Криворучко Денис, 19.Б10мм
Вариант - 17

Отчет по задаче 2: “Решение интегрального уравнения первого рода”

Условие задачи:

Дано уравнение

$$Az \equiv \int_0^1 K(x,s)z(s)\,ds = u(x), \quad x \in [0,1].$$

ПЕРВЫЙ СПОСОБ

Сводим уравнение к СЛАУ

$$CZ = U$$

И решаем методом регуляризации:

$$(C^*C + \alpha E)Z = C^*U$$

C и U определяются следующим образом:

1. Применяем квадратурную формулу средних прямоугольников, имеющую вид:

   $$\int_0^1 g(s)\,ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k g(s_k)$$

   к исходному уравнению.
2. Получаем:

   $$\sum_{k=1}^{n} A_k K(x,s_k)z(s_k) = u(x).$$

3. Полагая $x = s_j$, $j = 1, \dots, n$, придем к СЛАУ:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k K(s_j, s_k) z(s_k) = u(s_j),\ \ j = 1, \ldots, n$$

Откуда и получаем C и U.

ВТОРОЙ СПОСОБ

Дано уравнение

$$Az \equiv \int\limits_0^1 K(s,t) z(t)\, dt = u(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

С граничными условиями: $z(0) = z(1) = 0$

Оно сводится к виду

$$\alpha((-p(t)z'(t))' + r(t)z(t)) + \int\limits_0^1 K_1(s,t) z(t)\, dt = \int\limits_0^1 K(t,s) u_\delta(t)\, dt.$$

Где p, r — некоторые функции

$$K_1(s,t) = \int\limits_0^1 K(x,s) K(x,t)\, dx$$

Полученное уравнение сводится к виду:

$$\alpha \left(-\frac{p_{k-1/2} z_{k-1} - (p_{k-1/2} + p_{k+1/2}) z_k + p_{k+1/2} z_{k+1}}{h^2} + r_k z_k \right) + \sum_{j=0}^{n} A_j K_1(s_k, t_j) z_j =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^1 K(t, s_k) u_\delta(t)\, dt}_{u_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad z_0,\ z_n \text{ известны.}$$

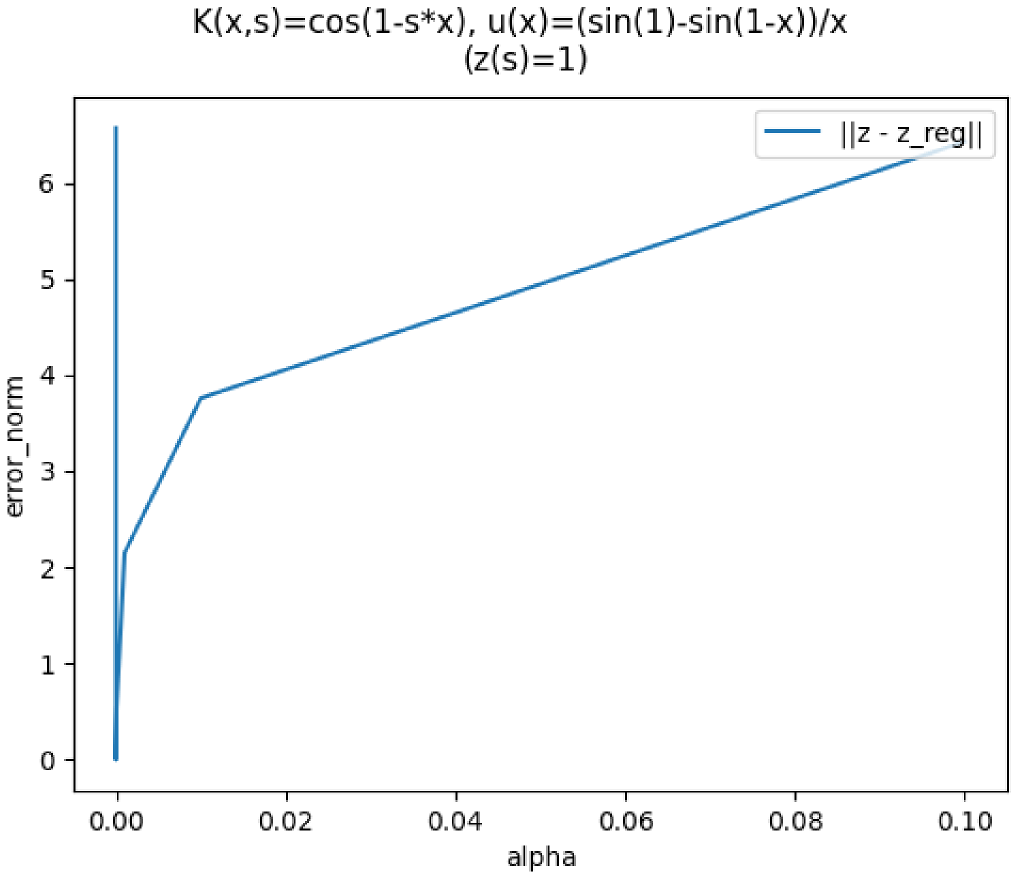
Таким образом, получаем СЛАУ относительно неизвестных $z_j,\ j = 1, \ldots, n.$ Решаем СЛАУ методом регуляризации.

Используемые для вычислений инструменты:

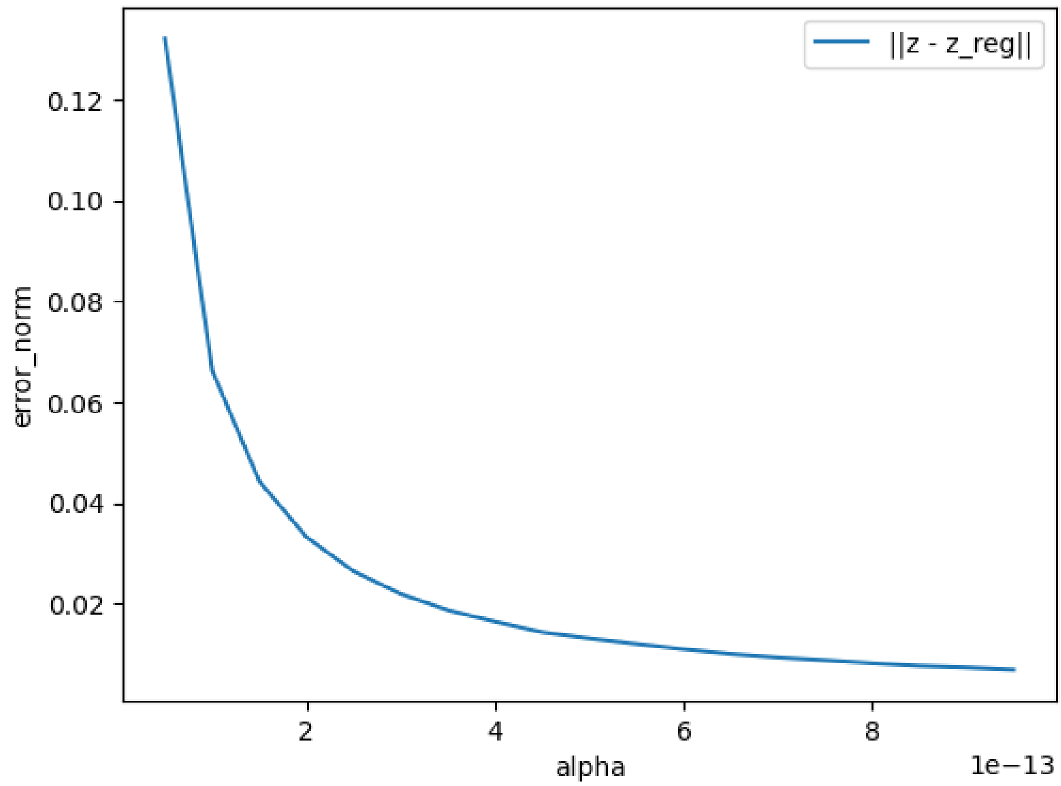
Язык Python, пакеты NumPy и SciPy.

Решение:
В варианте 17: K(x, s) = cos(1 - sx).

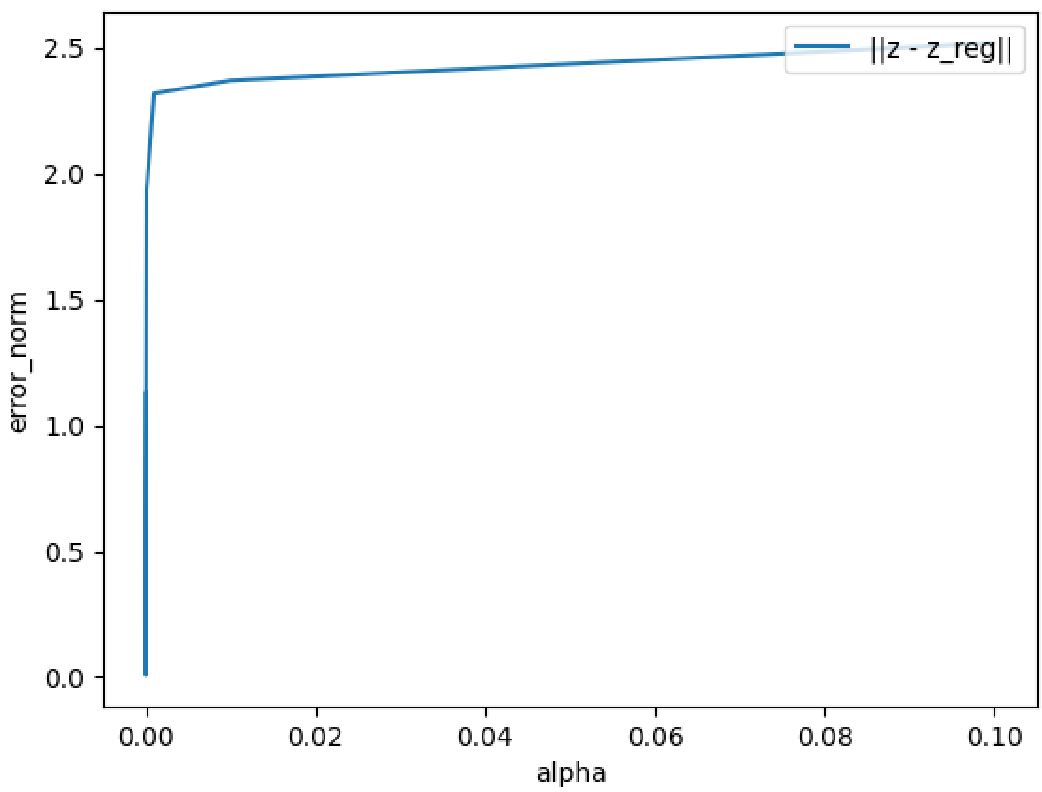
ПЕРВЫЙ СПОСОБ:
Тестирование проходило на функциях
z(s) = 1 и z(s) = s(1 - s).
Для тестирования, количество точек разбиения n выбрано 100, 500 и 1000.
Параметр регуляризации варьировался сначала в большом диапазоне ([10^-15, 10^-1]), чтобы определить, какие величины лучше рассматривать, а затем, для уточнения, на малом ([10^-15, 10^-12]).
Полученные графики для n=1000:

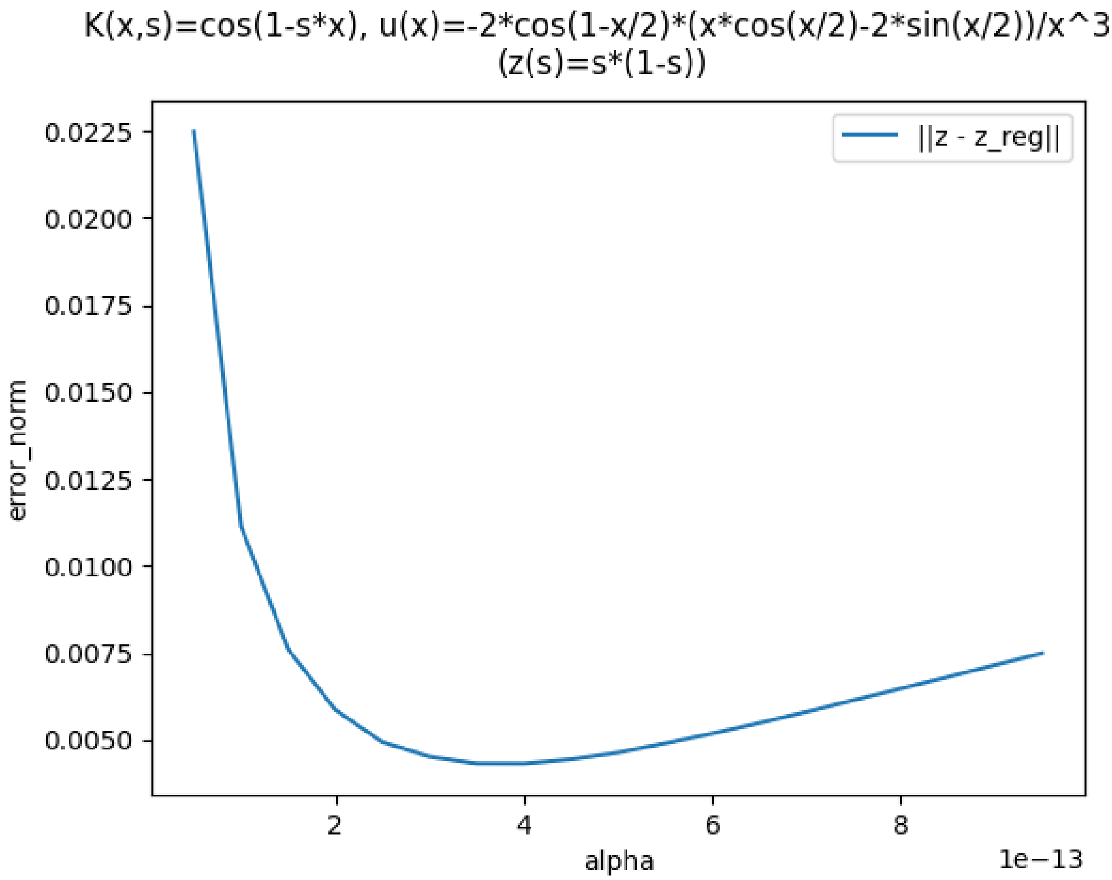


K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=(sin(1)-sin(1-x))/x
(z(s)=1)

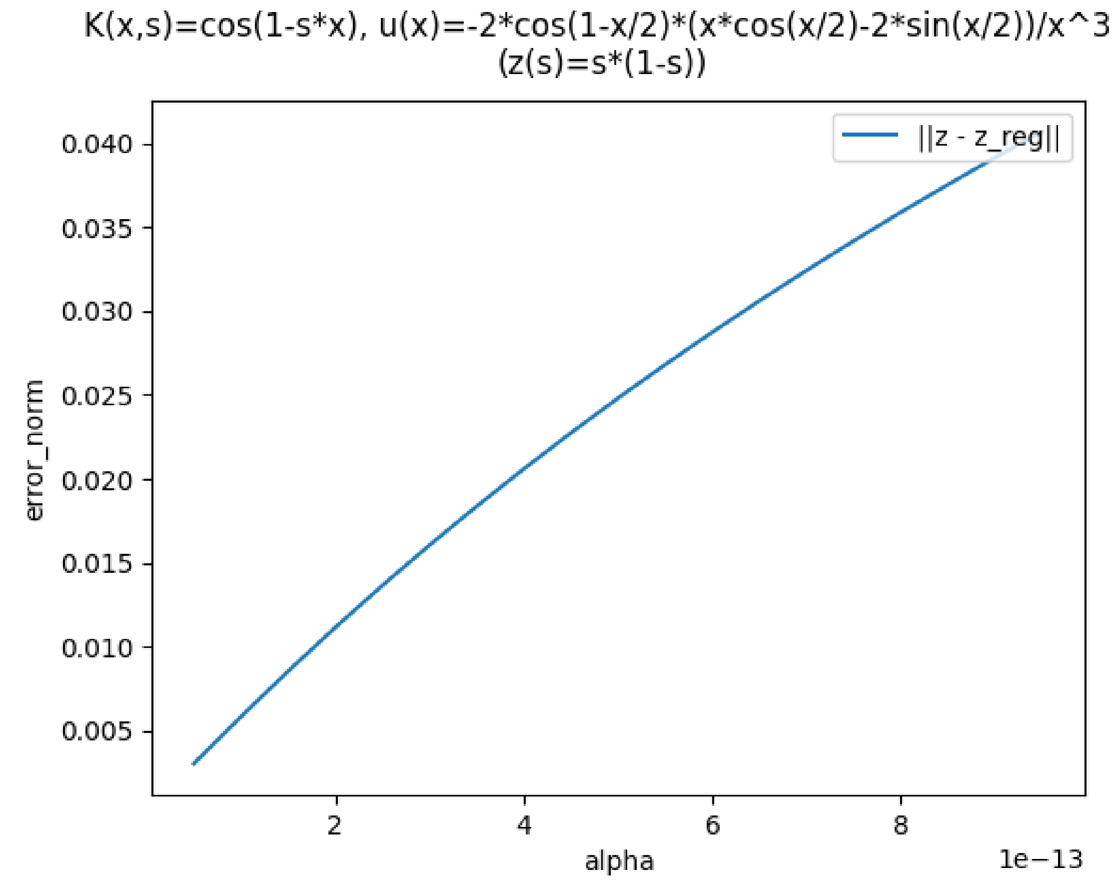


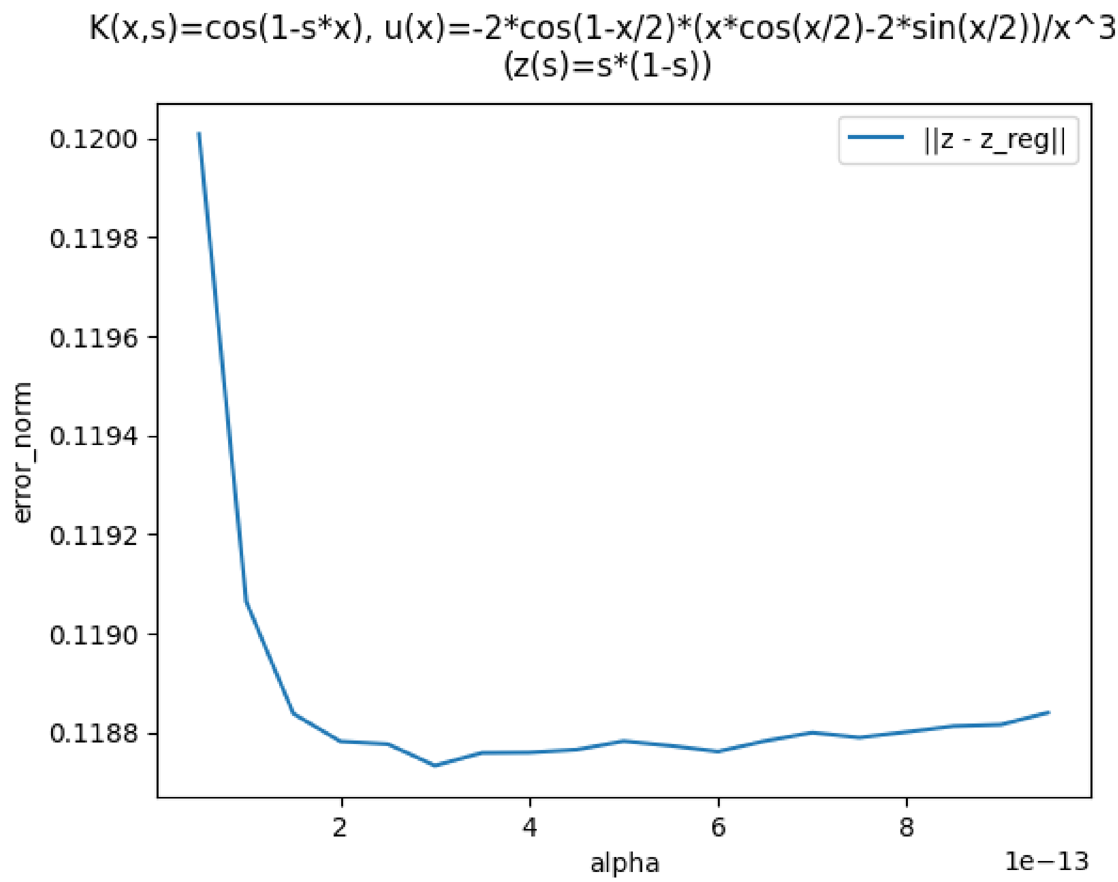
K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))

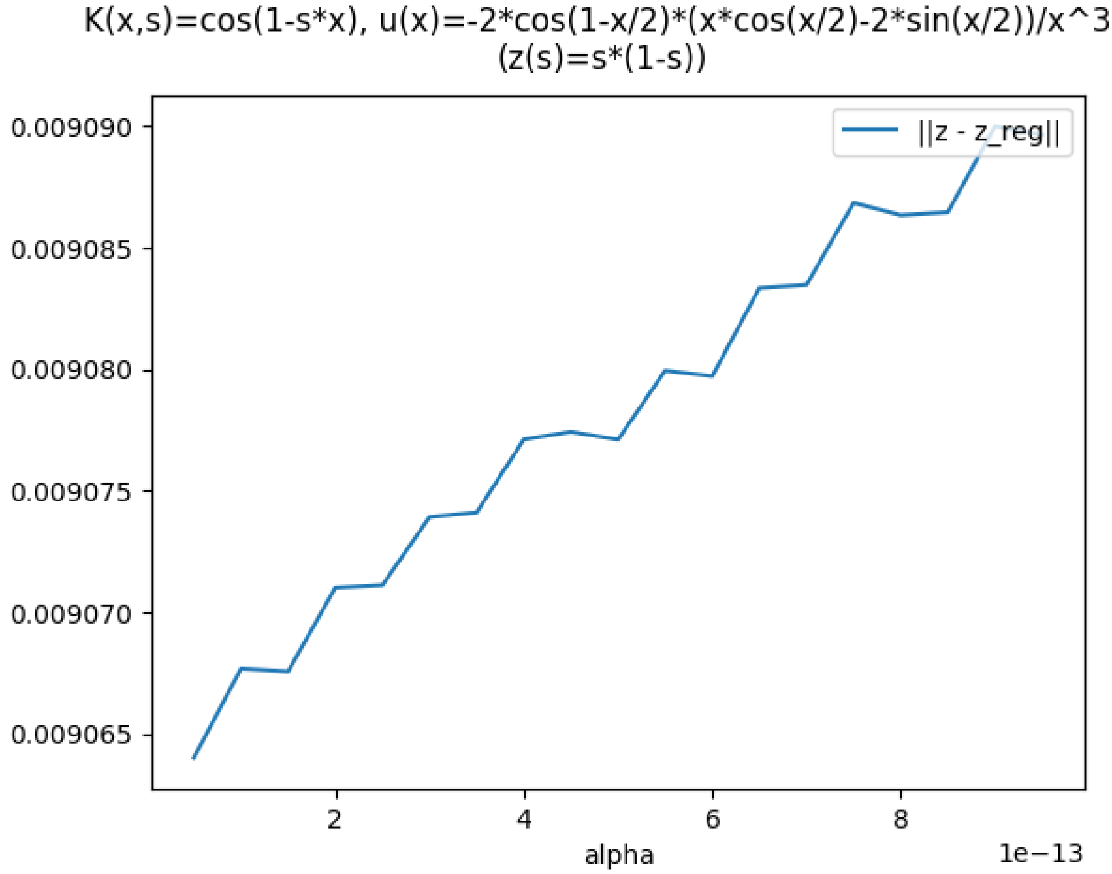


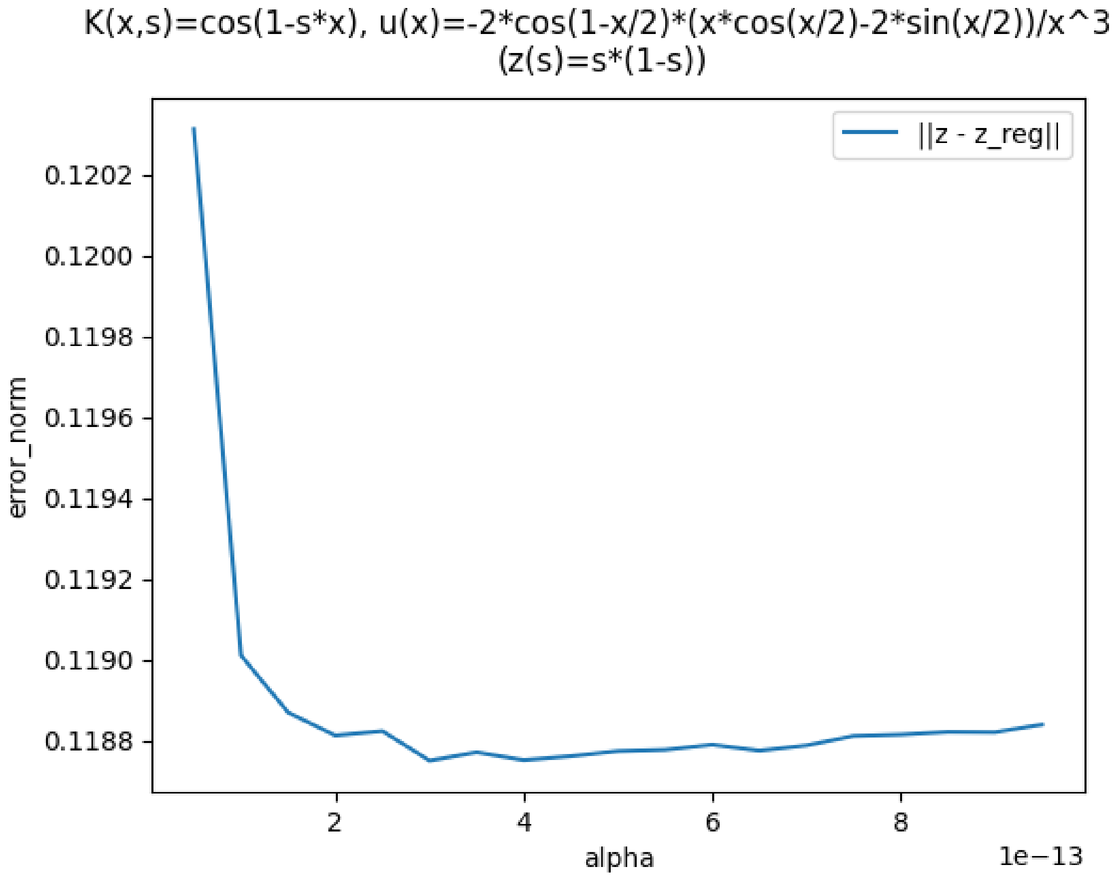


ВТОРОЙ СПОСОБ:
Тестирование проходило на функции z(s) = s(1 - s).
Для тестирования, количество точек разбиения n выбрано 500 и 1000.
В качестве функций p взяты p(t) = 1 и p(t) = 1000.
В качестве функций r взяты r(t) = 1 и r(t) = 2000.
Параметр для сведения к СЛАУ выбран 10^-15 и 10^-8.
Параметр регуляризации варьировался сначала в большом диапазоне ([10^-15, 10^-1]), чтобы определить, какие величины лучше рассматривать, а затем, для уточнения, на малом ([10^-15, 10^-12]).
Полученные графики для n=1000:

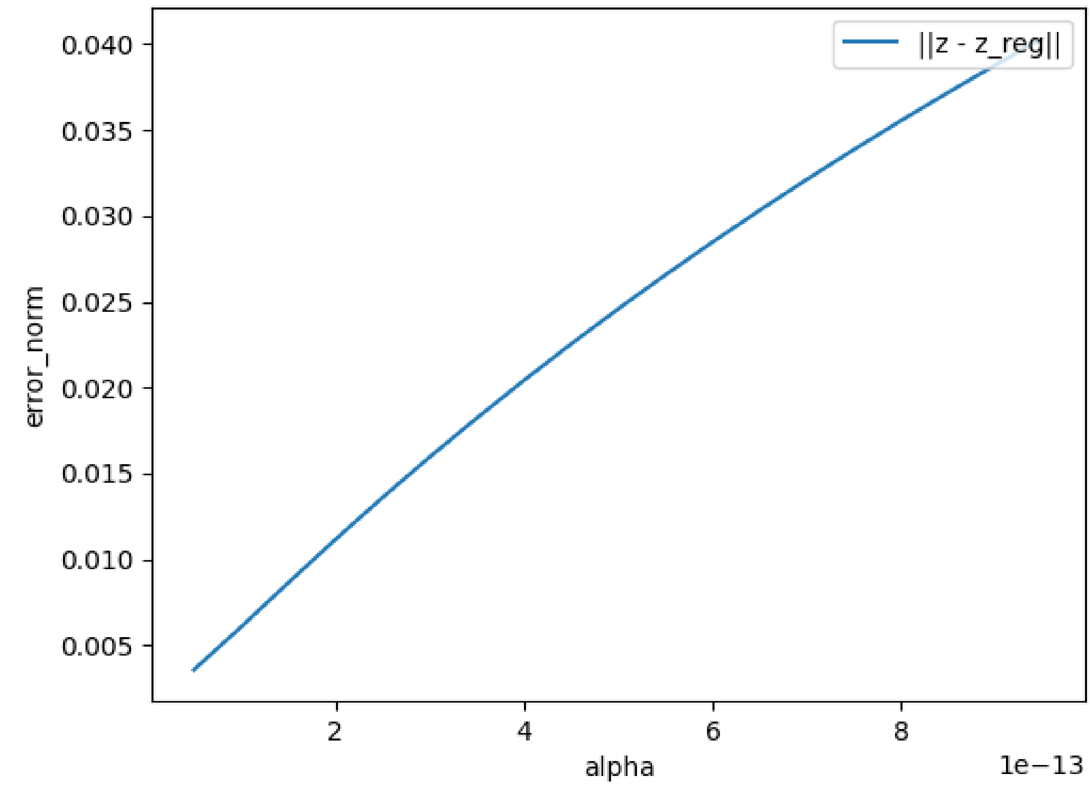

K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))
||z - z_reg||
error_norm
0.040
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
2
4
6
8
alpha
1e−13


K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))
||z - z_reg||
error_norm
0.1200
0.1198
0.1196
0.1194
0.1192
0.1190
0.1188
2
4
6
8
alpha
1e−13

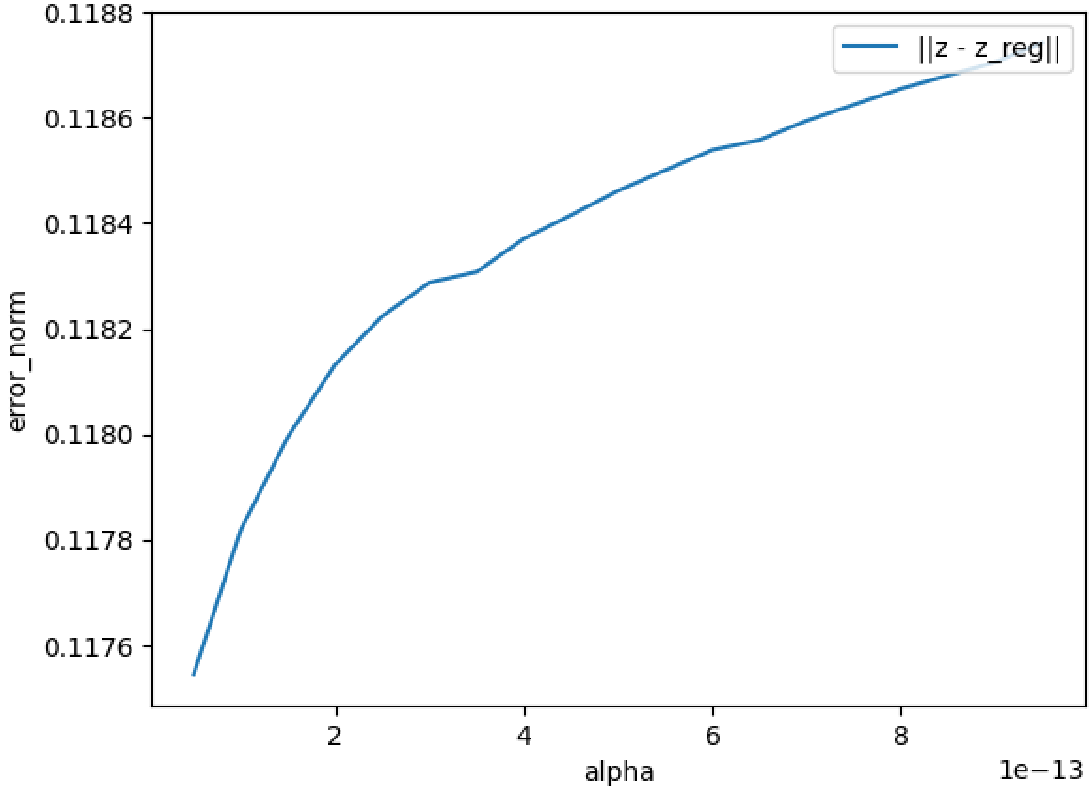

K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))
||z - z_reg||
0.009090
0.009085
0.009080
0.009075
0.009070
0.009065
2
4
6
8
alpha
1e−13


K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))
||z - z_reg||
error_norm
0.1202
0.1200
0.1198
0.1196
0.1194
0.1192
0.1190
0.1188
2
4
6
8
alpha
1e−13

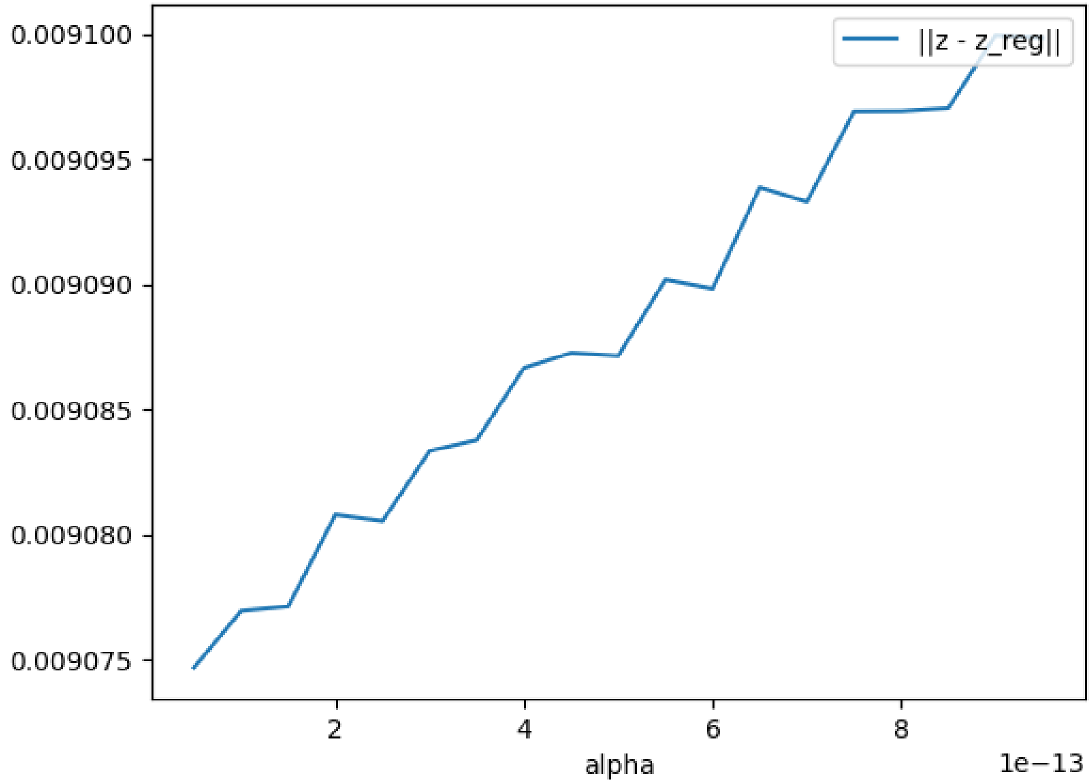
K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))



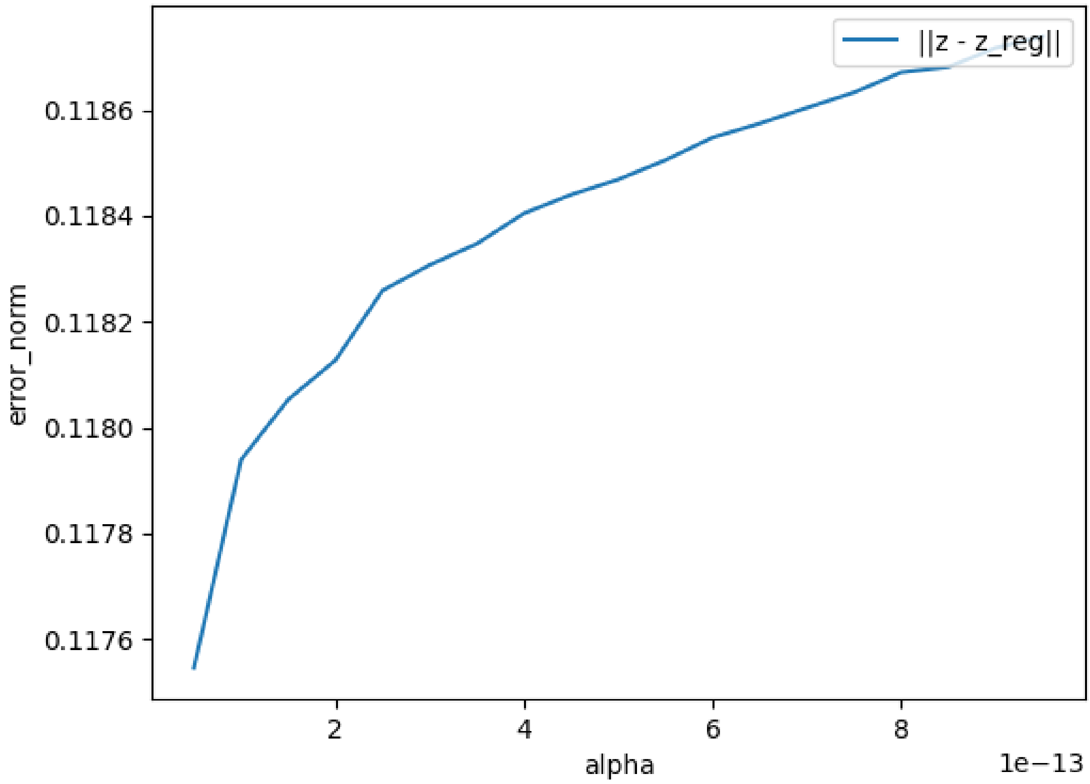
K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))



K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))



K(x,s)=cos(1-s*x), u(x)=-2*cos(1-x/2)*(x*cos(x/2)-2*sin(x/2))/x^3
(z(s)=s*(1-s))



Вывод:
ПЕРВЫЙ СПОСОБ:
При приближении параметра регуляризации к единице, в обоих экспериментах погрешность становится слишком большой (порядка 6 и 2, соответственно). Однако, при выборе малых α. Метод показывает значительно лучшие результаты. В целом же, поставленные эксперименты с заранее известным решением, показывают, что лучше брать α в диапазоне (10^-12, 10^-13).

ВТОРОЙ СПОСОБ:
Точность метода практически не зависит от выбора функций p и r. Данный способ показывает хорошую точность на любых значениях параметра регуляризации из диапазона (0, 1). Однако, поставленный эксперимент, где также известен ответ, показывает, что параметр регуляризации лучше выбирать в диапазоне
(10^-15, 10^-13).

В целом, второй способ показывает лучшую точность на выбранной задаче, однако, его можно использовать только на функциях, для которых изначально известны значения на концах отрезка интегрирования и выполнены граничные условия.

Остальные графики представлены в репозитории: