

Билеты по алгебре  
I семестр

Тамарин Вячеслав

10 января 2020 г.

## Вопрос 1 Векторное пространство

**Def 1.** Пусть  $(V, +)$  — абелева группа,  $F$  — поле, и задана операция (умножение)  $V \times F \rightarrow V$ . Предположим, что  $\forall u, v \in V$  и  $\alpha, \beta \in F$  выполнены следующие свойства:

1.  $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$
2.  $v(\alpha + \beta) = v\alpha + v\beta$
3.  $(v + u)\alpha = v\alpha + u\alpha$
4.  $v \cdot 1 = v$

Тогда  $V$  называется **векторным пространством** над полем  $F$ .

**Property.**

1.  $v \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
2.  $v \cdot (-1) = -v$
3.  $v \cdot (-\alpha) = (-v)\alpha = -(v\alpha)$
4.  $v \cdot \sum \alpha_i = \sum v\alpha_i$
5.  $\sum v_i \cdot \alpha = \sum v_i \alpha$

**Exs.**

1. Множество векторов в  $\mathbb{R}^3$
- 2.

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

3.  $X$  — множество,  $F^X = \{f \mid f : X \rightarrow F\}$   
 $f, g : X \rightarrow F$   
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
 $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$
4.  $F[t]$  — многочлены от одной переменной  $t$

## Вопрос 2 Подпространство, линейная оболочка

**Def 2.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется **подпространством**, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в  $V$ .

**Statement 1** (критерий подпространства). Подмножество  $U \subseteq V$  является подпространством тогда и только тогда, когда  $\forall u, v \in U, \alpha \in F : u + v, u\alpha \in U$ .

**Def 3.** Пусть  $u_1, \dots, u_n \in V$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ . Сумма

$$\sum_{k=1}^n u_k \alpha_k$$

называется **линейной комбинацией** векторов  $u_1, \dots, u_n$  с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Линейная комбинация называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю.

*Note.* Пусть  $S \subseteq V$ , и задан набор чисел  $\alpha_s \in F$ ,  $s \in S$ . Операция бесконечной суммы будет определена только в случае, когда почти все  $\alpha_s$  равны нулю.

**Def 4.** Линейной оболочкой набора  $S$  называется подпространство, порожденное  $S$ , то есть наименьшее подпространство, содержащее  $S$ .

**Designation.** Линейная оболочка набора  $S$  обозначается  $\langle S \rangle$ .

**Statement 2.**  $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \alpha_k \mid u_k \in S, \alpha_k \in F \right\}$

**Def 5.** Если  $\langle S \rangle = V$ , то  $S$  называется **системой образующих** пространства  $V$ .

**Def 6.** Кортеж векторов  $(u_1, \dots, u_n)$  называется **линейно независимым**, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Множество  $S \subseteq V$  называется **линейно независимым**, если любой кортеж, составленный из конечного числа различных векторов из  $S$ , является линейно независимым.

**Def 7.** Базис — линейно независимая система образующих.

## Вопрос 3 Матрицы

### i Конечные матрицы

**Def 8.** Двумерный массив  $m \times n$  элементов поля  $F$  называется **матрицей** размера  $m \times n$  над  $F$ .

**Designation.** Множество таких матриц обозначается  $M_{m \times n}(F)$ . Если  $m = n$ , пишут  $M_n(F)$ . Элемент матрицы  $A$  в позиции  $(i, j)$  записывается  $a_{ij}$ .

**Property.**

- Для двух матриц одинакового размера определена операция поэлементной суммы:  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
- Также определено умножение матрицы на число:  $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$ .
- Произведением матрицы  $A \in M_{m \times n}(F)$  на матрицу  $B \in M_{n \times k}$  называется матрица  $C = AB \in M_{m \times k}(F)$  элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

**Theorem 1.** Множество  $M_{m \times n}(F)$  с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством над полем  $F$ .

*Доказательство.* Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число:

$$\begin{cases} (AB)C = A(BC) \\ A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \\ (AB)\alpha = A(B\alpha) = (A\alpha)B \end{cases}.$$

Все кроме первого свойства очевидны. Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{il} &= \sum_{k \in K} (AB)_{ik} c_{kl} = \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \\ &= \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij} \left( \sum_{k \in K} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j \in J} a_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il} \end{aligned}$$

**Def 9.** Квадратная матрица  $E$  с 1 на главной диагонали и остальными нулями называется **единичной**.

**Property.** Умножение данной матрицы на единичную справа и слева не ее не изменяет.

Матрица  $E_n$  является нейтральным элементом в  $M_n(F)$ . □

### Обобщение конечных матриц

Пусть даны множества  $X_{ij}, Y_{jh}$ , коммутативные моноиды  $(Z_{ih}, +)$ , где  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $h = 1, \dots, k$ , и функции «умножения»  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ . Обозначим через  $X, Y, Z$  наборы множеств  $X_{ij}, Y_{jh}, Z_{ih}$ , соответственно, через  $M(X)$  — множество матриц  $A$  с элементами  $a_{ij} \in X_{ij}$ , и аналогично  $M(Y), M(Z)$ . Тогда можно определить произведение матриц  $A \in M(X)$  и  $B \in M(Y)$  как матрицу  $C = AB \in M(Z)$ , где  $c_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh}$ .

Если все  $X_{ij}, Y_{jh}$  будут коммутативными моноидами, а функция умножения дистрибутивной, умножение матриц тоже будет дистрибутивным и ассоциативным.

### ii Произвольные матрицы

Пусть  $I, J$  — произвольные множества (возможно бесконечные), элементами которых мы будем индексировать строки и столбцы матриц. Пусть  $\forall i \in I \wedge j \in J$  задано множество  $X_{ij}$ , и обозначим набор всех таких множеств через  $X$ . Тогда матрицей размера  $I \times J$  над  $X$  называется функция  $A : I \times J \rightarrow \bigcup X_{ij}$   $(i, j) \mapsto a_{ij}$ , такая что  $a_{ij} \in X_{ij}$ .

**Designation.** Множество матриц размера  $I \times J$  над  $X$  обозначается  $M_{I \times J}(X)$ . Если  $I = \{1\}$ , то матрица размера  $I \times J$  будут называться столбцами длины  $J$ , а если  $J = \{1\}$ , то столбцами высоты  $I$ . Множества строк обозначим данной длины  ${}^J X$ , множество столбцов —  $X^J$ .

Будем считать, что все  $X_{ij}$  — абелевы группы в аддитивной записи. Тогда сумма двух матриц одного размера определяется поэлементно:  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Если все  $X_{ij}$  — векторные пространства над полем  $F$ , также можно определить умножение на число:  $(A\alpha)_{ij} = a_{ij}\alpha$ .

### Умножение матриц

Пусть все операции умножения  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$  дистрибутивны (для  $a \cdot 0 = 0$ ), и в каждом столбце матрицы  $Y$  почти все элементы равны 0.

**Designation.** Обозначим  $M_{J \times H}^{c.f.}(Y) \subset M_{J \times H}(Y)$ , состоящее из всех матриц  $B$ , у которых для любого фиксированного  $h \in H$  почти все элементы  $b_{jh}$  равны 0.

**Def 10.** Пусть  $\forall i \in I, j \in J, h \in H$  заданы операции умножения  $X_{ij} \times Y_{jh} \rightarrow Z_{ih}$ , причем  $\forall x, x' \in X_{ij}$  и  $\forall y, y' \in Y_{jh}$  выполнены равенства

$$(x + x')y = xy + x'y \wedge x(y + y') = xy + xy'.$$

Произведение матриц  $A \in M_{i \times J}(X)$  и  $B \in M_{J \times H}^{c.f.}(Y)$  как матрицу  $AB \in M_{I \times H}(Z)$  с элементами

$$(AB)_{ih} = \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jh}.$$

При этом суммы определены, так как почти все слагаемые равны нулю.

*Note.* Аналогично определяется умножение матриц  $A \in M_{I \times J}^{r.f.}(X)$  и  $B \in M_{J \times H}(Y)$ .

**Lemma 1.** Обычные свойства умножения матриц 1 выполнены, если определены все входящие в формулы операции.

Если  $\forall i, j, h \in I$  заданы дистрибутивные операции умножения  $X_{ij} \times X_{jh} \rightarrow X_{ih}$ , то множество  $M_{I \times I}^{c.f.}(X)$  является кольцом с единицей.

**Designation.** Если  $X_{ij}$  одно и то же поле  $F$  для всех  $i, j$ , будем писать  $M_{i \times J}(F)$  вместо  $M_{I \times J}(X)$ . Если  $I = J$ , то будем писать  $M_I(F)$  вместо  $M_{I \times I}(F)$ . Если  $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$ , то можем писать  $M_{m \times n}(F)$ .

### Другие характеристики матриц

**Def 11.** Множество обратимых элементов кольца  $M_n(F)$  называется полной линейной группой степени  $n$  над  $F$  и обозначается  $GL_n(F)$ .

**Designation.** Для множества  $M_{I \times \{1\}}^{c.f.}(F)$  введем специальное обозначение  $F_{fin}^I$  и будем называть его множеством финитных столбцов высоты  $I$  над  $F$ . Другим словами,  $F_{fin}^I$  — множество финитных (у которых почти все значения равны 0) функций из  $I$  в  $F$ . Аналогично,  ${}^J F_{fin} = M_{\{1\} \times J}^{r.f.}(F)$ .

**Def 12.** Пусть  $A \in M_{I \times J}(F)$ . Матрица  $A^T \in M_{J \times I}(F)$  с элементами  $(A^T)_{ij} = a_{ji}$  называется транспонированной к  $A$ .

**Statement 3.**  $(AB)^T = B^T A^T$

*Note.* Для обозначения столбца часто используется строка  $(a_1, \dots, a_n)^T$ .

## Вопрос 4 Эквивалентные определения базиса

**Theorem 2** (Эквивалентные определения базиса). *Следующие условия на подмножество  $v$  векторного пространства  $V$  эквивалентны:*

- (1)  $v$  — линейно независимая система образующих
- (2)  $v$  — максимальная линейно независимая система
- (3)  $v$  — минимальная система образующих
- (4) любой элемент  $x \in V$  представляется в виде линейной комбинации набора  $v$ , причем единственным образом

*Доказательство.*

**1  $\implies$  2** Пусть  $v$  — не максимальная линейно независимая система. Мы знаем, что  $v$  — система образующих. Тогда любой элемент  $a \in V$  представляется в виде линейной комбинации  $v$ , а значит любой набор, содержащий  $v$ , принадлежит линейной оболочке  $\langle v \rangle$ , следовательно, набор линейно зависимый.

**2  $\implies$  1** Так как  $v$  максимальная линейно независимая система, любой элемент  $a \in V$  выражается через элементы  $v$ . Следовательно,  $v$  — система образующих.

**1  $\implies$  3** Пусть из  $v$  можно убрать некоторые элементы так, что полученный набор  $u$  будет минимальной системой образующих. Тогда любой элемент набора  $v \setminus u$  представим в виде линейной комбинации  $u$ . Следовательно,  $v$  линейно зависим.

**3  $\implies$  1** Если  $v$  линейно зависим, то во всех линейных комбинациях набора  $v$  можно заменить один элемент на линейную комбинацию других. А тогда  $v$  не минимален.

**1  $\implies$  4** Так как  $v$  — система образующих  $\langle v \rangle = V$ . Теперь докажем, что представление единственно. Пусть  $x = va = \sum_{y \in v} ya_y$ ,  $a \in F_{fin}^v$ . Предположим, что  $\exists b \in F_{fin}^v : x = vb$ . Тогда  $0 = va - vb \implies 0 = v(a - b)$ . Так как  $v$  линейно независим, можем сократить:  $0 = a - b$ , значит представление единственно.

**4  $\implies$  1** Так как любой элемент представим в виде линейной комбинации набора  $v$ ,  $\langle v \rangle = V$ . Так как представление единственно,  $v$  линейно независим.

□

## Вопрос 5 Существование базиса

**Theorem 3** (О существовании базиса). *Пусть  $X, Y \subseteq V$ , причем набор  $X$  линейно независим, а  $Y$  — система образующих. Тогда существует базис  $Z$ , содержащий  $X$  и содержащийся в  $Y$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  — набор всех линейно независимых подмножеств  $Y$ , содержащих  $X$ . Этот набор не пуст, так как содержит  $X$ . Пусть  $\mathcal{L}$  — линейно упорядоченный поднабор в  $\mathcal{A}$ . Обозначим через  $S$  объединение всех множеств из  $\mathcal{L}$ . Так как  $\forall C \in \mathcal{L}$  лежит между  $X$  и  $Y$ ,  $S$  обладает этим свойством. Рассмотрим конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq S$ . По определению объединения множеств  $\forall i = 1, \dots, n \exists B_i \in \mathcal{L}$ , содержащее  $v_i$ . Так как  $\mathcal{L}$  — лум, среди множеств  $B_1, \dots, B_n$  найдется наибольшее  $B_k$ . Тогда  $v_1, \dots, v_n \in B_k$ . Так как  $B_k$  линейно независимо, то и  $\{v_1, \dots, v_n\}$  линейно независимо. Следовательно,  $S$  линейно независимо, значит  $S \in \mathcal{A}$ . По лемме Цорна получаем, что  $\mathcal{A}$  содержит максимальных элемент. Пусть это  $Z$  — максимальное из линейно независимых подмножеств  $Y$ , содержащих  $X$ .

Пусть  $y \in Y \setminus Z$ . Так как  $Z$  линейно независимо,  $Z \cup \{y\}$  линейно зависимо, то есть  $\exists a \in F_{fin}^Z$ ,  $a_y \in F : ya_y + Za = 0$ , где  $a_y \neq 0$ . Следовательно,  $y \in \langle Z \rangle$ . Тогда  $Y \subseteq \langle Z \rangle$ . С другой стороны,  $V = \langle Y \rangle$  — наименьшее подпространство, содержащее  $Y$ . Значит  $V \subseteq \langle V \rangle$ , то есть  $Z$  — система образующих, следовательно, и базис.

□

## Вопрос 6 Лемма о замене

**Theorem 4** (лемма о замене). Пусть  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  — линейно независимый набор из  $n$  векторов,  $v$  — система образующих пространства  $V$ . Тогда:

1.  $\exists v_1, \dots, v_n \in v : v \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \cup u = w$  — система образующих.
2. Причем, если  $u$  — базис, то  $w$  — базис.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0$ . Утверждение для нуля верно.

Переход:  $n - 1 \rightarrow n$ . По предположению индукции  $\exists v_1, \dots, v_{n-1} \in v$  такие, что  $w' = v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \cup \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  является системой образующих. Причем, если  $v$  был линейно независимым, то  $w'$  — базис.

$u_n$  выражается через линейную комбинацию набора  $w'$ :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in F, w_j \in v \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

Заметим, что кто-то из  $\beta_j \neq 0$  (иначе  $u$  линейно зависим). Не умоляя общности, считаем, что  $\beta_m \neq 0$ . Пусть  $v_n = w_m$ . Тогда  $v_n$  выражается через линейную комбинацию набора  $w = w' \setminus \{v_n\} \cup \{u_n\}$ . Следовательно,  $w' \subseteq \langle w \rangle$ , значит  $w$  — система образующих.

Пусть набор  $v$  (а тогда и  $w'$ ) линейно независим. Рассмотрим  $w'' = w' \setminus \{v_n\}$  и линейную комбинацию  $w''a + u_n\alpha$  набора  $w$ , где  $a \in F_{fin}^{w''}$ .

$$0 = w''a + u_n\alpha = w''a + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \alpha_i \alpha + \sum_{j=1}^m w_j \beta_j \alpha = w''b + v_n \beta_m \alpha, \quad b \in F_{fin}^{w''}.$$

Если  $\alpha \neq 0$ , то  $w''b + v_n \beta_m \alpha$  является нетривиальной линейной комбинацией набора  $w'' \cup \{v_n\} = w''$ , равной нулю. Значит,  $\alpha = 0$ , тогда  $w''a = 0$ . Так как  $w'' \subseteq w'$ ,  $w''$  линейно независим, следовательно,  $a = 0$ .

Получаем, что  $w$  линейно независим.

□

## Вопрос 7 Количество элементов в базисе

**Theorem 5** (количество элементов в базисе). Любые два базиса пространства  $V$  равномощны.

*Доказательство.* Пусть  $v, u = \{u_1, \dots, u_n\}$  — базисы пространства  $V$ . Не умоляя общности, считаем, что мощность множества  $v > n$ . Перенумеруем элементы базиса  $u$  так, что  $u_1, \dots, u_k \notin v$  и  $u_{k+1}, \dots, u_n \in v$ .

Тогда по лемме о замене 4 существует подмножество  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq v : w = v \setminus \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$  — базис.  $u \subseteq w$  и  $|v| = |w|$ . Так как базис — максимальная линейно независимая система, то один базис не может строго содержаться в другом. Следовательно,  $w = u$ , откуда  $|v| = n$ . □

**Def 13.** Размерность пространства — мощность любого базиса этого пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем существует конечный базис.

## Вопрос 8 Линейные отображения и их матрицы. Матрица композиции линейных отображений

### i Линейные отображения

**Def 14.** Пусть  $V$  и  $U$  — векторные пространства,  $L$  — функция  $V \rightarrow U$ .  $L$  называется **линейным отображением**, если  $\forall x, y \in V, \alpha \in F$ :

$$\begin{aligned} L(x + y) &= L(x) + L(y) \\ L(x\alpha) &= L(x)\alpha \end{aligned}$$

Биективное линейное отображение называется **изоморфизмом**. Линейное отображение из пространства в само себя называется **линейным оператором**. Отображение из пространства в основное поле часто называется **функционалом**.

**Property.** Пусть вектор  $v = (v_1, \dots, v_n)$  и отображение  $L : V \rightarrow U$ .

$$L(v) = (L(v_1), \dots, L(v_n)) \in {}^nU.$$

Тогда

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^n.$$

Note. В случае бесконечного  $v$  можем переписать аналогично, обозначив  $L(v) \in {}^nU : L(v)_x = L(x) \quad \forall x \in v$ :

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in F^v.$$

**Designation.** Пусть  $v$  — базис  $V$ . Тогда  $\forall x \in V \exists! a \in F_{fin}^v : x = va$ . Тогда  $a = x_v$  — столбец координат  $x$  в базисе  $v$ .

**Lemma 2.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ , а  $v$  — базис  $V$ . Отображение  $\varphi_v : V \rightarrow F^v$ , заданное равенством  $\varphi_v(x) = x_v$ , является изоморфизмом векторных пространств.

*Доказательство.* Рассмотрим  $x, y \in V$ .

$$\begin{cases} vx_v = x \\ vy_v = y \end{cases} \implies v(x_v + y_v) = x + y = v(x + y)_v \implies \varphi_v(x + y) = \varphi_v(x) + \varphi_v(y).$$

$$v(x\alpha)_v = x\alpha = v(x_v\alpha) \implies \varphi_v(x\alpha) = \varphi_v(x)\alpha.$$

Построим обратное отображение:  $\theta_v : F^v \rightarrow V$ ,  $\theta_v(a) = va$ . Следовательно,  $\varphi_v$  — биективное линейное отображение.  $\square$

**Corollary 1** (классификация векторных пространств). Любое векторное пространство изоморфно пространству  $F^I$  для некоторого множества  $I$ , мощность которого равна размерности пространства.

Два пространства изоморфны между собой тогда и только тогда, когда их размерности равны.

### ii Матрицы линейных отображений

**Statement 4.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — базис  $U$ ,  $v = (v_1, \dots, v_m)$  — базис  $V$ .

$$\exists! A \in M_{m \times n}(F) : \forall x \in U \quad L(x)_v = Ax_u.$$

Столбцы матрицы  $A$  вычисляются по формуле  $a_{*k} = L(u_k)_v$ .

*Доказательство.* По определению столбца координат  $x = ux_u$ .

$$\varphi_v \circ L(x) = \varphi_v \circ L(ux_v).$$

Тогда  $L(x)_v = \varphi_v(L(x)) = \varphi_v(L(u))x_u$ . Пусть  $A = \varphi_v(L(u)) = (L(u_1)_v, \dots, L(u_n)_v)$ .

Докажем единственность. Предположим, что  $Ax = Bx$  для любого столбца  $x$ . Тогда  $A = B$ .  $\square$



**Def 15.** Матрица  $A$  из прошлого утверждения 4 называется матрицей отображения  $L$  в базисах  $u, v$  и обозначается через  $L_u^v$ .

Если  $U = V$ ,  $u = v$ , говорят о матрице оператора  $L$  в базисе  $u$  и обозначают ее через  $L_u$ .

$$L(x)_v = L_u^v x_v \text{ или } L(x)_u = L_u x_u \text{ в случае } U = V \wedge u = v.$$

**Theorem 6.** Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов.

Если  $U, V, W$  — конечномерные линейные пространства с базисами  $u, v, w$ , соответственно,  $L : U \rightarrow V$ ,  $M : V \rightarrow W$  — линейные отображения, то  $(M \circ L)_u^w = M_v^w L_u^v$ .

Если  $U = V = W$  и  $u = v = w$ , то  $(M \circ L)_u = M_u L_u$ .

## Вопрос 9 Матрица перехода от одного базиса с другому. Замена координат и изменение матрицы оператора при замене базиса

### i Матрица перехода

**Theorem 7.** Пусть  $v$  — базис  $n$ -мерного пространства  $V$  над полем  $F$ . Набор  $u = (u_1, \dots, u_n)$  является базисом тогда и только тогда, когда существует  $A \in \text{GL}_n(F)$  такая, что  $u = vA$ .

**Def 16.** Если  $u, v$  — базисы, то  $A$  называется матрицей перехода от  $v$  к  $u$  и обозначается через  $C_{v \rightarrow u}$

При этом:

- (1) Столбец матрицы  $C_{v \rightarrow u}$  с номером  $k$  равен столбцу координат вектора  $u_k$  в базисе  $v$ .  $(C_{v \rightarrow u})_k = (u_k)_v$
- (2)  $C_{v \rightarrow u}^{-1} = C_{u \rightarrow v}$
- (3) Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Положим  $\forall k \in [1, n] : a_{*k} = (u_k)_v$ . Тогда  $va_{*k} = u_k \Rightarrow u = vA$

$\Rightarrow$  Если  $u = vA$ ,  $\langle u \rangle = \langle vA \rangle = V$ . При этом  $u$  минимален, так как иначе и  $v$  не минимален, значит  $u$  — базис.

1. По построению.

$$2. \begin{cases} u = vC_{v \rightarrow u} \\ v = uC_{u \rightarrow v} \end{cases} \Rightarrow uE = uC_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} \Rightarrow E = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u}$$

3. Пусть  $B \in M_{n \times m}(F)$  двусторонне обратима.  $BB_1 = E_{n \times n} \wedge B_2B = E_{m \times m}$ . Тогда  $B_2 = B_2E_n = B_2(BB_1) = (B_2B)B_1 = E_m B_1 = B_1$ . Значит  $B_1 = B_2$ .  $B_1B = C_{u \rightarrow v}C_{v \rightarrow u} = B_1B \Rightarrow B$  — квадратная.

□

Note. Если пространство  $V$  бесконечномерно, почти все элементы каждого столбца должны быть равны нулю.

Note. Если  $V = F^n$ ,  $e$  — стандартный базис, то  $C_{e \rightarrow u}$  — матрица, составленная из столбцов базиса  $u$ .

## ii Преобразование координат при замене базиса

**Theorem 8.** Пусть  $u, v$  — базисы пространства  $V$ .

$$\forall x \in V : x_v = C_{v \rightarrow u} x_u.$$

*Доказательство.* Запишем определение столбца координат  $x = ux_u = vx_v$ . Про базисы мы знаем, что  $v = uC_{u \rightarrow v}$ . Тогда

$$ux_u = uC_{u \rightarrow v}x_v \implies x_u = C_{u \rightarrow v}x_v.$$

□

## iii Преобразование матрицы оператора при замене базиса

*Note.* Матрица перехода  $C_{u \rightarrow v}$  совпадает с матрицей тождественного отображения  $1_V$  в базисах  $u$  и  $v$ .

**Lemma 3.** Пусть  $u = (u_1, \dots, u_n)$  — базис пространства  $U$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n) \in^n V$  — набор векторов пространства  $V$ . Тогда существует единственное линейное отображение

$$L : U \rightarrow V : L(u) = v.$$

При этом

$L$  инъективно тогда и только тогда, когда  $u$  линейно независим

$L$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $u$  — система образующих

$L$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $u$  — базис

*Доказательство.*  $\forall x \in U : x = ux_u$ . Тогда  $\forall L : L(x) = L(u)x_u$ . Зададим  $L$  так:  $L(x) = vx_u$ . Оно линейно и единственно. □

*Note.* Пусть  $u, v$  — базисы пространства  $V$ . Тогда матрица отображения  $L$  из леммы в базисе  $u$  совпадает с матрицей перехода  $C_{u \rightarrow v}$ .

**Statement 5.** Пусть  $u, u'$  — базисы пространства  $U$ ,  $v, v'$  — базисы пространства  $U$ ,  $v, v'$  — базисы пространства  $V$ ,  $L : V \rightarrow U$  — линейное отображение. Тогда

$$L_{u'}^{v'} = C_{v' \rightarrow v} L_u^v C_{u \rightarrow u'}.$$

*Доказательство.*

$$L(x)_v = L_u^v x_u$$

$$C_{v' \rightarrow v} L(x)_v = L(x)_{v'} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L(x)_v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u} x_u$$

$$L_u^v = C_{v \rightarrow v'} L_{u'}^{v'} C_{u' \rightarrow u}$$

□

*Note.* Если  $U = V$  и  $u = v$ ,  $u' = v'$ ,

$$L_{u'} = C_{u' \rightarrow u} L_u C_{u \rightarrow u'}.$$

## Вопрос 10 Внешняя и внутренняя пряма сумма пространств, естественный изоморфизм между ними

**Designation.**  $U, V$  — подпространства векторного пространства  $W$  над полем  $F$ .

**Def 17.** Сумма  $U + V$  — совокупность  $\{x + y \mid x \in U, y \in V\}$ .

*Note.*  $U + V \subseteq W \wedge U \cap V \subseteq W$ .

**Def 18.** Пространство  $W$  называется **внутренней прямой суммой** подпространств  $U$  и  $V$ , если

$$\forall z \in W \exists! x \in U, y \in V : z = x + y.$$

То есть  $W = U + V \wedge V \cap U = \{0\}$ .

**Def 19.**  $U, V$  — векторные пространства. Их **внешней прямой суммой** называется их декартово произведение с покомпонентными операциями.

**Designation.** Обе прямые суммы обозначаются  $U \oplus V$ .

*Note.* Пространства  $U, V$  естественно вкладываются в из внешнюю прямую сумму:  $\forall x \in U : x \mapsto (x, 0) \wedge \forall y \in V : y \mapsto (0, y)$ . Если отождествить  $U$  и  $V$  с их образами, то внешняя сумма превращается в прямую сумму подпространств.

**Statement 6.**  $U, C \leq W, U \oplus V$  — их внешняя прямая сумма. Зададим  $\varphi : U \oplus V \rightarrow W$  так  $\varphi(x, y) = x + y$ .  $\varphi$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $W$  является внутренней суммой подпространств  $U$  и  $V$ .

Если  $W = U \oplus V$ , то объединение базисов  $U$  и  $V$  — базис  $W$ . Поэтому  $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$ .

**Statement 7.**  $\forall U \leq W \exists V \leq W : W = U \oplus V$ .

*Доказательство.* Выберем базис  $u$  подпространства  $U$  и дополним его до базиса пространства  $W$ :  $u \cup v$ . Тогда подойдет  $V = \langle v \rangle$ . □

**Theorem 9.** Для пространств  $U_1, \dots, U_n \leq V$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow V, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$  — изоморфизм
- (2)  $\forall x \in V \exists! (x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n) : x = x_1 + \dots + x_n$
- (3)  $V = U_1 + \dots + U_n$  и  $U_i \cap \left( \sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\} \quad i \in [1, n]$
- (4) Объединение базисов подпространств  $U_1, \dots, U_n$  — базис  $V$ .

## Вопрос 11 Ядро и образ линейного отображения. Слой линейного отображения

**Def 20.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Тогда

Ядро отображения  $L$  —  $\text{Ker } L = L^{-1}(0) := \{x \in U \mid L(x) = 0\}$

Образ отображения  $L$  —  $\text{Im } L = \{L(x) \mid x \in U\}$

**Statement 8.** Пусть  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение.

$$\text{Ker } L \leq U \wedge \text{Im } L \leq V.$$

**Def 21.**  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Слой отображения над точкой  $y \in V$  — множество  $\{x \in U \mid L(x) = y\} = L^{-1}(y)$

**Statement 9.** Все слои отображения  $L$  являются сдвигами ядра.  $L(x) = y, x \in U$ :

$$L^{-1}(y) = x + \text{Ker } L.$$

## Вопрос 12 Теорема о размерности ядра и образа. Теорема о размерности прямой суммы

**Theorem 10** (о размерности ядра и образа).  $L : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Тогда

$$\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L.$$

*Доказательство.*  $u = (u_1, \dots, u_k)$  — базис  $\text{Ker } L$ ,  $v = (v_1, \dots, v_m)$ . Дополним базис ядра до базиса  $U$ :  $u \cup v$  — базис  $U$ . Докажем, что  $L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m))$  — базис образа.

$$\forall x \in \text{Im } L \exists y \in U : L(y) = x.$$

Разложим  $y = ua + vb$ ,  $a \in F^k, b \in F^m$

Тогда

$$x = L(y) = L(u) \cdot a + L(v) \cdot b.$$

Так как  $u \in \text{Ker } L$ :  $L(u) = (L(u_1), \dots, L(u_k)) = (0, \dots, 0)$ . Следовательно,  $L(v)$  — система образующих. Проверим, что  $L(v)$  линейно независим. Пусть

$$L(v) \cdot c = 0, \quad c \in F^m.$$

$$L(v)c = L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in \text{Ker } L \Rightarrow vc = ud \text{ для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда  $vc - ud = 0$ , но  $v$  и  $u$  — два базисных вектора. Следовательно,  $c = d = 0$  и  $L(v)$  — линейно независимый.  $\square$

**Theorem 11** (формула Грассмана о размерности суммы и пересечения). Пусть  $U, V \leq W$ .

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

*Доказательство.* Зададим линейное отображение  $L : U \oplus V \rightarrow W : L(u, v) = u + v$ . Тогда  $\text{Im } L = U + V$ .

$$(u, v) \in \text{Ker } L \iff u + v = 0 \iff u = -v \in U \cap V.$$

$$\text{Ker } L = \{(u, -u) \mid u \in U \cap V\} \cong U \cap V.$$

По теореме о размерности ядра и образа

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L = \dim U \cap V + \dim U + V.$$

$\square$

## Вопрос 13 Факторпространство и его универсальное свойство

**Designation.**  $V$  — векторное пространство,  $U \leq V$ .

**Def 22.**  $x + U$  — аффинное подпространство или смежный класс  $V$  по  $U$ .  
 $y \sim_U x \iff y - x \in U$  — эквивалентность.

**Def 23.** Множество смежных классов  $V$  по  $U$  с операциями

$$\begin{aligned}(x + U) + (y + U) &= (x + y) + U \\ (x + u)\alpha &= x\alpha + U\end{aligned}$$

называется **факторпространством**  $V$  по  $U$  и обозначается  $V/U$ .

*Проверка корректности определения.* Докажем, что определение операций не зависит от выбора представителей классов.

- Сложение

$$\begin{aligned}x' + U = x + U &\implies x' + 0 \in x + U \implies x' \in x + U. \\ y' + U = y + U &\implies y' + 0 \in y + U \implies y' \in y + U.\end{aligned}$$

Тогда  $\exists z \in U : x' = x + z$  и  $\exists t \in U : y' = y + t$ .

$$\begin{aligned}(x' + U) + (y' + U) &:= (x' + y') + U = \\ &= (x + y) + \underbrace{(z + t)}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq (x + y) + U\end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

- Умножение

$$\begin{aligned}(x' + U)\alpha &:= x'\alpha + U = \\ &= (x + z)\alpha + U = x\alpha + \underbrace{z\alpha}_{\in U} + U \subseteq \\ &\subseteq x\alpha + U\end{aligned}$$

Аналогично доказываем включение в обратную сторону.

□

**Designation.**  $\pi_U : V \rightarrow V/U$  — естественная проекция:  $\pi_U(x) = x + U$ .

*Note.*  $\pi_U$  линейно и сюръективно  $\text{Ker } \pi_U = U$ .

По теореме о размерности ядра и образа  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ .

**Statement 10.** Пусть  $U \subseteq V$ . Для любого линейного отображения  $L : V \rightarrow W$ ,  $U \subseteq \text{Ker } L$ , существует единственное отображение  $\tilde{L} : V/U \rightarrow W : L = L \circ \pi_U$ . При этом сюръективность  $\tilde{L}$  равносильна сюръективности  $L$ , а инъективность  $\tilde{L}$  — тому, что  $\text{Ker } L = U$ . То есть такая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \tilde{L} & \\ V/U & & \end{array}$$

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{L}(x + U) = L(x)$ . Эта формула задает линейное отображение и равносильна  $L = \tilde{\pi}_U$ . Следовательно,  $\tilde{L}$  существует и единственно.

$\pi_U$  инъективно, следовательно,  $L$  сюръективно  $\iff \tilde{L}$  сюръективно.

Отображение  $\tilde{L}$  инъективно  $\iff \text{Ker } \tilde{L} = \{0_{V/U} + U\}$ .

$$x + U \in \text{Ker } \tilde{L} \iff \tilde{L}(x + U) = 0 \iff L(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } L.$$

□

**Theorem 12** (о гомоморфизме).  $L : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

$$V/\text{Ker } L \cong \text{Im } L.$$

*Доказательство.* Возьмем  $U = \text{Ker } L$  и заменим  $W$  на  $\text{Im } L$ . Далее применим утверждение 10. □

## Вопрос 14 Ранг набора элементов векторного пространства, ранг оператора, строчной и столбцовый ранг матрицы

**Def 24.**

Рангом набора векторов называется размерность линейной оболочки этого набора.

Рангом линейного оператора называется размерность образа этого оператора.

Столбцовым (строчным) рангом матрицы называется ранг набора ее столбцов (строк).

*Note.* Из любой системы образующих можно выбрать базис, следовательно, ранг набора векторов — наибольшее количество линейно независимых векторов из этого набора. Так как образы базисных векторов порождают образ оператора, то ранг оператора равен рангу набора базисных векторов, а он равен столбцовому рангу матрицы оператора (вне зависимости от выбора базиса).

**Theorem 13.** Пусть  $A \in M_{m \times n}(F)$ .

- (1) Набор столбцов матрицы  $A$  линейно независим тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен  $n$ .
- (2) Набор столбцов матрицы  $A$  порождает  $F^m$  тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг равен  $m$ .
- (3) Набор столбцов матрицы  $A$  является базисом в  $F^m$  тогда и только тогда, когда ее столбцовый ранг  $m = n$ . В этом случае  $A$  обратима.
- (4) Если все строки матрицы  $A$  линейно независимы, и все столбцы линейно независимы, то  $m = n$ , а  $A$  обратима.

*Доказательство.* Пункты (1) и (2) очевидны. Из них следует, что столбцовый ранг равен  $m = n$  тогда и только тогда, когда набор столбцов — базис в  $F^m$ . В этом случае  $A$  — матрица перехода от стандартного базиса к базису из столбцов матрицы  $A$ , а значит  $A$  обратима.

Количество линейно независимых столбцов и строк не может быть больше размерности, следовательно,  $n \leq m \wedge m \leq n \implies n = m$ . □

**Lemma 4.** Умножение матрицы на обратимую (слева или справа) не меняет ее столбцовый и строчной ранги.

*Доказательство.* Умножение матрицы оператора слева на обратимую матрицу соответствует замене базиса в его области значений, а справа — в области определения. Так как столбцовый ранг оператора не зависит от выбора базиса, то столбцовый ранг не меняется при умножении.

Строчный ранг равен столбцовому рангу транспонированной к ней, а транспонированная к обратимой — обратима. □