

Конспект по матанализу в формате вопросов  
коллоквиума  
(лекции Кислякова Сергея Витальевича)

November 8, 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Простейшие свойства вещественных чисел . . . . .	4
1.2	Множества в $\mathbb{R}$ . . . . .	5
1.3	Натуральные числа . . . . .	5
1.3.1	Аксиома Архимеда . . . . .	5
1.3.2	Аксиома индукции . . . . .	6
1.3.3	Неравенство Бернулли . . . . .	6
1.3.4	Аксиома Кантора-Дедекинда . . . . .	6
1.3.5	Иррациональность корня из двух . . . . .	7
1.3.6	Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке . . . . .	8
1.3.7	Число $e$ . . . . .	8
1.4	Свойства подмножеств $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.4.1	Грани . . . . .	9
1.4.2	Связность отрезка . . . . .	10
1.4.3	Предельные и изолированные точки . . . . .	10
1.4.4	Теорема о вложенных отрезках . . . . .	11
1.4.5	Теорема о компактности . . . . .	11
1.4.6	Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках . . . . .	12
1.4.7	Десятичное разложение вещественного числа . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Пределы</b>	<b>14</b>
2.1	Основные свойства пределов функций . . . . .	14
2.1.1	Определение предела . . . . .	14
2.1.2	Единственность предела . . . . .	14
2.1.3	Теорема о пределе сужения . . . . .	15
2.1.4	Предел постоянной функции и предел тождественного отображения . . . . .	15
2.1.5	Предельный переход в неравенстве . . . . .	15
2.1.6	Принцип двух полицейских . . . . .	15
2.1.7	Предел линейной комбинации . . . . .	16
2.1.8	Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций . . . . .	16
2.1.9	Предел произведения имеющих предел функций . . . . .	17
2.1.10	Предел частного . . . . .	17

2.1.11	Сумма геометрической прогрессии . . . . .	18
2.1.12	Предел монотонной функции . . . . .	19
2.1.13	Предел композиции . . . . .	19
2.2	Критерий Коши . . . . .	20
2.2.1	Критерий Коши . . . . .	20
2.3	Ряды . . . . .	21
2.3.1	Понятие ряда. Теорема Лейбница . . . . .	21
2.4	Верхние и нижние пределы . . . . .	22
2.4.1	Определение и свойства . . . . .	22
2.4.2	Теорема об описании верхнего и нижнего предела . . . . .	23
2.5	Последовательности . . . . .	24
2.5.1	Сходящиеся последовательности и их пределы . . . . .	24
2.5.2	Вторая форма теоремы о компактности . . . . .	25
2.5.3	Предел функции в терминах последовательности . . . . .	26
2.6	Бесконечные пределы . . . . .	26
2.6.1	Бесконечные пределы . . . . .	26
2.7	Бесконечно большие и бесконечно малые . . . . .	27
2.7.1	О и о. Соотношения транзитивности . . . . .	27
2.7.2	Эквивалентные функции . . . . .	28
2.7.3	Отношение эквивалентности и вычисление пределов . . . . .	28

[section]

# Chapter 1

## Введение

### 1.1 Простейшие свойства вещественных чисел

#### 1. Алгебраические операции

(а) сложение  $a, b \in \mathbb{R}$  : сумма  $a + b$  определяется единственным образом

- i.  $a + b = b + a$  (коммутативность)
- ii.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность)
- iii.  $\exists 0 : a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$  (нейтральный по сложению)
- iv.  $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' : a + a' = a' + a = 0$  (обратный по сложению)

(б) умножение  $x, y \in \mathbb{R}$  : произведение  $x \cdot y$  определяется единственным образом

- i.  $xy = yx$  (коммутативность)
- ii.  $(xy)z = x(yz)$  (ассоциативность)
- iii.  $\exists 1 : x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$  (нейтральный по умножению)
- iv.  $x(a + b) = xa + xb$  (дистрибутивность)
- v.  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \stackrel{def}{=} x^{-1} : xy = 1$  (обратный по умножению)

#### 2. Порядок на $\mathbb{R}$

**Def 1.** Упорядоченная пара  $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$  .

**Def 2.** Декартово произведение  $X \times Y = \{(x, y) \mid \forall x \in X, y \in Y\}$ .

**Def 3.** Отношение между элементами множеств  $X, Y$  -  $A \subset X \times Y$

Отношения порядка:  $a < b, a > b, a = b$

$$(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = b \\ a > b \text{ (антисимметричность)} \\ a < b \end{cases}$$

(b)  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  (транзитивность)

(c)  $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(d)  $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(e)  $u < v \wedge x < y \Rightarrow u + x < v + y$

## 1.2 Множества в $\mathbb{R}$

**Def 4** (Отрезки, интервалы, сегменты).  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$[a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (замкнутый отрезок)

$(a, b] = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  (открытый слева отрезок)

$[a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  (открытый справа отрезок)

$(a, b) = \{a \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (открытый отрезок)

**Def 5** (Лучи).  $a \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

**Def 6.**

Множество  $A \subseteq \mathbb{R}$  ограничено сверху, если  $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \forall a \in A$ . Любое такое  $x$  - верхняя граница  $A$ .

Множество  $A \subseteq \mathbb{R}$  ограничено снизу, если  $\exists y \in \mathbb{R} : a \geq y \forall a \in A$ . Любое такое  $y$  - нижняя граница  $A$ .

//  $\pm\infty$  - не нижняя/верхняя граница.

Ограниченное множество - ограниченное сверху и снизу.

## 1.3 Натуральные числа

### 1.3.1 Аксиома Архимеда

**Аксиома** (Архимед). Множество натуральных чисел не ограничено сверху.

**Lemma.**  $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

*Proof.* Предположим противное.  $\forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$ . Тогда  $\forall n : n < x^{-1}$ , а это противоречит аксиоме Архимеда.  $\square$

### 1.3.2 Аксиома индукции

**Аксиома** (индукции). Любое не пустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

**Statement** (Обоснование метода математической индукции). Пусть  $P_1, P_2, \dots$  - последовательность суждений. Предположим, что

1.  $P_1$  - верно

2. Для любого  $k : P_k \rightarrow P_{k+1}$

Тогда все условия  $P_i$  верны.

*Proof.* Рассмотрим множество  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ - верно}\}$  и его дополнение  $B = \mathbb{N} \setminus A$ . Если не все  $P_i$  верны, то  $B \neq \emptyset$ . По аксиоме индукции существует наименьший элемент  $l \in B$ . Если  $l \neq 1$ ,  $l - 1 \notin B$ . А тогда  $P_{l-1}$  - верно, из чего следует, что  $P_l$  - верно. То есть  $l \notin B$ . Противоречие. Иначе не выполнено первое условие.  $\square$

### 1.3.3 Неравенство Бернулли

**Theorem 1.3.1** (Неравенство Бернулли). Пусть  $a > 1$ . Тогда  $a^n \geq 1 + n(a - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$

*Proof.* Индукция:

База:  $n = 1 : a \geq 1 + (a - 1)$

Переход:  $n \rightarrow n + 1$

Известно:

$$a^n \geq 1 + n(a - 1).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &\geq a + n(a - 1)a = (a - 1) + 1 + n(a - 1)a = \\ &1 + (a - 1)(1 + na) \geq 1 + (a - 1)(1 + n) \end{aligned}$$

$\square$

**Corollary.** Множество  $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  для  $a > 1$  не ограничено сверху.

*Proof.* Пусть  $a^n \leq b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $1 + (a - 1)n \leq b \Rightarrow n \leq \frac{b-1}{a-1}$ . Противоречие  $\square$

### 1.3.4 Аксиома Кантора-Дедекинда

**Def 7.** Щель – пара вещественных чисел  $(A, B)$ , где  $A, B \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ , такая что всякое число из  $A$  не более любого из  $B$ .

**Def 8.** Число  $c$  лежит в щели  $(A, B)$ , если  $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$

**Def 9.** Щель называется узкой, если она содержит ровно одно число.

**Аксиома** (Кантор, Дедекинд). В любой щели есть хотя бы одно вещественное число.

**Statement.** *Квадратный корень из 2 существует и единственный.*

*Proof.*

1. Существование

Рассмотрим множества:

$$A = \{a > 0 \mid a^2 < 2\}, \quad B = \{b > 0 \mid b^2 > 2\}$$

Они образуют щель:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$ . По аксиоме Кантора-Дедекинда  $\exists v : a \leq v \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$ . Тогда  $v^2 = 2$ .

**Lemma.** *В множестве B нет наименьшего элемента. В множестве A нет наибольшего элемента.*

Докажем, что  $v^2 = 2$ . Пусть  $v^2 > 2 \vee b^2 < 2$ . То есть  $v \in A \vee v \in B$ . Следовательно,

$$\left[ \begin{array}{l} \exists v_1 \in A : v_1 > v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \\ \exists v_1 \in B : v_1 < v \Rightarrow v - \text{ не в щели} \end{array} \right.$$

Противоречие.

2. Единственность

Возьмем  $c \geq 0 : c^2 = 2$ . Пусть существует еще одно  $c_1 \geq 0 \wedge c_1 \neq c : c_1^2 = 2$ . Тогда

$$\left[ \begin{array}{l} c < c_1 \\ c > c_1 \end{array} \Rightarrow 2 > 2 \right.$$

Опять противоречие.

□

### 1.3.5 Иррациональность корня из двух

**Def 10.** Квадратный корень из числа 2 – такое вещественное неотрицательное число  $c$ , для которого верно  $c^2 = 2$ .

**Theorem 1.3.2.** *Квадратный корень из двух иррационален.*

*Proof.* Пусть  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Не умоляя общности, считаем эту дробь несократимой.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid q^2$$

□



### 1.3.6 Существование рациональных и иррациональных чисел в каждом невырожденном отрезке

**Def 11.**  $\langle u, v \rangle$  - любой отрезок с концами в  $u, v$  ( $u \leq v$ ). Его длина  $|\langle u, v \rangle| := v - u$

**Theorem 1.3.3.** Пусть  $c > 0$ . Тогда на каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$  существует точка вида  $rc$ , где  $r \in \mathbb{Q}$ .

*Proof.* Заменим  $c \rightarrow 1, a \rightarrow \frac{a}{c}, b \rightarrow \frac{b}{c}$ . Теперь будем доказывать  $a \leq r \leq b$ . Существует  $q \in \mathbb{N} : \frac{1}{q} < b - a$ . Рассмотрим множество  $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$ . Кроме того  $\exists p : \frac{p}{q} \geq b$ . Среди таких  $p$  существует наименьший  $p_0$ .

Возьмем  $\frac{p_0-1}{q} = \frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \in (a, b)$  □

**Corollary.** На каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$ , существует рациональное число.

**Theorem 1.3.4.** На каждом отрезке вида  $(a, b)$ , где  $a < b$ , существует иррациональное число.

*Proof.* По следствию из теоремы 1.3.3  $\exists r \in \mathbb{Q} : r \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ . Тогда  $r\sqrt{2} \in (a, b) \wedge r \notin \mathbb{Q}$ . □

### 1.3.7 Число $e$

**Def 12.** Рассмотрим последовательность  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

Число  $e$  - предел  $\{a_n\}$ .

**Statement.**  $\{a_n\}$  - сходится.

*Proof.*

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \\ &= 2.5 + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}) < 2.5 + \frac{1}{6} \cdot 2 \approx 2.8333 \end{aligned}$$

□

**Theorem 1.3.5.**  $e$  - иррационально.

*Proof.*  $2 < e < 3$

Пусть  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Тогда  $q > 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right). \\ q!p &= S + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \right) = S + a. \end{aligned}$$

$q!p \in \mathbb{Z}, S \in \mathbb{N}$ . Обозначим предел за  $a$ . Докажем, что  $a \notin \mathbb{Z}$ .

**Statement.**  $0 < a < 1$

*Proof.*

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \dots n} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}.$$
$$0 < a \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1.$$

□

□

## 1.4 Свойства подмножеств $\mathbb{R}$

### 1.4.1 Грани

**Def 13** (supremum). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - ограничено сверху.

Точная верхняя грань (супремум) – наименьшая из всех его верхних границ.

**Def 14** (infimum). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - ограничено снизу.

Точная нижняя грань (инфимум) – наибольшая из всех его нижних границ.

**Theorem 1.4.1** (об описании точной верхней грани). Пусть  $A \neq \emptyset$  и ограничено сверху. Следующие условия эквивалентны:

1.  $x = \sup A$
2.  $x$  – верхняя граница для  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$

*Proof.*

1  $\Rightarrow$  2

$x = \sup A \Rightarrow x$  – верхняя граница. Пусть  $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x - \varepsilon, x] = \emptyset$ . Тогда  $y \leq x - \varepsilon, \forall y \in A$ . Но из этого следует, что  $x - \varepsilon$  тоже наименьшая граница, которая меньше  $x$ . Следовательно,  $x \neq \sup A$ . Противоречие.

2  $\Rightarrow$  1

$x$  – верхняя граница,  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap (x - \varepsilon, x]$ . Докажем, что  $x$  – наименьшая верхняя граница.

Пусть  $\exists y < x : y$  – верхняя граница  $A$ . Рассмотрим  $(y, x]$ . Для него верно  $\forall z \in (y, x] : z \notin A$ . Но тогда  $x$  – не верхняя граница. □

**Theorem 1.4.2** (об описании точной нижней грани). Пусть  $A \neq \emptyset$  и ограничено снизу. Следующие условия эквивалентны:

1.  $x = \inf A$
2.  $x$  – нижняя граница для  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \cap [x, x + \varepsilon)$

### 1.4.2 Связность отрезка

**Def 15.** Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки.

*Note.* Любое замкнутое, ограниченное, непустое множество содержит все свои грани.

**Theorem 1.4.3** (о связности отрезка). *Никакой замкнутый отрезок нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Для любого отрезка  $[a, b]$ ,  $a \leq b$ : если  $[a, b] = E \cup F \wedge E, F$  – замкнуты  $\wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$ , то  $E \cap F \neq \emptyset$ .

*Proof.*  $E, F$  замкнуты, значит и ограничены сверху. Предположим, что  $E \cap F = \emptyset$ . Не умоляя общности  $x = \sup E < b$ , тогда  $(x, b] \in F$ . С одной стороны,  $x$  – предельная точка для  $E$ , с другой стороны, предельная точка для  $F$ . Так как  $E, F$  – замкнуты,  $x \in E \wedge x \in F$ . Следовательно,  $E \cap F \neq \emptyset$ . Противоречие.  $\square$

### 1.4.3 Предельные и изолированные точки

**Def 16.** Окрестность точки  $x \in \mathbb{R}$  – любой открытый интервал вида  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ .

**Def 17.** Проколота окрестность точки  $x \in \mathbb{R}$  – объединение двух открытых интервалов вида  $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

**Def 18.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$ .

$u$  называется предельной точкой для  $A$ , если в любой проколотой окрестности точки  $u$  есть точки множества  $A$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset.$$

**Examples.**

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$  не имеют предельных точек.
2.  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  имеет одну предельную точку 0.
3. Для  $\mathbb{Q}$  все предельные точки –  $\mathbb{R}$ .

**Def 19.** Все точки множества  $A$ , не являющиеся предельными, называются изолированными:

$$u \in A \text{ – изолированная, если } \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(u) \cap A = \{u\} \Leftrightarrow \mathring{U}_\varepsilon(u) \cap A = \emptyset$$

**Examples.**

1.  $[1, 2] \cup \{3\}$  имеет одну изолированную точку 3.
2.  $[1, 2]$  не имеет ни одной изолированной точки.

**Lemma.** Пусть  $A$  ограничено сверху (снизу),  $y = \sup A$  ( $y = \inf A$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} y \notin A \Rightarrow y \text{ – предельная точка } A \\ y \in A \end{array} \right.$$

#### 1.4.4 Теорема о вложенных отрезках

**Theorem 1.4.4** (о вложенных отрезках).  $a \leq b, I = \langle a, b \rangle$ .

$\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  - последовательность замкнутых отрезков  $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Тогда у этих отрезков есть хотя бы одна общая точка.

*Proof.* Рассмотрим две последовательности концов отрезков:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 \leq a_3 \dots \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что  $a_k \leq b_j \forall k, j \in \mathbb{N}$ . Тогда множества  $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  образуют щель. По аксиоме Кантора-Дедекинда  $\exists t \in \mathbb{R} : t \in (A, B)$ .

$$a_k \leq t \leq b_j \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем  $k = j$  :

$$t \in [a_j, b_j], \forall j \in \mathbb{N}.$$

А эта точка принадлежит всем отрезкам. □

*Note.* Эта точка единственна тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |I_n| < \varepsilon$

*Proof.* Если такая точка единственная,  $(A, B)$  - узкая щель. То есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists k, j \in \mathbb{N} : b_j - a_k < \varepsilon$ . Не умоляя общности,  $j \geq k$ . Тогда  $b_j - a_j < \varepsilon$ .

В обратную сторону очевидно. □

#### 1.4.5 Теорема о компактности

**Theorem 1.4.5** (о компактности). Любое бесконечное ограниченное подмножество вещественных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.

*Proof.* Пусть  $A$  - ограничено. Тогда  $\exists a_1, b_1 : a_1 \leq x \leq b_1 \quad \forall x \in A$ . Получаем  $A \subset [a_1, b_1]$ .

Возьмем середину отрезка  $c = \frac{b_1 + a_1}{2}$ . Теперь  $I_2 = \begin{cases} [a_1, c] & \text{если } A \cap [a_1, c] \text{ - бесконечно} \\ [c, b_1] & \text{если } A \cap [c, b_1] \text{ - бесконечно} \end{cases}$

Будем аналогично делить пополам получаемый отрезок. Эти отрезки представляют собой последовательность вложенных замкнутых отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots \supset I_n \supset \dots$$

Причем  $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . По теореме о вложенных отрезках 1.4.4  $\forall n \in \mathbb{N} \exists! x : x \in I_n$ . Этот  $x$  и есть предельная точка для множества  $A$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon \wedge x \in I_n \Rightarrow I_n \subset U_\varepsilon(x)$ . Тогда  $\exists y \in A \cap I_n : y \neq x$ . □

### 1.4.6 Теорема о вложенных полуоткрытых отрезках

**Theorem 1.4.6** (о вложенных полуоткрытых отрезках). *Рассмотрим последовательность вложенных полуоткрытых интервалов, среди которых существуют полуинтервалы сколь угодно малой длины:*

$$J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots, \quad \text{где } J_n = [a_n, b_n).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x_0\} \end{cases} \iff \exists n_0 : b_{n_0} = b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \dots$$

*Proof.* Рассмотрим последовательность  $I_n = [a_n, b_n]$ . По теореме о вложенных отрезках 1.4.4  $\exists! t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . Если  $t \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ , то  $\exists n_0 : t \notin J_{n_0} \wedge t \in I_{n_0}$ . А тогда  $t = b_{n_0}$ , которое совпадает со концами всех следующих интервалов. Иначе  $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$  и правые концы одинаковы.  $\square$

### 1.4.7 Десятичное разложение вещественного числа

Пусть  $x \in [0, 1)$ . Разобьем полуинтервал на десять равных полуинтервалов  $\{I_i\}$ . Будем

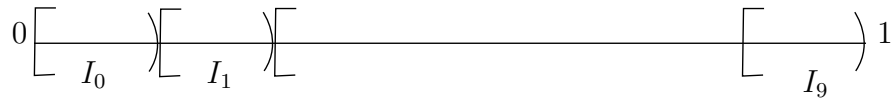


Figure 1.1: Decimal decomposition

собирать десятичную запись:

1.  $i_1$  - номер интервала, куда попало  $x$
2.  $i_2$  - номер интервала второго ранга — результата разбиения каждого полуинтервала на 10 частей
3. И так далее

Получим  $0.i_1i_2i_3\dots$  — десятичную запись числа  $x$ .

*Note.* Не существует десятичного представления, в котором с некоторого момента все девятки.

**Theorem 1.4.7.** Пусть  $(j_1, j_2, \dots)$  - цифры от нуля до девяти.  $\nexists n \in \mathbb{N} : j_k = 9 \ \forall k \geq n$ . Тогда  $\exists! x \in [0, 1)$  для которого  $0.j_1j_2\dots$  - десятичное представление.

*Proof.* Рассмотрим последовательность полуинтервалов  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . По теореме 1.4.6 существует непустое пересечение, равное одной точке - и есть наше число.  $\square$

# Chapter 2

## Пределы

### 2.1 Основные свойства пределов функций

#### 2.1.1 Определение предела

**Def 20.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любой окрестности  $U$  в точке  $b$  существует такая проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$  :  $f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$ .

**Def 21.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |f(x) - b| < \varepsilon$$

**Def 22.**  $b$  – предел функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если  $x_0 = \infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x \in A \wedge x > N : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

*Note.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - b| = 0.$$

#### 2.1.2 Единственность предела

**Theorem 2.1.1.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x$  - предельная точка для  $A$ .

Если  $a, b$  - предельные для  $f$  в точке  $x_0$ , то  $a = b$ .

*Proof.* Пусть  $a \neq b$ . Тогда существуют  $U_1, U_2$  - не пересекающиеся окрестности точек  $a, b$ . Так как  $a, b$  - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap A) \subset U_2 \end{aligned}.$$

Рассмотрим  $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$ .  $\exists y \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(y) \in U_1 \wedge f(y) \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .  
Противоречие. □

### 2.1.3 Теорема о пределе сужения

**Def 23.**  $A'$  – множество всех предельных точек.

**Theorem 2.1.2** (о пределе сужения).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A', B \subset A'$

Пусть  $x_1 \in B' \wedge z = \lim_{x_0} f$ . Тогда  $z = \lim_{x_0} (f \upharpoonright_B)$ .

*Proof.* По условию  $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V} : f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U$ , тем более  $f(\overset{\circ}{V} \cap B) \subset U$ . □

**Theorem 2.1.3** (частичное обращение теоремы о пределе сужения). Если  $B = \overset{\circ}{W}_\delta(x_0) \wedge \exists \lim_{x_0} f \upharpoonright_B = z$ , то  $\exists \lim_{x_0} f = z$ .

*Proof.*  $\forall U(z) \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f \upharpoonright_B (\overset{\circ}{V} \cap A \subset U \Leftrightarrow f((\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta) \cap A) \subset U$ .

$\overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}_\delta$  - тоже окрестность точки  $x_0$ . □

### 2.1.4 Предел постоянной функции и предел тождественного отображения

**Statement.**  $f(x) = x \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$

**Statement.**  $f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

### 2.1.5 Предельный переход в неравенстве

**Theorem 2.1.4** (Предельный переход в неравенстве).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in A'$ . Предположим, что существуют пределы у  $f, g$  в точке  $x_0$  равные соответственно  $a, b$ . Пусть  $a < b$ .

Тогда существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) < g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

*Proof.* Рассмотрим  $U_1, U_2$  - не пересекающиеся окрестности точек  $a, b$ . Так как  $a, b$  - предельные,

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset U_1 \\ \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset U_2 \end{aligned} .$$

Возьмем  $\overset{\circ}{V}(x) = \overset{\circ}{V}_1(x) \cap \overset{\circ}{V}_2(x)$ . Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) \in U_1 \wedge g(x) \in U_2 \Rightarrow f(x) < g(x)$ . □

### 2.1.6 Принцип двух полицейских

**Theorem 2.1.5** (Принцип двух полицейских).  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$

Пусть  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = b, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$ . Тогда  $\lim_{x_0} g = b$ .

*Proof.* Рассмотрим  $\overset{\circ}{U}(b)$ . Существуют проколотые окрестности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2 : \quad \overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V} \wedge f(\overset{\circ}{V}_1 \cap A) \subset \overset{\circ}{U} \wedge h(\overset{\circ}{V}_2 \cap B) \subset \overset{\circ}{U} \\ \left. \begin{aligned} f(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \\ h(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\overset{\circ}{V} \cap A) \subset U \end{aligned}$$

□



### 2.1.7 Предел линейной комбинации

**Theorem 2.1.6** (Предел линейной комбинации).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
Пусть существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$ .

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad x \in A.$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} h = \alpha a + \beta b$

*Proof.*

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha a - \beta b| &= \\ &= |\alpha(f(x) - a) + \beta(g(x) - b)| \leq \\ &\leq |\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что  $|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \rightarrow 0$ . Будем считать, что  $\alpha, \beta \neq 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_1, x \neq x_0 \\ &\exists \delta_2 > 0 : |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, x \in A, |x - x_0| < \delta_2, x \neq x_0 \end{aligned} .$$

Теперь возьмем  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Тогда для  $x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ :

$$|\alpha||f(x) - a| + |\beta||g(x) - b| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

□

### 2.1.8 Предел произведения стремящейся к нулю и ограниченной функций

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$

Предположим, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$  и  $\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c \forall x \in A$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

*Proof.* Если  $c = 0$ , утверждение очевидно (хотя оно и в любом случае очевидно). Будем считать, что  $c > 0$ . Запишем определение предела  $f$ :

$$\forall \varepsilon : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Тогда

$$|f(x)g(x)| < c|f(x)| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ .

□

### 2.1.9 Предел произведения имеющих предел функций

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$ .

*Proof.*

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \leq \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

$|g(x)| \leq c$  в некоторой проколотой окрестности  $x_0$ , а  $f(x) - a$  и  $g(x) - b$  стремятся к нулю в точке  $x_0$ . Тогда можем применить утверждение 2.1.8:

$$\left. \begin{aligned} |g(x)||f(x) - a| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ |a||g(x) - b| &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{их сумма стремится к нулю при } x \rightarrow x_0.$$

□

### 2.1.10 Предел частного

**Statement.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g = b$ ,  $b \neq 0$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

*Proof.*

**Lemma.** В условии утверждения функция  $g$  удалена от нуля в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{V}(x_0)$ . То есть  $\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : |g(x)| \geq c$

*Proof.* (леммы)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : |g(x) - b| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ .

$$|b| - |g(x)| \leq |g(x) - b| \leq \frac{|b|}{2} \implies \frac{|b|}{2} \leq |g(x)|.$$

□

$\forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$  (из леммы):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{|bf(x) - ag(x)|}{|bg(x)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{c|b|} |(b - g(x))f(x) + (f(x) - a)g(x)| \leq \quad . \\ &\leq \frac{1}{|b|c} |g(x) - b||f(x)| + |(f(x) - a)||g(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

### 2.1.11 Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим функцию  $f(n) = \sum_{j=1}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .

**Statement.** Если  $|q| < 1$ , то  $f(n)$  имеет предел, иначе не имеет предела.

*Proof.*

$$|q| < 1$$

**Lemma.**

$$q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1. *Proof.*

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|q|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Тогда

$$0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь найдем  $\forall \varepsilon > 0 \ N \in \mathbb{N} \forall n > N : \frac{1}{\varepsilon} < 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)$ . Подойдет  $N = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}$ .  $\square$

Из леммы получаем:  $f(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ .

2.  $q = -1$

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \text{ нет предела}$$

3.  $q = 1$ ,  $f(n) = n + 1$  - нет предела

4.  $q > 1$

$$\lim f(n) = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Эта функция не имеет предела.

5.  $q < 1$

$$|f(n)| = \left|\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right| \geq \frac{1}{|q-1|}(|q|^{n+1}-1).$$

Эта функция тоже не имеет предела.  $\square$

### 2.1.12 Предел монотонной функции

**Def 24.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \cap \mathbb{R}$

$f$  – (строго) возрастающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ (f(x_1) < f(x_2)).$$

$f$  – (строго) убывающая, если

$$x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

$f$  – (строго) монотонна, если (строго) возрастает или (строго) убывает.

**Theorem 2.1.7** (о пределе монотонной функции).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонная и ограниченная функция на  $A, x_0 \in A'$ , (допускается  $x_0 = \pm\infty$ , то есть  $A$  - неограничено). Если  $f$  - возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу, то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

*Proof.* Пусть  $f$  - возрастает и ограничена сверху.  $f(x) \leq M \ \forall x \in A$ .

$b = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ . Докажем, что  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим  $U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ .

$$\exists y \in A : b - \varepsilon < f(y).$$

Тогда  $\forall x \in A : y < x < x_0 \Rightarrow f(y) \leq f(x) \leq b$

*Note.* Доказали, что

$$\lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x).$$

Аналогично, если  $f$  убывает и ограничена снизу

$$\lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x).$$

□

### 2.1.13 Предел композиции

**Def 25.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}, f(A) \subset B$ . Тогда задана функция композиции  $h = g \circ f$ .

**Theorem 2.1.8.** Пусть  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge b \in B' \wedge \lim_{y \rightarrow b} g(y) = d$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = d$ , если хотя бы одно условие выполнено:

1.  $f(x) \neq b, \ x \neq x_0$
2.  $b \in B, g$  - непрерывна в точке  $b : d = g(b)$

*Proof.* Пусть  $U$  окрестность точки  $d$ ;  $\exists V(b)$ :

$$y \in \overset{\circ}{V} \cap B \Rightarrow g(y) \in U.$$

$$\exists \overset{\circ}{W}(x_0) : x \in \overset{\circ}{W} \cap A \rightarrow f(x) \in V.$$

Пусть выполнено первое условие. Тогда  $f(x) \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow g(f(x)) \in U$ . Пусть выполнено второе условие. Либо  $f(x) \neq b$ , тогда  $g(f(x)) \in U$ , либо  $f(x) = b$ , тогда  $g(f(x)) = d \in U$  □

## 2.2 Критерий Коши

### 2.2.1 Критерий Коши

**Theorem 2.2.1** (Критерий Коши).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A'$ .  $x$  - либо число, либо  $\pm\infty$ .

Функция  $f$  имеет предел в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

*Proof.*  $1 \Rightarrow 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$ .

**Lemma.** Если выполнено условие Коши, то  $f$  ограничено вблизи  $x_0$ .

*Proof.* Применим условие : зафиксируем какую-то точку  $y$  из нашего множества. Это будет означать, что для всей окрестности  $x_0$  выполнено  $f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$ , то есть  $f(x)$  ограничена.

От того, что мы в одной точке (которую выкололи из окрестности) добавим значение, ограниченность не испортится. Значит, не умоляя общности,  $f$  - ограничена.

**Def 26.** Пусть  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена на  $B, E \subset B$ . Колебание  $f$  на  $E$  - это  $\sup_{x \in E} g(x) - \inf_{x \in E} g(x) = \text{osc}_E(g)$

Если  $\forall x, y \in E |g(x) - g(y)| \leq \rho \Rightarrow \text{osc}_E(g) \leq \rho$ :  $\forall x, y \in E - \rho < g(x) - g(y) \leq g \Rightarrow g(x) \leq g(y) + \rho \Rightarrow \sup_E g \leq g(y) + \rho, \sup_E g - \rho \leq g(y) \forall y \in E \Rightarrow \sup_E g - \rho$  - нижняя граница,  $\inf_E g \geq \sup_E g - \rho$ .

$$/ \sup - \inf \leq \sup - (\sup - \rho) = \rho$$

Еще одна полезная формула для колебаний:

$$\text{osc}_B(f) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$$

. Доказали, что  $|f(x) - f(y)| \leq \rho \forall x, y \in B \Rightarrow \text{osc}_B(f) \leq \rho$ . Пусть  $d = \text{osc}_B(f); x, y \in B$

$$m = \inf_{z \in B} f(z) \leq f(x) \leq \sup_{z \in B} f(z) = M$$

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq f(y) \leq \sup_{z \in B} f(z)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m = \text{osc}_B(f) = d$$

$d$  - верхняя граница для множества чисел  $|f(x) - f(y)|$ , доказали, что она меньше всех верхних границ, значит она точная верхняя граница, что и надо.  $\square$

$f$  удовлетворяет условию Коши в  $x_0$  :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A$ . По лемме  $f$  ограничена.

Заведём вспомогательную функцию  $g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, \pm\infty$  - предельная точка для  $g$ ,  $g$  ограничена на  $A$ .  $\mathring{V}(x_0); m = m_{\mathring{V}} = m_{\mathring{V},g} = \inf_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x); M = \sup_{x \in \mathring{V} \cap A} g(x)$ . Всегда  $m \leq M$ , заведём ещё  $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0,g} = m_{\mathring{V}}$  - множество  $\inf$  по всем проколотым окрестностям, аналогично заведём множество  $\sup$ .

//здесь мы просто смотрим на произвольную функцию и вводим терминологию

Пара  $(\Gamma_{x_0}, \Delta_{x_0})$  образует щель. Если  $\mathring{W} \subset \mathring{V} \Rightarrow m_{\mathring{W}} \geq m_{\mathring{V}}; M_{\mathring{W}} \leq M_{\mathring{V}}$ . Пусть  $a \in \Gamma, b \in \Delta, \exists \mathring{V}, \mathring{W} : a = m_{\mathring{V}}, b = M_{\mathring{W}}$ . Пусть  $\mathring{V} \subset \mathring{W}; a \leq M_{\mathring{V}} \leq b$ . Воспользовались какими нужно неравенствами, которые тут есть, проверили, что щель.

Для нашей  $f$  это щель.  $(\Gamma_{x_0,f}, \Delta_{x_0,f})$  узкая щель.  $\varepsilon > 0; \exists \mathring{V} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow M_{\mathring{V},f} - m_{\mathring{V},f} \leq \varepsilon$ , то есть там только одно число  $c$ .

$\forall \mathring{V}(x_0) m_{\mathring{V},f} \leq c \leq M_{\mathring{V},f}. x \in \mathring{V} \cap A \Rightarrow m_{\mathring{V},f} \leq f(x) \leq M_{\mathring{V},f} \Rightarrow |f(x) - c| \leq M - m \leq \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{V}(x_0) : osc_{\mathring{V} \cap A}(f - c) \leq \varepsilon$ . □

## 2.3 Ряды

### 2.3.1 Понятие ряда. Теорема Лейбница

**Def 27.** Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ряд - символ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Частичные суммы ряда - последовательность  $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}, S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ .

Говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  сходится, если последовательность его частичных сумм имеет предел. Иначе говорят, что ряд расходится.

**Statement.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} - \text{сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

**Theorem 2.3.1** (Лейбниц). Пусть  $a_n$  - монотонно убывающая неотрицательная последовательность  $0 \geq a_1 \geq a_2 \dots$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится тогда и только тогда, когда  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится.

*Proof.*

$\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходится. Достаточно доказать, что частичные суммы второго ряда ограничены.

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad k = 2^n \\ S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \end{aligned}$$

Заменяем в каждой скобке на минимальный:

$$S_{2^n} \leq a_2 \leq 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Тогда

$$2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq 2S_{2^n}.$$

Из чего следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  - сходится.

$\stackrel{\leftarrow}{\infty} \sum_{n=1} 2^n a_{2^n}$  - сходится. Обозначим его сумму за  $T$ . Тогда

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq a_1 + T.$$

□

**Theorem 2.3.2.** Пусть  $s > 0$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  сходится при  $s > 1$  и расходится при  $s \leq 1$ .

## 2.4 Верхние и нижние пределы

### 2.4.1 Определение и свойства

**Def 28.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x)$$

$$b = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x).$$

Число  $a$  называется верхним пределом  $f$  в точке  $x_0$ .

Число  $b$  называется нижним пределом  $f$  в точке  $x_0$ .

**Property.** 1.  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$\underline{\lim}_{x_0} \lambda f = \begin{cases} \lambda \underline{\lim}_{x_0} f, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \overline{\lim}_{x_0} f, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

2. Сумма двух функций  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq \overline{\lim}_{x_0} f + \overline{\lim}_{x_0} g.$$

Рассмотрим  $x \in \overset{\circ}{V}(x_0) \cap A$ .

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{\overset{\circ}{V}}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g). \end{aligned}$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{x_0}(f + g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}(f) + M_{\overset{\circ}{V}}(g) - M_{\overset{\circ}{V}}(f)(g) + \overline{\lim}_{x_0}(f, g) \leq M_{\overset{\circ}{V}}.$$

/ Не дописано!!!

## 2.4.2 Теорема об описании верхнего и нижнего предела

**Theorem 2.4.1** (Теорема об описании верхнего предела). Пусть  $f$  - ограниченная функция на множестве  $A$ .  $x_0 \in A$ . Число  $a$  является верхним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) < a + \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \forall \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

*Proof.* Пусть 1 и 2 выполнены.  $a \in \overline{\lim}_{x_0} f$ .

Рассмотрим  $\varepsilon > 0$  и найдем для него  $\overset{\circ}{V}$ .

$$\overline{\lim}_{x_0} f \leq M_{\overset{\circ}{V}} \leq a + \varepsilon.$$

Тогда  $\overline{\lim}_{x_0} f \leq a$ .

$$\forall \overset{\circ}{U} : M_{\overset{\circ}{U}} > a - \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{x_0} f \geq a + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  любое,  $\overline{\lim}_{x_0} f \geq a$

Теперь в обратную сторону. Пусть  $a = \overline{\lim}_{x_0} f$ .

$$a = \overline{\lim}_{x_0} f \Rightarrow a = \inf M_{\overset{\circ}{V}}(f).$$

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V} : a \leq M_{\overset{\circ}{V}} < a + \varepsilon$$

$$M_{\overset{\circ}{V}} = \sup_{x \in \overset{\circ}{V} \cap A} f(x) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$



Рассмотрим произвольную проколотую окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$ .

$$M_{\overset{\circ}{V}} \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > a - \varepsilon.$$

□

**Theorem 2.4.2** (Теорема об описании нижнего предела). Пусть  $f$  - ограниченная функция на множестве  $A$ .  $x_0 \in A$ . Число  $b$  является нижним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) :$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A : f(x) > b - \varepsilon.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0) :$$

$$\exists x \in \overset{\circ}{U} \cap A : f(x) < b + \varepsilon.$$

*Proof.* Аналогично

□

## 2.5 Последовательности

### 2.5.1 Сходящиеся последовательности и их пределы

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  имеет единственную предельную точку  $+\infty$ .

**Def 29.**  $\{x_n\}$  называется сходящейся, если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Statement.** Пусть  $\{x_n\}$  - последовательность,  $b \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists A \subset \mathbb{N} - \text{конечное} : \forall x \notin A : |x_n - b| < \varepsilon$$

*Proof.* Запишем определение того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad (2.1)$$

$1 \Rightarrow 2$ . Пусть 2.1 верно. Возьмем  $A = \{1, \dots, N\}$  - конечно. Следовательно, верно 2.

$2 \Rightarrow 1$ . Возьмем  $N = \max\{A\}$ , получим 1.

□

**Def 30.** Пусть  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - биекция.  $y_n = x_{\varphi(n)}$  - перестановка  $\{x_n\}$ .

**Corollary.** Последовательность сходится тогда и только тогда, когда любая перестановка сходится.

**Def 31.** Пусть  $\{n_k\}$  - строго возрастающая последовательность натуральных чисел.  $\{y_k\} : y_k = x_{n_k}$  - подпоследовательность  $\{x_n\}$

**Statement.** Если  $\{x_n\}$  сходится к  $b$ , то любая подпоследовательность тоже сходится к  $b$ .

*Proof.* Аналогично 2.1.3.

□

## 2.5.2 Вторая форма теоремы о компактности

**Lemma.**  $x \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $x_0$  - предельная точка для  $X$ .
2.  $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 : x_n \in X, x_n \neq x_0$ . Более того  $\{x_n\}$  можно выбрать так что  $x_k \neq x_j, i \neq j$ .

*Proof.*  $2 \Rightarrow 1$ . Возьмем любую проколотую окрестность точки  $x_0$ . Хотим:  $\overset{\circ}{V} \cap X \neq \emptyset$ .

$$\overset{\circ}{V} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

$$\exists k : x_k \in V, x_k \neq x_0 \Rightarrow x_k \in \overset{\circ}{V}, x_k \in X.$$

$1 \Rightarrow 2$ . Теперь возьмем

$$V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}.$$

$$\exists x_n \in X \cap V_n \wedge x_n \neq x_0.$$

Тогда  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ . По принципу двух полицейских  $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ . Теперь сделаем все неравными:  $x_1 \in V_1 \cap X, x_1 \neq x_0$ , дальше возьмем  $\delta_1 < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$  и скажем, что  $x_2 \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap X, x_2 \neq x_1$  и так далее,  $\delta_{n-1} \min(\frac{1}{n}, |x_0 - x_1|, \dots, |x_0 - x_{n-1}|, x_n \in (x_0 - \delta_{n-1}, x_0 + \delta_{n-1}), x_n \neq x_0$   $\square$

**Theorem 2.5.1** (Вторая форма теоремы о компактности). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

*Proof.*  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  - ограниченная последовательность. Тогда  $\exists M : |x_n| \leq M, \forall n$ . Разберем два случая:

1.  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  - конечно, тогда какое-то значение принимается бесконечное число раз, тогда с некоторого момента все элементы равны. Возьмем эту последовательность, она сходится.

2.  $A$  - бесконечно, но ограничено. Следовательно, есть предельная точка для  $A$ . Тогда по лемме 2.5.2 существует  $\{a_k\} \in A, a_k \rightarrow b, a_k \neq a_l, k \neq l$ .

Тогда  $\forall k \exists n_k : a_k = x_{n_k}$ , где номера  $n_k$  попарно различны, но не упорядочены. То есть  $\{x_{n_k}\}$  - перестановка  $\{x_n\}$ , а значит тоже сходится.

$\square$

### 2.5.3 Предел функции в терминах последовательности

**Theorem 2.5.2.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A', x_0 \in \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$
2.  $\forall \{a_n\} : a_n \in A, a_n \neq x_0, a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow a$

*Proof.*  $1 \Rightarrow 2$ . Берем последовательность  $a_n \in A, a_n \neq x_0$ . Надо  $f(a_n) \rightarrow a$ .

$$\varepsilon > 0; \exists V(x_0) : x \in \overset{\circ}{V} \cap A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\exists N : a_n \in V \forall n > N \Rightarrow a_n \in \overset{\circ}{V} (a_n \neq x_0).$$

Получаем

$$|f(a_n) - a| < \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$ . От противного. Пусть первое условие не выполнено. Предположим, что  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\neg "a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)" : \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x : |x - x_0| < \delta, x \in A, |f(x) - a| \geq \varepsilon.$$

Возьмем

$$\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n : |x - x_n| < \frac{1}{n}, x_n \neq x_0, x_n \in A.$$

Получаем, что  $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ . С другой стороны, по принципу двух полицейских:

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow x_0.$$

Противоречие.

Случай  $x_0 = \infty$ .

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \exists x > M, x \in A : |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

Возьмем  $x_n > n, x_n \in A : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$ . □

## 2.6 Бесконечные пределы

### 2.6.1 Бесконечные пределы

**Def 32.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' (x_0 \in \mathbb{R} \vee x_0 = \pm\infty)$ . Говорят, что  $f$  имеет предел  $+\infty(-\infty)$  в точке  $x_0$ , если:  $\forall U(\pm\infty)$  существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) \in U \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

На языке неравенств:  $\forall M \in \mathbb{R} \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : f(x) > M \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A$ .

**Def 33.** Говорят, что  $f$  стремиться к бесконечности в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ . То есть  $\forall M > 0 \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x)| > M \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}$ .

**Statement.** Пусть  $f(x) \neq 0$  в проколотой окрестности  $x_0$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  - стремиться к бесконечности в точке  $x_0$

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

*Proof.*  $1 \Rightarrow 2$  (тогда дополнительное условие 2.6.1 можно не накладывать).

$$\varepsilon > 0 M = \frac{1}{\varepsilon} : \exists \overset{\circ}{W}(x_0) : |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \forall x \in \overset{\circ}{W} \cap A \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$  (здесь условие 2.6.1 необходимо).  $M > 0, \varepsilon = \frac{1}{M}$ . Тогда существует проколота окрестность  $\overset{\circ}{V}$  точки  $x_0$  :

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}, x \in \overset{\circ}{V} \cap A \iff |f(x)| > M.$$

□

## 2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые

### 2.7.1 О и о. Соотношения транзитивности

**Def 34.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ .

$f$  называется бесконечно малой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ .

$f$  называется бесконечно большой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ .

**Def 35.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $g$  доминирует функцию  $f$  вблизи  $x_0$  и пишут  $f = O(g)$  ( $x \rightarrow x_0$ ), если  $\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$ .

**Def 36.** Функции  $f, g$  называются сравнимым вблизи  $x_0$ , если  $f = O(g) \wedge g = O(f)$ . Обозначение:  $f \asymp g$ .

**Property.**  $f = O(g) \wedge g = O(h) \implies f = O(h)$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists c_1 : |f(x)| \leq c_1|g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \\ \exists \overset{\circ}{V}(x_0), \exists c_2 : |g(x)| \leq c_2|h(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A \end{aligned}$$

Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{U}$ :

$$|f(x)| \leq c_1|g(x)| \leq c_1c_2|h(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq c|h(x)|.$$

□

*Note.* Если  $g(x)$  не обращается в ноль вблизи  $x_0$ , то  $f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f}{g}$  - ограниченная функция.

**Def 37.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $f(x) = o(g(x))$  вблизи  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(x_0)$  :

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U} \cap A.$$

*Note.* Если  $g(x)$  не обращается в ноль вблизи  $x_0$ , то  $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$  - ограниченная функция.

## 2.7.2 Эквивалентные функции

**Def 38.**  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Говорят, что  $f, g$  эквивалентны вблизи  $x_0$ , если  $f - g = o(g)$ , при  $x \rightarrow x_0$ . Обозначение:  $f \sim g$ .

*Note.* Определение асимметрично!

**Lemma.**  $f \sim g$ , при  $x \rightarrow x_0 \implies g \sim f$  при  $x \rightarrow x_0$

*Proof.* Проверим, что  $g = O(f)$  вблизи  $x_0$  :

$$\varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}(x_0) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{V} \cap A.$$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ :

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2} |g(x)|.$$

$$\frac{1}{2} |g(x)| \leq |f(x)|.$$

$$|g(x)| \leq 2 |f(x)|.$$

□

*Note.* Если  $g(x) \neq 0$  вблизи  $x_0$ ,  $f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

## 2.7.3 Отношение эквивалентности и вычисление пределов

**Statement.** Полезные преобразования для вычисления пределов:

$$1. \ p(x) = \sum_{i=1}^n a_n x^n, \quad a_n \neq 0. \text{ При } x \rightarrow +\infty : p(x) \sim a_n x^n$$

$$2. \ p(x) = (x - x_0)^l (b_0 + q(x)), \quad b \neq 0, q(x_0) = 0. \text{ Тогда } p(x) \sim b_0 (x - x_0)^l$$

$$3. \ f(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1+x-1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} \dots + 1} \sim \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$$

**Theorem 2.7.1.**  $f, g$  не обращаются в нуль вблизи  $x_0$ ,  $f \sim f_1 \wedge g \sim g_1$  вблизи  $x_0$ . Тогда  $fg, f_1g_1$  одновременно имеют или не имеют предел в точке  $x_0$ . Если пределы существуют, то они равны.

*Note.* Аналогичная теорема верна для  $\frac{f}{g}$  и  $\frac{f_1}{g_1}$

*Proof.*

$$fg = f_1g_1 \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g}{g_1}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \underbrace{\frac{f}{f_1} \frac{g_1}{g}}_{\text{предел этого равен 1}}.$$

□