

Конспект по матанализу
II семестр
Современное программирование, факультет математики и
компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Бахрева Федора Львовича)

Тамарин Вячеслав

22 июня 2020 г.

Оглавление

1	Интегрирование	2
1.1	Интегральное исчисление	2
1.1.1	Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	2
1.1.2	Теорема о среднем	3
1.2	Приближенное вычисление интеграла	3
1.3	Приближенное вычисление интеграла	4
1.3.1	Интеграл Пуассона	6
1.3.2	Формула трапеции	7
1.3.3	Формула Стирлинга	8
1.4	Несобственные интегралы	8
1.4.1	Свойства	9
1.5	Вычисление площадей и объемов	13
1.5.1	Площади	13
1.5.2	Объемы	15
1.6	Кривые в \mathbb{R}^n и их площади	16
1.6.1	Поговорим о длине	17
1.6.2	Важные частные случаи общей формулы	20
2	Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных	21
2.1	Нормированные пространства	21
2.1.1	Продолжение примеров	23
2.2	Сжимающие отображения	24
2.2.1	Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)	27
2.2.2	Пространство линейных непрерывных операторов	30
2.3	Дифференциальные отображения	31
2.4	Примеры и дополнительные свойства дифференцирования	34
2.5	Частные производные	35
2.6	Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$	36
2.7	Теорема о конечном приращении (Лагранжа)	38
2.8	Производные высших порядков	40
2.8.1	Общий случай	42
2.8.2	Связь между двумя подходами	43
2.8.3	Симметричность дифференциалов	43
2.9	Многомерная формула Тейлора	46
2.10	Исследование внутренних экстремумов	46
2.11	Странные примеры экстремумов	47
2.11.1	Задача Гюйгенса	47
2.11.2	Кратчайшее расстояние до линейного подпространства	50

2.11.3	Задача о брахистороне	51
2.12	Поверхности и криволинейные координаты	54
2.12.1	Касательная плоскость к графику функции	55
2.12.2	Касательный вектор	55
2.12.3	Чуть более общая ситуация	55
2.13	Теорема о неявном отображении (функции)	56
2.13.1	Мотивация	56
2.13.2	Подстановка	56
2.14	Теорема о неявном отображении	56
2.15	Условные экстремумы	59
2.15.1	Примеры	61
3	Ряды	63
3.1	Определения и примеры	63
3.1.1	Свойства	64
3.2	Положительные ряды	65
3.3	Числовые ряды с произвольными членами	66
3.4	Бесконечные произведения	69

Глава 1

Интергирование

1.1 Интегральное исчисление

Лекция 1

14 feb

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x),$$

где

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i,$$

а R_{n,x_0} — остаток.

Theorem 1.1.1: Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f \in C^{n+1}((a, b))$, $x, x_0 \in (a, b)$. Тогда остаток в формуле Тейлора представим в виде

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Доказательство. Индукция по n .

База: $n = 1$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$R_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Переход: $n - 1 \rightarrow n$.

$$\begin{aligned} R_{n-1,x_0}f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x}_{\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_{n,x_0}f(x)} \end{aligned}$$

□

1.1.2 Теорема о среднем

Theorem 1.1.2: Хитрая теорема о среднем

$f, g \in C[a, b]$, $g \geq 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Найдем максимум и минимум f на $[a, b]$.

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Так как интеграл монотонен

$$\begin{aligned} m \int_a^b g(x)dx &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \\ m &\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \end{aligned}$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Corollary 1. Если $|f^{(n+1)}| \leq M$, то существует понятие какая оценка сверху для $|R_{n,x_0}f(x)|$.

Theorem 1.1.3

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа следует из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

Доказательство. Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \text{ лежит между } x, x_0.$$

По прошлой теореме 1.1.2, где $g(t) = (x - t)^n$, получаем, что

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\theta) \int_{x_0}^x (x - t)^n dt = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\theta) \cdot \left(-\frac{(x - t)^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_{x_0}^x.$$

□

1.2 Приближенное вычисление интеграла

Definition 1: Дробление

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением** отрезка $[a, b]$.
 Мелкость дробления $|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$.
 θ называется **оснащением дробления** τ , если $\theta = \{t_1, \dots, t_n\} : t_j \in [x_{j-1}, x_j]$.
 Пара (τ, θ) называется **оснащенным дроблением**.

Definition 2: Интегральная сумма

Если $f \in C[a, b]$, (τ, θ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, **интегральной суммой** называется

$$S_{\tau, \theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Theorem 1.2.1

$f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \theta)$ — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \theta}(f) = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] : \left(|s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|b - a|} \right).$$

Перепишем неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx}_{(x_j - x_{j-1})f(c_j)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{|b - a|} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

□

1.3 Приближенное вычисление интеграла**Definition 3: Дробление**

Пусть $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$, $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Тогда τ называется **дроблением** отрезка $[a, b]$.
 Мелкость дробления —

$$|\tau| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Оснащение дробления —

$$\theta = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оснащенное дробление — пара (τ, θ)

Definition 4

$f \in C[a, b]$, (θ, τ) — оснащенное дробление отрезка $[a, b]$. Тогда

$$S_{\tau, \theta}(f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

называется интегральной суммой.

Theorem 1.3.1

$f \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такие, что для любого оснащенного дробления (τ, θ) отрезка $[a, b]$, $|\tau| < \delta$:

$$\left| S_{\tau, \theta}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

То есть

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} S_{\tau, \theta} \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. По теореме Кантора о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $(\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(r_j)| (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь $t_j, r_j \in [x_j, x_{j-1}]$. □

Definition 5

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$\exists A: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall (\tau, \theta) \quad |\tau| < \delta \quad |S_{\tau, \theta} - A| < \varepsilon.$$

Тогда A — интеграл по Риману от функции f на отрезке $[a, b]$.

Practice. Доказать, что, если f кусочно-непрерывна (то есть имеет 1 разрыв первого рода в точке c), то f интегрируема по Риману и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Example 1.3.1.

$$\int_0^a e^x dx = ?$$

Рассмотрим $\tau = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, a\}$ и $\theta = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, a \frac{n-1}{n}\}$.

$$\begin{aligned} \int_0^a e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{ja}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \left(1 + e^{\frac{a}{n}} + \dots + e^{a \frac{n-1}{n}}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \frac{e^{\frac{an}{n}-1}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{a}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{a}{n}-1}}}_{\rightarrow 0} e^a - 1 = e^a - 1 \end{aligned}$$

Example 1.3.2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

Example 1.3.3. $p > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^p &= n^{1+p} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^p + \left(\frac{2}{n} \right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^p \right) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= n^{1+p} \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \cdot n^{p+1} \end{aligned}$$

1.3.1 Интеграл Пуассона

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\pi \underbrace{\ln(1 - 2a \cos x + a^2)}_{f(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \ln \left(1 - 2a \cos \left(\frac{(k-1)\pi}{n} \right) + a^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n 1 - 2a \cos \frac{(k-1)\pi}{n} + a^2 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{a^{2n} - 1}{a + 1} \cdot (a - 1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a^{2n} - 1}{n} \right) = \\ &= \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 2 \ln a & |a| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Practice.

$$\int_0^\pi \ln(\cos x) dx = ?.$$

Practice.

- $I(a) = I(-a)$
- $I(-a) + I(a) = I(a^2)$

1.3.2 Формула трапеции

Statement. Пусть $|f'| \leq c$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{\tau, \theta}(f) \right| \leq \sum_{t_j, c_i \in [x_{j-1}, x_j]} |f(t_j) - f(c_i)| (x_j - x_{j-1}) \leq C \cdot |b - a|$$

Формула трапеции

$$\sum \frac{f(x_j) + f(x_{j-1})}{2} (x_j - x_{j-1}) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема 1.3.2: о погрешности в формуле трапеции

$f \in C^2[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} (x_j - x_{j-1}) \leq \frac{1}{8} |\tau|^2 \int_a^b |f''(x)| dx.$$

Для равномерного дробления

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f\left(a + \frac{j-1}{n}b\right) + f\left(a + \frac{j}{n}b\right)}{2} \right| \leq \frac{1}{8} \frac{(b-a)^2}{n^2} \int_a^b |f''(x)| dx$$

Доказательство. Рассмотрим один участок разбиения $[x_{j-1}, x_j]$ и докажем неравенство для него. Пусть g — линейная функция, соединяющая вершины столбцов на каждом участке разбиения. Определим $h = f - g$. $h(x_j) = h(x_{j-1}) = 0$, $h'' = (f - g)'' = f''$. Обозначим $x_{j-1} = \alpha$, $x_j = \beta$.

Перепишем нужное неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \right| \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{8} (\beta - \alpha)^2 \int_{\alpha}^{\beta} |h''(x)| dx.$$

Проинтегрируем, где c любая константа, c_1, c_2 корни уравнения $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} h(x) d(x-c) = (x-c)h(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} h'(x)(x-c) dx = \\ &= (x-c)h(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} h'(x) d\left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right) = \\ &= (x-c)h(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} - h'(x) \left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} h''(x) \left(\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2\right) dx = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} h''(x) \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} dx \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \leq \frac{\alpha-\beta}{2}$, можем переписать

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \right| \leq \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |h''(x)| dx = \frac{1}{8} (\beta - \alpha)^2 \int_{\alpha}^{\beta} |h''(x)| dx.$$

□

Corollary 2 (Формула Эйлера-Маклорена).

$$\begin{aligned} f(m) + f(m+1) + \dots + f(n) &= \frac{f(m) + f(n)}{2} + \frac{f(m)}{2} + f(m+1) + \dots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} = \\ &= \frac{f(m) + f(n)}{2} + T(f, m, n) \end{aligned}$$

Воспользуемся рассуждениями из доказательства выше. Так, можно получить, что

$$\begin{aligned} T(f, m, n) &= \int_m^n f(x)dx + \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f''(x) \frac{(x-k)(k+1-x)}{2} dx = \\ &= \int_m^n f(x)dx + \int_m^n f''(x) \frac{\{x\}(1-\{x\})}{2} dx \end{aligned}$$

Example 1.3.4. Рассмотрим $1^p + \dots + n^p$ при $p = -1$ — гармоническая сумма.

$$\begin{aligned} H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{2}{x^3} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{2} dx}_{\leq \int_1^n \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^n \leq \frac{1}{2}} = \\ &= \ln n + \gamma + o(1) \end{aligned}$$

1.3.3 Формула Стирлинга

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(n) + \int_1^n \ln x dx - \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{2x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n - 0 + 1 + C + o(1) \end{aligned}$$

Следовательно, $n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \tilde{C}$. Тогда, используя формулу Валлиса, получаем $C_{2n}^n \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Подставим в формулу $n!$:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{\tilde{C} \left(\frac{2n}{e}\right) \sqrt{2n}}{(\tilde{C})^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{1}{\tilde{C}} \cdot \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Из чего следует, что $\tilde{C} = \sqrt{2\pi}$.

Theorem 1.3.3: Формула Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

1.4 Несобственные интегралы

Definition 6: Несобственный интеграл

Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C[a, b)$. Тогда несобственным интегралом называется

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f(x)dx.$$

Если предел существует, то $\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx$ сходится, иначе расходится.

Аналогично определяется $\int_{\rightarrow a}^b f(x)dx$.

Theorem 1.4.1: Критерий Больцано-Коши

$\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b): \forall B_1, B_2 \in (\delta, b): \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $F(B) := \int_a^B f(x)dx$. Тогда, если $\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx$ сходится, то $\exists \lim_{B \rightarrow b-} F(B)$, а значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall B_1, B_2 \in (\delta, B): |F(B_1) - F(B_2)| < \varepsilon.$$

В обратную сторону следует из того, что последовательность $F(B_i)$ фундаментальна. \square

Note. Критерий Коши чаще используется для расходимости.

Example 1.4.1. $\int_0^1 x^\alpha dx$. Если $\alpha \geq 0$, то все легко. Но если $\alpha < 0$, то необходимо считать предел

$$\lim_{A \rightarrow 0+} \int_A^1 x^\alpha dx = \lim_{A \rightarrow 0+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_A^1.$$

Предел существует только при $\alpha > -1$, а при $\alpha \leq -1$ ряд расходится.

Example 1.4.2. $\int_1^{+\infty} x^\alpha$. При $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^B x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^B.$$

При $\alpha < -1$ интеграл сходится, а при $\alpha \geq -1$ расходится.

Лекция 2

1.4.1 Свойства

Property.

1 $c \in (a, b)$:

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\rightarrow b} f dx.$$

2 $\int_a^{\rightarrow b} f dx$ — сходится $\implies \lim_{A \rightarrow b} \int_A^{\rightarrow b} f = 0$

21 feb

2' Если $\int_a^{\rightarrow b} f \not\rightarrow_{A \rightarrow b-} \implies \int_a^{\rightarrow b}$ расходится (необходимое условие сходимости несобственного интеграла).

линейность f, g — функции на $[a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{\rightarrow b}, \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся} \implies \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g.$$

МОНОТОННОСТЬ $f \leq g$, $\int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$ сходятся.

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g.$$

Definition 7: Абсолютная сходимость

Говорят, что $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^{\rightarrow b} |f|$.

Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится абсолютно, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится и верно неравенство

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f \right| \leq \int_a^{\rightarrow b} |f|.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Больцано-Коши:

$$\int_a^{\rightarrow b} |f| \text{ сходится} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} |f| dx < \varepsilon \implies \left| \int_{B_1}^{B_2} f dx \right| < \varepsilon.$$

Для любого B :

$$\left| \int_a^B f \right| \leq \int_a^B |f| dx.$$

Definition 8: Условная сходимость

$\int_a^{\rightarrow b} f$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, а $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ расходится.

интегрирование по частям $f, g \in C^1[a, b)$

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g, \quad f g \Big|_a^{\rightarrow b} = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$

Если два предела из трех существуют, то существует третий и верно это равенство. \square

замена переменной $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$, $f \in C[a, b)$. Если существует предел, обозначим его так: $\exists \lim_{x \rightarrow \beta-} \varphi(x) = \varphi(\beta-)$.

$$\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y) dy.$$

Доказательство. $D \in [\alpha, \beta)$.

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$c \in [a, b)$

$$F(c) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(y)dy.$$

Обычная формула замены переменной: $\Phi = F(\varphi(x))$.

\Rightarrow Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(y)dy$. Возьмем любую последовательность $\{\gamma_n\} \subset [\alpha, \beta)$, $\gamma_n \rightarrow \beta-$.

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)).$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_n} f \circ \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f \rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

\Leftarrow Пусть $\exists \int_{\alpha}^{\varphi(\beta-)} (f \circ g)\varphi'$. Надо проверить, что $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$.

1. $\varphi(\beta-) < b$ — очевидно.

2. $\varphi(\beta-) = b$ $\{c_n\} \subset [\varphi(\alpha), b)$, $c_n \rightarrow b-$ $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = c_n$.

Существует подпоследовательность, стремящаяся либо к β , либо к числу меньшему β .

• $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \beta$

$$\int_{\alpha}^{\gamma_{n_k}} = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\gamma_{n_k}=c_{n_k})}.$$

• $\{\gamma_{n_k}\} \rightarrow \tilde{\beta} < \beta$

$$\varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\beta) \in [a, b) < b.$$

Но должно быть равно b . Противоречие.

Значит $\gamma_n \rightarrow b$.

$$\int_{\alpha}^{\varphi(\gamma_n)} (f \circ g)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma_n)} f = \int_{\varphi(\alpha)}^{c_n} f.$$

□

Theorem 1.4.2: Признаки сравнения

Пусть $0 \leq f \leq g$, $f, g \in C[a, b)$. Тогда

1. если $\int_a^{\rightarrow b} g$ сходится, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится,
2. если $\int_a^{\rightarrow b} g$ расходится, то $\int_a^{\rightarrow b} f$ расходится.

Доказательство.

1. Используем критерий Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 \in (\delta, b) : \int_{B_1}^{B_2} g < \varepsilon \implies \int_{B_1}^{B_2} f < \varepsilon$

2. Аналогично

□

Theorem 1.4.3: Признаки Абеля и Дирихле

$f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$, g монотонна.

Признак Дирихле Если f имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, $g \rightarrow 0$, то $\int^{tb} fg$ сходится.

Признак Абеля Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, g ограничена, то $\int_a^{\rightarrow b} fg$ сходится.

Доказательство. F — первообразная f . $F(B) = \int_a^B f$.

$$\int_a^{\rightarrow b} fg dx = \int_a^{\rightarrow b} g dF = Fg \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} Fg' dx.$$

признак Даламбера $\lim_{B \rightarrow b-} F(B)g(B) = 0$

признак Абеля $\exists \lim F, \exists \lim g$

Теперь про интеграл. Пусть $M = \max F$, он существует, так как F ограничена в любом случае.

$$\int_a^{\rightarrow b} Fg' dx \leq M \cdot \int_a^{\rightarrow b} |g'| dx = M \cdot \left| \int_a^{\rightarrow b} g' dx \right| = M \cdot |g(b-) - g(a)|.$$

□

Example 1.4.3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha |\ln x|^\beta.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Метод удавливания логарифма: $\varepsilon > 0 : \alpha - \varepsilon > -1$,

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\alpha-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \leq C x^{\alpha-\varepsilon}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-\varepsilon} dx$ сходится.

Если $\alpha < -1$,

$$\varepsilon > 0 \quad \alpha + \varepsilon < -1.$$

$$x^\alpha |\ln x|^\beta = x^{\varepsilon+\alpha} \underbrace{x^{-\varepsilon} |\ln x|^\beta}_{\rightarrow \infty}.$$

Тогда $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha+\varepsilon} dx$ расходится.

Если $\alpha = -1$, сделаем замену:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\beta}{x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^\beta d(f(x)) = \int_{-\ln \frac{1}{2}}^{\infty} y^\beta dy.$$

Тоже сходится.

Example 1.4.4.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos 7x}{x^\alpha} dx.$$

 $\alpha > 0$.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \text{ сходится, так как сходится } \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. $0 < \alpha \leq 1$. По признаку Дирихле: $f(x) = \sin x$ — ограничена первообразная, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ — убывает.

Значит

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ сходится.}$$

Example 1.4.5 (Более общий вид).

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{10}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

 $f \in C^1[0, +\infty)$, f монотонна.Если при $x \rightarrow +\infty$ $f \rightarrow 0$, то интегралы сходятся,Если при $x \rightarrow +\infty$ $f \not\rightarrow 0$, то интегралы расходятся.*Remark.*

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится } \not\Rightarrow f \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Practice.

$$\int_{10}^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится, } f \in C[10, +\infty).$$

Следует ли из этого, что

$$\int_{10}^{+\infty} (f(x))^3 dx \text{ сходится?}$$

1.5 Вычисление площадей и объемов

1.5.1 Площади

1. $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$, $P_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$. Тогда $S(P_f) = \int_a^b f(x) dx$
2. Криволинейная трапеция. $f, g \in C[a, b]$, $f \geq g$, $T_{f,g} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\}$. Тогда $S(T_{f,g}) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

Corollary 3 (Принцип Кавальери). Если есть две фигуры на плоскости расположенные в одной полосе и длина всех сечений прямыми, параллельными полосе, равны, то их площади равны.

Сейчас мы можем доказать его только для случаев, когда все границы фигур — графики функций.

3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $f \geq 0$, g непрерывна.

$$\tilde{P}_f = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in [a, b], r \in [0, f(\varphi)]\}.$$

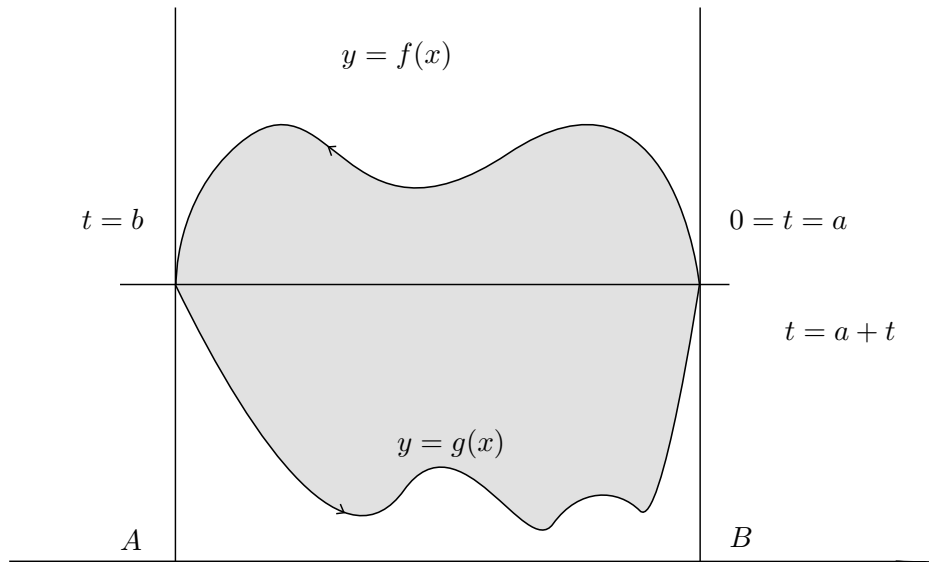
Пусть τ — дробление $[\alpha, \beta]$, $\tau = \{\gamma_j\}_{j=0}^n$, $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \beta$. Пусть $M_j = \max_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$, $m_j = \min_{[\gamma_j, \gamma_{j+1}]}$.

$$\sum \frac{m_j^2}{2} (\gamma_j - \gamma_{j+1}) \leq S(\tilde{P}_f) \leq \sum \frac{M_j^2}{2(\gamma_j - \gamma_{j+1})}.$$

Крайние стремятся к $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$. Значит

$$S(\tilde{P}_f) \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\varphi) d\varphi.$$

4. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой. $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall t : x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t)$. $x, y \in C^1(\mathbb{R})$



$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\int_A^B g(x) dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [b, a+T] \\ dx=x'(t)dt \\ g(x'(t))=y(t)}}{=} \int_b^{a+T} y(f)x'(t) dt$$

$$\int_A^B f(x) dx \underset{\substack{x=x(t) \\ t \in [a, b]}}{=} - \int_b^a y(t)x'(t) dt$$

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx = - \int_a^{a+T} y(t)x'(t) dt = \int_a^{a+T} y'(t)x(t) dt.$$

1.5.2 Объемы

1. Аксиомы и свойства такие же как и у площади. Можно определить псевдообъем.
2. Фигура $T \subset \mathbb{R}^3$, $T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b]\}$.

Definition 9

Сечение $T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.

$\forall x : T(x)$ имеет площадь, а

$$V(T) = \int_a^b S(T(x))dx.$$

3. Дополнительное ограничение на T :

$$\forall \Delta \subset [a, b] \exists x_*, x^* \in \Delta : \forall x \in \Delta T(x_*) \subset T(x) \subset T(x^*).$$

Example 1.5.1. T — тело вращения, $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$.

$$T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Доказательство формулы. Постулируем объем цилиндра: с произвольным основанием $V = SH$. Рассмотрим тело T и τ дробление отрезка $[a, b]$. Поместим его между двумя цилиндрами.

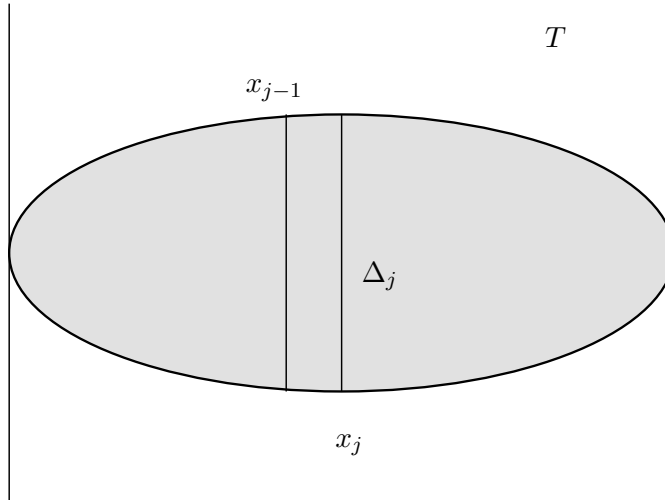


Рис. 1.1: Цилиндр

$$\sum (x_j - x_{j-1})S(T(x_*\Delta_j)) \leq V \leq (x_j - x_{j-1})S(T(x^*\Delta_j)).$$

Обе суммы стремятся к $\int_a^b S(T(x))dx$ как интегральные суммы.

□

Example 1.5.2 (Интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$T = \{0 \leq y \leq e^{-(x^2+y^2)}\}$$

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-(x^2+z^2)}\}.$$

Посчитаем площадь сечения

$$S(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+z^2)} dz = e^{-(x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = I e^{-x^2}.$$

Лекция 3

28 feb

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Получили, что $V = I^2$.

$$V = \int_0^1 S(y) dy = \pi \int_0^1 r(y)^2 dy = .$$

Где $r(y) = \sqrt{-\ln y}$. Подставляем:

$$= -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi (y \ln y - y) \Big|_0^1 = \pi.$$

1.6 Кривые в \mathbb{R}^n и их площади

Definition 10: Путь

Путь в \mathbb{R}^n — отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C[a, b]$.

Можно разложить по координатам

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad \gamma_i \text{ — координатные отображения для } \gamma.$$

Начало пути — $\gamma(a)$, конец пути — $\gamma(b)$.

Носители пути — $\gamma([a, b])$.

γ замкнут, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$\gamma \in C^n[a, b] \iff \forall i : \gamma_i \in C^n[a, b] \iff \gamma$ — r -гладкий путь.

γ^{-1} — противоположный путь, если $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a - b + t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Note. Разные пути могут иметь один общий носитель.

Definition 11

Два пути $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ эквивалентны, если существует строго возрастающая сюръекция

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] : \gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Statement. Это отношение эквивалентности.

Definition 12: Кривая

Кривая в \mathbb{R}^n — класс эквивалентности путей. Параметризация кривой — путь, представляющий кривую.

Example 1.6.1.

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t_0). \\ \gamma_2 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2(t) &= (-t, \sqrt{1-t^2}).\end{aligned}$$

Можно определить:

начало кривой

- конец кривой
- простота
- замкнутость
- кривая r -гладкая, если у нее есть хотя бы одна гладкая параметризация.

1.6.1 Поговорим о длине

Ожидаемые свойства:

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c \in (a, b)$.

$$\gamma = \gamma|_{[a,c]}, \quad \gamma = \gamma|_{[c,b]} \implies l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}).$$

- независимость от параметризации
- $l(\gamma) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|$
- $l(\gamma) \geq \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|$, где \forall дробления $[a, b]$ $\tau = \{x_j\}$

Definition 13: Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — путь. $l(\gamma) = \sup_{\tau} l_{\tau}$, где

$$l_{\tau} = \sum_{j=1}^m |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})|, \quad \tau = \{x_j\}_{j=0}^m.$$

Practice. Придумать пример бесконечно длинного пути.

Definition 14: Спрямоаемый путь

Если путь имеет конечную длину, он называется прямоаемым.

Definition 15: Длина кривой

Длина кривой — длина любой из ее параметризаций.

Property.

1. $\gamma \sim \tilde{\gamma} \implies l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$

2. *Аддитивность*

$$\gamma : [a, b], c \in (ab) \quad \gamma = \gamma|_{[a,c]}, \quad \gamma\gamma|_{[c,b]}.$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]}).$$

Доказательство.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ τ — дробление $[a, b]$.

$$\begin{aligned}\tau^l &= (\tau \cap [a, c] \cup \{c\}) \\ \tau^r &= (\tau \cap [c, b] \cup \{c\})\end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^n |\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})| \leq l_{\tau^l}(\gamma^l) - l_{\tau^r}(\gamma^r) \leq l(\gamma^l) - l(\gamma^r).$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ τ^l — дробление $[a, b]$, τ^r — дробление $[c, d]$. $\tau = \tau^l \cup \tau^r$.

$$\begin{aligned}l(\gamma) &\leq l_{\tau}(\gamma) = l_{\tau^l}(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \\ \sup_{\tau^l} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^l \\ \sup_{\tau^r} l(\gamma) &\geq l(\gamma^l) + l_{\tau^r}(\gamma^r) \quad \forall \tau^r\end{aligned}$$

□

Theorem 1.6.1: Длина гладкого пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкий путь. Тогда γ обязательно спр и

$$\begin{aligned}l(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \\ \gamma'(t) &= (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)). \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2}.\end{aligned}$$

Доказательство.

1. $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок. Пусть $m_j(\Delta) = \min_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$, $M_j(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_j(t)|$.

$$m(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (m_j(\Delta))^2}, \quad M(\Delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (M_j(\Delta))^2}.$$

Для всех $\Delta \subset [a, b]$ чему равно $l(\gamma|_{\Delta})$?

Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^m$. Тогда

$$l_{\tau}(\gamma|_{\Delta}) = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma_k(x_j) - \gamma_k(x_{j-1})|^2}.$$

По теореме Лагранжа результат равен

$$l_{\tau}(\gamma|_{\Delta}) = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(c_j)|^2 \cdot |x_j - x_{j-1}|} = \sum_{j=1}^m (x_j - x_{j-1}) \sqrt{\sum_{k=1}^n |\gamma'_k(c_j)|^2}.$$

Выражение под корнем не превосходит $M(\Delta)$ и не менее $m(\Delta)$

$$|\Delta| m(\Delta) \leq l_{\tau}(\gamma|_{\Delta}) \leq |\Delta| M(\Delta).$$

2. Докажем утверждение для интеграла. Так как

$$m(\Delta) \leq \min_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} \leq \max_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} \leq M(\Delta),$$

$$\int_{\Delta} |\gamma'_k(t)| dt = \int_{\Delta} \sqrt{|\gamma'_1(t)|^2 + \dots + |\gamma'_n(t)|^2} dt.$$

Тогда

$$|\Delta| m(\Delta) \leq \int_{\Delta} |\gamma'(t)| dt \leq |\Delta| M(\Delta).$$

3. Докажем равенство величин, зажатых между одинаковыми границами: так как кривая гладкая, первая производная непрерывна

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \quad \forall j \in [1, k]: |\gamma'_j(s) - \gamma'_j(t)| < \varepsilon.$$

$|\Delta| < \delta \implies M(\Delta) - m(\Delta) = \sqrt{\sum M_j(\Delta)^2} - \sqrt{\sum m_j(\Delta)^2} \leq \sum |M_j(\Delta) - m_j(\Delta)| \leq \varepsilon n$. Распишем предпоследний переход: пусть $a_j = M_j(\Delta)$, $b_j = m_j(\Delta)$,

$$\left| \sum a_j^2 - \sum b_j^2 \right| = \frac{|\sum a_j^2 - \sum b_j^2|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}} \leq \frac{\sum |a_j - b_j| \cdot |a_j + b_j|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}} \leq \sum |a_j - b_j| \cdot \underbrace{\frac{|a_j + b_j|}{\sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}}}_{\leq 1} \leq \sum |a_j - b_j|.$$

4. Теперь возьмем дробление $[a, b]$ на кусочки длиной меньше δ .

$$[a, b] = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k, \quad |\Delta_j| < \delta.$$

Запишем два неравенства

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq l(\gamma|_{\Delta_j}) \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \int_{\Delta_j} |\gamma'(t)| dt \leq M(\Delta_j) |\Delta_j|.$$

$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq l(\gamma) \leq \sum_{j=1}^k M_{j-1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \int_a^b |\gamma'| \leq \sum_{j=1}^k M_{j-1}^k M(\Delta_j) |\Delta_j|$$

$$\sum_{j=1}^k M(\gamma_j) |\Delta_j| - \sum_{j=1}^k m(\Delta_j) |\Delta_j| \leq \varepsilon n \cdot \sum_{j=1}^k |\Delta_j| = \varepsilon n(b - a).$$

□

Example 1.6.2. Посчитаем длину окружности: $\gamma = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma' = (-\sin t, \cos t)$, $|\gamma'| = 1$. Тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

1.6.2 Важные частные случаи общей формулы

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — путь в \mathbb{R}^3 .

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2} dt.$$

2. Длина графика функции. $f \in C^1[a, b]$, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$.

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3. Длина кривой в полярных координатах $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\{(r(\varphi), \varphi)\} = \{(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)\}$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Remark. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Delta \subset [a, b]$ — отрезок.

$$l(\gamma|_{\Delta}) = \int_{\Delta} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{Дифференциал дуги}} dt.$$

Если f задана на носителе пути γ получаем «неравномерную длину»: $\int_a^b f(t) |\gamma'(t)| dt$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных

2.1 Нормированные пространства

Example 2.1.1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Если $p = +\infty$, $\|x\|_{+\infty} = \max_{1 \leq j \leq m}$.

Note. Все нормы в \mathbb{R}^m эквивалентны.

Example 2.1.2. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывна}\}$ оно линейно над \mathbb{R}^m . Норма:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(K)} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.1

$C(K)$ — полно.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность функций $\{f_n\} \subset C(K)$. Возьмем $x \in K : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ — фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x).$$

Последовательность фундаментальна, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N : \|f_k - f_n\| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad |f_k(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Устремим $k \rightarrow \infty$. $f_k(x) \rightarrow f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Возьмем $n_0 > N$. f_{n_0} — равномерно непрерывна, тогда

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \implies |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \varepsilon.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |(x_1) - f_{n_0}(x_1)| + |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| |f_{n_0}(x_1 - f(x_2))| \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, $f \in C(K)$. Докажем сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : \underbrace{\forall x \in K |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon}_{\max_{x \in K} |f - f_n| \leq \varepsilon}.$$

□

Example 2.1.3. (K, ρ) — метрический компакт. Рассмотрим множество $l_\infty(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — ограниченная}\}$, оно линейно над \mathbb{R}^m . Норма:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Theorem 2.1.2

$l_\infty(X)$ — полно.

Доказательство. Аналогично. □

Note. $C(K) \subset l_\infty(K)$ — замкнутое подпространство.

Note. Замкнутое подпространство полного пространства полно.

Example 2.1.4. $K = [a, b]$, $C^1(K) = C^1[a, b]$.

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ дифференцируема на } [a, b], f' \in C[a, b]\}.$$

Определим норму $\varphi_3(t) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Theorem 2.1.3

$(C^1[a, b], \varphi_3)$ полно.

Доказательство. $\{f_n\} \subset C^1[a, b]$ фундаментальна. Так как $\varphi_3(f_n - f_k) \rightarrow_{n, k \rightarrow \infty} 0$, $\varphi_1(f_n - f_k) \rightarrow 0$ и $\varphi_2(f_n - f_k) \rightarrow 0$. Тогда $\|f_n - f_k\| \rightarrow 0$ и $\|f'_n - f'_k\| \rightarrow 0$. Получаем, что $\{f_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$ и $\{f'_n\}$ фундаментальна в $C[a, b]$.

Докажем два пункта:

1. $f \in C^1$, тое есть $\exists g = f'$.

2. $f_3(f_n - f) \rightarrow 0$

Докажем, что $f(a) - \left(\int_a^b g(t)dt + f(a)\right) \rightarrow 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : \max |f_n - f| < \varepsilon \wedge \max |f'_n - g| < \varepsilon.$$

Перепишем модуль разности

$$\begin{aligned} &= \left| f_n(x) - \left(\int_a^x f'_n(t)dt + f(a) \right) + (f(x) - f_n(x)) - \int_a^x (g(t) - f'_n(t)) dt - (f_n(a) - f(a)) \right| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + \int_a^x |g(t) - f'_n(t)| dt + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 2) \end{aligned}$$

Проверили первый пункт. Второй следует из того, что $f_n \rightarrow f \wedge f'_n \rightarrow g$. □

Remark. $\|f_n - f\| \rightarrow 0, \quad f_n \in C(K) \implies f \in C(K).$

$$x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow f(x_0).$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = f(n).$$

Remark. Из того, что $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ и $\|f'_n - g\|$, следует $f' = g$. То есть

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

Practice. $\varphi_4(t) = |f(a)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$

Лекция 4

6 march

2.1.1 Продолжение примеров

1. $C_p[a, b] = \{f \in C[a, b]\}$

$$\|f\|_{C_p[a, b]} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Это норма:

- Не меньше нуля
- $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- Неравенство треугольника $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$ (сейчас доказывать не будем)

Эта норма не полная. Но есть процедура пополнения.

Theorem 2.1.4: без доказательства)

(X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $\exists! (Y, \tilde{\rho})$ — полное метрическое пространство, такое что

- (a) $X \subset Y$
- (b) $\rho = \tilde{\rho}|_{X \times X}$
- (c) $Y = \overline{dX}$

Такое пространство пополняется до $L_p(a, b)$.

2. $l_p = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j|^p\}, \quad p \geq 1$ Такое пространство тоже нормировано:

$$\|x\|_\rho = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Practice. l_p полно

Note. В бесконечномерных нормированных пространствах компактность не равносильна замкнутости и конечности. Верно только в правую сторону.

- l_p . Возьмем шар $B = \{x \in l_p \mid \|x\| \leq 1\}$

$$e^1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e^2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e^k = (0, \underbrace{\dots 0}_{k-1}, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

Practice. Проверить не компактность $B = \{f \in C[a, b] \mid \|f\| = 1\}$ в $C[a, b]$.

2.2 Сжимающие отображения

Definition 16

(X, ρ) — метрическое пространство. $U : X \rightarrow X$. U называется **сжимающим отображением**, если

$$\forall \gamma < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in X : \rho(U(x_1), U(x_2)) \leq \gamma \rho(x_1, x_2).$$

Theorem 2.2.1: Принцип сжимающих отображений

(X, ρ) полно.

1. U — сжимающее отображение $\implies \exists! x_* : U(x_1) = x_*$ — неподвижная точка
2. Если $\exists N : U^N$ — сжимающее отображение $\implies \exists! x_* : U(x_*) = x_*$

Доказательство.

1. Рассмотрим траекторию точки x_1 .

$$x_1, x_2 = U(x_1), x_3 = U(x_2), \dots, x_n = U(x_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) &\leq \gamma \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \\ &\gamma^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \\ &\dots \\ &\leq \gamma^{n-1} \rho(x_2, x_1) = \gamma^{n-1} d \end{aligned}$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\forall m > n : \rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^k d = \gamma^{n-1} d (1 + \gamma + \dots) = \frac{\gamma^{n-1} d}{1 - \gamma} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как наше пространство полно, существует предел этой последовательности. $U(x_n) = x_{n+1}$. Первое стремится к $U(x_*)$, второе — к x_* .

Единственность следует из того, что иначе мы можем уменьшить расстояние между двумя фиксированными неподвижными точками.

2. $\exists x_*$, посмотрим на $U^N(x_*)$. Посмотрим на последовательное применение U несколько раз. На N -ом шаге мы придем в x_* .

Единственность уже доказали.

□

Example 2.2.1 (Обыкновенная линейное дифференциальное уравнение первого порядка).

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x), \quad a, b \in C[0, 1], \quad f(0) = c$$

Задача: найти $f \in C^1[0, 1]$. То есть доказать, что оно существует и единственна.

$$f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt.$$

Заведём отображение $U : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, что $(U(f))(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t)) dt$. Хотим найти неподвижную точку отображения U (то есть такую f).

Пусть $(U_0(f))(x) = - \int_0^x a(t)f(t)dt$. Правда ли, что

1. $U^n(f) - U^n(g) = U_0^n(f) - U_0^n(g) = U_0^n(f - g)$
2. $\exists n: U_0^n$ — сжимающее отображение из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

Проверим

1. При $n = 1$, очевидно.

$$\begin{aligned} U^n(f) - U^n(g) &= U(U^{n-1}(f)) - U(U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f)) - U_0(U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U^{n-1}(f) - U^{n-1}(g)) = \\ &= U_0(U_0^{n-1}(f) - U_0^{n-1}(g)) = \\ &= U_0^n(f) - U_0^n(g) \end{aligned}$$

2. $\|U_0^n(f - g)\|_\infty \leq \gamma \|f - g\|$

Пусть $f - g = h$. $\|U_0^n(h)\|_\infty = \gamma \|h\|$. Пусть $M = \max|a|$, $\|h\|_\infty |h(x)|$.

$$\begin{aligned} (U_0^1(h))(x) &= - \int_0^x a(t_1)h(t_1)dt_1 \\ (U_0^2(h))(x) &= (-1)^2 \int_0^x a(t_2) \left(\int_0^{t_2} a(t_1)h(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\ &\vdots \\ (U_0^n(h))(x) &= (-1)^n \int_0^x a(t_n) \int_0^{t_n} (\dots) dt_n \end{aligned}$$

Оценим

$$\begin{aligned} |(U_0^n(h))(x)| &\leq M^n \cdot \|h\|_\infty \int_0^x \int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_n = M^n \cdot \|h\|_\infty \frac{x^n}{n!}. \\ \|U_0^n(h)\|_\infty &\leq \left(M^n \frac{x^n}{n!} \right) \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Выражение в скобках стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, U_0^n сжимающее.

Note. На самом деле мы сейчас посчитали объем обрезанного куба.

$f \in C[0, 1]$. Так как $f(x) = c + \int_0^x (b(t) - a(t)f(t))dt$, $f \in C^1[a, b]$

Practice. X полно, $U : X \rightarrow X$, $\forall x, y: \rho(U(x), U(y)) < \rho(x, y)$.

1. Верно ли, что U сжимающее?
2. Верно ли, что обязательно есть неподвижная точка?

2.2.1 Линейные и полилинейные непрерывные отображения (операторы)

Definition 17: Линейное отображение

X, Y — линейные пространства над одним полем скаляров (либо \mathbb{R} , либо \mathbb{C}). $U : X \rightarrow Y$ называется **линейным**, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X: U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$
2. $\forall x \in X, \lambda — \text{скаляр}: U(\lambda x) = \lambda U(x)$

Note. Для экономии университетского мела не пишут скобки у линейных отображений: $U(x_1) = Ux_1$

Designation. $\text{Hom}(X, Y)$ — множество всех линейных отображений из X в Y .

Definition 18: Полилинейное отображение

X_1, \dots, X_n — линейные пространства, Y — линейное пространство над одним скаляром. $U : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ — **полилинейное отображение**, если оно линейно по каждому из аргументов.

Designation. $\text{Poly}(X_1, \dots, X_n, Y)$ — множество всех полилинейных отображений.

Definition 19

Если Y — поле скаляров, линейное отображение $U : X \rightarrow Y$ называется **линейным функционалом**.

Example 2.2.2. $X = \{x = (x_1, \dots) \mid x_j \in \mathbb{R}, \text{ лишь конечное число } x_j \neq 0\}$
 $U : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

Example 2.2.3 (δ -функция). $\delta : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \delta(f) = f(0)$.

Example 2.2.4. $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf = \int_a^b f(x)dx$

Example 2.2.5. $U : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Uf(x) = \int_a^x f(t)dt$

Example 2.2.6. $U \in \text{Poly}(\underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{R}}_n; \mathbb{R}), U(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

Example 2.2.7. $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}), U(x, y) = (x, y)$

Example 2.2.8. $U \in \text{Poly}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $U(x, y) = [x, y]$ — векторное произведение.

Example 2.2.9. Определитель, все возможные формы объема.

Example 2.2.10. $U_j \in \text{Hom}(X, Y)$. Можно сделать из этого полилинейное $U \in \text{Poly}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$, $U(x_1, \dots, x_n) = U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n$.

Example 2.2.11. $U : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Uf = f'$

Theorem 2.2.2: Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения

X, Y — линейные нормированные пространства с одним полем скаляров, $U \in \text{Hom}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C \forall x \in X : \|Ux\|_Y \leq C\|x\|_X$

Definition 20: Операторная норма

U — непрерывное линейное отображение (оператор) из X в Y .

$$\|U\| = \inf\{C \mid x \in X, \|Ux\| \leq C\|x\|\}.$$

$\|U\|$ — операторная норма.

Note. Если U — разрывное отображение, считаем, что $\|U\| = \infty$.

Note.

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}.$$

Example 2.2.12. Нормы в прошлых примерах

2.2.2 $\|U\| = \infty$

2.2.3 $\|U\| = 1$

2.2.4 $\|U\| = b - a$

2.2.5 $\|U\| = b - a$

2.2.11 $\|U\| = 1$

Theorem 2.2.3: Условие непрерывности полилинейного отображения

$U \in \text{Poly}(X_1, \dots, X_m; Y)$, X_i, Y — линейные нормированные пространства. Следующие утверждения эквивалентны:

1. U непрерывно
2. U непрерывно в 0
3. $\exists C \forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n : \|U(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|$

Note. В прямом произведении есть норма (Например, такая)

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n}\}.$$

Definition 21: Норма полилинейного отображения

$$\|U\| = \inf \{C \mid \forall x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \quad \|U(x_1, \dots, x_n)\| < C \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|\}.$$

Theorem 2.2.4: Эквивалентные способы вычисления оператора

U — линейное непрерывное отображение $X \rightarrow Y$. Тогда

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\|.$$

Доказательство. Обозначим супремумы за A, B, C, D . Очевидно, что $C \geq B$ и $C \geq D$

$$C = \sup_{\|x\| < 1} \|Ux\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A.$$

Докажем, что $B \geq A$. $x \neq 0$, $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$.

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = \|U\tilde{x}\| \leq B.$$

Значит, $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq B$.

Теперь докажем, что $D \geq A$.

$$x \neq 0, \varepsilon > 0: \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}(1 - \varepsilon), \quad \|\tilde{x}\| = 1 - \varepsilon < 1.$$

$$\begin{cases} \|U\tilde{x}\| \leq D \\ \|U\tilde{x}\| = \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \|Ux\| \end{cases} \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \frac{D}{1-\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D.$$

□

Remark. В конечномерных пространствах все линейные и полилинейные отображения непрерывны.

Theorem 2.2.5: эквивалентные способы вычисления нормы полилинейного оператора

$$U : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y.$$

$$\|U\| = \sup_{x_j \neq 0} \frac{\|U(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_n\|} = \sup_{\|x_j\|=1} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\|x_j\|<1} = \sup_{\|x_j\|\leq 1}.$$

2.2.2 Пространство линейных непрерывных операторов

Theorem 2.2.6: О свойствах операторной нормы

$U_1, U_2, U_3 : X \rightarrow Y$ — линейные непрерывные операторы, λ — скаляр. Тогда

1. $\|U_1 + U_2\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$
2. $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$
3. $\|U\| = 0 \iff U = 0$
4. $U : X \rightarrow Y, V : Y \rightarrow Z$ — линейные отображения.

$$\|VU\| \leq \|V\| \cdot \|U\|$$

$$VU = V \circ U$$

$$VUx = V(U(x))$$

Designation. $L(X, Y) \subset \text{Hom}(X, Y)$ — пространство линейных операторов.

Лекция 5

Note. $L(X; Y) \subset \text{Hom}(X; Y)$ — линейные отображения из X в Y . Это линейное нормированное пространство.

Note. То же самое верно для полилинейных отображений. То есть выполнены аксиомы нормы, доказательство аналогичное. $L(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) \subset \text{Poly}(X_1, \dots, X_n; Y)$.

Theorem 2.2.7: О полноте пространства операторов

Если Y полно, то $L(X; Y)$ тоже полно.

Доказательство.

1. Построение предельного оператора.

$$\{U_n\} \subset L(X, Y) \text{ — фундаментальна, то есть } \|U_n - U_m\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим $x \in X$:

$$\|U_m x - U_n x\|_Y = \|(U_m - U_n)x\|_Y \leq \|U_m - U_n\| \cdot \|x\|_X \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда $\{U_m x\}$ фундаментальна в Y , следовательно, $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} U_m x =: U(x)$

2. Линейность предельного отображения.

$$U(x_1 + x_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} (U_m(x_1 + x_2)) = \lim U_m x_1 + \lim U_m x_2 = Ux_1 + Ux_2$$

$$U(\lambda x) = \lambda Ux$$

13 march
18 апреля
в 11:00
в каб 301
коллоквиум

3. Непрерывность U .

$$\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leq 1 \cdot \|x\|.$$

Устремим $n \rightarrow \infty$:

$$\exists N \forall n > N \forall x \in X : \|U_m x - U x\| \leq \|x\|.$$

По неравенству треугольника, при достаточно большом $m > N$

$$\|U x\| \leq \|U x - U_m x\| + \|U_m x\| \leq \|x\| + \|U_m\| \cdot \|x\| \leq (1 + \|U_m\|) \cdot \|x\|.$$

Следовательно, U непрерывно.

4. Сходимость $\{U_m\}$ к U по норме $L(X, Y)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X : \|U_m x - U_n x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

При $x \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > N \forall x \in X : \|U_m x - U x\| \leq \varepsilon \|x\| \iff \|U_m - U\| \leq \varepsilon.$$

□

Theorem 2.2.8

Если Y полно, то $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ полно.

Example 2.2.13 (Самый важный случай). Y — пространство скаляров. $L(X, Y) = X^*$ — сопряженное пространство — пространство линейных непрерывных функционалов.

Theorem 2.2.9

$L_1 = L(X_1 \dots X_k; L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)) \simeq L(X_1, \dots, X_n; Y) = L_2$, то есть существует изометрический (сохраняющий норму) изоморфизм.

Доказательство. Построим биекцию. $U \in L_1 : U(x_1, \dots, x_k) \in L(X_{k+1}, \dots, X_n; Y)$,
 $U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n) \in Y$.

Определим $\tilde{U}(x_1, \dots, x_n) := U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Оно будет полилинейно непрерывно. Это же определение работает и в обратную сторону.

Теперь нужно понять, что с нормой все в порядке.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \|U(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq k}} \left(\sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ k+1 \leq i \leq n}} \|U(x_1, \dots, x_k)(x_{k+1}, \dots, x_n)\| \right) = \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ 1 \leq i \leq n}} \|\tilde{U}(x_1, \dots, x_n)\| = \|\tilde{U}\|.$$

□

2.3 Дифференциальные отображения

Definition 22

X, Y — нормированные пространства, $E \subset X$, $x \in E$, x — внутренняя точка, $f : E \rightarrow Y$. f — дифференцируемо в точке x , если $\exists L \in L(X, Y)$:

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h), \quad h \rightarrow 0, x+h \in E.$$

Note. $x, h \in X$, $f(x), f(x+h) \in Y$, $Lh \in Y$

Что такое $o(h)$:

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \alpha(x, h).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(x, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definition 23

L — дифференциал f в точке x .

Designation. Обозначения дифференциала $D_x f, f'(x), d_x f, df(x)$

Формула из определения выглядит так

$$f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Note. Это определение — дифференцируемость по Фреше.

Note. В конечномерном случае из линейности L автоматически следует непрерывность.

Theorem 2.3.1

Если дифференциал в точке x существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $\exists L_1, L_2$: $f(x+h) - f(x) = L_i h + o(h)$. Тогда $L_1 h - L_2 h - o(h)$, докажем, что $L = L_1 - L_2$ равно нулю.

Зафиксируем $h \neq 0$.

$$\|Lh\| = \frac{\|L(th)\|}{\|t\|} = \underbrace{\frac{\|L(th)\|}{\|th\|}}_{\rightarrow 0, t \rightarrow 0} \|x\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\|Lh\| = 0 \implies L = 0$. □

Definition 24

Если $f : E \subset X \rightarrow Y$ (E открыто), f дифференцируема во всех точках E , $df : E \rightarrow L(X, Y)$ — производное отображение.

Note. Если f дифференцируема в точке x , то f непрерывна.

Правила дифференцирования

Линейность $f_1, f_2 : E \subset X \rightarrow Y$, f_1, f_2 непрерывны в точке $x \in E$. Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2$ — скаляры: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ дифференцируема в точке x и $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x) + \lambda_2 df_2(x)$

Дифференциал композиции X, Y, Z — линейные нормируемые пространства, $U \subset X$, $V \subset Y$, U, V открыты, $f : U \rightarrow Y, g : V \rightarrow Z$, $x \in U, f(x) \in V$, f дифференцируема в точке x , g дифференцируема в точке $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x .

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= \\ &= dg(f(x))(f(x+h) - f(x)) + o(f(x+h) - f(x)) \\ &= dg(f(x))(df(x)h + o(h)) + o(f(x+h) - f(x)) = \\ &= dg(f(x))df(x)h + \underbrace{dg(f(x)(o(h))) + o(f(x+h) - f(x))}_{?=o(h)} \\ \frac{\|dg(f(x))(o(h))\|_Z}{\|h\|_X} &\leq \frac{\|dg(f(x))\| \|o(h)\|}{\|h\|_X} \rightarrow 0. \\ \frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|h\|} &= \underbrace{\frac{\|o(f(x+h) - f(x))\|}{\|f(x+h) - f(x)\|}}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|}}_{\text{ограничено}} \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Дифференцирование обратного $x \in U \subset X$, U открыто, $f : U \rightarrow Y$, существует окрестность $V(f(x))$ в Y , в которой $\exists f^{-1}$. Предположим, что f дифференцируема в точке x , $\exists (df(x))^{-1} \in L(Y, X)$, f^{-1} непрерывна в точке $f(x)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$\underbrace{df^{-1}(f(x))}_{\in L(Y, X)} = (df(x))^{-1}.$$

Note. Здесь слишком много условий

Доказательство. $f(x) = y$, $f^{-1}(y) = x$, $f(x+h) = y+t$, $f^{-1}(y+t) = x+h$. $h \rightarrow 0 \iff t \rightarrow 0$. Давайте запишем

$$t = f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h).$$

Тогда $\|t\| \leq C\|h\|$. Воспользуемся тем, что $df(x)$ обратим.

$$(df(x))^{-1}t = h + (df(x))^{-1}(o(h)) \quad (2.3.1)$$

$$\|(df(x))^{-1}(o(h))\| \leq \|(df(x))^{-1}\| \cdot \|o(h)\| \leq \frac{\|h\|}{2}, \quad \|h\| < \delta.$$

То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \left(\|h\| < \delta \implies \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|(df(x))^{-1}\|} \right).$$

Тогда $\forall \|h\| < \delta: \|(df(x))^{-1}t\| \geq \frac{\|h\|}{2} \implies \|h\| \leq C\|t\|$. Перепишем 2.3.1

$$f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y) = (df(x))^{-1}t + o(t).$$

Это определение дифференцируемости. Тогда

$$df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}.$$

□

2.4 Примеры и дополнительные свойства дифференцирования

0. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема.

$$df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x)h.$$

1. $f : U \subset X \rightarrow Y$, f постоянно, то есть $f(x) = y_0 \quad \forall x \in U$. Тогда $df(x) = 0$ (нулевое линейное отображение, все переводит в нуль).

2. $f \in L(X, Y)$, $df(x) = f$.

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = (df(x))(h).$$

3. $f(x, y) = x^2 + 2xy$. $h = (h_x, h_y)$

$$\begin{aligned} f(x+h_x, y+h_y) - f(x, y) &= x^2 + xh_x + h_x^2 + 3xy + 3xh_y + 3yh_x - x^2 - 3xy + 3h_xh_y = \\ &= (2x + 3y)h_x + 3xh_y + \underbrace{h_x^2 + 3h_xh_y}_{o(h)} \end{aligned}$$

В матричной форме

$$(2x + 3y \quad 3x) \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

4. $x \in U \subset X$, $f : U \rightarrow Y$, $A \in L(Y, Z)$. Если f дифференцируема в точке x , то $A \circ f$ дифференцируема в точке x и $d(A \circ f)(x) = Adf(x)$

5. $x \in U \subset X$, $f : U \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$. Это n отображений: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $f_j : U \rightarrow Y_j$. f дифференцируема в точке x , тогда и только тогда, когда f_1, \dots, f_n дифференцируемы в точке x_0 .

Доказательство. $f(x+h) - f(x) = df(x)h + o(h) \in Y$. Левая часть равна

$$(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)).$$

А правая

$$(L_1h, L_2h, \dots, L_nh) + o(h).$$

□

6. $x_j : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$.

$$dx_j(x)h = h_j.$$

Это удобное обозначение базиса, которое мы будем дальше использовать.

7. $A : X_1 \times X_n \rightarrow Y$ — полилинейное и непрерывное. Оставим только два сомножителя. $A : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$.

$$A(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - A(x_1, x_2) = A(x_1, h_1) + A(h_1, x_2) + \underbrace{A(h_1, h_2)}_{o(h)}.$$

$$dA(x_1, x_2)h = A(h_1, x_1) + A(x_1, h_2).$$

Или можно записать так:

$$dA(x_1, x_2) = A(dx_1, x_2) + A(x_1, dx_2).$$

Совершенно аналогично для n координат.

Property.

1) $f(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \left(dx_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

$$df(x)h = \sum_{j=1}^n \left(h_j \prod_{i \neq j} x_i \right).$$

2) $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$d(f_1 f_2 \dots f_n)(x) = f_2(x) f_3(x) \dots df_1(x) + \dots$$

3) $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное произведение.

$$d\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle.$$

4) $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$d\langle f, g \rangle = \langle df, g \rangle + \langle f, dg \rangle.$$

5) $f: X \rightarrow Y$ над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(\lambda f) = \underbrace{f}_{\in Y} \underbrace{d\lambda}_{L(X, \mathbb{R})} + \lambda \underbrace{df}_{\in L(X, Y)}.$$

Practice. $U = \{A \in L(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in L(X, Y)\}$ — множество обратимых линейных отображений. $f: U \rightarrow L(X, Y)$, $f(A) = A^{-1}$. Найти df .

2.5 Частные производные

Definition 25: Частные производные

Пусть $a \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. U — окрестность точки a . $f: U \rightarrow Y$. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Определим $\varphi_j: X_j \rightarrow Y$, $\varphi_j(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

$d\varphi_j(a_j)$ называется частным дифференциалом (частной производной) f по x_j в точке a , если существует.

Designation. Частный дифференциал обозначается кучей способов

$$\partial_{x_j} f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \partial_j f(a) \in L(x_j, Y).$$

Лекция 6: †

20 march

Statement. Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in X_1 \times \dots \times X_m$, то у него есть все частные дифференциалы и

$$df(a)h = \partial_{x_1} f(a)h_1 + \dots + \partial_{x_m} f(a)h_m, \quad h = (h_1, \dots, h_m).$$

Доказательство. По определению,

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h), \quad a, h \in X_1 \times \dots \times X_m.$$

Разобьем вектор h :

$$h = t_1 + \dots + t_m = (h_1, \dots, 0) + (0, h_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, h_m).$$

Тогда

$$df(a)t_i = \partial_{x_i} f(a)h_i = L_i h_i + o(h_i).$$

В сумме получаем

$$df(a)h = \sum_{i=1}^m \partial_{x_i} f(a)h_i.$$

□

2.6 Важный частный случай: $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$

Statement. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда f_1, f_2, \dots, f_n дифференцируемы в точке x и

$$df(x) = (df_1(x), \dots, df_n(x)), \quad \partial f_i(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}), \quad f_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}.$$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Пусть $h \in \mathbb{R}^m$. Запишем по определению

$$df(x)h = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)) = (df_1(x)h, \dots, df_n(x)h) = f(x+h) - f(x).$$

2 \Rightarrow 1

- Если $n = 1$, то получаем просто функцию, а не вектор-функцию. Если $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x , то существуют все частные производные и

$$df(x)h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j, \quad h = (h_1, \dots, h_m)^\top,$$

при этом

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right), \quad h = (h_1, \dots, h_m)^\top.$$

Можно завести вектор-градиент

$$\text{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right)^\top,$$

И тогда

$$df(x)h = \langle \text{grad}(x), h \rangle \text{ — скалярное произведение.}$$

- Вернемся к 2.6. Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Тогда f дифференцируема в точке x и существуют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$

$$df(x)h = \begin{pmatrix} df_1(x)h \\ \vdots \\ df_n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу дифференциала, которая называется **матрицей Якоби**, а если она квадратная, то ее определитель — **якобиан**.

□

Statement. Если есть отображения $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, и они дифференцируемы, то $d(f \circ g)(x) = dg(f(x)) \cdot df(x)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g_1 \circ f)}{\partial x_m} \\ \dots & \frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) & \dots \\ \frac{\partial(g_k \circ f)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g_k \circ f)}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1(x)} f(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial f_n(x)} f(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial f_1(x)} f(x) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial f_n(x)} f(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial f_1(x)}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Правило цепочки:

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_l}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x).$$

Example 2.6.1 (вычисление частных производных). Пусть $f(x, y) = x^3 + 3xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x.$$

То есть

$$df(x, y)h = (3x^2 + 3y \quad 3x) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Statement. Если $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, то частные производные можно определять формулами

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \quad e_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^\top.$$

Это определение можно обобщить. Можно определить производную по направлению.

Definition 26: Производная по вектору

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in X$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

— производная по вектору v или вдоль вектора v . Если $\|v\| = 1$, то называют производной по направлению v .

Property (Экстремальное свойство градиента). В случае \mathbb{R}^m

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle,$$

откуда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \leq |\text{grad} f(x)| |v|.$$

Функция растет быстрее всего в направлении градиента:

$$\max_{|v|=1} \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right|.$$

Доказательство. Все рассуждения предполагают, что f дифференцируема в x .

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x)v.$$

$$f(x + tv) - f(x) = df(x)(tv) + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

Тогда

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = df(x)v + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\rightarrow 0}.$$

□

2.7 Теорема о конечном приращении (Лагранжа)

Theorem 2.7.1: Теорема о конечном приращении

Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ непрерывно на $[x, x + t] \subset U$ и дифференцируемо на $(x, x + h)$. Тогда

$$\|f(x + h) - f(x)\|_Y \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} \cdot \|h\|_X.$$

Доказательство. Обозначим супремум $M = \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi)\|_{L(X,Y)} = \sup_{\Theta \in (0,1)} \|df(x, +\Theta h)\|_{L(X,Y)}$. Достаточно проверить

$$\forall [\xi', \xi''] \subset (x, x + h): \|f(\xi') - f(\xi'')\| \leq M \|\xi' - \xi''\|.$$

Предположим противное:

$$\Delta_1 = [\xi'_1, \xi''_1]: \|f(\xi'_1) - f(\xi''_1)\| \geq (M + \varepsilon_0) \|\xi'_1 - \xi''_1\|, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Разделим отрезок пополам: $\Delta_1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 = [\xi'_1, \frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}] \cup [\frac{\xi'_1 + \xi''_1}{2}, \xi''_1]$. На одном из них обязательно выполнено прежнее неравенство.

Так можем построить последовательность $\Delta_1 \supset \Delta_2 \dots$. Пусть $\{\xi_0\} = \cap \Delta_i$. Тогда

$$f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0) = df(\xi_0)\delta + \alpha(\delta), \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0: \left(\|\delta\| < \varepsilon \implies \|f(\xi_0 + \delta) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\delta\|, \quad \frac{\|\alpha(\delta)\|}{\|\delta\|} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \right).$$

То есть с некоторого момента все принадлежат окрестности $\exists N: \forall n > N \quad \Delta_n \subset B(\xi_0, \varepsilon)$.

$$\|f(\xi'_n) - f(\xi''_n)\| \leq \begin{cases} \|f(\xi'_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi_0\| \\ \|f(\xi''_n) - f(\xi_0)\| \leq \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi''_n - \xi_0\| \end{cases} = \left(M + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \|\xi'_n - \xi''_n\|.$$

Получаем противоречие, так как с некоторого момента утверждение неверно. □

Note. На прямой теорема Лагранжа дает существование $\xi \in (x, x + \varepsilon)$:

$$|f(x + h) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |h|.$$

Но для вектор-функции на плоскости это уже может быть не верно.

Note. В \mathbb{R}^n есть доказательства, использующие наличие скалярного произведения.

Corollary 4. Если f из теоремы и $A \in L(X, Y)$, то

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \sup_{\xi \in (x, x+h)} \|df(\xi - Ah)\| \|h\| = \sup_{v \in (0,1)} \|df(x+vh - Ah)\| \|h\|.$$

Это теорема при $g(x) = f(x) - Ax$.

Corollary 5. Если K — выпуклый компакт в X , $f \in C^1(K, Y)$, то f — Липшицево на K .

Definition 27

Если $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо во всех точках U и $df: U \rightarrow L(X, Y)$ непрерывно, то говорят, что f непрерывно дифференцируемо на U и пишут $f \in C^1(U, Y)$

Note. $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ непрерывно дифференцируемо на U тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные.

Доказательство. Запишем

$$df(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_m} f(x)).$$

Применим это неравенство в следующем выражении

$$\sup_{\|h\|=1} \|\partial_{x_j} f(x+\delta)h_j - \partial_{x_j} f(x)h_j\| = \sup_{\|h\|=1} \|\partial_{x_j} f(x+\delta) - \partial_{x_j} f(x)\|.$$

$$\begin{aligned} \|df(x+\delta) - df(x)\| &= \sup_{\|h\|=1} \|df(x+\delta)h - df(x)h\| = \sup_{\|h\|=1} \left\| \sum_{j=1}^m \partial_{x_j} f(x_j+\delta) - \partial_{x_j} f(x)h_j \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \sum_{j=1}^m \|\partial_{x_j} f(x+\delta) - \partial_{x_j} f(x)\| \end{aligned}$$

□

Theorem 2.7.2: Признак дифференцируемости

Пусть $f: U \subset X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$, $x \in U$. Предположим, что f имеет все частные дифференциалы в U и они непрерывны в точке x . Тогда f дифференцируема в точке x .

Доказательство. Докажем для $m = 2$. Дифференциал должен выглядеть так: $Lh = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \partial_{x_2} f(x)h_2$. $x \in U \subset X_1 \times X_2$.

Проверим $\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = o(h)$ при $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} ..(x) &\leq \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)h_2\|}_{\leq \sup_{\Theta_2 \in (0,1)} \|\partial_{x_2} f(x_1+h_1, x_2+\Theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2)\| \cdot \|h_2\|} + \underbrace{\|f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)h_1\|}_{\leq \sup_{\Theta_1 \in (0,1)} \|\partial_{x_1} f(x_1+\Theta_1 h_1, x_2) - \partial_{x_1} f(x)\| \cdot \|h_1\|} \leq . \end{aligned}$$

Заметим, что $\|h_1\| \leq \|h\| \wedge \|h_2\| \leq \|h\|$. Тогда можем переписать так:

$$\leq \|h\| \cdot \left(\sup_{\Theta_1} + \sup_{\Theta_2} \right).$$

Каждый из этих супремумов стремится к 0 при $h \rightarrow 0$.

□

Corollary 6. Непрерывная дифференцируемость на открытом множестве равносильна непрерывной дифференцируемости всех частных отображений (существованию и непрерывности всех частных дифференциалов).

Theorem 2.7.3: Теорема о конечном приращении для функций

Пусть $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[x, x+h] \in U$ и дифференцируема на $(x, x+h)$. Тогда существует такое $\xi \in (x, x+h)$, что

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h.$$

Corollary 7. Если U — выпуклое множество и $df(x) = 0$ для любого x из U , то $f(x) = \text{const}$ на U .

Corollary 8. Если U — открытое связное множество и $df(x) = 0$ для всех $x \in U$, то $f(x) = \text{const}$ на U .

Лекция 7: †

20 march

2.8 Производные высших порядков

Definition 28

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, то есть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Частная производная

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

может быть определена на каком-то подмножестве U (для простоты будем считать, что на всем U). То есть $\partial_j f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, у которой могут быть частные производные

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial_{x_k} \partial_{x_j}}(x) = \partial_{x_j x_k}^2 f(x)$$

— вторая частная производная по x_i и x_j в точке x . По индукции можно определить k -ю производную.

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{x_{j_k}} \dots \partial_{x_{j_1}}}(x) = \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f(x).$$

Theorem 2.8.1: о перестановочности производных

Пусть функция $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вторые частные производные $\partial_{x_j} \partial_{x_k} f$ и $\partial_{x_k} \partial_{x_j} f$ в U и они непрерывны в точке $x \in U$. Тогда $\partial_{x_j} \partial_{x_k} f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x)$.

Доказательство. Зафиксируем все переменные кроме x_k и x_j . Тогда можем думать, что это и есть функция от двух переменных.

$$f(x) = f(x_1, x_2).$$

Рассмотрим точку (x_1, x_2) и точки на малом расстоянии, принадлежащие U . Изучим следующее

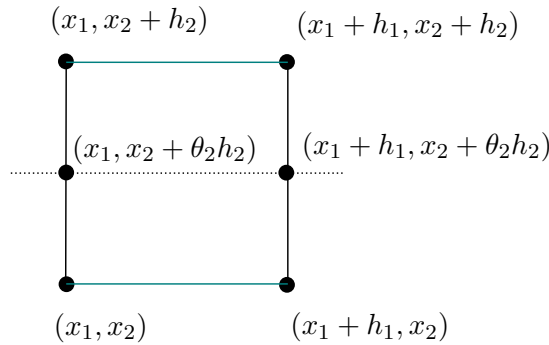


Рис. 2.1:

выражение:

$$\underbrace{F(h_1, h_2)}_{\varphi(1) - \varphi(0)} = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, h_2) + f(x_1, x_2),$$

где $\varphi(t) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2)$. Оценим двумя способами по направлениям. Сначала фиксируем x и группируем пары 1-2 и 3-4.

Это дифференцируемая функция. Можем взять производную

$$\varphi'(t) = \partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \cdot h_2 - \partial_{x_2} f(x_1, x_2 + h_2) \cdot h_2.$$

По теореме Лагранжа $F(h_1, h_2) = \varphi'(\theta_2)$. Перепишем значение F и воспользуемся тем, что $x_2 + \theta_2 h_2$ зафиксировано, поэтому нужно посчитать производную по первой координате, взяв промежуточную точку $x_1 + \theta_1 h_1$:

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) &= \varphi'(\theta_2) = h_2 \cdot (\partial_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) - \partial_{x_2} f(x_1, x_2 + \theta_2 h_2)) = \\ &= h_2 h_1 \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2) = \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно было сгруппировать другие пары слагаемых, поэтому существуют $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in (0, 1)$, что

$$= h_1 h_2 \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1 + \tilde{\theta}_1 h_1, x_2 + \tilde{\theta}_2 h_2).$$

Посчитаем предел (с одной стороны, это $\partial_{x_1} \partial_{x_2}$, с другой, $\partial_{x_2} \partial_{x_1}$) и воспользуемся непрерывностью производных

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_2 h_2)}_{\partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2)} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1 + \tilde{\theta}_1 h_1, x_2 + \tilde{\theta}_2 h_2)}_{\partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2)}.$$

□

Definition 29

$C^k(U, \mathbb{R})$ — множество функций, имеющих все k -ые частные производные, непрерывные в U .

Corollary 9. Если $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, то для всех $n \leq k$, $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m$, $\sigma \in S_n$, $x \in U$ верно равенство

$$\partial_{j_n} \dots \partial_{j_1} f(x) = \partial_{j_{\sigma(n)}} \dots \partial_{j_{\sigma(1)}}.$$

2.8.1 Общий случай

Подход первый Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо на U , тогда $df: U \rightarrow L(X, Y)$ тоже отображение между нормированными пространствами и может оказаться дифференцируемо в точке $x \in U$.

Definition 30: Страшие дифференциалы

Если отображение df определено в окрестности точки x и дифференцируемо в этой точке, то говорят, что f дважды дифференцируемо в точке x .

Дифференциал отображения df называется вторым дифференциалом.

$$d^2 f(x) = d(df)(x) \in L(X, L(X, Y)) = L(X, X; Y) — \text{билинейное отображение на } X \times X.$$

По индукции можно определить полилинейное отображение на X^n :

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f)(x) \in L(\underbrace{X, \dots, X}_n; Y).$$

Подход второй**Definition 31: Производная по вектору**

Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$. Определим

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \partial_h f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Если ∂_k существует в U , то $\partial_h f: U \rightarrow Y$ и может оказаться, что существует производная по какому-нибудь еще вектору. То есть можно определить вторую производную по паре векторов

$$\partial_{h_2} \partial_{h_1} f(x).$$

Аналогично можно определить более старшие производные

$$\partial_{h_n} \partial_{h_{n-1}} \dots \partial_{h_1}.$$

Note. Наличие непрерывных производных по всем направлениям в точке не гарантирует дифференцируемость в бесконечном случае.

Property.

$$1. \partial_{\lambda h} f(x) = \lambda \partial_h f(x)$$

Доказательство. По определению

□

2. Если f дифференцируема в точке x , то $\partial_h f(x) = df(x)h$

Доказательство. Посчитаем

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{\cancel{f(x)} + df(x)(th) + o(\dots) - \cancel{f(x)}}{t} = df(x)(h).$$

□

3. Если $A \in L(Y, Z)$, то $\partial_h(A \circ f)(x) = A\partial_h f(x)$

Доказательство.

$$\frac{Af(x+th) - Af(x)}{t} = A \left(\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right).$$

Так как A — непрерывное отображение, в пределе тоже можем вынести A .

□

2.8.2 Связь между двумя подходами

Theorem 2.8.2: о связи старших дифференциалов и производных по векторам

Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ n раз дифференцируемо в точке x . Тогда $\forall h_1, \dots, h_n \in X$:

$$(d^n f(x)(h_1, \dots, h_n) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_n} f(x).$$

Доказательство. Докажем для двух, то есть $\partial^2 f(x)(h_1, h_2) = \partial_{h_1} \partial_{h_2} f(x)$.

$$\left(d(df)(x)h_1 \right) h_2 = \left(\partial_{h_1}(df)(x) \right) h_2.$$

Это равно по определению

$$\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x+th_1) - df(x)}{t} \right) h_2 =$$

Если последовательность операторов A_n сходится к оператору A_0 , то есть $\|A_0 - A_n\| \rightarrow 0_{L(X,Y)}$, то $A_n h_2 \rightarrow A_0 h_2$:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x+th_1)h_2 - df(x)h_2}{t} = \partial_{h_1}(df(x)h_2) = \partial_{h_1}(\partial_{h_1} f(x)).$$

По индукции можно доказать, что утверждение верно для n переменных.

□

2.8.3 Симметричность дифференциалов

Theorem 2.8.3: О симметричности n -го дифференциала

Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо n раз в точке $x \in U$. Тогда полилинейное отображение $d^n f(x)$ является симметричной относительно любой пары своих аргументов.

$$d^n f(x)(h_1, \dots, h_n) = \partial_{h_1} \dots \partial_{h_n} f(x).$$

Доказательство. Докажем, что второй дифференциал симметричный. Пусть $\exists d^2 f(x)$ и для всех h_1, h_2 : $d^2 f(h_1, h_2) = d^2 f(h_2, h_1)$.

Рассмотрим функцию

$$F(t, h_1, h_2) = f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + th_1) - f(x + th_2) + f(x).$$

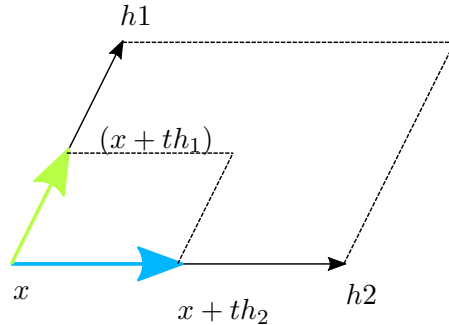


Рис. 2.2:

Хотим доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, h_1, h_2)}{t^2} = d^2 f(x) h_1 h_2.$$

То есть

$$\|F(t, h_1, h_2) - t^2 d^2 f(x) h_1 h_2\| = o(t^2).$$

Заведем отображение $\varphi(v) = f(x + t(h_2 + v)) - f(x + th_2)$, где v сонаправлен с h_2 и $\|v\| \leq \|h_2\|$. Тогда

$$F(t, h_1, h_2) = \varphi(h_2) - \varphi(0).$$

Применим теорему о конечном приращении

$$\begin{aligned} \|\varphi(h_2) - \varphi(0) - \underbrace{(t^2 d^2 f(x) h_1)}_A h_2\| &\leq \sup_{\theta \in (0,1)} \|d\varphi(\theta h_2) - t^2 d^2 f(x) h_1\|_{L(X,Y)} \cdot \|h_2\|_{\|X\|} = \\ &= \sup_{\theta \in (0,1)} \|df(x + t(h_1 + \theta h_2)) \cdot t - df(x + t\theta h_2) \cdot t - t^2 d^2 f(x) h_1\| \cdot \|h_2\|_{\|X\|} = \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $df(x)$ дифференцируемо. Известно, что $df(x + \tilde{h}) = df(x) + d^2 f(x) \tilde{h} + \alpha(\tilde{h})$, где $\alpha(\tilde{h}) = o(\tilde{h})$ (это все операторы). Выносим t и получаем

$$= \cancel{df(x)} + \underline{d^2 f(t(h_1 + \theta h_2))} + \alpha(t(h_1 + \theta h_2)) - \cancel{df(x)} - \underline{d^2 f(t\theta h_1)} - \alpha(t\theta h_1) - \underline{td^2 f(x) h_1}$$

Первое и четвертое сокращаются, подчеркнутые в сумме дают 0, третье и шестое равны $o(t)$. Всего осталось $o(t^2)$. \square

Theorem 2.8.4: частный случай, $X = \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^m$ — стандартный базис.

$$h_j = \left(h_j^{(1)}, \dots, h_j^{(m)}\right) \sum_{k=1}^m h_j^{(k)} e_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^n f(x)(h_1, \dots, h_n) &= d^n f(x) \left(\sum_{k=1}^m h_1^{(k)} e_k, \dots, \sum_{k=1}^m h_n^{(k)} e_k \right) = \\ &= \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq m} h_1^{(k_1)} \dots h_n^{(k_n)} d^n f(x)(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \\ &= \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq m} h_1^{(k_1)} \dots h_n^{(k_n)} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} f(x) \end{aligned}$$

Theorem 2.8.5: еще более частный случай, $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}, h_i = h_j$

Если $h = (h^{(1)}, \dots, h^{(n)})$, То

$$\begin{aligned} d^n f(x)(h_1, \dots, h_n) &= \sum_{1 \leq k_i \leq m} \prod_{i=1}^n h_i^{(k_i)} \partial_{k_i} f(x). \\ d^n f(x) &= \sum_{1 \leq k_i \leq m} \frac{\partial^n f}{\partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}}(x) \partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}. \end{aligned}$$

Еще более частный случай, все h_i равны:

$$\partial^n f(x) \underbrace{(h, \dots, h)}_n = \sum_{1 \leq k_i \leq m} h^{(k_1)} \dots h^{(k_n)} \frac{\partial^n f}{\partial_{x_{k_1}} \dots \partial_{x_{k_n}}}(x) =$$

Сгруппируем одинаковые слагаемые, в которых α_1 раз происходит дифференцирование по x_1, α_2 — по $x_2 \dots a_m$ по $x_m, \sum \alpha_j = n, \alpha_j \in \mathbb{Z}^+$.

$$= \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^n f(x)}{(\partial_{x_1})^{\alpha_1} \dots (\partial_{x_1})^{\alpha_m}} (h^{(1)})^{\alpha_1} \dots (h^{(n)})^{\alpha_m}$$

Designation. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+, |\alpha| = \sum \alpha_j$ — высота α , $\alpha! = \prod \alpha_j! = \prod (h^{(j)})^{\alpha_j}$.

Можно переписать формулу из теоремы

$$= \left(h^{(1)} \partial_{x_1} + \dots + h^{(m)} \partial_{x_m} \right)^n f(x) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^\alpha} h^\alpha.$$

Practice. В случае \mathbb{R}^2 написать, что такое

$$d^2 f(x, y)(h, h), \quad h = (h_1, h_2).$$

2.9 Многомерная формула Тейлора

Пусть $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $[x, x+h] \subset U$, $t \in (0, 1)$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Если $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, то $\varphi \in C^k[0, 1]$.

$$\begin{aligned}\varphi' &= df(x+th)h = \partial_h f(x+th) \\ \varphi''(t) &= \partial_h \partial_h f(x+th) = d^2 f(x+th)(h, h) \\ &\vdots \\ \varphi^{(n)} &= \sum_{|a| \leq n} \frac{n!}{a!} \frac{\partial^n f}{\partial x^a}(x+th) h^a = d^n f(x+th)(h, \dots, h)\end{aligned}$$

Theorem 2.9.1: Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Если $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0, 1)$:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x+\vartheta h).$$

Доказательство. Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции $\varphi(t) = f(x+th)$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}.$$

Подставим в $\varphi(0)$ вместо φ соответствующее f и получим нужную формулу. □

Theorem 2.9.2: Формула Тейлора в дифференциалах

Если $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0, 1)$:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+\vartheta h) h^{k+1}.$$

Theorem 2.9.3: Формула Тейлора в дифференциалах в общем случае (без доказательства)

Если $f: X \rightarrow Y$, $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $[x, x+h] \subset U$, то существует $\vartheta \in (0, 1)$:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x) h^k}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+\vartheta h) h^{k+1}.$$

2.10 Исследование внутренних экстремумов

Definition 32

Определение экстремумов, максимумов, минимумов, локальных и глобальных аналогично одномерным.

Theorem 2.10.1: необходимое условие экстремума

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Тогда

1. Если для какого-то h существует $\partial_h f(x_0)$, то она равна 0.
2. Если f дифференцируема в точке x_0 , то $df(x_0) = 0$

Доказательство. Подставим $\varphi(t) = f(x + th)$. □

Note. В случае дифференцируемости и $X = \mathbb{R}^m$ на m координат точки x_0 получаем m уравнений.

$$\partial_1 f(x_0) = \dots = \partial_m f(x_0) = 0.$$

Definition 33

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Точка x_0 называется **стационарной** для f , если $\text{grad} f(x_0) = 0$.

Theorem 2.10.2: достаточное условие экстремума

Пусть $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in U$ и $df(x_0) = 0$.

- Если для некоторого $\nu > 0$ и любого h верно $d^2 f(x_0)(h, h) \geq \nu \|h\|^2$, то x_0 — точка локального минимума.
- Если для некоторого $\nu > 0$ и любого h верно $-d^2 f(x_0)(h, h) \geq \nu \|h\|^2$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)}_{=0} h + \frac{d^2 f(x_0)(h, h)}{2} + \text{остаток}.$$

Разберем случай $d^2 f(x_0)(h, h) \geq \nu \cdot \|h\|^2$, еще мы знаем, что остаток равен $o(h^2)$. Тогда

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0).$$

Поэтому x_0 — точка локального минимума. □

Note. В \mathbb{R}^m сводится к положительной или отрицательной определенности матрицы, составленной из вторых частных производных.

$$h^\top \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) h.$$

Для этого существует критерий Сильвестра.

Лекция 8: †

2.11 Странные примеры экстремумов

2.11.1 Задача Гюйгенса

3 Apr

Description 1. Есть два шара с массами M и $m \in (0, M)$. Шар с массой M летит со скоростью V на покоящийся шар массой m . Какая скорость будет у малого шара после столкновения? И как ее вообще найти?

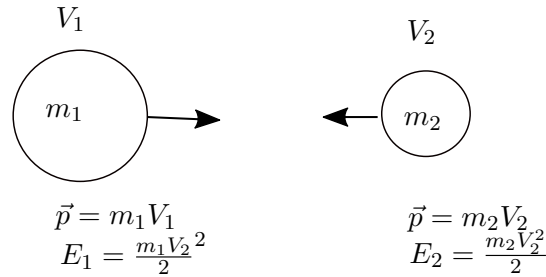


Рис. 2.3: Столкновение шаров

После столкновения посчитаем импульс и энергию. По закону сохранения импульса и закону сохранения энергии

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 \tilde{v}_1^2 + m_2 \tilde{v}_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - \tilde{v}_1) &= m_2(\tilde{v}_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - \tilde{v}_1^2) &= m_2(\tilde{v}_2^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

Поделим одно на другое и получим, что $v_1 + \tilde{v}_1 = v_2 + \tilde{v}_2$. Далее можно подставить в первое уравнение и получить

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 \tilde{v}_1 + m_2(v_1 + \tilde{v}_1 - v_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \\ \tilde{v}_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Если $v_2 = 0$,

$$\tilde{v}_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \in (v_1, 2v_1).$$

Definition 34: Задача Гюйгенса

С какими массами m_1, \dots, m_n разместить по пути покоящиеся шары, чтобы передался максимальный импульс?

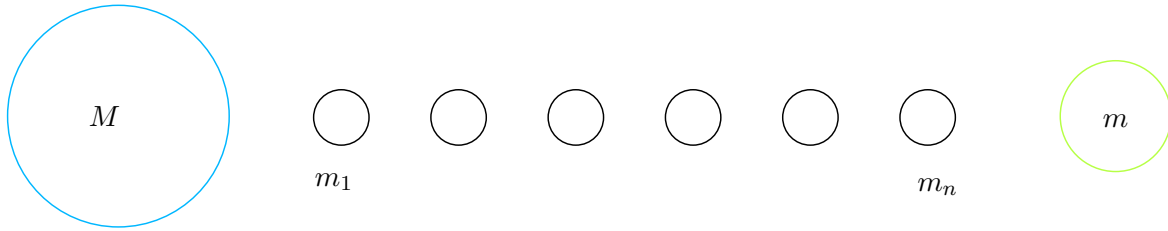


Рис. 2.4: Задача Гюйгенса

$$\tilde{v} = v \cdot \frac{2M}{M + m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \dots \cdot \frac{2m_n}{m_n + m} = f(m_1, \dots, m_n) \cdot v \cdot 2^{n+1}.$$

Нужно найти максимум этой функции. Он существует, так как в бесконечности одной и переменных значение стремится к 0. Обозначим $m_0 = M$, $m_{n+1} = m$.

Посчитаем частные производные и приравняем к 0

$$\partial_j f(\dots) = 0 \iff m_j^2 = m_{j-1}m_{j+1}.$$

Тогда

$$q = \frac{M}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \dots = \frac{m_n}{m}.$$

$$q^{n+1} = \frac{M}{m}, \quad q = \sqrt[n+1]{\frac{M}{m}}.$$

А скорость

$$\tilde{v} = 2^{n+1} \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n+1} v.$$

При $n = 0$, получается $\tilde{v} = 2 \cdot \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m} + 1} < 2$

Practice.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \sqrt[n]{\frac{M}{m}}}{\sqrt[n]{\frac{M}{m}} + 1} \right)^{n+1} = ?.$$

2.11.2 Кратчайшее расстояние до линейного подпространства

Theorem 2.11.1

Пусть H — пространство со скалярным произведением, $L \subset H$ — линейное подмножество (подпространство), $x_0 \in H$. Пусть z_0 — наилучшее приближение к x_0 в L , то есть

$$\|x_0 - z_0\| = \min_{z \in L} \|x_0 - z\|,$$

тогда $x_0 - z_0 \perp L$, то есть $\forall z \in L: \langle x_0 - z_0, z \rangle = 0$.

Доказательство. Введем функцию $f: L \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \|x_0 - z\|^2$. В точке z_0 эта функция имеет минимум. Хотим минимизировать f .

$$f(z) = \langle x_0 - z, x_0 - z \rangle = \langle z, z \rangle - \langle x_0, z \rangle - \langle z, x_0 \rangle + \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Продифференцируем:

$$\begin{aligned} df(z_0)h &= \langle z_0, h \rangle + \langle h, z_0 \rangle - \langle x_0, h \rangle - \langle h, x_0 \rangle \\ &= \langle z_0 - x_0, h \rangle + \langle h, z_0 - x_0 \rangle = \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle h, z_0 - x_0 \rangle \end{aligned}$$

Так как $\forall h \in L: df(z_0)h = 0$, в вещественном случае получаем перпендикулярность.

Если поле комплексное, то для всех θ

$$2 \operatorname{Re} \langle h e^{i\theta}, z_0 - x_0 \rangle = 0.$$

Выберем θ так, что $\langle h e^{i\theta}, z_0 - x_0 \rangle \in \mathbb{R}$, поэтому можно вынести скаляр $e^{i\theta}$ и получить $\langle h, z_0 - x_0 \rangle = 0$. \square

Definition 35: Аффинное подпространство

Пусть $L \subset X$, $x_0, l_0 \in H$, $L_0 \subset H$ — линейное подпространство. Подпространство $L = \{l_0 + z \mid z \in L_0\}$ называется аффинным.

Рассмотрим функцию $f: L \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \|z - x_0\|^2$. Нужно найти ее минимум. Пусть z_0 — точка минимума.

$$df(z_0): L_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + df(z_0)h + o(h).$$

Будем брать $h: z_0 + h \in L \iff h \in L_0$ — область допустимых приращений.

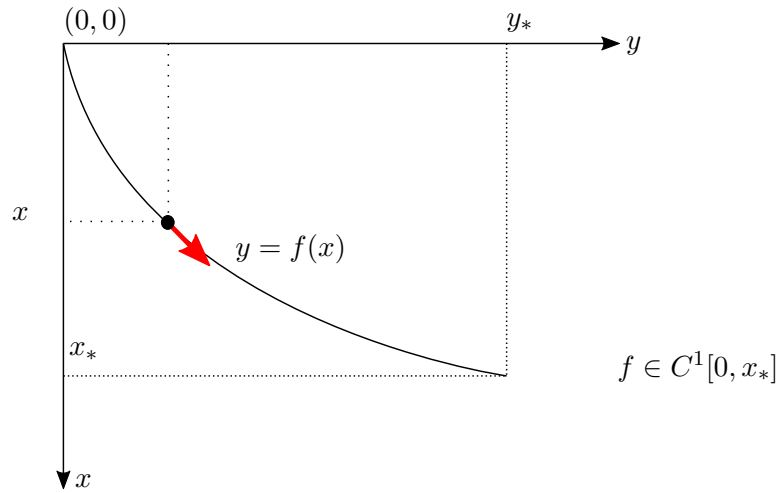


Рис. 2.5: Задача о брахистороне

2.11.3 Задача о брахистороне

Постановка задачи Пусть есть координатная плоскость с осями x и y . Мы находимся в точке $(0, 0)$ и хотим попасть в точку (x', y') , выбрав оптимальную траекторию. Хотим минимизировать время, затраченное на спуск, по всем функциям f . Обозначим множество функций

$$L = \{f \in C^1[0, x_*] \mid f(0) = 0, f(x_*) = y_*\}.$$

Посчитаем мгновенную скорость:

$$\frac{mv(x)^2}{2} = mgx \implies v(x) = \sqrt{2gx}.$$

Чтобы найти время, нужно разбить путь на малые отрезки, на них разделить расстояние на скорость и просуммировать. То есть проинтегрировать функцию. Воспользуемся утверждением о том, что при достаточно малом кусочке длина дуги будет равна $\sqrt{1 + f'(x)^2}$:

$$T(f) = \int_0^{x_*} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

Заведем функционал $J: L \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J[f] = \int_0^{x_*} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{x}} dx.$$

Общий вид В более общем виде функционал $J[f]$, где $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, принимает такой вид:

$$J[f] = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx.$$

В нашем случае $F(u_1, u_2, u_3) = \frac{\sqrt{1+u_3^2}}{\sqrt{u_1}}$.

Practice. Если $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, то J дифференцируема.

Доказательство. Пусть $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $J: L \rightarrow \mathbb{R}$

$$L = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = A, f(b) = B\}.$$

Определим L_0 — пространство допустимых приращений к функции:

$$L_0 = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

Тогда $dJ(f): L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — линейное непрерывное отображение.

Пусть $J = J_2 \circ J_1$, где

$$\begin{aligned} J_2: C[a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, & J_2(f) &= \int_a^b f(x)dx \\ J_1: C^1[a, b] &\rightarrow C[a, b], & J_1(f)(x) &= F(x, f(x), f'(x)) \end{aligned}$$

Тогда $dJ(f) = J_2 \circ dJ_1(f)$. Чтобы доказать это, докажем, что $dJ_2(J_1(f)) = J_2$. Пусть $q = J_1(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h \rightarrow 0$ — приращение. Тогда

$$J_2(q + h) - J_2(q) = \int_a^b q(x)dx = J_2(q).$$

Теперь нужно проверить, что J_1 дифференцируемо, так как с J_2 уже все в порядке.

$$d_h J(f) = J_2 \circ d_h J_1(f).$$

$$h \in L_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_1(f + th) - J_1(f)}{t}.$$

Таким образом, для всех x нужно посчитать

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)) - F(x, f(x), f'(x))}{t} \quad (2.11.1)$$

Пусть

$$\varphi(t) = F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x)).$$

Тогда 2.11.1 равна $\varphi'(0)$. При этом

$$\varphi'(t) = \partial_2 F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x) + th(x), f'(x) + th'(x))h'(x),$$

из чего следует, что 2.11.1 равно

$$\partial_2 F(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x), f'(x))h'(x).$$

Проинтегрируем

$$\partial_h J(f) = \int_a^b \partial_2 F(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 F(x, f(x), f'(x))h'(x)dx.$$

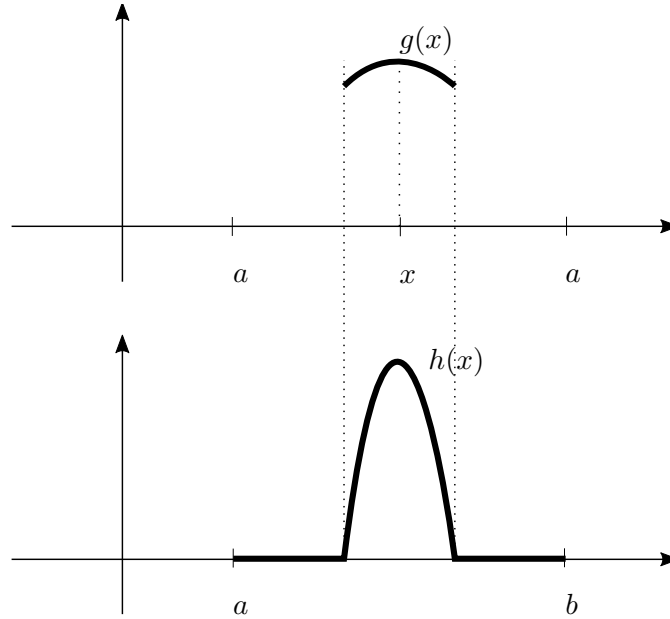
Необходимое условие экстремума состоит в том, что $\forall h \in L_0: \partial_h J(f) = 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \partial_h J(f) &= \int_a^b \left(\partial_2 F(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\partial_3 F(\dots) \right) \right) h(x)dx + \partial_3 F(\dots)h(x) \Big|_a^b = \\ &= \int_a^b g(x)h(x)dx = 0 \end{aligned}$$

Так как это равенство верно для всех h из L_0 , $g(x) = 0$: пусть $g(x') \neq 0$. Тогда по непрерывности $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности x' . Тогда существует h такое, что $h(x) \neq 0$ только в этой окрестности x' , поэтому

$$\int_a^b g(x)h(x)dx \neq 0.$$



Следовательно, f — экстремум. Тогда

$$\partial_2 F(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \partial_3 F(x, f(x), f'(x)) = 0, \quad f(a) = A, \quad f(b) = B.$$

Полученное дифференциальное уравнение от f называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Применим для решения первоначальной задачи

$$F(u_1, u_2, u_3) = F(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{x}}.$$

Тогда $\partial_2 F(\dots)$ в уравнении просто равно 0, а

$$\partial_3 F(\dots) = \frac{f'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)' = 0, \quad f(x) = y', \quad f(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}} = c.$$

Возведем в квадрат и получим, что

$$\frac{x}{c^2} = \frac{1}{f'(x)^2} + 1 \Rightarrow \frac{const - x}{x} = \frac{1}{f'(x)^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{x}{const - x}}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{const - s}} dx,$$

при этом $const$ можно подобрать так, что $f(x^*) = y^*$. Это циклоида. \square

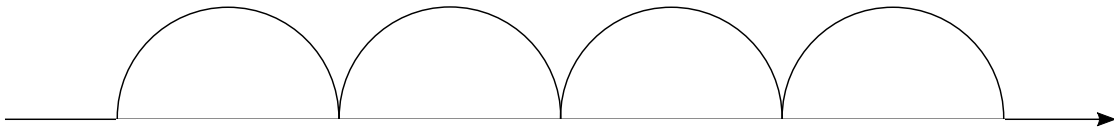


Рис. 2.6: Циклоида

Лекция 9: †

10 Apr

2.12 Поверхности и криволинейные координаты

Поверхность-график Пусть $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на открытом множестве, график функции, поверхность —

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in U\}.$$

Параметризация Отображение $F: U \rightarrow S$, такое что $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ — непрерывное, биективное отображение

Пути на S Если $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ — путь в U , то $F \circ \gamma$ — путь в S , и наоборот.

Криволинейные координаты на S (x, y) выполняют роль координат на S . Образы координатных линий — координатные кривые на S .

2.12.1 Касательная плоскость к графику функции

- Пусть f дифференцируемо в точке $(x_0, y_0) \in U$. Тогда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\dots), \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

$$df(x_0, y_0) = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)).$$

- Множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий уравнению

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

называется **касательной плоскостью** к S в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Эта плоскость единственна и

$$A = \partial_x f(x_0, y_0), \quad B = \partial_y f(x_0, y_0).$$

- Нормаль к плоскости

$$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0)) = (\nabla f(x_0, y_0), -1).$$

2.12.2 Касательный вектор

- Если гладкий путь в $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то касательный вектор к нему это $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Если путь лежит на поверхности S , то есть $\Gamma = F \circ \gamma$, то

$$\Gamma'(t) = (x'(t), y'(t), \partial_x f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t))y'(t)).$$

- Касательный вектор к пути на поверхности перпендикулярен нормали и лежит в касательной плоскости.

Уравнение нормали

$$n = (\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1).$$

- Верно и обратное: любой вектор из касательной плоскости является касательным к некоторому пути на поверхности.

$$(u, v, w) \perp n \quad x(t) = x_0 + ut, \quad y(t) = y_0 + vt \text{ — путь в } U.$$

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

Продифференцировав это, мы получим равенство выше.

2.12.3 Чуть более общая ситуация

- Если $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, то получим график отображения

$$S = \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in U, y \in f(x)\}$$

— n -мерная поверхность в \mathbb{R}^{n+m} .

- $F: U \rightarrow S$, $F(x) = (x, f(x))$ — параметризация поверхности.
- Касательное пространство n -мерно и состоит из касательных векторов.
- Пространство нормалей m -мерное.

2.13 Теорема о неявном отображении (функции)

2.13.1 Мотивация

- Рассмотрим множество $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ — окружность на плоскости. Это не график функции $y = f(x)$, но почти для всех точек можем взять окрестность, которая будет графиком.
- Можно честно решить относительно y уравнение $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
- TODO: Дописать ☺

2.13.2 Подстановка

- Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}.$$

- Хотим разрешить относительно $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

- Тем самым, получить задание m -мерной поверхности в \mathbb{R}^{m+n} .

2.14 Теорема о неявном отображении

Theorem 2.14.1: О неявном отображении

- Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, Y — полное, $(x_0, y_0) \in W \subset X \times Y$.
- Отображение непрерывно $F: W \rightarrow Z$ в точке (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$
- В W существует частный дифференциал F по y ($\exists \partial_y F: W \rightarrow L(Y, Z)$) и непрерывно в точке (x_0, y_0) .
- Оператор обратим $(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$

Тогда существуют $U \subset X$ — окрестность точки x_0 , $V \subset Y$ — окрестность точки y_0 , $f: U \rightarrow V$ такие, что $U \times V \subset W$ и

$$\{F(x, y) = 0\} \cap (U \times V) = \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$

1. Пусть $g_x(y) = y - (\partial_y F(0, 0))^{-1} F(x, y)$, $g_x: Y \rightarrow Y$.

$$F(x, y) = 0 \iff y \text{ — неподвижная точка } g_x.$$

Докажем это. Нужно выделить подмножество Y , где отображение действует.

$$dg_x(y) = I_Y - (\partial_y F(0, 0))^{-1} \partial_y F(x, y).$$

Если (x, y) стремиться к $(0, 0)$, то последнее слагаемое будет стремиться к тождественному отображению I_Y , то есть правая часть равенства стремиться к 0.

$$\exists \Delta > 0: \|x\| < \Delta, \|y\| < \Delta \implies \|dg_x(y)\| < \frac{1}{2}.$$

Возьмем $\Delta > \varepsilon > 0$. $g_0(0) = 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x, \|x\| < \delta: \|g_x(0)\| \leq \varepsilon/2.$$

2. **Ключевой момент:** так как производные меньше $\frac{1}{2}$, и $\|g_x(0)\| \leq \varepsilon/2$

$$g_x(\{\|y\| \leq \varepsilon\}) \subset \{\|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Применим теорему о сжимающем отображении

$$y: \|y\| \leq \varepsilon, \quad \|g_x(y) - g_y(x)\| \leq \sup_{0 < \Theta < 1} \|dg_x(\Theta)\| \cdot \|y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как Y полное, шар M , где действует g , является метрическим, отображение g_x сжимающее. Следовательно, существует единственная неподвижная точка

$$\exists! y: \|y\| \leq \varepsilon, g_x(y) = y.$$

Рассмотрим $U = B_\delta(0)$. Оно подойдет.

□

Note. Отображение f непрерывно в точке x_0 .

Note. Если случай конечномерный, то достаточно требовать только обратимость (без непрерывности)

Note. $\begin{pmatrix} \partial f_k \\ \partial y_j \end{pmatrix}$ — обратимая матрица, то есть ее определитель не 0.

Theorem 2.14.2

Если в условиях прошлой теоремы отображения F , $\partial_y F$ непрерывны не только в точке (x_0, y_0) , но в целой окрестности, то f непрерывно в окрестности точки x_0

Доказательство. Хотим проверить, что $\exists (d_y D(x, y))^{-1} \in L(Z, Y)$, при (x, y) близких к (x_0, y_0) . Уже знаем, что $\exists (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$.

Lemma 1 (об обратимости оператора близкого к тождественному). Y — полное, $B \in L(Y, Y)$, $\|B\| \leq 1$. Тогда $\exists (I - B)^{-1} \in L(Y, Y)$.

Доказательство. Докажем, что

$$\forall v \in Y \exists! u \in Y: (I - B)u = v.$$

Последнее утверждение равносильно тому, что

$$u = c + Bu \quad g_v(u) = v + Bu.$$

Это сжимающее отображение так как

$$\|g_v(u_1) - g_v(u_2)\| = \|Bu_1 - Bu_2\| \leq \|B\| \cdot \|u_1 - u_2\|.$$

Тогда по теореме сжимающем отображении существует неподвижная точка.

$$v_n \rightarrow v_0 \implies u_n \rightarrow u, \quad u_n = v_n + Bu_n \wedge u_0 = v_0 + Bu_0.$$

$$u_n - u_0 = v_n - v_0 + B(u_n - u_0)$$

$$\|u_n - u_0\| \leq \|v_n - v_0\| + \|B\| \cdot \|u_n - u_0\|.$$

$$\|u_n - u_0\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|v_n - v_0\| \rightarrow 0.$$

□

Lemma 2 (об обратимости оператора близкого к обратимому). Y — полное пространство. $A, A_0 \in L(Y, Z)$, $\exists A_0^{-1} \in L(Z, Y)$. Если $\|A - A_0\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, то $A^{-1} \in L(Z, Y)$

Доказательство. Применяем лемму 1

$$\underbrace{A}_{L(Y, Z)} = A_0 + A - A_0 = \underbrace{A_0}_{\text{обратно и } L(Y, Z)} \underbrace{(I_Y + A_0^{-1}(A - A_0))}_{\text{обратно и } L(Y, Y)}, \quad \|B\| \leq \|A - A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1.$$

□

По лемме 2 получаем утверждение теоремы.

□

Theorem 2.14.3

Если в условиях теоремы 1 отображения F дифференцируемо в точке (x_0, y_0) , то и f дифференцируемо в точке x_0 и

$$df(x_0) = -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \partial_x F(x_0, y_0).$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$F(x, y) = F(0, 0) - \partial_x F(0, 0)x + \partial_y F(0, 0)y + \underbrace{o(\|x\| + \|y\|)}_{\alpha(x, y)}.$$

Знаем, что $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$.

$$0 = \partial_x F(0, 0)x + \partial_y F(0, 0)f(x) + \alpha(x, y).$$

$$f(x) = -(\partial_y F(0, 0))^{-1} \partial_x F(0, 0)x - \underbrace{(\partial_y F(0, 0))^{-1} \alpha(x, f(x))}_{? = o(\|x\|)}.$$

Если $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$.

$$\exists \delta > 0: \|x\| < \delta \implies \frac{\|\alpha(x, f(x))\|}{\|x\| + \|f(x)\|} \leq \frac{1}{\|\partial_y F(0, 0)^{-1}\| \cdot \frac{1}{2}}.$$

$$\|\partial_y F(0, 0)^{-1} \alpha(x, f(x))\| \leq \frac{1}{2} (\|x\| + \|f(x)\|).$$

$$\|f(x)\| \leq C\|x\| + \frac{1}{2} (\|x\| + \|f(x)\|).$$

$$\frac{1}{2} \|f(x)\| \leq C\|x\| + \frac{1}{2} \|x\| \implies \|f(x)\| \leq \tilde{c}\|x\| \implies o(\|x\| + \|f(x)\|) = o(\|x\|).$$

□

Note. Можно попросить большую дифференцируемость F и получить большую дифференцируемость f . Аналогично можно попросить дифференцируемость в окрестности и получить дифференцируемость в окрестности.

Theorem 2.14.4: об обратном отображении

Пусть $F: W \subset Y \rightarrow X$, Y — полно, $F(y_0) = x_0$, F дифференцируемо в W , dF непрерывна в точке y_0 , и существует $(dF(y_0))^{-1} \in L(X, Y)$. Тогда существуют окрестности $U \subset W$ точки x_0 и V точки y_0 такие, что $F: V \rightarrow U$ — биекция, то есть существует $F^{-1}: U \rightarrow V$, F^{-1} — дифференцируемо в точке x_0 и

$$dF^{-1}(x_0) = (dF(y_0))^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x, y) = X - F(y)$, $F: X \times Y \rightarrow X$. Заметим, что $G(x, y) = 0 \iff x = F(y)$. $G(x_0, y_0) = 0$.

$$\partial_y G(x_0, y_0) = -dF(y_0) — \text{обратимо.}$$

$$\exists (\partial_y G(x_0, y_0))^{-1} \in L(Y, X).$$

По теореме о неявной функции получаем, что существует

$$f: U \rightarrow V \quad G(x, f(x)) = 0 \iff x - F(f(x)) = 0.$$

И $f = F^{-1}$ на U .

$$dF^{-1}(y_0) = df(y_0) = \dots = dF(y_0))^{-1}.$$

□

Note. Можно попросить большую дифференцируемость F и получить большую дифференцируемость f .

Лекция 10: †

17 Apr

2.15 Условные экстремумы

Definition 36: Локальный максимум

Пусть $f: W \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $z_0 \in W$, $\Phi(z_0) = 0$ и существует такая окрестность $U \subset W$ точки z_0 , что

$$\forall z \in U \cap \{\Phi = 0\} \quad f(z) \leq f(z_0).$$

Тогда точка z_0 называется точкой условного локального максимума функции f при условии $\Phi = 0$.

Note. Аналогично определяется локальный минимум и экстремум, также строгие аналоги.

Note (уравнения связи). $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi_1(z) = 0, \dots, \Phi_m(z) = 0$$

— m уравнений связи — часто задают n -мерную поверхность.

Когда такие поверхности получаются?

Пусть Φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $z_0 \in W$, рассмотрим матрицу дифференциала

$$d\Phi(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}(z_0) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{n+m}}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1}(z_0) & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_{n+m}}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Если $\text{rank} d\Phi(z_0) = m$, то в окрестности точки z_0 уравнение $\Phi(z) = 0$ задает n -мерную плоскость в \mathbb{R}^{n+m} .

Note. $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z)) = 0$

Приходим к тому, что надо искать экстремум функции

$$\tilde{f}(x) = f(x, y) - f(x, g(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Но возникает проблема: g задана неявно.

Если z_0 — локальный экстремум функции f при условии, что $\Phi(z) = 0$, то x_0 — локальный экстремум функции \tilde{f} . В случае гладкости обеих функций для этого есть необходимое условие экстремума

$$d\tilde{f}(x_0) = 0 \iff \partial_x f(x_0, g(x_0)) + \partial_y f(x_0, g(x_0)) dy(x_0) = 0.$$

Еще $\Phi(x, g(x)) = 0$, в окрестности x_0 . Поэтому

$$\partial_x \Phi(x_0, g(x_0)) + \partial_y (\Phi(x_0, g(x_0))) dg(x_0) = 0.$$

Применим теорему о формуле неявной функции

$$dg = -(\partial_y \varphi(x_0, g(x_0)))^{-1} \partial_x \Phi(x_0, g(x_0)).$$

Подставим $dg(x_0)$

$$\partial_x f(x_0, g(x_0)) - \underbrace{\partial_y f(x_0, g(x_0)) (\partial_y \Phi(x_0, g(x_0)))^{-1} \partial_x \varphi(x_0, g(x_0))}_{\lambda}.$$

$$\partial_x f(z_0) - \lambda \partial_x \Phi(z_0) = 0$$

$$\partial_y f(z_0) - \lambda \partial_y \Phi(z_0) = 0$$

Получаем

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) = 0 \tag{2.15.1}$$

λ — вектор-строка длины m , так как $\partial_y f(z_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Тогда выражение 2.15.1 — $n + m$ выражений и еще есть m уравнений на Φ .

Theorem 2.15.1: Необходимое условие условного экстремума

$W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in C^1(W, \mathbb{R})$, $\Phi \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$, $z_0 \in W$, $\text{rank} d\Phi(z_0) = m$, $\Phi(z_0) = 0$. Если z_0 — точка условного локального экстремума функции f при условии $\Phi(z) = 0$, то существует $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такое, что

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) = 0.$$

Definition 37

λ называется множителем Лагранжа, а метод называется методом неопределенных множителей Лагранжа.

Note. Система

$$df(z_0) - \lambda d\Phi(z_0) = 0, \quad \Phi(z_0) = 0$$

состоит из $2m + n$ уравнений с $2m + n$ неизвестными z_0 и λ .

2.15.1 Примеры

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, где норма евклидова.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k = x^T A x, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Можно считать, что матрица A , задающая a_{jk} , симметрична ($a_{jk} = a_{kj}$).

Пусть

$$\varphi(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1.$$

Тогда S^{n-1} — множество нулей этой функции, а S^{n-1} компактно, следовательно экстремумы достигаются.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: d(f - \lambda \varphi)(x) = 0.$$

Посчитаем

$$\frac{\partial(f - \lambda \varphi)}{\partial x_j}(x) = 2 \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - 2\lambda x_j,$$

что равносильно $Ax = \lambda x$. Следовательно, x — собственный вектор матрицы A , а λ — ее собственное число.

Пусть $|x_s| = 1$.

$$f(x_s) = x_s^T A x_s = \lambda_s \underbrace{x_s^T x_s}_{|x_s|^2} = \lambda_s.$$

Значит, нужно выбрать максимальное и минимальное собственное число.

Задача Дидоны Хотим найти максимальную площадь S ограниченную кривой фиксированной длины P , при этом $L = \{f \in C^2[0, l] \mid f(0) = f(l) = 0\}$

$$S(t) = \int_0^l f(x) dx$$

$$\Phi(f) = \int_0^l \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx - P = 0$$

В данном случае нам требуется более общая формулировка, которую мы не доказывали.
 f — условный экстремум (экстрималь).

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \forall h \in L \quad \partial_h(S - \lambda \Phi)(f) = 0.$$

Это выражение переписывается с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа

$$(s - \lambda\varphi)(f) = \int_0^l F(x, f(x), f'(x))dx \quad F(u_1, u_2, u_3) = u_2 - \lambda\sqrt{1 + u_3^2}.$$

$$\partial F - \frac{d}{dx}\partial_{x_1}F = 0, \quad \partial_2 F = 1, \quad \partial_3 F = -\lambda \frac{u_3}{\sqrt{1+u_3^2}}.$$

$$f(l) = f(0) = 0,$$

$$1 + \lambda \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right)' = 0.$$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = -\frac{x + C}{\lambda}, \quad \frac{(f'(x))^2}{1 + (f'(x))^2} = \frac{(x + C)^2}{\lambda^2}.$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{(x + c)^2}{\lambda^2 - (x + C)^2}}.$$

$$y = f(x) = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + C)^2} + 1.$$

$$(y - C_1)^2 + (x + C)^2 = \lambda^2.$$

Получаем, что это действительно часть окружности.

Задача про цепную линию Есть два гвоздя и веревка длины P .

$$\Phi(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = P.$$

Хотим минимизировать потенциальную энергию, то есть

$$J(f) = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

$$L = \{f \in C^2[a, b] \mid f(a) = A, f(b) = B\}.$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для бесконечности.

$$F(u_1, u_2, u_3) = (u_2 - \lambda)\sqrt{1 + u_3^2}.$$

$\exists \lambda: \forall h \in L_0 \quad \partial_n(J - \lambda\varphi)(f) = 0$. Далее воспользуемся уравнением Эйлера-Лагранжа. Получаем

$$\partial_2 F(f, f', -\frac{d}{dx}(u_3 F(f, f'))) = 0.$$

$$F(f, f') - f' \partial_3 F(f, f') \stackrel{?}{=} C.$$

Продифференцируем это выражение по x

$$\partial_2 F(f, f')f' + \partial_3 F(f, f')f'' - f'' \partial_3 F(f, f') - f'(\partial_3 F(f, f')) = 0.$$

Получили, что это была константа, раз производная 0.

$$(f(x) - \lambda)\sqrt{1 + (f'(x))^2} - f'(x)(f(x) - \lambda) \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = C.$$

Глава 3

Ряды

3.1 Определения и примеры

Definition 38

X — нормированное пространство, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд, x_k — члены ряда.
 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ — частичная сумма ряда.

Definition 39: сходимость ряда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется **сходящимся**, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =: S.$$

Иначе ряд называется **расходящимся**.

Remark. В \mathbb{R} сумма ряда может быть равна $\pm\infty$.

Remark. Ряд может не начинаться с 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=n}^{\infty} x_k.$$

Example 3.1.1. $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$, этот ряд сходится.

Example 3.1.2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ расходится.

Example 3.1.3. $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Посчитаем частичную сумму $S_n \stackrel{z \neq 1}{=} \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$ существует, если $|z| < 1$.

Example 3.1.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ расходится, так как $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$.

Example 3.1.5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ тоже сходится.

Example 3.1.6. Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

3.1.1 Свойства

Property.

1 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится $\iff \forall m \in \mathbb{N}$ сходится ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k$ и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^n x_k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k}_{\text{остаток}}.$$

2 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится $\implies \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

линейность $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходятся. Тогда

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) \text{ сходится}$$

при этом

$$\forall \alpha, \beta : \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Note. Если один ряд сходится, а второй расходится, то их сумма расходится.

$x_k \in \mathbb{R}^m$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} + \dots + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(m)} \right).$$

$z_k \in \mathbb{C}$. $z_k = x_k + iy_k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

МОНОТОННОСТЬ $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \leq b_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся (возможно с $\pm\infty$), тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

необходимое условие сходимости $\{x_k\} \subset X$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, тогда $x_k \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

критерий Больцано-Коши Пусть X полно. $\{x_k\} \subset X$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится равносильно тому, что $\{S_n\}$ сходится, что равносильно тому, что S_n фундаментальна в X . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N : \|S_m - S_n\| < \varepsilon.$$

$$m > n \implies m = n + [p], p \in \mathbb{N} : S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k.$$

□

Лекция 11: †

23 Apr

Definition 40

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\sum_{k=1}^{A_k} a_k$ — Группировка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}$, $A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$, то есть n_j — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. $A_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k$.

Theorem 3.1.1: о группировке

1. Если ряд сходится, его группировка тоже сходится, причем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.
2. Пусть $a_n \rightarrow 0$ и в каждом A_k не более L слагаемых. Тогда, если $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$, $n_j < n \leq n_{j+1}$. Посмотрим на S_{n_j} и $S_{n_{j+1}}$.

$\exists \varepsilon$.

TODO: дописать доказательство

□

3. Пусть ряд числовой. Для любого A_k в сумме участвуют только слагаемые одного знака.

Доказательство. Если $n_i < n < n_j$, то S_n лежит между S_{n_j} и S_{n_i} . Можно добиться, чтобы расстояния были меньше ε , тогда и S_n будет отличаться на малую величину. □

3.2 Положительные ряды

Definition 41: положительный ряд

Числовой ряд называется **положительным**, если все его члены неотрицательны.

Property.

- 1 Ряд сходится тогда и только тогда, когда $\{S_n\}$ ограничена (сверху).

Признак сравнения $0 \leq a_n \leq b_n$, то

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Тоже расходится.

2' $0 \leq a_n, b_n$, $a_n = O(b_n)$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2'' $0 \leq a_n, b_n$, если $a_n \leq b_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Признак Коши Пусть $a_n \geq 0$ и $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. $q < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $q > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

Доказательство.

1. Выберем $0 < \tilde{q} < 1$, с некоторого места мы не выходим сильно правее q , поэтому $\exists N \forall n > N: \sqrt[n]{a_n} < \tilde{q}$, тогда $a_n < (\tilde{q})^n$.
2. $\forall N \exists n > N: a_n > 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$, следовательно, ряд расходится.

□

Признак Даламбера $a_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда

1. $q > 1$, то ряд расходится
2. $q < 1$, то ряд сходится

Доказательство.

1. $a_{n+1} > a_n$, поэтому ряд точно не сходится.
2. Возьмем $q < \tilde{q} < 1$, тогда $\exists N \forall n > N: \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tilde{q}$. Запишем

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N < (\tilde{q})^{n-N+1} \cdot a_{N^2} = C(\tilde{q})^{n+1}.$$

□

Интегральный признак Пусть $f \geq 0$, монотонно убывает $f :: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ сходится} \iff \int_1^n f(x) dx \text{ сходится}.$$

Доказательство. Просто смотрим по определению интеграла.

□

3.3 Числовые ряды с произвольными членами

Definition 42

$x_k \in X$ — нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Property.

- 1 $\sum x_k, \sum y_k$ абсолютно сходятся, α, β — скаляры. Тогда ряд $\sum (\alpha x_k + \beta y_k)$ абсолютно сходится, так как

$$\|\alpha x_k + \beta y_k\| \leq \|\alpha\| \cdot \|x_k\| + \|\beta\| \cdot \|y_k\|.$$

- 2 Если $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, то $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, так как

$$\|S\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

- 3 X — полное нормированное пространство. $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$, следовательно, $\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$. Получили, что $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. □

- 4] В полном нормированном пространстве $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится условно, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ сходится условно.
- 5] X — полное, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x_n\|}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}$

Definition 43

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, он называется **условно сходящимся**.

Lemma 3 (преобразование Абеля). Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ — последовательности. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $A_0 = 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k+1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} + 1 = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

Получили дискретный аналог интегрирования по частям.

Theorem 3.3.1: Признаки Дирихле и Абеля

$\{a_n\}, \{b_n\}$ — числовые последовательности. b_n — монотонная последовательность, $b_n \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{C}$

Признак Дирихле $\{A_n\}$ — ограниченная последовательность, $b_n \rightarrow 0$.

Признак Абеля $\sum_{k=1}^n a_k$ сходится, b_n ограничено

тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Первое слагаемое сходится при условии обоих признаков.

Для признака Абеля сразу все хорошо: второе слагаемое сходится.

Для признака Дирихле проверим $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq X \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$. В этом случае сходится даже без модуля $\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}$, так как $\sum_{k=1}^n b_{n+1} - b_1$. \square

Theorem 3.3.2: Признак Лейбница

b_n убывает к нулю, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится.

Доказательство. $a_n = (-1)^n$, $A_n \in \{1, 0\}$ — ограничено. По признаку Дирихле ряд произведения сходится. \square

Note. $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$, S — сумма ряда. Тогда $|S - S_n| \leq b_{n+1}$.

Example 3.3.1 (Ряд Лейбница).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \text{ сходитс} \text{я условно}.$$

Example 3.3.2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ тоже сходитс} \text{я условно}.$$

Example 3.3.3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} \text{ сходятс} \text{я}.$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \sin k = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(x \cos ki \sin k) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n e^{ik}.$$

$$\sum_{k=1}^n e^{ik} = e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1} = e^i \frac{e^{\frac{ni}{2}} (e^{\frac{ni}{2}} - e^{-\frac{ni}{2}}) \cdot \frac{1}{2i}}{e^{\frac{i}{2}} (e^{\frac{i}{2}} - e^{-\frac{i}{2}}) \cdot \frac{1}{2i}} = e^{\frac{n+1}{2}i} \frac{\sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Теперь берем мнимую часть

$$A_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Для косинуса аналогично.

Theorem 3.3.3: О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — абсолютно сходящийся ряд. $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходитс} \text{я к той же сумме}.

Доказательство.

$$1. a_k > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$$

$$\forall n \exists n_1, n_2: S_n \leq T_{n_1} \leq S_{n_2} \implies T_n \rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

$$2. a_k \in \mathbb{R}. \text{ Запишем } a_k = (a_k)_+ - (a_k)_-, |a_k| = (a_k)_+ + (a_k)_-. \text{ Тогда}$$

$$\sum |a_k| \text{ сходитс} \text{я} \implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+, \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- \text{ сходятс} \text{я}.$$

$$\text{Применим прошлый пункт: } \sum (a_k)_{\pm} = \sum (a_{\varphi(k)})_{\pm}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

$$3. a_k \in \mathbb{C}, a_k = b_k + ic_k. \text{ Применяем второй пункт.}$$

□

Theorem 3.3.4: Теорема Римана

$a_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Тогда

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}} \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$$

Theorem 3.3.5: Коши об умножении рядов

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ — абсолютно сходящиеся численные ряды. Тогда $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n$ сходится при любых порядках слагаемых, при этом $\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Доказательство. Пусть $\sum_{k=1}^n a_k = A_n, \sum_{k=1}^n |a_k| = \overline{A}_n, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \overline{A}$, аналогично для b .

Зафиксируем на множестве пар некоторый порядок.

S_m — частичная сумма $\sum |a_k| |b_n|$, N — максимальный из встречающихся индексов.

$$S_m \leq \sum_{k=1}^N |a_k| \sum_{k=1}^N |b_k| \leq \overline{A} \overline{B} \implies \text{ряд } \sum |a_k| |b_n| \text{ сходится.}$$

Теперь просуммируем по квадратам

$$n^2 \leq m < (n+1)^2.$$

$$S \leftarrow S_{n^2} = A_n \cdot B_n \rightarrow A \cdot B.$$

$$|S_{n^2} - S_m| \leq |a_{n+1}| \cdot \overline{B} + |b_{n+1}| \cdot \overline{A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Definition 44: Произведение рядов по Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды. $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется произведением рядов.

Theorem 3.3.6: Мергенс

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и равно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Theorem 3.3.7: Абель

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Example 3.3.4. $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \implies |a_n| \geq 1$

3.4 Бесконечные произведения**Definition 45**

Частичные произведения $\prod_{k=1}^n p_k = P_n$. Частичные произведения сходятся к P если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$

P и $P \neq 0, P \neq \infty$. Если $P = 0$, говорят, что расходится к 0, если к $\pm\infty$, говорят, что расходится к $\pm\infty$.

Example 3.4.1.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Example 3.4.2.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi} \text{ (формула Ваниса).}$$

Property. Будем считать, что $p_n \neq 0$.

- 1 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, тогда $p_n \rightarrow 1$
- 2 Первые несколько слагаемых ряда можно отбросить, на сходимость это не повлияет
- 3 Всегда можно считать, что $p_n > 0$
- 4 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится} \iff \prod_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

$$\ln P_n = S_n$$

Example 3.4.3. Пусть p_n — n -ое простое число.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} \text{ расходится.}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} \stackrel{?}{=} .$$

Оценим

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{p_k}{p_k - 1} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq \prod_{k=1}^n \sum_{m=0}^n \frac{1}{p_k^m} = \sum_{0 \leq \alpha_j \leq n} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{p_n}{p_n - 1} \right), \quad \ln \left(\frac{p_n}{p_n - 1} \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) \sim \frac{1}{p_n}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится.

Следовательно,

$$\stackrel{?}{=} \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty.$$