

[section]

Конспект по матанализу в формате вопросов
коллоквиума
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 4, 2019

Contents

Chapter 1

Введение

1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

1. Алгебраические операции

(а) сложение $a, b \in \mathbb{R}$: сумма $a + b$ определяется единственным образом

- i. $a + b = b + a$ (коммутативность)
- ii. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтральный по сложению)
- iv. $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$ (обратный по сложению)

(б) умножение $x, y \in \mathbb{R}$: произведение $x \cdot y$ определяется единственным образом

- i. $xy = yx$ (коммутативность)
- ii. $(xy)z = x(yz)$ (ассоциативность)
- iii. $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ (нейтральный по умножению)
- iv. $x(a + b) = xa + xb$ (дистрибутивность)
- v. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$ (обратный по умножению)

2. Порядок на \mathbb{R}

Def 1. Упорядоченная пара $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Def 2. Декартово произведение $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$.

Def 3. Отношение между элементами множеств X, Y - $A \subset X \times Y$

Отношения порядка: $a < b, a > b, a = b$

$$(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \text{ (антисимметричность)} \\ a < b \end{cases}$$

(b) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (транзитивность)

(c) $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e) $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

1.2 Множества в \mathbb{R}

Def 4 (Отрезки, интервалы, сегменты). $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ (замкнутый отрезок)}$$

$$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (открытый слева отрезок)}$$

$$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (открытый справа отрезок)}$$

$$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ (открытый отрезок)}$$

Def 5 (Лучи). $a \in \mathbb{R}$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Def 6.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$. Любое такое x - верхняя граница A .

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$. Любое такое y - нижняя граница A .

// $\pm\infty$ - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

1.3 Натуральные числа

1.3.1 Аксиома Архимеда

Аксиома (Архимед). Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

Lemma. $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Доказательство. Предположим противное. $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$. Тогда $\forall n : n < x^{-1}$, а это противоречит аксиоме Архимеда. \square

1.3.2 Аксиома индукции

Аксиома (индукции). Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Statement (Обоснование метода математической индукции). Пусть P_1, P_2, \dots - последовательность суждений. Предположим, что

1. P_1 - верно

2. Для любого $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$

Тогда все условия P_i верны.

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$ и его дополнение $B = \mathbb{N} \setminus A$. Если не все P_i верны, то $B \neq \emptyset$. По аксиоме индукции существует наименьший элемент $l \in B$. Если $l \neq 1$, $l-1 \notin B$. А тогда P_{l-1} - верно, из чего следует, что P_l - верно. То есть $l \notin B$. Противоречие. Иначе не выполнено первое условие. \square

1.3.3 Неравенство Бернулли

Theorem 1.3.1 (Неравенство Бернулли). Пусть $a > 1$. Тогда $a^n \geq 1 + n(a-1)$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство. Индукция:

База: $n = 1 : a \geq 1 + (a-1)$

Переход: $n \rightarrow n+1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a-1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a-1)a = (a-1) + 1 + n(a-1)a = \\ &1 + (a-1)(1+na) \geq 1 + (a-1)(1+n) \end{aligned}.$$

\square

Corollary. Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ для $a > 1$ не ограничено сверху.

Доказательство. Пусть $a^n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + (a-1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$.
Противоречие \square

1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

Def 7. Щель – пара вещественных чисел (A, B) , где $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, такая что всякое число из A не более любого из B .

Def 8. Число c лежит в щели (A, B) , если $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

Def 9. Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

Аксиома (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

Statement. Квадратный корень из 2 существует и единственный.

Доказательство.

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, \quad B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists v : a \leq v \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $v^2 = 2$.

Lemma. В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.

Докажем, что $v^2 = 2$. Пусть $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$. То есть $v \in A \vee v \in B$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

2. Единственность

Возьмем $c \geq 0 : c^2 = 2$. Пусть существует еще одно $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

1.3.5 Иррациональность корня из двух

Def 10. Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число c , для которого верно $c^2 = 2$.

Theorem 1.3.2. Квадратный корень из двух иррационален.

Доказательство. Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q^2$$

□

1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

Def 11. $\langle u, v \rangle$ - любой отрезок с концами в u, v ($u \leq v$). Его длина $|\langle u, v \rangle| := v - u$

Theorem 1.3.3. Пусть $c > 0$. Тогда на каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$ существует точка вида rc , где $r \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Заменим $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$. Теперь будем доказывать $a \leq r \leq b$. Существует $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$. Рассмотрим множество $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$. Среди таких p существует наименьший p_0 .

Возьмем $\frac{p_0-1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$ □

Corollary. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует рациональное число.

Theorem 1.3.4. На каждом отрезке вида (a, b) , где $a < b$, существует иррациональное число.

Доказательство. По следствию из теоремы 1.3.3 $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$. Тогда $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$. □

1.4 Свойства подмножеств \mathbb{R}

1.4.1 Грани

Def 12 (supremum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

Def 13 (infimum). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено снизу.

Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его нижних границ.

Theorem 1.4.1 (об описании точной верхней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \sup A$

2. x – верхняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$

$x = \sup A \Rightarrow x$ – верхняя граница. Пусть $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$. Тогда $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$. Но из этого следует, что $x - \varepsilon$ тоже наименьшая граница, которая меньше x . Следовательно, $x \neq \sup A$. Противоречие.

$2 \Rightarrow 1$

x – верхняя граница, $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$. Докажем, что x – наименьшая верхняя граница.

Пусть $\exists y < x : y$ - верхняя граница A . Рассмотрим $(y, x]$. Для него верно $\forall z \in (y, x] : z \notin A$. Но тогда x - не верхняя граница. \square

Theorem 1.4.2 (об описании точной нижней грани). Пусть $A \neq \emptyset$ и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1. $x = \inf A$
2. x - нижняя граница для A и $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

1.4.2 Связность отрезка

Def 14. Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

Note. Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

Theorem 1.4.3 (о связности отрезка). Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

Для любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$: если $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$ - замкнуты $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$, то $E \cap F \neq \emptyset$.

Доказательство. E, F замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что $E \cap F = \emptyset$. Не умоляя общности $x = \sup E < b$, тогда $(x, b] \in F$. С одной стороны, x - предельная точка для E , с другой стороны, предельная точка для F . Так как E, F - замкнуты, $x \in E \wedge x \in F$. Следовательно, $E \cap F \neq \emptyset$. Противоречие. \square

1.4.3 Предельные и изолированные точки

Def 15. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – любой открытый интервал вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Def 16. Проколота окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ – объединение двух открытых интервалов вида $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

Def 17. Пусть $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$.

u называется предельной точкой для A , если в любой проколотой окрестности точки u есть точки множества A .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

Examples.

1. \mathbb{Z}, \mathbb{N} не имеют предельных точек.
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет одну предельную точку 0.

3. Для \mathbb{Q} все предельные точки - \mathbb{R} .

Def 18. Все точки множества A , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A - \text{изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

Examples.

1. $[1, 2] \cup \{3\}$ имеет одну изолированную точку 3.
2. $[1, 2]$ не имеет ни одной изолированной точки.

Lemma. Пусть A ограничено сверху (снизу), $y = \sup A$ ($y = \inf A$).

$$\left[\begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y - \text{предельная точка } A \\ y \in A \end{array} \right.$$

1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

Theorem 1.4.4 (о вложенных отрезках). $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$.

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - последовательность замкнутых отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots \end{array}$$

Заметим, что $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$. Тогда множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$.

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $k = j$:

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

A эта точка принадлежит всем отрезкам. □

Note. Эта точка единственна тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

Доказательство. Если такая точка единственная, (A, B) - узкая щель. То есть $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$. Не умоляя общности, $j \geq k$. Тогда $b_j - a_j < \varepsilon$.

В обратную сторону очевидно. □

1.4.5 Теорема о компактности

Theorem 1.4.5 (о компактности). *Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть A - ограничено. Тогда $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$. Получаем $A \subset [a_1, b_1]$. Возьмем середину отрезка $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Теперь $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] - \text{бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] - \text{бесконечно} \end{cases}$. Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$. Этот x и есть предельная точка для множества A .
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$. Тогда $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$. \square

1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

Theorem 1.4.6 (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $I_n = [a_n, b_n]$. По теореме о вложенных отрезках 1.4.4 $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Если $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$, то $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$. А тогда $t = b_{n_0}$, которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ и правые концы одинаковы. \square

1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть $x \in [0, 1)$. Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов $\{I_i\}$. Будем собирать десятичную запись:

1. i_1 - номер интервала, куда попало x
2. i_2 - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей



Figure 1.1: Decimal decomposition

3. И так далее

Получим $0.i_1i_2i_3\dots$ – десятичную запись числа x .

Note. Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

Theorem 1.4.7. Пусть (j_1, j_2, \dots) – цифры от нуля до девяти. $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$. Тогда $\exists! x \in [0, 1)$ для которого $0.j_1j_2\dots$ – десятичное представление.

Доказательство. Рассмотрим последовательность полуинтервалов $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. По теореме 1.4.6 существует непустое пересечение, равное одной точке – и есть наше число.

□

Chapter 2

Пределы

2.1 Основные свойства пределов функций

2.1.1 Определение предела

Def 19. b – предел функции f в точке x_0 , если для любой окрестности U в точке b существует такая проколота окрестность $\overset{\circ}{V}$ точки x_0 : $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$.

Def 20. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

Def 21. b – предел функции f в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если $x_0 = \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Note.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

2.1.2 Единственность предела

Theorem 2.1.1. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x - предельная точка для A .

Если a, b - предельные для f в точке x_0 , то $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$. Тогда существуют U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Противоречие. □

2.1.3 Теорема о пределе сужения

Def 22. A' – множество всех предельных точек.

Theorem 2.1.2 (о пределе сужения). $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$

Пусть $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$. Тогда $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$.

Доказательство. По условию $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$, тем более $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$. \square

Theorem 2.1.3 (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$, то $\exists \lim_{x_0} f = z$.

Доказательство. $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$.

$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$ - тоже окрестность точки x_0 . \square

2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

Statement. $f(x) = x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

Statement. $f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

2.1.5 Предельный переход в неравенстве

Theorem 2.1.4 (Предельный переход в неравенстве). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$. Предположим, что существуют пределы у f, g в точке x_0 равные соответственно a, b . Пусть $a < b$.

Тогда существует проколота окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$.

Доказательство. Рассмотрим U_1, U_2 - не пересекающиеся окрестности точек a, b . Так как a, b - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned} .$$

Возьмем $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$. \square

2.1.6 Принцип двух полицейских

Theorem 2.1.5 (Принцип двух полицейских). $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$

Пусть $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x_0} g = b$.

Доказательство. Рассмотрим $\overset{\circ}{U}(b)$. Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2 : \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

\square

2.1.7 Предел линейной комбинации

Theorem 2.1.6 (Предел линейной комбинации). $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$.

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \alpha a + \beta b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ &= |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leq \\ &\leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$. Будем считать, что $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ &\exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned}.$$

Теперь возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$:

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ и $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Доказательство. Если $c = 0$, утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что $c > 0$. Запишем определение предела f :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

□

2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$ в некоторой проколотой окрестности x_0 , а $f(x) - a$ и $g(x) - b$ стремятся к нулю в точке x_0 . Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

2.1.10 Предел частного

Statement. $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$, $b \neq 0$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Доказательство.

Lemma. В условии утверждения функция g удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$. То есть $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

Доказательство. (леммы) $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$.

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a)g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \in \mathbb{R}$.

Statement. Если $|q| < 1$, то $f(n)$ имеет предел, иначе не имеет предела.

Доказательство.

$$|q| < 1$$

Lemma.

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Доказательство.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$. Подойдет $N = \frac{1}{\varepsilon \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$. \square

Из леммы получаем: $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$.

2. $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{нет предела}$$

3. $q = 1$, $f(n) = n + 1$ - нет предела

4. $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5. $q < -1$

$$|f(n)| = \left| \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \right| \geq \frac{1}{|q-1|} (|q|^{n+1} - 1).$$

Эта функция тоже не имеет предела. \square

2.1.12 Предел монотонной функции

Def 23. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$

f – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (} f(x_1) < f(x_2) \text{)}.$$

f – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)}.$$

f – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

Theorem 2.1.7 (о пределе монотонной функции). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ - монотонная и ограниченная функция на $A, x_0 \in A'$, (допускается $x_0 = \pm\infty$, то есть A - неограничено). Если f - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Доказательство. Пусть f - возрастает и ограничена сверху. $f(x) \leq M \forall x \in A$.

$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Докажем, что $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

Note. Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

2.1.13 Ряды

Def 24. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ряд – символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичные суммы ряда – последовательность $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}, S_k = \sum_{n=1}^k a_n$.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

Statement.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \text{ - сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Theorem 2.1.8 (Лейбниц). Пусть a_n - монотонно убывающая неотрицательная последовательность $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

Доказательство.

\Rightarrow
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

Заменим в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится.

\Leftarrow

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - сходится. Обозначим его сумму за T . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \leq a_1 + a_2 + a_4 + \dots a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□