$$

Так как неравенство в обратную сторону верно всегда, $A \cap B \in \mathfrak{A}_\tau$.

3. Проверим конечную аддитивность τ на $\mathfrak{A}_\tau$. Хотим доказать, что для дизъюнктных $A, B \in \mathfrak{A}_\tau$ выполнено

$$\tau(A) + \tau(B) = \tau(A \cap B).$$

Заметим, что для всех E

$$\begin{aligned}(E \cap (A \cup B)) \cap A = E \cap A \\ (E \cap (A \cup B)) \setminus A = E \cap B\end{aligned}$$

Подставим в условие τ-измеримости 2.4.1

$$\tau(E \cap (A \cup B)) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B).$$

Теперь подставим в качестве $E = T$

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B).$$

4. Проверим, что $\mathfrak{A}_\tau$ — σ-алгебра. Для этого осталось доказать, что

$$\forall A_j \in \mathfrak{A}_\tau \colon \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}_\tau.$$

Обозначим $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

(a) Пусть все A_j дизъюнктны. Для всех E верно

$$\tau(E) = \tau\Big(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \tau\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) =$$

Воспользуемся конечной аддитивностью и тем, что $E \setminus A \subseteq E \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$:

$$= \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A).$$

Устремим $n \to \infty$ и воспользуемся счетной аддитивностью для дизъюнктных множеств:

$$\begin{aligned} \tau(E) &\geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A) \geqslant \\ &\geqslant \tau\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\Big) + \tau(E \setminus A) \geqslant \\ &\geqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E) \end{aligned}$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{A}_\tau$.

(b) Если A_j не дизъюнктны, рассмотрим новые A'_j :

$$A'_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k.$$

A'_j дизъюнктны и измеримы, при этом их объединение равно A. Тогда по первому пункту A измеримо.

$\mu = \tau\,|_{\mathfrak{A}_\tau}$, при этом известно, что $\tau\,|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — объем и τ полудаддитивна. По теореме о счетной полуаддитивности, τ — мера.

■

Лекция 4: †

23 Sept

Определение 20: Полная мера

Пусть μ — мера на полукольце $\mathcal{P}$. Мера называется полной, если

$$e \in \mathcal{P},\ \mu(e) = 0 \Longrightarrow \forall e' \subset e\colon e' \in \mathcal{P}.$$

Следствие 5 (Ключевое свойство построения меры). $\tau\,|_{\mathfrak{A}_\tau}$ — полная мера.

■ Рассмотрим $e \in \mathfrak{A}_\tau$ и $e' \subset e$, причем $\tau(e) = 0$. Хотим доказать, что $e' \in \mathfrak{A}_\tau$. Хотим проверить такое равенство для всех $E \in T$:

$$\tau(E) = \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

По монотонности меры, $\tau(E) \geqslant \tau(E \setminus e')$. Так как $E \cap e' \subset E \cap e \subset e$,

$$0 \leqslant \tau(E \cap e') \leqslant \tau(e) = 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\tau(E) \geqslant \tau(E \cap e') + \tau(E \setminus e').$$

А в другую сторону это неравенство верно всегда в силу полуаддитивности внешней меры. ■

2.5 Продолжение меры. Построение внешней меры.

Обозначение. Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P}$ и μ_0 — меру на нем. Пусть

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P} \right\}.$$

Если E нельзя покрыть счетным набором P_j, будем считать $\mu^{*(E)=+\infty}$.

Теорема 2.5.1. *μ^* — внешняя вера и $\mu^*(E) = +\infty$.*

■

1. $E \in \mathcal{P} \overset{?}{\Longrightarrow} \mu^*(E) = \mu_0(E)$. Нужно проверить неравенство в две стороны.

   $\boxed{\leqslant}$ Возьмем покрытие $\{E, \varnothing, \varnothing, \ldots\}$. Тогда $\mu^*(E) \leqslant \mu_0(E) + 0$.

   $\boxed{\geqslant}$ По теореме о счетной полуаддитивности меры, если $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P}$, то $\mu_0(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \leqslant \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$.

   В частности, $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2. Проверим счетную полуаддитивность μ^*, то есть докажем, что

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n \Longrightarrow \mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

   Каждое множество нужно оценить с некоторой точностью разбиения, а потом устремить разницу к нулю.
   Если сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = +\infty$, то неравенство автоматически выполнено. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ конечно.
   Тогда существует такое покрытие $\{P_j^{(n)}\}$, что ошибка не большая для фиксированного $\varepsilon > 0$:

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

   Далее запишем для E

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(n).$$

   Так как μ^* — это инфимум, можно перейти к следующему неравенству

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j^{(n)}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

   Теперь устремим $\varepsilon \to 0$ и получим

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

■

2.5.1 Теорема о продолжении меры

Теорема 2.5.2 (Теорема о продолжении меры). *Пусть μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{P}$, μ^* — внешняя мера, построенная ранее. По ней построена σ-алгебра $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ измеримых по μ^* множеств.*

Тогда $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$[a] и $\mu^* |_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — продолжение меры μ_0.

[a] Это содержательная часть

■ Хотим проверить, что если $P \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$, то есть

$$\forall E \in T\colon \mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Так как $\leqslant$ верно всегда, остается доказать неравенство в обратную сторону. Разберем два случая:

$\boxed{E \in P}$ Воспользуемся главной аксиомой полукольца: $E \backslash P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ и дизъюнктны. Тогда $E = \underbrace{(P \setminus E)}_{\in \mathcal{P}} \cup \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \underbrace{Q_j}_{\in \mathcal{P}}$, причем это объединение дизъюнктное. Теперь заметим, что для μ_0 есть конечная аддитивность, а μ^* совпадает с μ на элементах кольца, и поэтому

$$\mu^*(E) = \mu_0(E) = \mu_0(P \cap E) + \mu_0\Big(\bigsqcup_{j=1}^{N} G_j\Big) =$$

$$= \mu^*(P \cap E) + \sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j)$$

Так как μ^* полуаддитивна, $\sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j\Big) = \mu^*(E \setminus P)$. Тогда

$$\mu^*(E) = \mu^*(P \cap E) + \mu^*(E \setminus P).$$

$\boxed{E \text{ произвольное}}$ Если $\mu^*(E) = +\infty$, то неравенство сразу верно, поэтому будем считать, что $\mu^*(E) < +\infty$. Воспользуемся этим и приблизим с точностью до любого ε к объединению элементов полукольца.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим такие $P_j \in \mathcal{P}$, что $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, при этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Так как $P_j \in \mathcal{P}$:

$$\mu_0(P_j) = \mu^*(P_j) \geqslant \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus E).$$

Тогда

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(P_j \cap P) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^*(P_j \setminus P) \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big) \cap P\right) + \mu^*\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big) \setminus P\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\geqslant}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\geqslant} \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P)$$

■

Определение 21: Стандартное продолжение (продолжение Каратеодори)

$\mu = \mu^* |_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}$ — стандартное продолжение или продолжение Каратеодори меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$.

Замечание.

1. μ — полная мера, так как сужение — тоже полная мера.
2. Повторное продолжение бессмысленно.

   Упражнение. Проверить, что внешняя мера получится такой же.
3. $\mu(A) = \inf \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \;\middle|\; A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P} \right\}$

2.6 Единственность стандартного построения

Определение 22: σ-конечность объема и меры

Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо на 2^T, μ — объем или мера. Тогда μ называется σ-конечным(ой), если существуют такие $P_j \in \mathcal{P},\ \mu(P_j) < +\infty$, что

$$T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j.$$

Теорема 2.6.1. *Пусть μ — стандартное продолжение μ_0 с $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}$, а ν — какое-то продолжение μ_0 с $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}'$. Тогда*

1. *для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$: $\nu(A) \leqslant \mu(A)$, более того, если $\mu(A) < +\infty$, то $\nu(A) = \mu(A)$*
2. *если μ_0 — σ-конечная мера, то $\mu = \nu$ на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$*

В частности, σ-конечная мера единственным образом продолжается на $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$[a].

[a] Это борелевская оболочка

■

1. $\boxed{1}$ Проверим неравенство. Известно, что $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathcal{P}$, следовательно,

$$\nu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) \underset{\nu - \text{продолжение } \mu_0}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j).$$

   Перейдем к $\inf$:

$$\nu(A) \leqslant \mu^*(A) = \mu(A).$$

   $\boxed{2}$ Пусть $P \in \mathcal{P}$ и $\mu(P) = \nu(P) < \infty$. Докажем, что $\nu(P \cap A) = \mu(P \cap A)$. Предположим, что $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$.

$$\begin{aligned} \mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \\ < \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P) \end{aligned}$$

   Противоречие.

   $\boxed{3}$ Пусть $\mu(A) < \infty$, тогда существуют такие $P_j \in P$, что $A \subset \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ [1], где $\mu(P_J) = \mu_0(P_j) < \infty$. Тогда из счетной аддитивности ν

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j \cap A) \underset{\text{по } 2}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j \cap A) = \mu(A).$$

   Доказали первый пункт.

2. Пусть мера σ-конечна. Тогда все пространство можно представить в виде объединения конечных объемов и применить подпункт 3 из пункта 1 доказательства.

$$\mu_0 - \sigma\text{-конечна} \Longrightarrow T = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \text{ дизъюнктны},\ \mu(P_j) < \infty.$$

■

2.7 Определения и простейшие свойства меры Лебега в $\mathbb{R}^n$

На полукольце ячеек $\mathcal{P}^n$ и диодическом полукольце ячеек $\mathcal{P}_d^n$ мы определили классический объем $\lambda_n = \lambda$.

[1] Можно всегда считать объединение дизъюнктным, так как можно заменить на него по стратегии, использованной ранее

Теорема 2.7.1. *Классический объем λ — σ-конечная мера на $\mathcal{P}^n$.*

■ σ-конечность очевидна — подойдет покрытие единичными кубами.

Докажем, что это мера. Для этого можно доказать счетную полуаддитивность, то есть

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \Longrightarrow \lambda(P) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j).$$

Пусть $P = [a, b)$ и $P_j = [a_j, b_j)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, расширим один отрезок, а второй наоборот сузим.

Пусть $b' \in [a, b),\ P' = [a, b'] \subset P\colon \lambda([a, b)) - \lambda([a, b']) < \varepsilon$.

Еще возьмем $a'_j < a_j,\ P_j \subset (a'_j, b_j)\colon \lambda((a'_j, b_j)) - \lambda([a_j, b_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Заметим, что

$$P' \subset P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P'_j.$$

Так как P'_j открытые, а P' компактно, существует конечное подпокрытие

$$\exists j_k\colon P' = [a, b') \subset \bigcup_{k=1}^{N} P'_{j_k} \subset \bigcup_{k=1}^{N} [a_{j_k}, b_{j_k}).$$

Так как μ конечно полуаддитивна,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \geqslant \lambda([a, b')) \geqslant \lambda([a, b)) - \varepsilon.$$

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda([a'_{j_k}, b_{j_k})) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a'_j, b_j)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda([a_j, b_j)) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Итого,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \varepsilon \geqslant \lambda(P) - \varepsilon.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$ и получим требуемое неравенство. ■

Определение 23: Мера Лебега

Мера Лебега — стандартное продолжение классического объема. $\mathfrak{A}^n$ — получающаяся σ-алгебра — множества измеримые по Лебегу.

Упражнение. Продолжения с $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_d$ совпадают.

Свойства.

1. *Все открытые множества измеримы. Более того, если G открыто и $G \neq \varnothing$, то $\lambda(G) > 0$.*

2. *Все замкнутые множества измеримы (дополнение к открытому). $\lambda(\{a\}) = 0$.*

3. *Если A измеримо и ограничено, то $\lambda(A) < \infty$ (можно ограничить параллелепипедом).*

4. *Если E_k измеримо и $\lambda(E_k) = 0$, то $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.*

5. *Если E — счетное множество, то $\lambda(E) = 0$.*

6. *Если E — множество и для всех $\varepsilon > 0\ \exists E \subset E_\varepsilon$ измеримое и $\lambda(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то E измеримо и $\lambda(E) = 0$.* ■ *Построим последовательность $E_n\colon \lambda(E_n) < \frac{1}{n}$. Можно считать, что $E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$. Тогда $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. По непрерывности сверху*

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n).$$

Так как λ полная, предел равен нулю, E измеримо и $\lambda(E) = 0$. ■

$\boxed{7}$ *Рассмотрим* $\mathbb{R}^n$ *и гиперплоскость* $H_k = \{x_k = 0\}$. $\lambda(H_k) = 0$. ■

$$H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,\ Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0, |x_l| < j \text{ при } k \neq l\}.$$

Запихнем в маленький параллелепипед:

$$P_\varepsilon = [-j, j) \times \ldots \times \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon)}_{k} \times \ldots \times [-j, j).$$

$$\lambda(P_k) = (2j)^{n-1} \cdot 2\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

■

$\boxed{8}$ *В* $\mathbb{R}$ *континуальное множество меры 0 — канторово множество.*

$\boxed{9}$ *Упражнение. Существует неизмеримое множество.*

2.8 Регулярность меры Лебега

Определение 24: Регулярная мера

Рассмотрим топологическое пространство T, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(T)$, μ — мера на $\mathfrak{A}$. μ называется регулярной, если

(i) $\forall A \in \mathfrak{A}\colon \quad \mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ открыто},\ A \subset G\}$

(ii) $\forall A \in \mathfrak{A}\colon \quad \mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ замкнуто},\ A \supset F\}$

Упражнение. Если $\mu(T) \leqslant \infty$, то из (i) следует (ii).

Лемма 2. *Для регулярности меры достаточно выполнения одного из двух свойств:*

(a) $\forall \varepsilon > 0\, \forall A \in \mathfrak{A}\, \exists$ *открытое* $G\colon \quad A \subset G,\ \mu(G \setminus A) < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0\, \forall A \in \mathfrak{A}\, \exists$ *замкнутое* $F\colon \quad A \supset F\ \mu(A \setminus F) < \varepsilon$

■

$\boxed{(a) \iff (b)}$ (a) для A равносильно (b) для $T \setminus A$

$\boxed{(a) \implies (i)}$ Очевидно

■

Теорема 2.8.1. *Мера Лебега регулярна.*

■ Проверим условие (a) из прошлой леммы.

1. Пусть $\lambda(A) < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие $P_j \in \mathcal{P}^n$, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset A, \quad \lambda(P_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_J) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Немного расширим ячейки, чтобы они стали открытыми множествами. Пусть $P_j = [a_j, b_j)$, построим $P_j \subset P'_j(a'_j, b_j)$, при этом $\mu(P'_j) - \mu(P_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Теперь $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P'_j \supset A$ и

$$\lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P'_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Если $\mu(A) = \infty$, то можем представить $\mathbb{R}^n = \coprod_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — дизъюнктные ячейки из $\mathcal{P}^n$. Тогда можем воспользовался σ-конечностью: представим A так

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(Q_j \cap A)}_{\text{все конечны по мере}} .$$

Каждое из $(Q_j \cap A)$ можем приблизить каким-то открытым множеством G_j: $G_j \cap A \subset G_j$ и $\lambda(G_j \setminus (Q_j \cap A)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Тогда возьмем $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A$, поэтому $\lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$.

■

Следствие 6. Если E измеримо по Лебегу, то существуют компактные множество K_j такие, что

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e, \quad \lambda(e) = 0.$$

■ Рассмотрим замкнутые $F_j \subset E$, что $\lambda(E \setminus F_j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$ и $F_j \subset F_{j+1} \subset \ldots$

Построим из F_j компакты: $K_j = F_j \cap \overline{B(0, j)}$.
Рассмотрим e:

$$e = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Тогда

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup e.$$

Проверим, что $\lambda(e) = 0$.

$$\lambda(e) \leqslant \lambda(E \setminus F_j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Значит, e измеримо и $\lambda(e) = 0$. ■

Следствие 7. Если E измеримо, то существуют открытые G_j и измеримое e', что $\lambda(e') = 0$ и

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \setminus e'.$$

Теорема 2.8.2 (Ключевой момент. Почему интеграл Лебега удобнее Римана). *Пусть G — открытое в $\mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, f непрерывно дифференцируема в G.*

1. *Если $E \subset G$, то $f(E)$ измеримо.*
2. *Если $\lambda(E) = 0$, то $\lambda(f(E)) = 0$.*