Конспект по алгебре
I семестр
СПбГУ, факультет математики и компьютерных наук
(лекции Степанова Алексея Владимировича)

Тамарин Вячеслав

December 15, 2019

Contents

Chapter 1

Линейная алгебра. Векторные пространства

1.1 Лекция 1

X - множество
$* : X \times X \to X$
$(x, y) \mapsto x * y$
Аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)

2. $\exists e \in X \; \forall a \in X : e * a = a * e = a$ (нейтральный элемент)

3. $\forall a \in X \; \exists a' \in X : a * a' = a' * a = e$ (обратный элемент)

4. $\forall a, b \in X : a * b = b * a$ (коммутативность)

Def 1. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиоме 1, называется **полугруппой**

Def 2. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-2, называется **моноидом**

Def 3. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-3, называется **группой**

Def 4. Множество X с операцией $*$, удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **коммутативной** или **абелевой группой**

Exs.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – группа

2. $(\mathbb{N}, +)$ – полугруппа

3. $(\mathbb{N}_0, +)$ – моноид

4. $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ – группа

5. Пусть A - множество
   $X :=$ множество биективных отображений $A \to A$
   id_A– нейтральный элемент
   Если $f(x) = y$, то $\tilde{f}(y) = x$ – обратная функция ($f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id_A$).
   $f(x) = x + 1,\ g(x) - 2x,\ id_A(x) = x$
   $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$
   $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2 \neq 2x + 1$
   Следовательно, $(X, \circ)$ – не коммутативная группа

Designation.

- $\cdot$ – мультипликативность, 1, x^{-1}
- $+$ – аддитивность, 0, $-x$
- $\circ$ – относительно композиции, id, x^{-1}
- $*$ – абстрактная операция, e, x^{-1}

Пусть $(R, +)$ – абелева группа
Определим отображение

$$\cdot : R \times R \to R$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

Для $(R, +, \cdot)$ могут быть верны следующие аксиомы:

5. $a(b + c) = ab + ac$
   $(b + c)a = ba + ca$ (дистрибутивность)
6. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность)
7. $\exists 1_R\, \forall a \in R : 1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ (нейтральный элемент)
8. ab = ba (коммутативность)
9. $0_R \neq 1_R$
10. $\forall a \neq 0_R\, \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$ (обратный элемент)

Def 5. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5, называется **не ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 6. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-6, называется **ассоциативным кольцом без единицы**.

Def 7. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиоме 5-7, называется **ассоциативным кольцом с единицей**.

Def 8. $(R, +, \cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 5-8, называется **коммутативным кольцом**.

Exs.

1. $\mathbb{Z}$ –коммутативное кольцо

2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поля

3. Рассмотрим $\mathbb{Z}_n = 0, \ldots, n-1$ с операциями $+_n, \cdot_n$:
   $a +_n b = (a+b)\%n$
   $a \cdot_n b = (a \cdot b)\%n$
   Обратимые элементы:
   $ax = 1 + ny$
   $ax - ny = 1$
   Если $(a, n) = 1$, есть решение, иначе – нет. $\mathbb{Z}_p$– поле $\Leftrightarrow p \in \mathbb{P}$

1.2 Лекция 2

Def 9. V – векторное пространство над полем F , если $(V, +)$ – абелева группа, задано отображение $V \times F \to V$
$(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$, удовлетворяющее аксиомам $\forall x, y \in V, \forall a, b \in F$:

5. $x \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$

6. $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$
   $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$

7. $x \cdot 1_F = x$

$A \in M_n(F), \alpha \in F$
$(A, \alpha)_{ij} = a_{ij} \cdot \alpha$
$(AB)\alpha = A(B\alpha)$

Exs.

1. Множество векторов в $\mathbb{R}^3$

2. $F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in F \right\}$
   $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

3. X - множество, $F^X = \{f \mid f : X \to F\}$
   $f, g : X \to F$
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$

4. $F[t]$ - многочлены от одной переменной t

5. V - абелева группа, в которой $\forall a \in V : \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \in \mathbb{P}} = 0$ Тогда V - векторное пространство над $\mathbb{Z}_p$

   $k \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{k}$

1.3 Лекция 3

Def 10. Алгебра A над полем F – кольцо, являющееся векторным пространством над F ("$+$" - операция в кольце и в векторном пространстве), такое что $(ab)\alpha = a(b\alpha) \qquad a, b \in A, \alpha \in F$

Ex. $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ - не ассоциативная алгебра на $\mathbb{R}$

Def 11. Матрица размера $I \times J$ (I, J - множества индексов) над множеством X - это функция

$$A : I \times J \to X, \qquad (i, j) \to a_{ij}.$$

Пусть определено умножение $X \times Y \to Z, \qquad (x, y) \to xy$
(Z - коммутативный моноид относительно "$+$")

Def 12. Строка - матрица размера $\{1\} \times J$
Столбец - матрица размера $J \times \{1\}$

A - строка длины J над X
B - строка длины J над Y
Тогда произведение $AB = \sum\limits_{j \in J} a_{1j} b_{j1} \in Z$
$x \to x_e$ - координаты вектора x

$$\underbrace{x \cdot y}_{\text{скалярное произведение}} = x_e^T \cdot y_e$$

Def 13. Транспонирование матрицы.
D - матрица $I \times J$ над X
D^T - матрица $J \times I$ над $X : (D^T)_{ij} = (D)_{ji}$

Note. Пусть в X есть элемент $0 : 0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y$. Все кроме конечного числа $a_j = 0$. Тогда AB имеет смысл, даже когда $|J| = \infty$.
"почти все" = кроме конечного количества

Designation.

$$a_{i*} \text{ - } i\text{-я строка матрицы } A$$

$$a_{*j} \text{ - } j\text{-й столбец матрицы } A$$

1.3.1 Произведение матриц

$$A \text{ - матрица } I \times J \text{ над } X.$$

$$B \text{ - матрица } J \times K \text{ над } Y.$$

$$AB \text{ - матрица } I \times K \text{ над } Z = X \cdot Y, \qquad (AB)_{ik} = a_{i*} \cdot b_{*k} = \sum_{j \in J} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

$$(x_1, \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = va, \qquad v \in V, a \in F.$$

Лекция 1.4

1.4 Лекция 4

Def 14. $(G, *), (H, \#)$– группа
$\varphi : G \to H$- гомоморфизм, если:

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1)\#\varphi(g_2)$$

Def 15. R, S -кольца
$\varphi : R \to S$ - гомоморфизм, если:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$$

Для колец с 1:$\varphi(1) = 1$

Def 16. U, V - векторные пространства над F
$\varphi : U \to V$ - линейное отображение, если:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u\alpha) = \varphi(u)\alpha$$

Note. Изоморфизм – биективный гомоморфизм.

Def 17. V - векторное пространство над полем F
v - строка элементов "длины" I над V
a - столбец "высоты" I, почти все элементы которого равны 0.
Тогда va - линейная комбинация набора v с коэффициентами .

Note. $U \subset V$
U является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V. Тогда U - подпространство V

Lemma. $U \subseteq V$
$\forall u_1, u_2 \in U, \alpha \in F$:
$u_1 + u_2 \in U, u_1\alpha \in U$ *Тогда* U *- подпространство. Если* U *- подпространство в* V*, то пишут* $U \subseteq V$.

Def 18. $v = \{v_i | i \in I\}$, где $v_i \in V\ \forall i \in I$
$\langle v \rangle$ - наименьшее подпространство, содержащее все v_i

Lemma. $\langle v \rangle = \{va | a-$ *столбец высоты* I *над* F*, где почти всюду элементы равны нулю* $\} = U$

Proof. $v_i \in \langle v \rangle \Rightarrow v_i a_i \in \langle v \rangle$
$\Rightarrow v_{i_1} a_{i_1} a + ... + v_{i_k} a_{i_k} \in \langle v \rangle$
$\Rightarrow \langle v \rangle$ содержит все варианты комбинаций. $va + vb = v(a + b) \in U$
$(va)\alpha = v(a\alpha) \in U$
$\Rightarrow$ множество линейных комбинаций – подпространство U - подпространство, содержащее $v_i \forall i \in I$
$\langle v \rangle$a – наименьшее подпространство, содержащее v_i
$\Rightarrow \langle v \rangle \subseteq U$ тогда $\langle v \rangle = U$ $\square$

Def 19. Если $\langle v \rangle = V$, то v – система образующих пространство V
Базис – система образующих.

Designation. F^I – множество функций из I в F = множество столбцов высоты I
${}^I V$– множество строк длины I

Набор элементов из V , заиндексирванных множеством I – это функция $f : I \to V$
$i \mapsto f_c$

Def 20. $v \in {}^I V$
v – **линейно независим**, если $\forall a \in F^I, a \neq 0 \Rightarrow va \neq 0$

Theorem 1. $v \subseteq V$
Следующие утверждения эквивалентны:

1. *v — линейно независимая система образующих*
2. *v — максимальная линейно-независимая система*
3. *v — j минимальная система образующих*
4. *$\forall x \in V \exists ! a \in F^v : x = va = \sum\limits_{t \in v} t \cdot a_t$ (почти все элементы равны 0)*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (4) – доказали ранее (1) $\Rightarrow$ (2)
$x \in V \setminus v$
$x = va (a \in F^v)$
$va = x \cdot 1 = 0$ – линейная зависимость набора $v \cup x$
Т.о. любой набор , строго содержащий v, линейно зависим $\Rightarrow v$ – максимальный.
(1) $\Rightarrow$ (2)
$x \in V \setminus$
$v \subseteq V \cup x$–линейно зависим
$va + xa_x = 0$
$a \neq 0$
Если $a_x = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow a = 0$?!
Значит $a_x \neq 0$
$va = c \cdot (-a_x)$
$x = v \cdot \frac{a}{-a_x} \Rightarrow v$ –система образующих.

□

Lemma (Цорн)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ – набор подмножеств (не всех) множества X.*
Если объединение любой цепи из $\mathcal{A}$, принадлежащей $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ существует максимальный элемент.
$M \in \mathcal{C}$ - максимальная, если $M \subseteq M' \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow M = M'$

Theorem 2 (о существовании базиса)**.** *V – векторное пространства*
X – линейное независимое подмножество V
Y – система образующих V
$X \leq Y$
Тогда существует базис Z пространства $V : X \leq Z \leq Y$

Лекция 1.4

Proof. $\mathcal{A}-$множество всех линейно независимых подмножеств, лежащих между X и Y. $X \in \mathcal{A}$
$\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$
$X \leq \cup C \in \mathcal{C} \leq Y$
Пусть $\cup C \in \mathcal{C}$ – линейно зависимый. То есть$\exists u_1, ..., u_2 \in /...$

...

Пусть v - базис V.

$$\forall x \in V\ \exists! x_v \in F^v : x = v \cdot x_v$$

$$v = (v_1, \dots, v_n),\ x_v = \text{ матрица столцов альфа;}$$

$$x = v_1\alpha_1 + \ldots = v \cdot x_v$$

□

1.5 Лекция 5

1.6 Лекция 6

1.7 Лекция 7

Statement.

$$U \leq W \quad \exists V \leq W : W = U \oplus V$$

Proof. Выберем базис u в U. Дополним до базиса $u \cup v$ пространства W и положим $V = \langle v \rangle$.

$$\langle u \rangle = U \langle v \rangle = V \langle u \cup v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle = U \oplus V = W$$

$$x \in U \cap V \Rightarrow x = ua = vb \Leftrightarrow ua - vb = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0 (u \cup v - \text{линейно независимый}$$

□

Corollary.

$$u - \text{ базис } U, v - \text{ базис } V, U, V \leq W$$

$$u \cup v - \text{ базис } W \Leftrightarrow U \oplus V$$

25.09.2019

1.8 Лекция 8

$$v - (v_1, v_2, \ldots v_n) \in n^V$$

$$M_n(F) - \text{ алгебра матриц размера } n \times n \text{ над } F$$

$$GL_n(F) = M_n(F)^* - \text{ полная линейная группа степени } n \text{ над } F$$

Lemma.

$$v \in n^V, A \in GL_n(F)$$

$$v - \textit{ линейно независимый } \Leftrightarrow vA - \textit{ линейно независимый}$$

$$\langle v \rangle = \langle vA \rangle$$

Лекция 1.8

Proof. $(vA)A^{-1} = v(AA^{-1}) = vE = v$, поэтому можно доказывать только в одну строну.
v - линейно независимый.
$vAb = 0 \Rightarrow A^{-1}Ab = 0 \Rightarrow b = 0$, т.е vA - линейно независимый.
$(vA)b = v(Ab) \in \langle v\rangle$, $\langle vA\rangle \leq \langle v\rangle$ □

Statement. *u, v - два разных базиса пространства V.*
Тогда $\exists!$ матрица $A \in GL_n(F) : u = vA$
При этом $a_{*k} = (u_k)_v \quad \forall k = 1, \ldots n$. Такая матрица обозначается $C_{v\to u}$ и называется матрицей перехода от v к u.

$$C_{v\to u}C_{u\to v} = C_{v\to u}C_{u\to v} = E$$

Proof. Положим $a_{*k} = (a_k)_v \Rightarrow u_k = va_{*k} \Rightarrow u = vA$.
$vA = vB \Leftrightarrow A = B$ то есть A - единственно.
Далее:

$$\left.\begin{aligned} u = vC_{v\to u} \\ v = uC_{u\to v} \end{aligned}\right\}$$

$$uE - uC_{v\to u}C_{v\to u}$$

$$E = C_{u\to v}C_{v\to u}$$

□

Corollary. v - базис V
$f : GL_n(F) \to$ множество базисов пространства V
$f(A) = vA$ - биекция.

Proof.

$$|F| = q \qquad \dim V = u$$

$$(q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1}) - \text{количество базисов}$$

$\mathbb{F}$ - поле из q элементов. □

Statement. *Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.*

Corollary. u, v - базисы V

$$x \underset{u}{=} C_{u\to v}x_v$$

Proof.

$$x = ux_u = vx_v$$

$$v = uC_{u\to v}$$

$$ux_u = uC_{u\to v}x_v \Rightarrow x_u = C_{u\to v}x_v$$

□

Corollary. (Матричные линейные отображения)

$$L : U \to V, \quad u - \text{ базис } U, v - \text{базис } V$$

Тогда $\exists!$ матрица $L_{v,u}(L_u^v : \forall x \in UL(x)_v = L_u^v x_u$
При этом $(L_u^v)_{*k} = L(u_k)_v$

Лекция 1.8

Note.

$$u = (u_1, \dots u_n) \in n^U$$

$$L : U \to V$$

$$L(a) := (L(u_1), \dots, L(u_n))$$

$$L(ua) = L(u)a \qquad a \in F^n$$

$$\varphi_v : V \to F^n$$

$$\varphi_v(g) = y_v \qquad \forall q \in V$$

φ_v - линейно $\Rightarrow (L(u)a)_v = L(u)_v a$

$$L(u)_v := (L(u_1)_v, \dots L(u_n))v)$$

Proof.

$$x = ux_u$$

$$L(x) = L(u)x_u$$

$$L(x)_v = L(u)_v x_u$$

Положим $L_u^v := L(u)_v$.

$$\forall x \in U : L(x)_v = L_u^v x_u$$

При $x = u_k : L(u_k)_v = L_u^v (u_k)_u = (L_u^v)_k$ □

Note. Если $Ax = Bx \quad \forall x \in F^n$, то $A = B$

26.09.2019

1.9 Лекция 9

Exs.

1. $V = \mathbb{R}[t]_3$ - многочлены степени не более 3

$$D(p) = p' \qquad V \to V$$

$$v = (1, t, t^2, t^3).$$

$$D(1) = 0, D(t) = 1, D(t^2) = 2t.$$

$$D_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

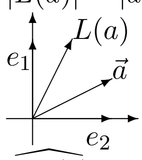
$$v^{(1)} = (1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}).$$

2. $V = \mathbb{R}[t]$

$$v = (1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots).$$

$$D(v_0) = 0, D(v_k) = v_{k-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots \\ & 0 & 1 & \cdots \\ & & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

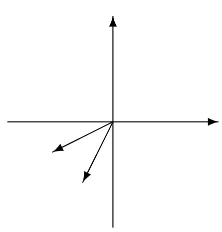
3. $V = \mathbb{R}^3$
   $|L(a)| = |a|$
   

   $\widehat{a, L(a)} = \varphi$
   $e = (e_1, e_2)$- базис

$$L(e_1)_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$L(e_2)_e = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$



$$a_e = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$L(a)_e = \begin{pmatrix} \cos(\psi+\varphi) \\ \sin(\psi+\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$L(a)_e = L_e \cdot a_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Statement. $L : U \to V$
u, u' – базис U
v, v' – базис V
Тогда $L_{u'}^{v'} = C_{v'\to v} \quad L_u^v C_{u\to u'}$

Proof.

$$L(x)_v = L_u^v x_u.$$

$$C_{v'\to v} L(x)_v = L(x)_{v_1} = L_{u'}^{v'} x_{u'} = L_{u'}^{v'} C_{u'\to u} x_u.$$

Лекция 1.9

$\forall x_u \in F^{dimU}$

$$L(x)_v = C_{v\to v'} L_{u'}^{v'} C_{u'\to u} x_k.$$
$$L_u^v = C_{v\to v'} L_{u'}^{v'} C_{u'\to u}.$$

□

Note.

$$\text{Если } U = V \qquad u = v, u' = v'.$$
$$L_{u'} = C_{u'\to u} L_u C_{u\to u'}.$$

Statement. *Линейное отображение однозначно определяется образом базисных векторов.*
$u = (u_1, \dots u_n) -$ *базис* U
Для любого векторного пространства V*:*

$$\forall v_1, \dots v_n = V$$

$$\exists! \text{ линейное отображение (*)} L : U \to V : L(u_k) = v_k \quad \forall k$$

Proof.

$$L(ua) := va$$
$$\forall L^* : L(ua) = L(u)a = va$$

□

При этом L - инъективно тогда и только тогда, когда v - линейно независимый
L - сюрьективно тогда и только тогда, когда v - система образующих
L - изоморфизм тогда и тоько тогда, когда v - базис.

Statement. $V, \quad v, v' -$ *базис* V
$L : V \to V -$ *линейно*
$L(v_k) = v'_k \qquad \forall k$

$$(L_v)_k = L(v_k)_v = (v'_k)_v$$

$$L_v = C_{v\to v'}.$$

по другому

$$(Id_{v'}^v)_k = Id(v'_k)_v = (v'_k)_v.$$

Тогда $L_v = C_{v\to v'} = Id_{v'}^v$

Def 21. $f : X \to Y$
$Imf = \{f(x) \mid x \in X\}$
$L : U \to V$ - линейное отображение
$ImL = \{L(x) \mid x \in U\}$
$KerL = L^{-1}(0) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$

Lemma.
$ImL \le V$
$KerL \le U$
Пусть $L(x) = y$

$$\forall y \in V : L^{-1} = x + KerL$$
$$L^{-1}(y) = \{z \in U \mid L(z) = y\}$$
$$x + KerL = \{x + z \mid z \in KerL\}$$

Лекция 1.10

1.10 Лекция 10

Theorem 3. $L : U \to V$

$$\dim U = \dim KerL + \dim ImL.$$

Proof. $u = (u_1, \dots u_k) -$ базис $KerL$
$v = (v_1, \dots U_m)$ Дополним базис ядра до базиса U: $u \cup v$ - базис U
$L(v) = (L(v_1), L(v_2), \dots L(v_m))$ - базис образа. $\triangleleft\ x \in ImL \quad \exists y \in U : L(y) = x$. $y = ua + vb, \qquad a \in F^k, b \in F^m$

$$x = L(y) = \underbrace{L(u)}_{(L(u_1),\dots L(u_k))=(0,\dots 0)} + L(v).$$

Следовательно, $L(v)$ - система образующих.

$$L(v)c = 0, \qquad c \in F^m.$$

$$L(vc) = 0 \Rightarrow vc \in KerL \Rightarrow vc = ud \qquad \text{для некоторого } d \in F^k.$$

Тогда $vc - ud = 0$, но v и u - два базисных вектора. Следовательно, $c = d = 0$ и $L(v)$ - линейно незвисимый. □

Theorem 4. *(формула Грассмана о размерности суммы и пересечения)*
$U, V \leq W$

$$\dim U \cap V + \dim U + V = \dim U + \dim V.$$

Proof. $\triangleleft$ внешнюю сумму $U \oplus V$, $L(u, v) = u + v$
Тогда $ImL = U + V$. $(u, v) \in KerL \Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \subset U \cap V$
$KerL = (u, -u) \mid u \in U \cap V \cong U \cap V$
$\dim(U \oplus V = \dim KerL + \dim ImL = \dim U \cap V + \dim U + V$ □

08.10.2019

1.11 Лекция 11

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Простейший базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x = vx_v, \quad x = ex_e = Ex_e$

$$eC_{e \to v} = v - \text{ из столбцов } v.$$

$$C_{e \to v} = v - \text{ матрица из столбцов } (v_1, \dots v_n).$$

$L : F^m \to F^n, \qquad A \in M_{n\times m}(F)\ L(x) = Ax$

$$L(x)_e = L_0^e x_e, L(x)_e = L(x) = Ax = L_e^e x_e.$$

$Hom(F^n, F^m) \cong M_{m\times n}(F)$ - изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем A отождествляется с L , пишем A_u^v вместо L_u^v (A в базисе $u - v$).

Def 22. Линейный оператор из V в V называется эндоморфизмом V . Множество эндоморфизмов $V = End(V)$ - ассоциативная алгебра над f
$+, *\alpha$ - поточечные операции, $*$ - композиция.
$L, M, N \in End(V): \quad L\circ(M+N) = L\circ M + L\circ N$ - следует из линейности L

v - базис V, $u = \dim V$
$\theta_v : End(V) \to M_n(F)$
$\theta_v = L_v$

Statement. θ_v *- биективно.*

Practice. Построить обратное θ_v

Lemma. $(M\circ L)_v = M_v \circ L_v$

Statement. θ_v *- изоморфизм*
F *- алгебра*
$EndV \cong M_n(F)$

–

Theorem 5. $U \le V$
$\forall L : V \to V, \quad U \le KerL, \exists! \tilde{L} : V\backslash U \to W$

$$\tau : \begin{array}{ccc} V\backslash U & \longrightarrow & W \\ \uparrow \pi_U & & \\ V & \xrightarrow{L} & W \end{array}.$$

$\tau \circ \pi_U = L$
L *- эпиморфизм* $\Rightarrow \tau$ *- эпиморфизм*
$KerL = U \Rightarrow \tau$ *- мономорфизм*

Proof. Диаграмма коммутативна, следовательно, $\tilde{L}$ строится однозначно. Пусть $\tilde{L}(x+U) := L(x).y \in U \in KerL: \quad L(x+y) = L(x) + L(y) = L(x)$ $\tilde{L}$ задано корректно (легко проверить, что оно линейно, единственность следует из коммутативности диаграммы. $\tilde{L}(x+U) = L(x)$ - необходимо и достаточно коммутативности диаграммы.
$\tilde{L}(x+U) = 0_W \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow x \in KerL = U \Leftrightarrow x + U = 0 + U = O_{V\backslash U}$
Для инъективности : $Ker\tilde{L} = 0_{V\backslash U}$ □

Theorem 6 (О гомоморфизме)**.** $L : V \to W$

$$VKerL \cong ImL.$$

Лекция 1.11

Proof. Возьмем $U = KerL$ и заменим W на ImL $n = \dim\langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle \leq \dim F^m = m$. Из линейной независимости строк следует, что $m \leq n$ Таким образом $m = n$.
n линейно независимых столбцов (строк) в n-мерном пространстве - базис и матрица A - матрица перехода $C_{e\to a}$, где $a = (a_{*1}, \dots a_{*n})$ - набор столбцов A . Следовательно, $A \in GL_n(F)$ – множество обратных матриц. □

Def 23. Ранг:
$rk(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim\langle v_1, \dots v_n\rangle$,
$rkL = \dim ImL$
$u_1, \dots u_n$ - базис U, $L : U \to V$
$rkL = rk((L(u)) = \dim\langle L(u_1), \dots L(u_n)\rangle$
$A \in M_{m\times n}(f)$
Столбцовый ранг A : $rkA - rk(a_{*1}, \dots a_{*m})$
Строчный ранг : $rkA = rk(a_{1*}, \dots a_{n*})$
или наибольшее количество независимых столбцов (строк).

Lemma. $A \in M_{m\times n}$

1. *столбцы A линейно независимы $\Leftrightarrow$ столбцовый $rkA = n$*
2. *столбцы A - система образующих в F^m $\Leftrightarrow$ столбцовый $rkA = m$*
3. *строки A линейно независимы $\Leftrightarrow$ строчной $rkA = m$*
4. *строки A - система образующих в ${}^mF$ $\Leftrightarrow$ строчной $rkA = n$*
5. *столбцы являются базисом F^n $\Leftrightarrow$ $m = n =$ строчной rkA*
6. *если столбцы и строки A линейно независимы $\Leftrightarrow$ $n = m$, строки и столбцы - базисы, A - обратима.*

Proof. (6)
из (1) $\Rightarrow c.rkA = n$
$n = \dim\langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle$ □

10.10.2019

1.12 Лекция 12

Lemma. *$L : U \to V$ - линейное отображение.*
$rkL =\ c.L_U^V$
Для любых базисов u, v пространств U, V.

Proof.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_v \\ F^n & \xrightarrow{L_U^V} & F^m \end{array}$$

$A \in M_{m\times n}(F)$

$$ImA = \{Ax \mid x \in F^m\} = \{a_{*1}x_1 + \dots a_{*n}x_n \mid x_i \in F\} = \langle a_{*1}, \dots a_{*n}\rangle.$$

$rkA = c.rkA$ - ранг оператора умножения на А. Из диаграммы $ImL \cong ImL_U^V \Rightarrow rkL = c.rkL_U^V$ □

Lemma. $A \in M_{m\times n}(F)$
$B \in GL_m(F), C \in GL_n(F)$
$rkA = rkBAC$ *- строчной или столбцовый.*

Proof. $L : F^n \to F^m$- оператор умножения на A. $A = L_e^e$.
$B = C_{e\to v}, C = C_{e\to u}$, где u, v - базисы пространств F^m, F^n.
$BAC = L_v^u$ Тогда $c.rkA = c.rkBAC = rkL$. Со столбцами все хорошо. Теперь со строками: $r.rkA^T = c.rkA$
$r.rk(BAC)^T = r.rk(A^TB^TC^T)$ $r.rk(BAC)^T = c.rkBAC$
Тогда $r.rkA^T = r.rkC^TA^TB^T$. (Заметим, что $(B^T)^{-1} = ((B^{-1})^T)$ Следовательно, B^T, C^T - произвольные обратимые матрицы. □

Practice. $(AB)^T = B^TA^T$

Theorem 7 (PDQ - разложение, равенство базисов)**.** *$L : U \to V$ - линейное отображений, U, V - конечн*

1. *Существуют базисы u, v пространств U, V такие что*

$$L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Размер $E = rkL$.

2. $\forall A \in M_{m\times n}(F)\exists P \in GL_m(F), Q =\in GL_n(F) : A = PDQ,$ *где* $D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $c.rkA = r.rkA$

Proof. $(f_1, \dots f_k)$ - базис $KerL$. Дополним до базиса на пространства $U : g \cup f = u$. Тогда (см. Теорему о ядре и о,разе). $L(g)$ - базис Im L. Дополним его до базиса v пространства V.

$$v = (L(g_1), \dots, L(g_l), v_{l+1}, \dots, v_n).$$

$$\begin{aligned} L(g_1)_v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ L(g_l)_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}.$$

$L(f_i) = 0$ таким образом $L_u^v = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

Def 24. W - множество матриц-перестановок (группа Вейля).

$$a_{*i} = e_{\sigma(k)}, \qquad \text{где } \sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\} \text{ -биекция.}$$

$B =$ - множество обратимых верхнетреугольных матриц.(борелевская подгруппа) B^- - множество обратимых нижнетругольных матриц.

Лекция 1.12

Theorem 8 (разложение Брюа)**.**

$$GL_n(F) = BWB = \{b_1 w b_2 \mid b_1, b_2 \in B, w \in W\}.$$

$w \in W : BwB$ - клетка Брюа.

Proof. $a \in GL_n(F)$

$$\exists b, c \in B : \ bac \in W.$$

Индукция по n
В первом столбце a выберем низший ненулевой элемент.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}.$$

$$ua = ()$$

Пусть a' - матрица, полученная из uav вычеркиванием i-ого столбца и j-строки. Легко видеть, что ее столбцы линейно независимы. Следовательно, a' - обратима. Тогда по ПИ $\exists b', c' : b'a'c' \in W_{n-1}$. Все получилось!

□

Proof. см конспект $GL_n(F) = BWB$
$a \in GL_n(F)$ □

Theorem 9 (разложение Гаусса)**.**

$$GL_n(F) = WB^- B.$$

$w \in W : wB^-B$ - клетка Гаусса.

Proof. Докажем, что $\forall w \in W : BwB \subset wB^-B$
$BWB = \bigcup_{w \in W} BwB \subset ...$

Lemma (1)**.** *$D = D_n(F)$ - множество обратимых диагональных матриц. $U = U_n(F)$ - множество унитреугольных матриц. Тогда $B = DU = UD$.*

Practice. $a = \begin{pmatrix} \alpha_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i \neq \alpha_j, \text{если } i \neq j \ \Rightarrow \ ab = ba \Rightarrow b \in D$

Proof.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

□

Lemma (2)**.** *$U = \prod_{i<j} X_{ij}$, причем произведение берется в любом наперед заданном порядке.*

Proof. Будет в теории групп □

Designation. $w \in W : U_w := \prod_{i<j, \sigma(i) > \sigma(J)} X_{ij}$, где σ - перестановка соответствующая w. То есть $w^{-1} X_{ij} w = X_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Лекция 1.12

Theorem 10 (Приведенной разложение Брюа)**.** $B = \bigcup_{w \in W} U_w w D U$ *При этом* w*, а также элеметны из* U_w, D, U *определены по элементам из* B *из единственным образом.*

Proof. □

Corollary. $BwB \subset wB^{-1}B = w(w^{-1}U_w w)B \subset wU^- B \subset wB^- B$

Proof. $BwB = U_w w B$ □

□

Statement.

$$BwB \cap Bw'B = \emptyset, \ \forall w \neq w'.$$

1.13 Лекция 13

15.10.2019 Доказательство теорем

1.14 Лекция 14

17.10.2019

Разложение Гаусса. Идея доказательства: $a \in GL_n(F)$, $wa \in U^- B$. Найдем такое w.

Def 25. Главная подматрица матрицы A- подматрица $k \times k$ стоящая в левом верхнем углу матрицы A.

Lemma. *Обратимость любой главной подматрицы не зависит от умножения на* U^- *слева и на* U *справа.*

Proof. $a^{(k)}$ - главная подматрица $k \times k$ в a.

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Где $b \in U^- F$ Обратимость $a^{(k)}$ равносильно обратимости $ba^{(k)}$, так как b - обратима. □

Lemma. $a \in U^- B \Leftrightarrow$ *все главные подматрицы обратимы.*

Proof. Доказываем следствие влево. Индукция по n. База: $n = 1$ - очевидно
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ * & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -xa^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ x & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n-1)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Дальше применим предположение индукции к $a^{(n-1)}$. Она раскладывается в произведение верхне- и нижнетреугольной.

В обратную сторону следует из прошлой леммы. Действительно, у обратимой верхнетреугольной матрицы все главные подматрицы обратимы, а умножение слева на обратимые нижнетреугольные не меняет их обратимость. □

Lemma. $\forall a \in GL_n(F) \exists w \in W:$ *все подматрицы в* wa *обратимы. По условию* $a^{(n-1)}$ *обратима,*

Proof. Индукция по k. Докажем, что существует перестановка $a \in GL_n(F)$ такая, что главные подматрицы размера не более $k \times k$ обратимы.
$k = 1$

$$a_{*1} = 0 \Rightarrow \exists i : a_{ij} \neq 0.$$

Меняем i- строку с первой.
Переход:

$$a = \begin{pmatrix} a^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

По индукционному предположению все главные подматрицы в $a^{(k)}$ обратимы. Все столбцы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k+1} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots a_{nk+1} & \end{pmatrix} = k{+}1$ $k{+}1$ - мерное подпространство U в ${}^{k+1}F$. А первые k строк этой матрицы линейно независимы. $X = b_1, \dots b_k, Y = b_1, \dots b_n, \quad b_i = (a_{i1}, \dots a_{ik+1})$.
X - линейно независимый, $\langle y \rangle = U, \dim U = k+1$.

$$\exists Z : X \geq X \geq Y, \text{ где } Z - \text{ базис} U..$$

$$|Z| = k+1 \Rightarrow Z = b_1, \dots b_k, b_i, i > k..$$

Переставляем i-ю строку на $k+1$ место. У получившейся матрицы первые k главных подматриц равны главным подматрицам в a, а строки $k{+}1$-й строки главной подматрицы линейно независимы. Следовательно, она независима. ☐

$wa \in B^- B$. Домножая на B, B^-, получим, что хотели. ☐

Theorem 11 (Кронокера-Капелли). *Система линейных уравнений* $Ax = b$ *Имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда* $rkA = rk(Ab)$, *где* (Ab) *- расширенная матрица.*

Proof.

$$rkA = rk(Ab) \Leftrightarrow \langle a_{*1}, \dots \rangle = \langle a_{*1}, \dots a_{*n}, b \rangle \Leftrightarrow b \in \langle a_{*1}, \dots a_{*n} \rangle \Leftrightarrow \text{ система имеет решение.}$$

☐

Лекция 1.14

Chapter 2

Начала теории групп

2.1 Лекция 15

Def 26. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если H – группа относительно операции, заданной в G.
$$H \leq G.$$

Lemma. *$H \subset B$ H - подгруппа $\Leftrightarrow \forall h, g \in H : gh, g^{-1} \in H$.*

Statement. *G, H - группы.*
$$G \times H = \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}.$$
$$(g,h) \cdot (g',h') := (g \cdot g', h \cdot h').$$

Def 27. $\varphi X \to Y, (X, *), (Y, \cdots) -$.
φ - гомоморфизм групп, если:
$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$
Изоморфизм - биективный гомоморфизм.

Lemma. *$G, H \leq F$*

1. *$G \cap H = \{1\}$*
2. *$G \cdot H = F$*
3. *$\forall g \in G, h \in H : gh = hg$*

Тогда $F \cong G \times H$.

Proof. $\varphi : G \times H \to F$
$\varphi(g,h) = g \cdot h$
$$\varphi((g,h) \cdot (g',h')) = \varphi(gg', hh') = gg'hh'.$$
$$\varphi(g,h) \cdot \varphi(g',h') = ghg'h'.$$

(1) $\Leftrightarrow \varphi$ - сюрьективно.
$$\varphi(g,h) = \varphi(g',h') \Leftrightarrow gh = g'h' \Leftrightarrow g'^{-1}g = h'h^{-1} = 1 \Rightarrow g' = g, h' = h.$$

□

2.2 Лекция 16

22.10.2019

Ex. $\ln : \mathbb{R}^*_{>0} \to (\mathbb{R}, +)$
$\ln ab = \ln a + \ln b$ - гомоморфизм.

Def 28.

$$\varphi G \to H - \text{ гомоморфизм}.$$

$$Im\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

$$Ker\varphi = \varphi{-1} = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}.$$

Lemma. *$Im\varphi$ и $Ker\varphi$ - подгруппы.*

Proof.

$$a, b \in Ker\varphi.$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 1 \Leftrightarrow ab \in Ker\varphi.$$

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} \in Ker\varphi.$$

□

Lemma.

$$\varphi(g) = h, \quad \varphi : G \to H - \text{ гомоморфизм}.$$

$$\varphi^{-1} = \underbrace{gKer\varphi}_{\text{левый смежный класс по ядру}\varphi} = \underbrace{Ker\varphi g}_{\text{правый}}.$$

Proof. $\varphi(x) = h = \varphi(g)) \Leftrightarrow \varphi\varphi^{-1} = 1 \Leftrightarrow \varphi(xy^{-1}) = 1 \Leftrightarrow xg^{-1} \in Ker\varphi \Leftrightarrow x \in Ker\varphi g$ □

Def 29. $H \leq G$
H называется нормальной подгруппой , если $gH = Hg \quad g \in G$. $(H \trianglelefteq G)$

Note. $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G \Leftrightarrow g^{-1}Hg \subseteq H \quad \forall g \in G$

Lemma. $H \leq G$

$$g_1H \cap g_2H \neq 0 \Leftrightarrow g_1H = g_2H.$$

Proof. $x \in g_1H \cap g_2H \Rightarrow x = g_1h_1 = g_2h_2, \quad h_1, h_2 \in H$. Тогда $g_1 = g_2(h_2h_1^{-1}) \Rightarrow g_1H = g_2(h_2h{-1})H$. □

Corollary. $G = \bigsqcup_{g \in X} gH$, где X - множество представителей левых смежных классов по h.
$g_1 \overset{H}{\sim} g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$

Lemma.

$$|g_1H| = |g_2H|, \quad \forall g_1, g_2 \in G, H \leq G.$$

Proof.

$$\begin{pmatrix} g_1H \to g_2H \\ x \mapsto g_2g_1^{-1}x \end{pmatrix}.$$

Обратная $y \mapsto g_1g_2^{-1}y$ □

Theorem 12 (Лагранж). *G - конечна группа. Тогда $|G| = |H||G : H|$, где $|G : H|$ - количество левых смежных классов G по H. $|G : H|$ - индекс H в G.*

Proof. Из прошлой леммы и следствия ☐

Corollary. Если $p = |G| \in \mathbb{P}$, то $\forall g \in G\backslash 1 : G = \{1, g, \dots g^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}_p$

Proof. $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \leq G = \langle g \rangle$.
$|\langle g \rangle|$ делит p и больше единицы, так как содержит единицу и $g \neq 1$. Следовательно, $|\langle g \rangle| = p$.
Докажем, что все элементы $1, g, \dots g^{p-1}$ различны. Рассмотрим $0 \leq k, l \leq p - 1$. Пусть $g^k = g^l \Rightarrow g^{k-l} = 1$.
При $k - l \neq 0$, $g^n = g^{m(k-l)+r} = g^r, \quad r < k - l \leq p - 1$. Тогда бы $\{1, g, \dots g^{k-l-1}\} = \langle g \rangle$. Из чего следует $|\langle g \rangle| < p$. Противоречие.
Рассмотрим $k \in [0, p - 1]$. $g^p = g^k \Leftrightarrow g^{p-k} = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow g^p = 1$.
Теперь проверим изоморфность. $\varphi : \mathbb{Z}_p \to G, \varphi(k) = g^k$ ☐

Def 30. Группа, порожденная одним элементом, называется циклической.

Statement. *Любая циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_n$.*

Proof. $G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Разберем два случая:

1. $g^m \neq 1 \, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow g^m \neq 1 \, \forall m \neq 0$.
$$\varphi \mathbb{Z} \to G, \quad \varphi(m) = g^m.$$
$$\varphi(m + k) = g^{m+k} = g^m g^k = \varphi(m)\varphi(k).$$

2. Пусть n - наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$.
$$\varphi : \mathbb{Z} \to G, \quad \varphi(m) = g^m \text{ сюрьективно ..}$$
$g^m = 1 \Leftrightarrow g^{nk+r} = 1 \Leftrightarrow g^r = 1 \Rightarrow r = 0$
$$Ker\varphi = \{m \mid g^m = 1\} = n\mathbb{Z}.$$

☐

Def 31. Порядок $g \in G$ - наименьшее натуральное число, такое что $g^n = 1$. $ord(g) = |\langle g \rangle|$

Statement (из теоремы Силова). *$|G| = p^m$, $p \nmid m$. Тогда $\exists H \leq G : |H| = p^k \, \forall h \in H\backslash 1$.
$ord(h \mid p^k)$, следовательно, $h^{pl} = 1 \Rightarrow (h^{p^{l-1}})^p = 1$*

2.3 Лекция 17

24.10.2019
G - группа.

Def 32. $S \subseteq G$
$\langle S \rangle$ - наименьшая подгруппа содержащая S.

Statement. $\langle S \rangle = \{S_1^{n_1} \cdot \dots S_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, S_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}\}$, *для абелевой :$s_i \neq s_j$ при $j \neq j$.*

Def 33. $s^g := g^{-1}sg$

Note. $(s^g)^h = s^{g^h}$
${}^h({}^g s) = {}^{h\,g}S$

Property.

1. $(s_1 s_2)^g = s_1^g s_2^g$
2. $(s^g)^{-1} = (s^{-1})^g$
   $s \mapsto s^g$ - *автоморфизм* G.

Def 34. $H \leq G$

$$H^G = \langle h^g \mid h \in H, g \in G\rangle \text{ – нормальное замыкание} H \text{ в } G.$$

Нормальное замыкание равно наименьшей нормальной подгруппе в G, содержащей H.
$\langle S\rangle^G$ - наименьшая нормальная подгруппа, содержащая S.
$s^g = g^{-1}sg$ - сопряженный с s при помощи g.

$$H^g = \langle h^g \mid h \in H\rangle \text{ – подгруппа, сопряженная с } H \text{ при помощи } g.$$

Def 35. $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$ – коммутатор элементов a, b.

Note. $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$

Statement. $\varphi : G \to A$ - *гомоморфизм в абелеву группу.*
$\varphi([g, h]) = 1$
Тогда $[G, G] = \langle [g, h] \mid h, g \in G\rangle \subseteq Ker\varphi$ - *коммутант* G.
$[g, h]^f = [g^f, h^f]$

Statement. $[a, b]^{-1} = [a, b]$

Def 36. Центр группы - $Center(G) = Z(G) := \{c \in G \mid cg = gc \forall g \in G$

Designation.
$G \diagup H = \{gH \mid g \in G\}$ – множество левых смежных классов.
$H \diagdown G = \{Hg \mid g \in G\}$ – множество левых смежных классов.

$H \trianglelefteq G \quad (H^g = H \forall g \in G)$

Def 37. Фактор-группа $G \diagup H$ - множество смежных классов по H с операцией $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$.

корректнсть определения.

$$g_1' \in g_1H \Rightarrow g_1'h_1.$$

$$g_2' \in g_2H \Rightarrow g_2'h_1.$$

$$g_1 \mid +g_2 \mid = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2g_2^{-1} = (g_1g_2)(g_2^{-1}h_1g_2)h_2 \in g_1g_2H.$$

□

Лекция 2.3

Def 38. $\pi_{\text{H}} : G \to G/H$, $g \mapsto gH$
π_{H} - эпиморфизм, $Ker\pi_{\text{H}} = H$

Theorem 13 (универсальное свойство факторгруппы)**.** $H \trianglelefteq G$
Для любого гомоморфизма $\varphi : G \to F$, такого что $H \leq Ker\varphi \exists! \bar{\varphi} : G/H \to F$коммутативна для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\pi_n}{\to} & G/H \\ \downarrow F & & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\ F & & F \end{array}$$

Theorem 14. $\varphi G \to F$

$$G/Ker\varphi \cong Im\varphi.$$

Proof. Заменим F на $Im\varphi$.

$$\varphi' \to Im\varphi \quad Ker\varphi' = Ker\varphi.$$

По прошлой теореме существует единственное:

$$\hat{\varphi} : \begin{array}{ccc} G/Ker\varphi & \to & Im\varphi \\ \uparrow \pi & & \uparrow \varphi' \\ G & & G \end{array}.$$

φ -сюрьективно. Следовательно, φ' - сюрьективно.

□

$gKer\varphi \in Ker\hat{\varphi} \Leftrightarrow \hat{phi}(gKer\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi(g) = 1 \Leftrightarrow gKer\varphi = Ker\varphi = 1_{G/Ker\varphi}$.Следовательно, $\hat{\varphi}$ - инъективно .

Ex. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \quad \varphi(x) = x \mod n.$
$Ker\varphi = n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2.4 Лекция 18

Ex.

$$U_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим

$$U_n(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{a \mid a_{ij} = 1, a_{ij} = 0, \forall i \neq j, j - i < k\}.$$

Мартица трансвекций:

$$t_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $U_n^{(k)}(F) = U_n^{(k)} = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j - i \geq k, \alpha \in F\rangle$ - группа.

Lemma. $U_n^{(k)} \setminus U_n^{(k-1)} \cong \underbrace{F \times \ldots \times F}_{n-k}$, $\quad F = (F, +)$. *Проверим, что есть гомоморфизм, и применим теорему о гомоморфизме.*

Proof.

$$\varphi : U_n^k \to F^{n-k}, \quad \varphi(a) = (a_{i\ k+1}, \ldots, a_{n-k\ n})^T.$$

Заметим, что φ - сюрьективна, $\varphi^{-1}(e) = U_n^{k+1}$.

$$a, b \in U_n^{(k)}, \qquad (a,b)_{i\ i+k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{i\ j+k} = b_{j\ i+k} + a_{i\ i+k}.$$

Тогда $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Следовательно, φ - гомоморфизм. □

Def 39. $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ – коммутатор.
$H, K \leq G, \quad [H, K] := \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K\rangle$ – коммутант.

Statement. $[h, k]^g = [h^g, k^g] \Rightarrow [G, G] \trianglelefteq G$.

Statement. $\varphi : G \to A$ *- гомоморфизм.*
A *- абелева* $\Longrightarrow [G, G] \subseteq Ker\varphi$.

Proof.

$$\varphi([g, h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1.$$

Тогда

$$[g, h] \in Ker\varphi, \quad \forall g, h \in G.$$

Из этого следует, что $[G, G] \subseteq Ker\varphi$. □

Corollary. $[U_n^{(k)}, U_n^{(k}] \leq U_n^{(k+1)}$

Lemma. $[U_n^{(k)}, U_n^{(m)}] = U_n^{(m+k)}$,*(если* $l \geq n$, *то* $U_n^l := e$*).*

Proof.

$$[t_{ij}(\alpha), t_{jh}(\beta)] = t_{ih}(\alpha\beta), \quad i, j, h \text{ - различны.}$$

$\forall i, h : h - i \geq m :$

$$\exists j : j - i \geq k, h - j \geq m.$$

Следовательно, любая образующая (и сама группа) содержится: $U_n^{(m+k)} \subseteq [U_n^{(m)}, U_n^{(k)}]$. В обратную сторону:

$$[xy, z] = xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = x(yzy^{-1}z^{-1}zx^{-1}z^{-1} =$$
$$x[y, z]x^{-1}xzx^{-1}z{-}1 = [y, z]^{x^{-1}} \cdot [x, z]$$

Заметим, что

$$[t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] = e, \text{ если } j \neq l, h \neq i.$$

Тогда

$$t_{ij}(\alpha) \in U_n^{(k)},\ t_{hk}(\beta) \Longrightarrow [t_{ij}(\alpha), t_{lh}(\beta)] \in U^{(m+k)_n}.$$

Посчитаем

$$\underbrace{[t_{ij}(\alpha), t_{li}(\beta)]}_{j \neq l} = [t_{li}(\beta), t_{ij}(\alpha)]^{-1} = t_{lj}(\beta\alpha)^{-1} = t_l j(-\beta\alpha).$$

Так как $U_n^{(k+m)}$ - нормальная подгруппа, то есть трансвекцию во включении 2.4 можно заменить на произведение трансвекций, то есть на любые элементы $U_n^{(k)}, U_n^{(m)}$. Доказали обратное утверждение. □

Лекция 2.5

2.5 Лекция 19

2.5.1 Поговорим о комутаторах

Lemma.

$$H = \langle X \rangle \le G = \langle y \rangle.$$

Тогда

$$H \trianglelefteq G \iff x^y \in H \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Proof. В правую сторону очевидно (по определению), обратно: нужно доказать, что $h^g \in H \quad \forall h \in H, g \in G$. Разложим $g = y_1 \cdot \ldots y_m, \quad y_i = U \cup Y^{-1}$.

Индукция по m. При $m = 0 : g = 1 \land h^1 = h \in H$.

Переход: $m \ge 1$. По ИП $h^{y_1 \cdots y_{m-1}} \in H,\ h = x_1 \ldots x_n, \quad x_i \in X \cup X^{-1}$.

$$h^y = (h^{y_1 \ldots y^{m-1}})^y_m = x_1^{y_m} \ldots x_n^{y_m}.$$

$x_i \in X \Rightarrow x_i \in H$ по условию.

$$x_i \in X^{-1} \Rightarrow \big((x_i)^{-1})^{y_m}\big) = \big((x^{-1})^{y_m}\big)^{-1} \in H.$$

□

Note. В определении нормальной подгруппы вместо h^g такде можно написать $[g, h]$, так так для $h \in H, g \in G$

$$[g, h] - ghg^{-1}h^{-1} = h^{g^{-1}}h \in H \iff h^{g^{-1}} \in H.$$

g^{-1} можно заменить на g.
Аналогично в лемме можно заменить x^y на $[x, y]$.

Property (Формулы для комутаторов)**.** *1.* $[x, y] = [y, x]^{-1}$

2. $[xy, z] =^x [y, z] \cdot [x, z]$

3. $[x, y]^z = [x^z, y^z]$

Lemma. $H, K \le G, \quad [H, K] \trianglelefteq \langle H \cup K \rangle$

$$h \in H, k \in K, x \in H \text{ (для } x \in K \text{ аналогично).}$$

$$[h, k]^x =^{x^{-1}} [h, k] = [h^{-1}h, k]^{-1} \cdot [x^{-1}, k]^{-1} \in [H, K].$$

2.5.2 Возвращаемся к матрицам

$$U_n^{(k)}(F) = U_n^{(k)} = \{a \in M_n(F) \mid a_{i\ i} = 1, a_{i\ j} \forall i \ne j, j - i < k\} = \langle t_{i\ j}(\alpha) \mid \alpha \in F, j - i \ge k\rangle.$$

Lemma. $U_n^{(k)} \trianglelefteq U_n = U_n^{(1)}$

Proof. Докажем, что $a = [t_{i\ j}(\alpha), t_{h\ l}(\beta)] \in U_n^{(k)} \quad \forall j - i \ge k.\ l > h$
Первый случай $i \ne h, i \ne l \Rightarrow a = e \in U_n^{(k)}$.
Второй случай $j = h \Rightarrow i \ne j : \quad a = t_{i\ l}(\alpha\beta), l - i \ge k + 1$. Тогда $a \in U_n^{(k+1)} \le U_n^{(k)}$.
Третий случай $j \ne h, i = l : \quad a = [t_{h\ j}(\beta), t_{i\ j}(\alpha)]^{-1} = t_{h\ j}(\beta\alpha)^{-1} = t_{h\ j}(-\beta\alpha)$. $j - h \ge k + 1 \Rightarrow t_{h\ j}(-\beta\alpha) \in U_n^{(k+1)}$. □

Lemma. *Пусть* $\preccurlyeq$ *- отношение линейного порядка на* $P = \{(i, j) \mid 1 \le i < j \le n\}$.

$$U_n(F) = \{ \prod_{(i,j))\in P} t_{ij}(\alpha_{ij}) \mid \alpha_{ij} \in F\}.$$

Note. $H \trianglelefteq G,\ x, y \in G: \quad xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow x \equiv y \mod H$

Proof. Рассмотрим элемент $h \in U_n(F)$. Докажем по индукции (по k), что

$$h \equiv \prod_{\substack{(i,j) \in P \\ 0 \leq j-i < k}} t_{ij}(\alpha_{ij}) \mod U_n^{(k)}.$$

При $k = 1$ утверждение очевидно, доказыать нечего.
Переход: $k - 1 \to k$
По предположению индукции

$$h \equiv \prod_{0<j-i<k-1} t_{ij}(\alpha_{ij}) \mod U_n^{(k-1)} = \prod_{0<j-i<k-1} t_{ij}(\alpha_{ij}) \cdot \prod_{j-i=k-1} t_{ij}(\alpha_{ij}) U_n^{(k)}$$

Так как комутатор $[u, t_{i\ i+k-1}(\alpha)] \in U_n^{(k)} \quad \forall u \in U_n$. То есть $[u, t_{i\ i+k-1}(\alpha)] \equiv 1 \mod U_n^{(k)}$. Это равосильно

$$ut_{i\ i+k-1}(\alpha) \equiv t_{i\ i+k-1} \cdot u \mod U_n^{(k)}.$$

Получаем

$$h \equiv \prod_{0<j-i<k} t_{ij}(\alpha_{ij} \mod U_n^{(k)}.$$

$\square$

Введем обозначения: w - матрица перестановки.

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bullet \end{pmatrix} \in D.$$

$$B_n = D_n U_n = U_n D_n \quad (\forall d \in D_n : U_n^d = U_n).$$

$$B_n w B_n = U_n D_n w B_n, \text{ где } U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in F, j > i,\ t_{ij}(\alpha)^w \rangle \in U_n^- \text{- нижне треугольные.}$$

$$U_w = \langle t_{ij}(\alpha) \mid j > 1, \alpha \in F, t_{ij}(\alpha)^w \in U_n \rangle.$$

Corollary. Матрица и U_n представляется в виде произведения трансвекций в любом порядке. $U_n = U_w \cdot \overline{U}_w$

Proof. $\square$

Corollary (приведенное разложение Брюа)**.** $B_n w B_{\subseteq} w B_n^- B_n$

Proof. $B_n w B_n = U_n w B_n = w U_w w^{-1} \overline{U}_w w B_n = w \underbrace{U_w^w}_{\subseteq U_n^-} \underbrace{\overline{U}_w^w B_n}_{\subseteq U_n} \subseteq w U_n^- B_n = w B_n^- B_n$ $\square$

Лекция 2.6

2.6 Лекция 20

2.6.1 Симметрическая группа

Def 40 (Перестановка). $\sigma \in S_n \iff \sigma : \{1, \dots n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots n\}$ Табличная запись перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1, & \dots & i_n \end{pmatrix}, i_j \neq i_k (j \neq k).$$

Циклическая запись перестановки:

$$\tau = (j_1, \dots j_n) \iff \tau(j_1) = j_2,\ \tau(j_2) = j_3,\ \dots, \tau(j_{n-1}) = j_n,\ \tau(j_n) = j_1, \quad \tau(i) = i, \forall i \neq j_k.$$

Def 41. $(j_1 \dots j_n)$ и $(k_1 \dots k_m)$ независимы, если $j_h \neq j_l \quad \forall h, l$.

Lemma. *Любая перестановка равна произведению независимых (композиции) циклов.*

Def 42. Циклический (цикленный) тип перестановки – набор из длин независимых циклов,в произведение которых раскладывается перестановка.

Note. В определении слово "набор" подразумевает мультимножество, то есть порядок не важен, но элементы повторятся.

Ex. $(12)(345) \in S_6$ записывают $2 + 3$.

Lemma.

$$\sigma(i_1, i_2, \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots \sigma(i_k)).$$

Следовательно, сопряжение не меняет циклический тип.

Proof. $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1}(\sigma(t_j)) = \sigma \circ (i_1 \dots i_k)\sigma(i_{l+1 \mod 'm})$, где $\mod 'm$ - почти модуль (вместо 0 будет m). □

Def 43. Отношение на группе G :

$$x \sim_c y \Leftrightarrow \exists z : x = y^z.$$

$x = y^z \wedge y = ab \Rightarrow x = (a^b)^z - a^{bz}$.
Класс эквивалентности „$\sim_c$" – класс сопряженных элементов.

Theorem 15. *Класс сопряженных элементов в S_n состоит из всех перестановок фиксированного циклического типа.*

Proof. Следует из леммы 2.6.1 □

Ex. Рассмотрим группу S_4 и перестановки циклического типа $2 + 2$:

$$(12)(34)$$
$$(13)(24)$$
$$(14)(32)$$

$\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$
Еще есть нейтральный класс e и $2,3,4$. Двумерная группа Клейна

$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

- единственная нормальная подгруппа в S_n для любого n, индекс которой более 2.

Practice. Найти S_4 / K_4. Там 6 элементов.

Statement. *$ord(ab) \mid HOK(ord(a), ord(b))$.*
Порядок перестановки равен НОКу порядков независимых циклов.

2.7 Лекция 21

2.7.1 Продолжаем возиться с перестановками. Четность.

Def 44 (Инверсия). $\sigma \in S_n$.
Инверсия в σ – пара $(i, j) : i < j \land \sigma(i) > \sigma(j)$.

Ex. Четыре инверсии:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Def 45 (Четность перестановки).

$$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}.$$

$$\sigma \mapsto \text{ количество инверсий по модулю 2.}$$

Def 46. Транспозиция – цикл длины 2.

$$\tau(i) = \tau(j),\ \tau(j) = \tau(i),\ \tau(k) = k.$$

Lemma. *Любая перестановка σ раскладывается в произведении транспозиций соседних индексов.*

$$S_n = \langle (12), (23) \dots (n-1\ n) \rangle .$$

Proof. Индукция по количеству инверсий I в $\sigma \in S_n$.
База: $I = 0$ Это $\sigma = id$.
Переход: $I > 0$. Заметим, что

$$\exists i : \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

Тогда рассмотрим $\tau = \sigma \circ (i, i-1)$.

$$\tau(i) = \sigma(i+1) < \tau(i+1) = \sigma(i).$$

Так как $\tau(k) = \sigma(k) \quad \forall k \notin \{i, i+1\}$, количество инверсий стало на одну меньше, чем количество инверсий в σ. Теперь по предположению индукции полученная перестановка раскладывается, а тогда и σ раскладывается. $\square$

Lemma. $\tau = \sigma(i\ i+1) \Rightarrow |I(\tau) - I(\sigma)| = 1$

Lemma. *Если $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \dots \cdot \tau_k, \quad \forall i : \tau_i$ - транспозиция соседних индексов, то*

$$\varepsilon(\sigma) = k \mod 2.$$

Theorem 16. *$\varepsilon : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - гомоморфизм группы.*

Proof.

$$\begin{aligned}&\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \tau_k\\ &\rho = \tau_{k+1} \cdot \ldots \tau_n \qquad \forall i : \tau_i = (j\ j+1).\\ &\sigma \cdot \rho = \tau_1 \cdot \ldots \tau_n\end{aligned}$$

Проверим требуемые свойства:
$\varepsilon = k \mod 2, \quad \varepsilon(\rho) = n - k \mod 2$
$\varepsilon(\sigma\rho) = m \mod 2 = \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho) \mod 2$
$\varepsilon(\rho^{-1}\sigma\rho) = -\varepsilon(\rho) + \varepsilon(\sigma) + \varepsilon(\rho)$
$\varepsilon((i_1, \ldots i_k)) = \varepsilon((1, \ldots k)) = k - 1 \mod 2$ □

Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. $\mathbb{Z}_n^*$ - множество обратимых элементов.

$x \in \mathbb{Z}_n$ - обратимо тогда и только тогда, когда $\gcd(x, n) = 1$.

$\varphi|\mathbb{Z}_n^*|$ - количество чисел от 1 до $n-1$ взаимно простых с n. Из теоремы Лагранжа очевидно следует, что:

$$x^{\varphi(n)} \mod n = 1.$$

Statement. *A – абелева группа. $a, b \in A, \quad ord(a) = m,\ ord(b) = n,\ h = lcm(m, n)$*

$$(ab)^k = a^k b^k = (a^m)^x (b^n)^y = 1.$$

Тогда $ord(ab) \mid k$.

Lemma. *$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\} \Rightarrow ord(ab) = lcm(ord(a), ord(b))$*

Proof.

$$(ab)^l = 1 \Rightarrow \underbrace{a^l}_{\in\langle b\rangle} = \underbrace{b^{-l}}_{\in\langle b\rangle} = 1.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}ord(a) \mid l\\ ord(b) \mid l\end{aligned}\right\} \Rightarrow lcm(ord(s), ord(b)) \mid l.$$

□

Corollary.

$$a \in A, b \in B, \quad A, B \le A \times B.$$

Тогда $ord(ab) = lcm(ord(a), ord(b))$

Corollary.

$$lcd(ord(a), ord(b)) = 1.$$

Тогда $ord(ab) = lcm(ord(a), ord(b))$

Proof. $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = h$

$$h \mid |\langle a\rangle| \wedge h \mid |\langle b\rangle| \Rightarrow h \mid gcd(ord(a), ord(b)) = 1 \Rightarrow h = 1.$$

Следовательно, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$. □

Corollary. Порядок перестановки равен наибольшему общему делителю полядков независимых циклв, в произведение которых она раскладывается.

Def 47 (Экспонента (показатель))**.** $\exp(A)$ – наименьшее натуральное число, такое что $a^n = 1 \quad \forall a \in A$.

Lemma. $\exp(A) = lcm_{a\in A}(ord(a))$

Theorem 17. *A - абелева группа.* $\exp(A) < \infty$.
Тогда $\exists a \in A : ord(a) = \exp(A)$

Proof. Разложим экспоненту на простые множители:

$$\exp A = p_1^{k_1} \cdot \ldots p_m^{k_m}, \quad \forall i \in [1, m] : p_i \in \mathbb{P}, k_i \in \mathbb{NN}.$$

Так как $\exp(A) = lcm_{x\in A}(ordx)$, существует $\forall i \in [1, m]x_i : p_i^{k_i} \mid ord(x_i)$.

$$ordx_i - p_i^{k_i} \cdot n_i = ord(x_i^{n_i}) = p_i k_i.$$

Так как порядки всех $x_i^{n_i}$ взаимно просты, то

$$ord(\prod_{i=1}^{m} x_i^{n_i}) = \prod_{i=1}^{m} = \prod p_i^{k_i} = \exp(A).$$

□

2.8 Лекция 22

Statement. *$\varphi : G \to h$- гомоморфизм. $g \in G$. Тогда $ord(\varphi(g)) \mid ordg$.*

Proof. Рассмотрим сужение $\tilde{\varphi} : \langle g\rangle \to \varphi(\langle g\rangle) = \langle \varphi(g)\rangle$.

$$\langle \varphi(g)\rangle \cong \langle g\rangle \diagup Ker\tilde{\varphi}.$$

$$ord\varphi(g) = |\langle \varphi(g)\rangle| = \frac{|\langle g\rangle|}{|Ker\tilde{\varphi}|}.$$

Note. Можно использовать одну из доказанных лемм, тогда решение будет проще.

□

Theorem 18. *$p \in \mathbb{P}$*
$(\mathbb{Z}\diagup p^k\mathbb{Z})^*$ - циклическая, если $p \neq 2$ или $k \leq 2$. Иначе $(\mathbb{Z}\diagup p^k\mathbb{Z})^* \cong C_2 \times C_{2^{k-2}}$

Proof. Обозначим $G = \mathbb{Z}\diagup p^k\mathbb{Z}$

$$|(\mathbb{Z}\diagup p^k\mathbb{Z})^*| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1).$$

Рассмотрим множество чисел вида $1 + px$. Они не делятся на p. Чтобы эти числа были меньше $|G^*|$, ограничим x.

$$H = \{1 + px \mid x \in \{0, \ldots p^{k-1} - 1\}\}.$$

Statement. *H - подгруппа.*

$$(1+px)(1+py) = 1+pz \in H.$$

Если

$$(1+px)(1+py) \equiv 1 \mod p^k.$$

$$a + apx + py + p^2xy \equiv 1 \mod p^k.$$

Следовательно , $a = 1+pz$. Обратный элемент:

$$(1+px)^{-1} = (1+pz+py) \in H.$$

$$|H| = p^{k-1}, |G \diagup H| = p-1\text{- циклическая (докажем позже).}$$

$$\exists b \in G : ord(bH) = p-1, \quad \pi(b) = bH, \pi : G \to G \diagup H.$$

То есть $p-1 \mid ordb$. Получаем $\exists l \in \mathbb{N} : ordb^l = p-1$. (или можно сказать, $p-1 \mid \exp(G)$).

По следствию из теорема Лагранжа $|H| \cdot p \cdot p^{k-1} \wedge 1+p \in H \Rightarrow (1+p)^{p^{k-1}} \equiv 1 \mod p^k$. Тогда $ord(1+p) \mid p^{k-1}$.

Осталось доказать, что

$$(1+p)^{p^{k-2}} \not\equiv 1 \mod p^k.$$

Будем доказывать по индукции. Для $k=2$ - очевидно. При $k > 2$:

$$(1+p)^{p^{k-3}} = 1 + p^n x, \quad p \nmid p.$$

По предположению индукции $1 \le n < k-1$.

$$(1+p)^{p^{k-2}} = \left((1+p)^{p^{k-3}}\right)^p = (1+p^n x)^p = 1 + p \cdot p^n + \sum_{i=2}^{p} C_p^i p^{ni} x^i \equiv 1 + p^{n+1}x + p^{n+2}y \mod p^{n+2},$$

так как

$$(1+p)^{p^{k-2}} = 1 + p^{n+1} \underbrace{(x+py)}_{\text{не делится на } p}.$$

$n+1 < k \Rightarrow p^k \nmid (1+p)^{p^{k-2}} - 1$

Remark.

$$C_p^i = \frac{p(p-1)!}{(p-1)!\ i!} \vdots p.$$

Remark. Если $p=2$, то при $i=2, n=1$

$$C_p^i = 1 \Rightarrow C_p^i p^2 \not\vdots\, p^3.$$

Поэтому для $p=2$ эти рассуждения не работыют.

Теперь разберем случай $p=2$.

$$|G| = 2^{k-1}, k \ge 3.$$

1. Любой элемент имеет порядок не более 2^{k-1}, то есть $(1+2x)^{2^{k-2}} \equiv 1 \mod 2^k$.

   Индукция по k. База $k=3$.

$$(1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2 = 1 + 4x(x+1) \equiv 1 \mod 2^3,$$

так как либо x, либо $x+1$ четное.

Переход. По индукционному преднодожению

$$(1+2x)^{2^{k-3}} = 1 + 2^{k-1}y.$$

Дальше

$$(1+2x)^{2^{k-2}} = (1+2^{k-1}y)^2 = 1 + 2^k y + 2^{2k-2}y^2 \equiv 1 \mod 2^k.$$

Доказано.

$ord_G 5 = 2^{k-2}$, то есть

$$5^{2^{k-3}} \not\equiv 1 \mod 2^k.$$

Индукция по k. База $k=3$.

$$5 \not\equiv 1 \mod 8.$$

Переход: по индукционному предположению

$$5^{2^{k-4}} \not\equiv 1 \mod 2^{k-1}.$$

$5^{2^{k-1}} = 1 + 2^n z, \quad 1 < n < k-1,\ 2 \nmid z.$

Remark. $n > 1$, так как $5 \equiv 1 \mod 2^2$

Тогда

$$\begin{array}{c} 5^{2^{k-3}} = (1+2^n \cdot z)^2 = 1 + 2 \cdot 2^n \cdot z + 2^{2n} \cdot z^2 = \\ = 1 + 2^{n+1}(z + z^2 \cdot 2^{n-1}) \not\equiv 1 \mod 2^{n+2} \end{array}.$$

□

2.9 Лекция 23

2.9.1 Теорема о гомоморфизме для колец

Note. Воспоминания R, R' – кольца с 1 (не обязательно коммутативные).

$\varphi : R \to R'$ – гомоморфизм, если

$$\begin{array}{l} \varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s) \\ \varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s) \\ \varphi(1) = 1 \end{array}.$$

$$Im\varphi = \{\varphi(r) \mid r \in R\} \text{ – подкольцо в } R'.$$

$$Ker\varphi = \{r \mid \varphi(r) = 0\} \text{ – аддитивная подгруппа в } R.$$

Def 48. I – аддитивная подгруппа в R. I называется двусторонним (правым, левым) идеалом в R тогда и только тогда, когда

$$\forall a \in R, t \in I : ar, ra \in I \quad \text{(соответственно для правого и левого } ra \in I, ar \in I).$$

Lemma. *$Ker\varphi$ – двусторонний идеал.*

Def 49. I – двусторонний идеал, R – кольцо. Аддитивная факторгруппа R/I является кольцом относительно операции $(r+I)(s+I) = rs + I$

Proof. Если $x, y \in I$: $(r+x)(s+y) = rs + \underbrace{xs + sy + xy}_{\in I} \in rs + I$ □

Ex. $2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$$4\mathbb{Z} \overset{\text{как множества}}{=} (0+2\mathbb{Z}) \cdot (0+2\mathbb{Z}) \overset{def}{=} 0+2\mathbb{Z}.$$

Designation. $\pi : R \to R/I \quad \pi(r) = r + I$

Theorem 19. *Универсальное свойство I – идеал в R. $\varphi R \to R'$, $\quad I \subseteq Ker\varphi$ $\exists!\psi : R/I \to R'$:*

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{\varphi}{\to} & R' \\ \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\ R/I & & \end{array}$$

– коммутативна. $Ker\varphi = I \Rightarrow \psi$ – инъективна. φ – сюръективна $\Rightarrow \phi$ – сюръективна.

Note. Далее считаем кольца коммутативными.

Def 50. $X \subseteq R$ – кольцо. Идеал, порожденный X – наименьший идеал, содержащих X. Он равен

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Обозначается: $\sum\limits_{x \in X} xR = \langle X \rangle_R$

$xR = (x)$ – главный идеал, порожденный x.

Ex. В $\mathbb{Z}$ любой идеал главный.

$I \trianglelefteq \mathbb{Z}$,

$$0 < r < I, \quad r \leq |s| \forall s \in I.$$

Рассмотрим $x \in I$.

$$x = rs + y, \quad 0 \leq y < r.$$

$$y = x - rs \in I.$$

Так как r – наименьший, то $y = 0$.

Ex.

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3} = 2 \cdot 2.$$

Идел, порожденный $1+\sqrt{-3}$ и 2 ($(1+\sqrt{-3})R + 2R$), не является главным идеалом.

2.9.2 Комплексные числа

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$

$$i := x + (x^2+1)\mathbb{R}[x].$$

$$i^2 + 1 = x^2 + 1 + (x^2+1)\mathbb{R}[x] = 0_{\mathbb{C}} \Longrightarrow i^2 = -1.$$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ – инъективное отображение. Отождествляем $r \in R \longleftrightarrow r + (x^2+1)\mathbb{R}[x]$ и считаем, что $\mathbb{R} = \mathbb{C}$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

$$p = (x^2+1) \cdot f + (a+bx) \in a + bx + (x^2+1)\mathbb{R}[x].$$

$$p + (x^2+1)\mathbb{R}[x] = a + bi.$$

Таким образом
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$
$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc).$$
$\overline{a+bi}=a-bi$

$\forall w,z\in\mathbb{C}:$
$$\begin{array}{c}\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}\\ \overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\\ \overline{\overline{z}}=z\end{array}.$$

$\overline{\circ}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ - автоморфизм.

$a=Rez,\quad b=Imz$

$\mathbb{C}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1,i\}$

2.10 Лекция 24

2.10.1 Окончание комплексных чисел

$$\mathbb{C}:=\mathbb{R}[x]\diagup(x^2+1).$$
$$i:=x+x(^2+1)\mathbb{R}[x]$$

Любое комплексное число представляется в виде $a+bi,\quad a,b\in\mathbb{R}$, сопряжение: $\overline{a+bi}=a-bi$. Умножение на сопряженное: $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Сложение с сопряженным: $(a+bi)+(a-bi)=2a$. Получили, что $z\cdot\overline{z},z+\overline{z}\in\mathbb{R}$.

Statement. *Существует ровно два автоморфизма на комплексных числах, оставляющие вещественные на месте.*

Proof. $f\in\mathbb{R}[x]$.
$$f(\varphi(i))=\varphi(f(i)),\quad \alpha\in\mathbb{C}$$
так как $\varphi(\alpha^2)=\varphi(\alpha)^n$

$\varphi(a\alpha^n)=a\varphi(\alpha)^n, a\in\mathbb{R}$. Если $f(x)=x^2+1,\ f(i)=0.\ f(\varphi(i))=\varphi(f(i))$, то есть корень переходит в корень. Значит, нетривиальный только один. А второй — тривиальный. □

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\overline{z}}.$$
$$Argz:=\alpha\in\mathbb{R}\diagup2\pi\mathbb{Z}.$$

Можно выразить через аргумент:
$$\begin{array}{l}a=|z|\cdot\cos\alpha\\ b=|z|\cdot\sin\alpha\\ z=|z|\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)\text{ – тригонометрическая формула}\end{array}\qquad Argz=\begin{cases}arctg\frac{b}{a}+2\pi\mathbb{Z}, & a>0\\ \pi+arcctg\frac{b}{a}+2\pi\mathbb{Z}, & a<0\\ \frac{\pi}{2}\cdot sign(b), & a=0\end{cases}.$$

Statement.
$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$$

Statement. $\varepsilon:\mathbb{R}\diagup2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*,\quad \varepsilon(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha)$ *– это гомоморфизм.*
$$Im\varepsilon=S^1:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}.$$

Так же:
$$\begin{array}{l}\varepsilon(\alpha+\beta)=\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)\\ \varepsilon(-\alpha)=\varepsilon(\alpha)^{-1}\\ \varepsilon(\beta-\alpha)=\frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon(\beta)}\\ \varepsilon(n\alpha)=\varepsilon(\alpha)^n,\quad n\in\mathbb{Z}\\ (\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha\text{ – \textit{формула Муавра}}\end{array}.$$

Лекция 2.10

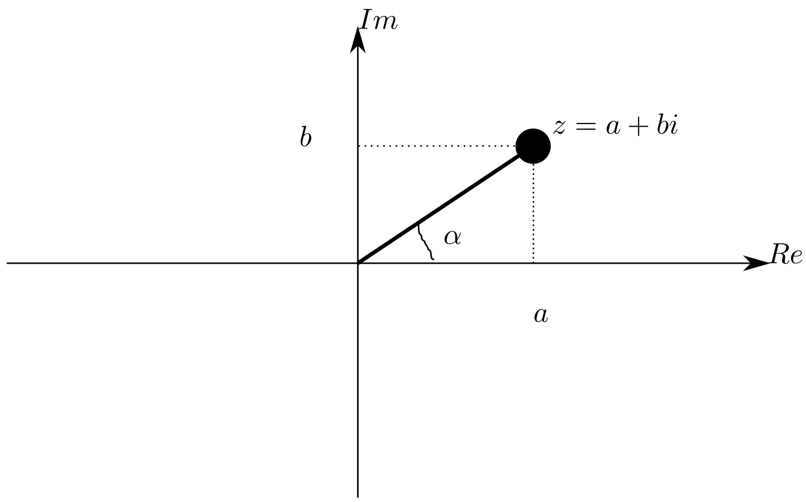


Figure 2.1: Комплексное число на плоскости

Несколько слов о комплекснопеременных функциях

Def 51. Дифференциал:
$$f(x+\delta x) = f(x) + df(\delta x) + \overline{o(\delta x)}.$$
В случае дифференцирования функции от двух переменных, x – столбец, а df – матрица 2×2.

Note. Для комплексных коэффициентов: умножение на $\lambda + \mu i \to \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

Statement. *Напишем степенные ряды для тригонометрических функций:*

$$\begin{array}{l} e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ \cos t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \\ \sin t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k = i \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}.$$

$$e^{i\alpha} = \sum_{n=2k} \frac{(i\alpha)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=2k+1} \frac{(i\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

$$\varepsilon(\alpha) = e^{i\alpha}$$

Note (Показательная форма комплексного числа).

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot Argz}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Лекция 2.10

2π – период для экспоненты.

$$e^{\alpha+2\pi i}=e^{\alpha}.$$

$$a,b\in\mathbb{R}:\ e^{a+bi}=e^{a}e^{bi}=e^{a(\cos b+i\sin a)}.$$

На языке теории групп:

$$r\in\mathbb{R}^*_{>0},\alpha\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}:(r,\alpha)\mapsto r\cdot e^{i\alpha}.$$

То есть $\mathbb{R}^*_{>0}\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$ – изоморфизм.

$$\mathbb{C}^*\cong\underbrace{\mathbb{R}^*_{>0}\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}_{\ln}\cong\mathbb{R}\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\cong\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}.$$

$$Ln:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}/3\pi\mathbb{Z}.$$

$Ln:(r,e^{i\alpha+2\pi\mathbb{Z}}=\ln r+i(\alpha+2\pi\mathbb{Z})=\ln r+i\alpha+2\pi\mathbb{Z}.$

Statement (вычисление корня n-й степени)**.** *Вычисление корня в аддитивной группе $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ – решение уравнения:*

$$\begin{array}{l}xn=0\mod 2\pi i\mathbb{Z}\\ xn=2\pi in,k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2\pi ik}{n}\mod 2\pi i\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\end{array}.$$

$z^n=1,\quad z=Lnz,$ *далее*

$$nx=0\mid 2\pi i\mathbb{Z}.$$

$$z=e^x=e^{\frac{2\pi ik}{n}}.$$

2.11 Лекция 25

$$z^n\iff z=e^{\frac{2\pi ik}{n}},k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$\Theta_n(Z)=z^k\text{ – гомеоморфизм }\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*.$$

$$\mu_n=Ker\Theta_n=\{e^{\frac{2\pi ik}{n}}\mid k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}.$$

Эти числа делят окружность на n равных частей.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mu_n$
$k+n\mathbb{Z}\mapsto e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ – изоморфизм.

Def 52. Образующие элементы μ_n называются превообразными корнями из 1.

Corollary. $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ – превообразный корень тогда и только тогда, когда $gcd(k,n)=1$.

Statement. $z^n=w=re^{i\varphi}$. *Одно из решений этого уравнения:* $\left(\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}\right)^n$.

А все решения можно записать:

$$\sqrt[n]{w}=\{\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{phi+2\pi k}{n}}\mid k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\},\quad z^n=w.$$

Theorem 20 (Основная теорема алгебры)**.** $p\in\mathbb{C}[x],\ \deg p\geq 1$
Тогда $\exists\alpha\in\mathbb{C}:p(\alpha)=0.$

Theorem 21 (Лиувилль)**.** *Любая ограниченная дифференцируемая функция $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – константа.*

2.11.1 Кольца главных идеалов

Евклидовы кольца

Def 53. Область целостности – коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Designation. R – коммутативное кольцо с 1 без делителей нуля.

Def 54. $f : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ Обладает свойствами:

1. $f(0) < f(r), \quad \forall r \in R$
2. $\forall a, b \in R, b \neq 0\ \exists c, r \in R : a = bc + r \wedge f(r) < f(b)$

Тогда R – евклидова кольцо с евклидовой нормой f.

Theorem 22. *Любой идеал евклидова кольца главный.*

Proof. Пусть $I \triangleleft R$.

$$a \in I \setminus \{0\} : f(a) \leq f(b) \quad \forall b \in I \setminus \{0\}.$$

$$b = ac + r, \quad f(r) < f(a).$$

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{ac}_{\in I} \in I.$$

Если $r \neq 0$, то $f(a) \leq f(r) < f(a)$. Противоречие. □

Note. На практике ищется с помощью алгоритма Евклида.

Statement. $b = ac + r_1$
$a = r_1 c_1 + r_2$
$r_1 = r_2 c_2 + r_3$
$\vdots$
$f(r_{i+1}) < f(r_i)$
$\vdots$
$f(r_n) \leq f(d) \quad \forall d \in I\ aR + bR = r_n R$

Statement. R *– область главных идеалов.* $a_i \in R$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i R = dR.$$

Тогда $d := \gcd(a_i)$.

Exs.

Кольцо	Норма
$\mathbb{Z}$	$\lvert \cdot \rvert$
$F[x]$, F – поле	deg
Гауссовы целые числа: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$\lvert \cdot \rvert$

Ex (не евклидово число)**.** $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$ – не евклидово кольцо главных идеалов.

2.11.2 Китайская теорема об остатках

Theorem 23. *КТО для целых чисел* $x \equiv x_1 \mod n_1$
$x \equiv x \mod n_2$
$\vdots$
$x \equiv x_m \mod n_m$
Существует единственное x *по модулю произведения* $n_1..n_m$, *удовлетворяющее данным сравнениям.*

Theorem 24. *КТО* R *– коммутативное кольцо с 1.* $I_1, \dots I_m$ *– идеалы в* R.
$I_i + I_k = R\ \forall j \neq k$. *Тогда*

$$R/_{I_1} \oplus \dots \oplus R/_{I_m} \cong R/_{I_1 \dots I_M}.$$

Remark. A, B – кольца. Декартово произведение

$$A \oplus B = A \times B.$$

с покомпонентными операциями.

$$(a_1, b_1) + \cdot(a_2, b_2) = (a_1 + \cdot a_2, b_1 + \cdot b_2).$$

Statement. *Идеалы* I, J *взаимно простые, если* $I + J = R$.

Proof. $I \cap J$ – идеал. $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ – идеал. $I \cdot J = \{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i in I, b_i \in J\}$ □

Lemma. $I \cdot J \subseteq I \cap J$ *верно всегда.*

Lemma. $I + J = R \Longrightarrow I \cdot J = I \cap J$

Proof. $I \cap J = (I \cap J) \cdot R = (I \cap J)(I + J) = \underbrace{(I \cap J) \cdot I}_{\in I \cdot J} + \underbrace{(I \cap J) \cdot J}_{\in I \cdot J} \subseteq I \cdot J$ □

2.12 Лекция 26

I, J – идеалы в R

$$I + J = R \Leftrightarrow I, J \text{ взаимно простые.}$$

Lemma. $I + J = R$. *Тогда*

$$R/_{IJ} \cong R/_I \oplus R/_J.$$

Proof.

$$\varphi : R \to R/_I \oplus R/_J.$$

$$r \mapsto (r + I, r + J).$$

$Ker\varphi \ni r \Leftrightarrow \begin{cases} r + I = I \\ r + J \end{cases} \Leftrightarrow r \in I \cap J$

$$Ker\varphi = I \cdot J.$$

$$\exists a \in I, b \in J : a + b = 1.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_1 \mod I.$$

$$r = br_1 + ar_2 \equiv r_2 \mod J.$$

То есть $\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J)$, следовательно, φ – сюрьективно.

По теореме о гомоморфизме колец

$$R/_{IJ} \cong R/_I \oplus R/_J.$$

□

Lemma. *$J, I_1, \dots I_n$ – идеалы в R.*

$$J + I_n = R \forall k \Longrightarrow J + I_1 \cdot \dots I_n = R.$$

Proof. Индукция. База для $k = 1$. Очевидно. Переход:

По предположению индукции $J + \underbrace{I_1 + \dots I_{n-1}}_{I} = R$. Нужно доказать , что $J + I \cdot I_n = R$.

$$\begin{aligned} R = J + I \cdot R = J + I(J + I_n) = \\ = J + IJ + II_n = J + II_n \end{aligned}.$$

□

Theorem 25 (Китайская теорема об остатках). *$I_1, \dots I_n$ – попарно взаимно простые идеалы, то есть $\forall j \neq k :\ I_j + I_k = R$. Тогда*

$$\frac{R}{I_1 \cdot \dots I_n} \cong \frac{R}{I} \oplus \dots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Note. Здесь дробью обозначается фактор кольцо.

Proof. Индукция по n. Так как I_k взаимно просто с $I_1 \cdot \dots I_{n-1}$

$$\frac{R}{I_1 \dots I_n} \cong \frac{R}{I_1 \cdot \dots I_{n-1}} \oplus \frac{R}{I_n}.$$

Дальше по предположению индукции получаем то, что хотим. □

Statement. $x \equiv x_k \mod I_k, \quad k = 1, \dots n$ *равносильно тому, что*

$$x \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k c_k \mod I_1 \dots I_n, \quad c_k \in \prod_{j \neq k} I_j \cap (1 + I_k).$$

Note. В целых числах:

$$x \equiv x_k \mod m_k, \quad k = 1, \dots n.$$

Чтобы найти c_k, нужно решить диофантово уравнение:

$$y \cdot m_k + \underbrace{z \cdot \prod_{j \neq k} m_j}_{= c_k} = 1.$$

Statement (применение КТО). *В $F[t]$:*

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 1, \dots n, x_i \neq x_k \ \forall i \neq k$$

равносильно

$$p \equiv y_k \mod (t - x_k).$$

$$p(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k \prod \frac{t - x_i}{x_k - x_i} \mod (t - x_i) \dots (t - x_n).$$

Лекция 2.12

2.12.1 Простые и максимальные идеалы

Все кольца будут коммутативные с единицей.

Def 55. Простой идеал $P \neq R$ кольца R называется простым, если $ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

Note. Другими словами $R \setminus P$ замкнуто относительно умножения

Ex. В $\mathbb{Z}$ идеал $n\mathbb{Z}$ – простой тогда и только тогда, когда n – простое.

Ex. В $F[t]$ идеал $f \cdot F[t]$ простой тогда и только тогда, когда f – неприводимый многочлен.

Ex. Однако в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = R$ идеал $2R$ – не простой, хотя 2 не приводимо.

$$(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}) = 4 \in 2R.$$

Докажем, что элементы $2, 1 \pm \sqrt{-3}$ неприводимы. Обозначим их за $\alpha = \beta\gamma$. Квадраты равны 4.

$$|\alpha|^2 = 4 = |\beta|^2 \cdot |\gamma|^2.$$

$$|a + b\sqrt{-3}|^2 = a^2 + 3b^2, \ a, b \in \mathbb{Z}.$$

Либо $|\beta|^2 = 1$, либо $|\gamma|^2 = 1$, то есть β или γ обратимы.

Ex. $F[x, y] = R$

$$I = xR + yR.$$

– простой.

Def 56. Максимальны идеал – максимальный собственный идеал. Что равносильно тому, что это максимальный из идеалов, не содержащих единицу.

Note. Другими словами, M – максимальный идеал, если $M \neq R$ и $M \subseteq I \subset R \Rightarrow I = M$

Theorem 26. *Любой собственный идеал содержится в каком-то максимальном.*

Proof. $J \trianglelefteq R$.

$\mathcal{X}$ – множество всех идеалов, содержащих J и не содержащих единицу.

$\mathcal{Y}$ – линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{X}$, то $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \in \mathcal{X}$

$$a, b \in \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I \Longrightarrow \exists I_1, I2 \in \mathcal{Y} : a \in I_1, b \in I_2 \wedge (I_1 \subseteq I_2 \vee I_2 \subseteq I_1),$$

так как $\mathcal{Y}$ – линейно упорядочено.

$$a, b \in I_k \ (k = 1, 2) : a + b \in I_k \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} I.$$

$$a \in \bigcup I \Longrightarrow ra \in \bigcup I, r \in R.$$

Следовательно, $\bigcup_{I \in \mathcal{Y}}$ – идеал.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \subseteq J \wedge \bigcup_{I \in \mathcal{Y}} \not\ni 1.$$

По лемме Цорна $\mathcal{X}$ содержит максимальный элемент. Пусть это M. Если $M \subset N \subset R$, $N \in \mathcal{X} \Rightarrow N = M$ ∎

Лекция 2.13

2.13 Лекция 27

2.13.1 Фактор кольцо по максимальному идеалу

Statement. *P – простой идеал в R тогда и только тогда, когда R/P – область целостности.*
$\mathfrak{M}$ – максимальный тогда и только тогда, когда R/M – поле.

Proof. $ab \in P \Leftrightarrow a \in P \vee b \in P$.
Пусть $\bar{\cdot} : R \to R/P$.
Тогда предыдущее утверждение равносильно

$$\overline{a}\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = 0 \vee \overline{b} = 0.$$

Обозначим $L(I, \mathfrak{R})$ – множество идеалов в R, содержащих I.

$$\bar{\cdot} : R \to R/P.$$

Докажем, что

$$\bar{\cdot} : L(R/\mathfrak{M}), \ I \mapsto \overline{I}.$$

– Образ этого идеала в $R/\mathfrak{M}$ При эпиморфизме идеал отображается в идеал. $\overline{a} \in \overline{I}$, где $a \in I$. $\overline{r} \in R/\mathfrak{M}$, $\overline{ra} \in \overline{I}$

Обратное: $L(0, R/\mathfrak{M}) \to L(\mathfrak{M}, R)$. Взятие полного прообраза $\overline{I} \mapsto I + \mathfrak{M} \triangleleft R$.
$L(M, R) = \{\mathfrak{M}, R\} \Leftrightarrow L(\{0\}, R/M) = \{\{0\}, R/M\} \Leftrightarrow R/M$ – поле.

$$\overline{\alpha} \in R/M \wedge \alpha \neq 0 \Leftarrow \overline{\alpha}R/M = R/M \Leftrightarrow \overline{\alpha} \text{ – обратим.}$$

□

Corollary. Любой максимальный идеал является простым.

Theorem 27. *В R любой ненулевой простой идеал является максимальным.*

Proof. Обозначим простой идеал pR и предположим, что он содержится в каком-то идеале $mR \neq R$. Тогда $p = mr \implies m \in pR \vee r \in pR$. В первом случае $mR = pR$, а втором $r = pa$, то есть $p = map \implies 1 = ma \implies mR = R$. Противоречие. □

2.13.2 Единственность разложения

R – кольцо с 1.

Def 57. $p \in R$ – простой, если pR – простой.

Def 58. $a, b \in R$ ассоциированные тогда и только тогда, когда $aR = bR$

Lemma. *R– область целостности. a, b – ассоциированные тогда и только тогда, когда $a = b\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon in \mathbb{R}^*$*

Proof. $aR = bR \Rightarrow a = b \cdot \varepsilon, b = a\delta \Rightarrow a = a\delta\varepsilon \Leftrightarrow a(1 - \delta\varepsilon) = 0 \Rightarrow \varepsilon$ обратим □

Def 59. $a \in R$ приводим, если $a = bc \wedge aR \neq bR \wedge aR \neq cR$. Иначе a называется неприводимым.

Lemma. *Простой элемент неприводим. В ОГИ неприводимый является простым.*

Proof. pR – простой идеал, следовательно,

$$ab = p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in pR \\ b \in pR \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} aR \subset pR \\ bR \subset pR \end{array}\right. .$$

Но $pR \subset aR \cap bR$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} aR = pR \\ bR = pR \end{array}\right. .$$

Получаем, что p – неприводим.

Теперь в обратную сторону.

R – область главных идеалов, p – неприводим. $ab \in pR$.

$aR + bR = cR \Longrightarrow p = cd \Longrightarrow c, d \in R^*$

Если $d \in R^* \Longrightarrow cR = pR \Longrightarrow aR \subset pR$, если $c \in R^* \Longrightarrow aR + pR = R$, домножим на $b : \underbrace{abR + pbR}_{\subset pR} = bR \Longrightarrow bR \subset pR$ □

Def 60. Для колец $\dim R$ – размерность Крулля кольца или максимальная длина цепочки строго вложенных простых идеалов.

Ex. $\dim F[x_1, \dots x_n] = n$

2.13.3 Нётеровы кольца

Def 61. R – нётерово тогда и только тогда, когда любое линейно упорядоченное множество идеалов содержит наибольший элемент.

ACC – ascending chain condition (условие обрыва возрастающих цепей)

Def 62. Артиново кольцо – аналогично, но заменить наибольший, на наименьший.

DCC – descending chain condition (условие обрыва убывающих цепей)

Lemma. *R – нётерово тогда и только тогда, когда любой идеал в R конечно порожден.*

Proof. Пусть R – нётерово, $I \lhd R$. Возьмем $a_1 \in I$.

$$a_1 R = I_1 \neq I \Longrightarrow \exists a_2 \in I \setminus R, I_2 := a_1 R + a_2 R \dots .$$

Получаем цепочку, которая на может быть бесконечной, значит она где-то оборвется и мы получим, что любой идеал порожден этим набором.

В обратную сторону.

$\mathcal{A}$ – линейно упорядоченное множество идеалов.

$$\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I = a_1 R + \dots + a_n R.$$

(так как оно конечно порожден) $\exists I_1, \dots I_n \in \mathcal{A}$, такие что $a_k \in I_k$. Так как $\mathcal{A}$ – линейно упорядочено, существует наибольший из I_k, пусть I_j.

$$a_1, \dots a_n \in I_j \Longrightarrow a_1 R + \dots + a_n R = I_j.$$

I_j – наибольший из $\mathcal{A}$ □

Theorem 28. *R – нётерово. Тогда любой элемент раскладывается в произведение неприводимых.*

2.14 Лекция 28

Отступление

p – неприводим тогда и только тогда, когда pR – максимальный среди собственных главных идеалов.

R – область целостности.

$$pR \subseteq aR \Longrightarrow p = ar \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in R^* \\ r \in R^* \end{array} \right.$$

Тогда либо $aR = R$ или $aR = pR$.

Если R не область целостности, из $p = ar$ следует, что

$$\left[\begin{array}{l} aR = pR \\ rR = pR \end{array} \right.$$

Тогда $r = px \wedge p = apx$, дальше $p(ax-1)$.

Теперь придумаем контрпример:

$$R = \mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p(ax-1))}.$$

Хотим доказать, что p неприводим и $\overline{p}R \subsetneq \overline{a}R \subsetneq R$. Профакторизуем: $\overline{p}$ – образ p в R,

$$R\big/_{(\overline{p}} \cong \mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p,p(ax-1))}.$$

Это изоморфно

$$\mathbb{Z}[a,p,x]\big/_{(p)} \cong \mathbb{Z}[a,x].$$

Statement. *$I, J \lhd R$, $\pi_I : R \to R\big/I$*

$$R\big/(I+J) \cong (R\big/I)\big/_{\pi_I(J)} \cong (R\big/J)\big/_{\pi_J(I)}.$$

Тогда $\overline{p}R$ – простой идеал, следовательно, p – неприводим. В фактор кольце $R\big/(\overline{p}) : \overline{p}R \to 0$, $\overline{a}R \to$ не 0 и не все кольцо

Ex. $\mathbb{Z}[i]\big/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]\big/(x^2+1))\big/(7) \cong (\mathbb{Z}[x]\big/(7))\big/(x^2+1) \cong (\mathbb{Z}\big/7\mathbb{Z})[x]\big/(x^2+1)$.

x^2+1 неприводим в $\mathbb{Z}\big/7\mathbb{Z}$ Значит, $\mathbb{Z}[i]\big/(7) \cong \mathbb{F}_{49}$.

Statement. *Рассмотрим кольцо R, A – R-алгебра. Тогда*

$$\forall a_1, \ldots a_n \in A : \exists! \varphi_{a_1,\ldots a_n} : R[x_1, \ldots x_n] \to A : \varphi_{a_1,\ldots a_n}(x_i) = A.$$

Это гомоморфизм подстановки ("eval").

2.14.1 Продолжение нёторвых колец

Theorem 29 (Теорема Гильберта о базисе)**.** *R – нётерово (коммутативное кольцо с единицей). Тогда $R[x]$ – нётерово.*

Note. $b \mid a \Leftrightarrow aR \subseteq bR$

Theorem 30. *R – неторова область целостности. Любой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых.*

Proof. $a \in R \setminus R^*$

1. Докажем, что существует такое p, что $p \mid a$ для неприводимого p. Если a неприводим, все отлично, иначе он представляется в виде $a = r_1 a_1$. При этом $a_1 R \neq aR$ и тогда $aR \subsetneq a_1 R \subsetneq a_2 R \subsetneq \ldots \subsetneq a_n R$. Эта цепочка точно оборвется, так как R – неторово. Причем $p = a_n$ – неприводим, иначе он не может быть последним. Значит $p \mid a$.

2. $p = p_1$ – неприводим. $a = p_1 c_1$

   Если $c_1 \in R^*$, то $p_1 c_1$ – неприводим. Иначе $p_1 c_1 == p_1 p_{22} = \ldots = p_1 p_2 \ldots p_m c_m$.

   $c_m \mid c_{m-1} \ldots \mid c_1$ и $c_1 R \subsetneq c_2 R \subsetneq \ldots c_m R$

   $$c_i = p_{i+1} c_{i+1}.$$

   Так как p_i необратим, то $c_i R \neq c_{i+1} R$. Цепочка обрывается, так как R неторово.

□

2.14.2 Факториальное кольцо

Def 63. Кольцо называется факториальным, если любой необратимый элемент единственным образом раскладывается в произведение неприводимых с точностью до ассоциированности.

Lemma. *Факториальное кольцо – область целостности.*

Proof. Если $p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = 0$, то $p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = 0$ – другое разложение.

Единственность означает: $p_1 \cdot \ldots p_m = q_1 \cdot \ldots q_n$, где p_i, q_j – необратимые $\Longrightarrow m = n \wedge \exists \sigma \in S_m : p_i$ ассоциировано с $\sigma(i)$. □

Theorem 31. *В R любой элемент раскладывается в произведение неприводимых и любой неприводимый элемент является простым. Тогда R – факториально.*

Note. Верно и обратное

Proof. Пусть $p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_m = q_1 \ldots q_n$.
Индукция по $\max(n, m)$.
База $m = n = 1$.
Переход: $\max(n, m) > 1$
Пусть $n > 1$.

$$q_1 \cdot \ldots q_n \in p_1 R \overset{p_1 R \text{ – простое}}{\Longrightarrow} p_1 \mid q_i \text{ для некоторого} i.$$

тогда $q_i \in p_i R \Longrightarrow q_i = p_i r_i$. Так как q_i неприводим, r_i – обратим, следовательно, q_i ассоциирует с p_1.

$$q_1 \ldots g_{i-1} r_1 q_{i+1} \ldots q_n = p_1 \ldots p_m.$$

По предположению индукции p_i ассоциировано с сомножителями левой части (и $m - 1 = n - 1$). □

Corollary. Область главных идеалов является факториальным кольцом.

Theorem 32. *R – факториальное кольцо. Тогда $R[x]$ – тоже факториально.*

Лекция 2.15

2.15 Лекция 29

2.15.1 Локализация кольца

$s \in R \xrightarrow{\varphi} A$, $\varphi(s)^e$ – обратный.

Если $r \cdot s = 0$, то $\varphi(r) = 0$.

Def 64. $S \subseteq R$, S – мультипликативное подмножество, если:

- $1 \in S$
- $\forall s_1, \dots s_2 \in S : s_1 s_2 \in S$

Def 65. Локализация кольца R в мультипликативном подмножестве S – кольцо $S^{-1}R$ вместе с гоморфизмом $\lambda_S : R \to S^{-1}R$, такое что:

- $\lambda_S(s)$ – обратимо в $S^{-1}R \quad \forall s \in S$
- $\forall \varphi : R \to A : \varphi(s)$ обратимо в A $\forall s \in S$ $\exists!$ гомоморфизм $\psi : S^{-1R \to A}$ такое что: $\varphi = \psi \circ \lambda_S$

$$R \xrightarrow{\lambda_S} S^{-1}R$$

Построение:

$R \times S$, введем отношение эквивалентности: $(r_1, s_1)(r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S : sr_1 s_2 = sr_2 s_1$

Докажем, что это отношение эквивалентности.

- Рефлексивность: очевидно
- Симметричность: очевидно
- Транзитивность: $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \sim (r_3, s_3) \Longrightarrow \exists s, s' inS : sr_1 s_2 = sr_2 s_1 \wedge s'r2s_3 = s'r_3 s_2$ Домножим на s, потом на s_3 первое равенство, второе на s_1.

$$s_3 s' s r_1 r_2 = s' s r_2 s1s3 = s_1 s s' r_2 s_3 = s s' r_3 s_2 s_1.$$

$$(s' s s_2) r_1 s_3 = (s' s s_2) r_3 r_1.$$

Тогда $(r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$.

$S^{-1}R := R \times S \diagup \sim$ Класс пары (r, s) обозначим $\frac{r}{s}$.

$$\lambda_S : R \to S^{-1}R : \quad \lambda_S(r) = \frac{r}{1}.$$

Сложение и умножение:

- $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$
  Несложно доказать, что это определение не зависит от выбора представителей классов.
- $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$
  Известно: $\frac{r_1'}{s_1'} = \frac{r_1}{s_1} \Leftrightarrow r_1' s_1 s = r_1 s_1' s \quad (\exists s \in S)$. Также

$$\frac{r_1'}{s_1'} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1' s_2 + r_1 s_1'}{s_1' s_2} \Longleftrightarrow \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}.$$

Тогда $(r_1 s_2 + r_2 + s_1) s_1' s_2 = (r_1' s_2 + r_2 s_1') s_1 s_2 s$. Сокращаем, получаем, что не зависит от выбора элемента класса.

$\lambda_S(x_1) + \lambda_S(r_1) = \frac{r_1}{1} + \frac{s_2}{1} = \frac{r_1+r_2}{1} = \lambda_S(r_1 + r_2)$
$\lambda_s(s) = \frac{s}{1}$ обратим: $\frac{s}{1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s} = 1$
Таким образом, $S^{-1}R$ – кольцо.
$\varphi : RroA,\ \exists\varphi(s)^{-1} \quad \forall s \in S$
$\psi : S^{-1}R \to A$
$\varphi(\frac{r}{s)}) := \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ Если $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$, то есть $\exists s'' \in S : s''r's = s''rs'$.

$$\varphi(s')\varphi(s)\varphi(r :) = \varphi(s'')\varphi(s')\varphi(r).$$

$$\varphi(s)\varphi(r')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}.$$

$$\psi(\frac{r'}{s'}) = \psi(\frac{r}{s}).$$

Построенное $R \times S/\sim$ вместе с λ_S удовлетворяет второму из определения локализации.

Note. ψ задается единственным образом.

Lemma. λ_S *– инъекция тогда и только тогда, когда в* S *нет делителей нуля.*

Proof. $\frac{r_1}{1}\frac{r_2}{1} \Leftrightarrow \exists s \in S : s(r_1 - r_2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow$ в S нет делителей нуля ☐

Ex. R – область целостности. $S = R \setminus \{0\}$
Тогда $S^{-1}R$ – поле частных.

Statement. *Любая область целостности вкладывается в поле.*

Ex. S – множество всех неделителей нуля.
$S^{-1}R$ – полное кольцо частных.

Ex. P – простой идеал. $S = R \setminus P$ – мультипликативное подмножество. $R_P := (R \setminus P)^{-1}R$ – локализация в простом идеале.

Ex. $P = 2\mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_{(2)} := R_p = \{\frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ 2 \not| m\}$

Def 66. Главная локализация – $R_Sl = \langle s\rangle^{-1}R$
$\langle s\rangle := \{1, s, s^2 \ldots\},\ s \in R$