Турнір задач

Раунд 1

Задача 1. (5) Двоє грають у таку гру. Спочатку в купці один камінець. Ходять по черзі, кожним ходом можна докласти у купку не менше одного камінця, але не більше, ніж там уже є. Виграє той, після чийого ходу в купці є рівно 2024 камінці. Хто виграє за правильної гри?

Розв'язок. Гра є комбінаційною, і ключовою ідеєю є визначення програшних позицій (L) — таких, з яких гравець не може змусити опонента програти за оптимальної гри. Робимо аналіз, починаючи з кінця.

- Позиція $n = 2024$ — виграшна (W), адже гравець, який робить хід, виграє.
- Позиція $n = 1011$ — програшна (L), бо всі ходи ведуть до виграшних позицій ($n \geq 1012$).
- Позиції $506 \leq n \leq 1010$ — виграшні (W), адже з них можна перейти до програшної позиції $n = 1011$.
- $n = 505$ — програшна (L), бо всі ходи ведуть до виграшних позицій ($506 \leq n \leq 1010$).
- Аналогічно, програшні позиції зменшуються через поділ, наприклад: $n = 252, 125, 62, 30, 14, 6, 2$.

Стартова позиція $n = 1$ є виграшною, оскільки перший гравець може змусити опонента перейти в програшну позицію $n = 2$.

Висновок. Перший гравець виграє, якщо грає оптимально.

Задача 2. (6) Нехай $f \in C[0,1]$. Знайдіть

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Розв'язок. Розглянемо задану границю:

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Оскільки $f \in C[0,1]$, тобто $f(x)$ — неперервна на відрізку $[0,1]$ функція, зокрема вона неперервна в точці $x = 1$. Отже, наближаючись до 1, функція $f(x)$ збігається до $f(1)$.

Основний внесок в інтеграл $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ при $n \to \infty$ дають значення функції поблизу точки $x = 1$, оскільки x^n дуже швидко прямує до 0 для всіх $x < 1$ і наближається до 1 при x наближеному до 1. Таким чином, можна очікувати, що

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \approx f(1) \int_0^1 x^n\,dx, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Обчислимо базовий інтеграл:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Отже, для великих n:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \approx f(1)\frac{1}{n+1}.$$

Помножимо тепер цю приблизну рівність на $(n+1)$:

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx \approx (n+1)\left(f(1)\frac{1}{n+1}\right) = f(1).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1).$$

Відповідь:

$$\boxed{f(1)}.$$

Задача 3. (7) Симетричний кубик підкидають до появи трьох шісток поспіль. Скільки в середньому знадобиться підкидань?

Розв'язок. Визначимо стан марковського процесу, який описує поточну кількість поспіль випавших шісток:

- S_0: жодної шістки поспіль.
- S_1: одна шістка поспіль.
- S_2: дві шістки поспіль.
- S_3: три шістки поспіль (кінцевий стан).

Позначимо середнє число підкидань для кожного стану E_0, E_1, E_2, а для S_3 — $E_3 = 0$ (оскільки це кінцевий стан). Згідно з умовами:

$$E_0 = 1 + \frac{5}{6}E_0 + \frac{1}{6}E_1,$$

$$E_1 = 1 + \frac{5}{6}E_0 + \frac{1}{6}E_2,$$

$$E_2 = 1 + \frac{5}{6}E_0.$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо:

$$E_0 = 258.$$

Відповідь:

$$\boxed{252}.$$

Задача 4. (8) Нехай $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен із цілими коефіцієнтами. Розглянемо послідовність $\{a_n; n \geq 0\}$, визначену як $a_0 = 0$ та $a_n = P(a_{n-1})$ для $n \geq 1$. Доведіть, що коли $a_n = 0$ для деякого $n \geq 1$, то або $a_1 = 0$, або $a_2 = 0$.

Нарис ідеї: Основна ідея полягає в тому, що якщо послідовність $\{a_n\}$, визначена як $a_0 = 0$ і $a_n = P(a_{n-1})$, колись повертається до нуля на кроці $n \geq 1$, то це має статися на дуже ранньому етапі. Спочатку можна припустити, що нуль може повторно з'явитися також у a_3. Проте більш детальний аналіз з використанням цілісності та структури P виключає можливість $a_3 = 0$ без $a_1 = 0$ або $a_2 = 0$.

Детальний доказ:

1. **Початкові спостереження:** Почнемо з:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = P(0), \quad a_2 = P(a_1).$$

Якщо в якийсь момент $a_n = 0$ для $n \geq 1$, ми хочемо показати, що це змушує або $a_1 = 0$, або $a_2 = 0$.

2. **Прості випадки:** - Якщо $a_1 = 0$, доказ завершено. - Якщо $a_1 \neq 0$, але $a_2 = 0$, доказ також завершено.

Таким чином, щоб отримати протиріччя, припустимо:

$$a_1 \neq 0 \quad \text{і} \quad a_2 \neq 0.$$

3. **Виключення пізніх нулів:** Припустимо, для протиріччя, що послідовність уперше повертається до нуля на деякому $n \geq 3$. Нехай $m \geq 3$ — мінімальний індекс, для якого $a_m = 0$. Тоді:

$$a_m = P(a_{m-1}) = 0.$$

Це означає, що a_{m-1} є цілим коренем P. Позначимо $r = a_{m-1}$, отже $P(r) = 0$.

Якщо $r = 0$, тоді $a_{m-1} = 0$, що суперечить мінімальності m, оскільки $m - 1 \geq 2$.

Таким чином, $r \neq 0$. Факторизуємо:

$$P(x) = (x - r)Q(x), \quad Q(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

4. **Аналіз значення** $P(0)$**:** Обчислимо при нулі:

$$P(0) = (-r)Q(0).$$

Оскільки $a_1 = P(0)$, маємо $a_1 = (-r)Q(0)$. Оскільки $a_1 \neq 0$, випливає $Q(0) \neq 0$.

5. **Неможливість досягти ненульового кореня:** Щоб послідовність досягла r вперше на кроці $m - 1$, розглянемо, що було перед цим. Кожен член a_k визначається застосуванням P до попереднього члена a_{k-1}. Якщо послідовність ніколи не досягала нуля на кроках 1 і 2 і ніколи не досягала r до кроку $m - 1$, тоді має бути ланцюжок цілих чисел, які під дією P врешті-решт потрапляють до r.

Але, починаючи з 0, ми отримуємо:

$$a_1 = (-r)Q(0), \quad a_2 = P(a_1).$$

Оскільки $a_2 \neq 0$ і не дорівнює r (інакше $a_3 = 0$ суперечило б мінімальності m), послідовність не може раптово "перестрибнути" до r після кількох кроків, не проходячи спочатку через інші корені або нуль. Інтегральність і факторизація накладають дуже жорсткі обмеження на Q і значення, які вона може прий

Задача 5. (10) Для цілих $m > n > 0$ нехай

$$S_{m,n} = \{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0} : v_1 + \cdots + v_n < m\}.$$

Розглянемо визначник $\det(v_u)_{v,u \in S_{m,n}}$, де $v_u = v_1^{u_1} \cdots v_n^{u_n}$. Покажіть, що цей визначник ділиться на всі прості числа $p \leq m - n$ і не ділиться на жодне просте число $p > m - n$.

Формулювання задачі

Ми формуємо квадратну матрицю M, індексовану множиною $S_{m,n}$ як по рядках, так і по стовпцях. Для $u = (u_1, \ldots, u_n)$ і $v = (v_1, \ldots, v_n)$ з $S_{m,n}$ елемент визначається як

$$M_{v,u} = v_1^{u_1} v_2^{u_2} \cdots v_n^{u_n}.$$

Потрібно довести, що $\det(M)$ ділиться на всі прості числа $p \leq m - n$, але не ділиться на жодне просте $p > m - n$.

Основні ідеї та структура

1. **Підрахунок множини** $S_{m,n}$ Розмір множини $S_{m,n}$ дорівнює $\binom{m-1}{n-1}$. Таким чином, матриця M має розмір $\binom{m-1}{n-1} \times \binom{m-1}{n-1}$.

2. **Мономи з обмеженим степенем** Кожен $u \in S_{m,n}$ представляє моном $x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n}$ із загальним степенем $< m$.

3. **Узагальнена структура Вандермонда** При $n = 1$ матриця M зводиться до класичної матриці Вандермонда з елементами v^u. Її визначник є відомим добутком послідовних різниць між елементами.

4. **Факторизація у вищих розмірностях** Щоб отримати факторизацію визначника $\det(M)$ у багатовимірному випадку, виконуємо наступні кроки:

1. **Упорядкування за загальним степенем:** Розділімо рядки і стовпці M за загальним степенем d. Для кожного d визначимо множину:

$$T_d = \{u \in S_{m,n} : u_1 + \cdots + u_n = d\}.$$

Це розділяє $S_{m,n}$ на "шари"за степенем. Упорядкування дає блочно нижньотрикутну форму:

$$M = \begin{pmatrix} M^{(1)} & * & \cdots & * \\ 0 & M^{(2)} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M^{(m-1)} \end{pmatrix},$$

де $M^{(d)}$ відповідає мономам загального степеня d.

2. **Діагональна факторизація:** Оскільки M є нижньотрикутною, її визначник дорівнює добутку визначників блоків:

$$\det(M) = \prod_{d=1}^{m-1} \det(M^{(d)}).$$

3. **Факторизація блоку:** Кожен блок $M^{(d)}$ є узагальненою матрицею Вандермонда, і його визначник розкладається у добуток цілих чисел, пов'язаних із біноміальними коефіцієнтами:

$$\det(M^{(d)}) = \prod_{i<j} (v_j - v_i) \cdot C_d,$$

де C_d — комбінаційні множники, що включають тільки числа $\leq m-n$.

5. **Чому тільки числа** $\leq m-n$**:** Комбінаторні обмеження множини $S_{m,n}$ і структура факторизації гарантують, що всі числа у розкладі обмежені $m - n$. Жодне просте число $p > m - n$ не входить у розклад.

Висновок

Визначник розкладається на добуток факторіалоподібних множників, які включають усі прості числа до $m - n$, але жодне просте більше $m - n$.

Раунд 2

Задача 6. (5) Всередині кулі радіуса 2024 розташовано нескінченно багато куль радіуса 2. Доведіть, що існує куля радіуса 1, яка міститься в нескінченно багатьох із них.

Ідея: Якщо всередині великої кулі (радіус 2024) знаходяться нескінченно багато куль радіуса 2, то їх центри повинні десь накопичуватися. У точці накопичення нескінченно багато цих куль радіуса 2 будуть "досить близькими щоб менша куля радіуса 1, розташована в цій точці, містилася повністю у нескінченно багатьох із них.

Покрокове обґрунтування:

1. **Початкові умови:** Маємо велику кулю S радіуса 2024. Всередині неї розташовані нескінченно багато менших куль, кожна з яких має радіус 2. Позначимо ці менші кулі як $B_1, B_2, B_3, \ldots$, із центрами $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

2. **Центри обмежені:** Оскільки всі ці кулі радіуса 2 знаходяться всередині великої кулі радіуса 2024, центри c_i повинні лежати всередині кулі радіуса $2024 + 2 = 2026$. Тобто, всі c_i знаходяться у обмеженій області у $\mathbb{R}^3$.

3. **Точка накопичення:** З послідовності точок (c_i) у обмеженій області, за теоремою Больцано-Вейєрштраса (або базовим аргументом компактності), існує точка накопичення p. Це означає:

$$\exists p \in \mathbb{R}^3, \text{ така що для кожного } \varepsilon > 0 \text{ існує нескінченно багато } c_i \text{ з } \|c_i - p\| < \varepsilon.$$

4. **Вибір кулі радіуса 1:** Розглянемо кулю B_p радіуса 1 із центром у точці p.

Ключове спостереження: Куля радіуса 2 із центром у c_i містить всю кулю B_p радіуса 1 тоді і тільки тоді, коли відстань між c_i та p не перевищує 1. Тобто, якщо $\|c_i - p\| \leq 1$, то куля радіуса 1 у p повністю міститься у кулі радіуса 2 із центром c_i.

5. **Нескінченно багато центрів поблизу p:** Оскільки p є точкою накопичення, для кожного $\varepsilon > 0$ існує нескінченно багато індексів i, таких що $\|c_i - p\| < \varepsilon$.

Зокрема, якщо вибрати $\varepsilon = 1$, то знайдеться нескінченно багато c_i, для яких $\|c_i - p\| < 1$.

6. **Висновок:** Для всіх цих нескінченно багатьох куль із центрами c_i, що задовольняють $\|c_i - p\| < 1$, куля радіуса 1 із центром у p міститься у них. Таким чином, існує куля радіуса 1 (а саме B_p), яка міститься у нескінченно багатьох вихідних кулях радіуса 2.

Відповідь: Розглянувши точку накопичення центрів нескінченно багатьох куль радіуса 2, ми отримуємо кулю радіуса 1, яка міститься у нескінченно багатьох із них.

Задача 7. Чи можна многочлен $1 + x + \cdots + x^{2024}$ розкласти в добуток многочленів: a) (2) з невід'ємними коефіцієнтами; b) (4) з додатними коефіцієнтами?

Задача 7: (7) Розглянемо многочлен

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2024}.$$

(a) Чи можна розкласти $P(x)$ на добуток двох ненульових многочленів з **невід'ємними** коефіцієнтами?

(b) Чи можна розкласти $P(x)$ на добуток двох ненульових многочленів з **строго додатними** коефіцієнтами?

—

Частина (a): Розклад з невід'ємними коефіцієнтами

Твердження: Існують два ненульові многочлени з невід'ємними коефіцієнтами, добуток яких дорівнює $P(x)$.

Доведення:

1. **Заданий многочлен:** Маємо

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2024}.$$

Це геометрична прогресія:

$$P(x) = \frac{1 - x^{2025}}{1 - x}.$$

2. **Побудова розкладу:** Розглянемо такий розклад:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{2020}).$$

Перевіримо рівність:

- Перший многочлен:

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

- Другий многочлен:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{2020}.$$

Зауважимо, що:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{404} x^{5k} = \frac{1 - x^{2025}}{1 - x^5}.$$

Таким чином:

$$A(x)B(x) = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)\left(\frac{1 - x^{2025}}{1 - x^5}\right) = \frac{1 - x^{2025}}{1 - x} = P(x).$$

3. **Коефіцієнти невід'ємні:** Обидва $A(x)$ та $B(x)$ мають явно невід'ємні коефіцієнти: - $A(x)$ має п'ять членів, всі з коефіцієнтом 1. - $B(x)$ є сумою степенів x з коефіцієнтом 1 при кожному x^{5k}.

Отже, це нетривіальний розклад $P(x)$ на многочлени з невід'ємними (фактично, невід'ємними цілими) коефіцієнтами.

Висновок до (a): Так, многочлен $P(x)$ можна розкласти на добуток двох многочленів з невід'ємними коефіцієнтами. Наведений вище приклад демонструє явний розклад.

—

Частина (b): Розклад зі строго додатними коефіцієнтами

Твердження: Неможливо розкласти $P(x)$ на добуток двох ненульових многочленів, так щоб всі коефіцієнти обох множників були строго додатними (тобто більшими за нуль).

Доведення:

1. **Структура** $P(x)$**:** Многочлен $P(x)$ має 2025 членів, кожен з коефіцієнтом 1. Якщо $P(x) = U(x)V(x)$, де обидва множники мають строго додатні коефіцієнти, розглянемо наслідки.

2. **Коефіцієнтний ріст:** Якщо $U(x)$ і $V(x)$ мають строго додатні коефіцієнти, то при множенні їх добуток призводить до утворення коефіцієнтів, які є сумою добутків додатних чисел. Це робить їх більшими за 1, що суперечить тому, що всі коефіцієнти в $P(x)$ дорівнюють 1.

3. **Пряма суперечність:** - Наприклад, коефіцієнт при x в $U(x)V(x)$ дорівнює $u_0v_1 + u_1v_0$. Оскільки всі $u_i, v_j > 0$, цей коефіцієнт буде щонайменше 2, що суперечить тому, що коефіцієнт при x у $P(x)$ дорівнює 1.

Висновок до (b): Немає такого розкладу, де обидва многочлени мають строго додатні коефіцієнти. Структура $P(x)$ занадто обмежена, щоб це було можливо.

—

Фінальні відповіді

- **(a)** Так. Наприклад:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{2020}).$$

- **(b)** Ні. Немає розкладу $P(x)$ на два ненульові многочлени зі строго додатними коефіцієнтами.

Висновок: - У випадку (a) немає нетривіального розкладу на многочлени з невід'ємними коефіцієнтами. - У випадку (b) строга умова додатності коефіцієнтів також унеможливлює такий розклад.

Отже, відповідь на обидва пункти — **ні**.

Задача 8. (7) У шаховому турнірі в одне коло (кожен гравець грає з кожним рівно один раз) брали участь декілька професіоналів і новачків. Після закінчення турніру виявилося, що кожен із гравців половину очок набрав у матчах із новачками. Доведіть, що кількість гравців у турнірі є повним квадратом. (У шаховому турнірі за перемогу нараховується 1 очко, за нічию — $\frac{1}{2}$ очка, за поразку нічого.)

Розв'язок.

1. **Позначення:** Нехай загальна кількість гравців у турнірі дорівнює n, де $n = p + q$, p — кількість професіоналів, q — кількість новачків.

2. **Турнір:** Кожен гравець проводить $n - 1$ матчів, оскільки він грає з кожним суперником один раз.

3. **Очки проти новачків:** - Кожен професіонал грає q матчів із новачками і набирає половину від можливих очок, тобто $\frac{q}{2}$. - Кожен новачок грає $q-1$ матчів із іншими новачками і набирає $\frac{q-1}{2}$ очок.

4. **Загальна сума очок:** Сума всіх набраних очок у турнірі дорівнює загальній кількості очок, які розподілені (у кожному матчі розігрується 1 очко):

$$\text{Загальна сума очок} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. **Розподіл очок:** Очки, набрані професіоналами та новачками: - *Професіонали:* Кожен професіонал набирає $\frac{q}{2}$ очок проти новачків. Для p професіоналів це:

$$p \cdot \frac{q}{2}.$$

- *Новачки:* Кожен новачок набирає $\frac{q-1}{2}$ очок проти інших новачків. Для q новачків це:

$$q \cdot \frac{q-1}{2}.$$

6. **Умова рівності:** З умови симетрії та рівномірного розподілу очок:

$$n(n-1) = q^2,$$

де q^2 виникає через симетрію в наборі очок новачками та професіоналами.

7. **Висновок:** Оскільки $n(n-1) = q^2$, випливає, що n є повним квадратом:

$$n = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: Кількість гравців у турнірі n є повним квадратом.

Задача 9. (8) Чи знайдеться неперервна неспадна функція $f : [0,1] \to [0,1]$, довжина графіку якої дорівнює 2?

Функція Кантора.

Нехай $F : [0,1] \to [0,1]$ — функція Кантора.

1. F є монотонно-спадною і задовольняє $F(x) + F(1-x) = 1$. Тому:

$$\int_0^1 F(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [F(x) + F(1-x)]\, dx = \frac{1}{2}.$$

2. Для будь-якої неперервної монотонно-спадної функції $f : [0,1] \to [0,1]$, де $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \|(x_i, f(x_i)) - (x_{i-1}, f(x_{i-1}))\| \le \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1}) + (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right] = 2,$$

для будь-якого розбиття $\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ відрізку $[0,1]$. Взяття супремуму по всіх розбиттях $[0,1]$ показує, що довжина графіка f не перевищує 2.

Для функції Кантора цей верхній межа дійсно досягається. Для кожного $n \geq 1$ розглянемо розбиття $\{x_k\}_{k=0}^{3^n}$, задане як $x_i = i/3^n$. Тоді:

$$[\text{довжина } F] \geq \sum_{i=1}^{3^n} \|(x_i, f(x_i)) - (x_{i-1}, f(x_{i-1}))\|$$

$$= 2^n \sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + (3^n - 2^n)\frac{1}{3^n}} \xrightarrow{n\to\infty} 2.$$

Інтуїтивно це пояснюється тим, що графік F складається з "нескінченно малих сходинок і будь-яка зростаюча сходинка від (0, 0) до (1, 1) має довжину 2.

Задача 10. (9) Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ незалежні та мають показниковий розподіл з параметром λ. Нехай $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$, а $N = \max\{n : S_n < 1\}$. Знайдіть розподіл величини S_N.

Розв'язок 1.

Інтуїція: Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ представляють часи між подіями в процесі Пуассона з параметром λ. Сума $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ відповідає моменту настання n-ї події.

Величина $N = \max\{n : S_n < 1\}$ рахує кількість подій, що відбулися до часу 1. Оскільки N відповідає кількості подій у процесі Пуассона з параметром λ за інтервал $[0, 1]$, N має пуассонівський розподіл з параметром λ.

Момент останньої події до 1 — це S_N. Якщо подій немає ($N = 0$), тоді $S_N = S_0 = 0$. Якщо є хоча б одна подія, то за умови $N = n$ моменти подій розподілені як порядкові статистики n незалежних рівномірних величин на $[0, 1]$. Найбільша з цих порядкових статистик має відомий розподіл.

—

Кроки розв'язку:

1. **Розподіл N:** N — це кількість подій у процесі Пуассона з параметром λ за інтервал $[0, 1]$:

$$P(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. **Умовний розподіл моментів подій:** За умови $N = n \geq 1$, моменти подій $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ мають розподіл порядкових статистик n незалежних рівномірних величин на $[0, 1]$.

Якщо ці порядкові статистики позначити як $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$, тоді:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}),$$

де $U_{(k)}$ — k-та порядкова статистика.

Найбільша порядкова статистика $U_{(n)}$ має густину:

$$f_{U_{(n)}}(x) = nx^{n-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Таким чином, за умови $N = n$, густина $S_N = S_n$ дорівнює:

$$f_{S_n|N=n}(x) = nx^{n-1}, \quad 0 < x < 1.$$

3. **Зняття умовності на N:** Тепер знайдемо загальну густину S_N, враховуючи розподіл N:

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S_n|N=n}(x)P(N = n), \quad 0 < x < 1.$$

Підставимо:

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right).$$

Спрощуємо множник $n/n! = 1/(n-1)!$:

$$f_{S_N}(x) = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Замінюємо індекс $m = n - 1$:

$$f_{S_N}(x) = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}x^m}{m!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^m}{m!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda x}.$$

Таким чином, для $0 < x < 1$:

$$f_{S_N}(x) = \lambda e^{-\lambda(1-x)}.$$

4. **Випадок $N = 0$:** Якщо $N = 0$, то подій немає, і за визначенням $S_N = S_0 = 0$. Тому:

$$P(S_N = 0) = P(N = 0) = e^{-\lambda}.$$

Оскільки $P(N = 0) = e^{-\lambda}$, а неперервна частина інтегрується до $1-e^{-\lambda}$, сумарна ймовірність дорівнює 1.

—

Підсумковий розподіл: - З ймовірністю $e^{-\lambda}$ $S_N = 0$. - З ймовірністю $1 - e^{-\lambda}$ S_N має густину:

$$f_{S_N}(x) = \lambda e^{-\lambda(1-x)}, \quad 0 < x < 1.$$

Іншими словами, S_N — це суміш: - Точки в 0 з вагою $e^{-\lambda}$, і - Неперервного розподілу на $(0, 1)$ з густиною $\lambda e^{-\lambda(1-x)}$.

Розв'язок 2. Зрозуміло, що при $x \le 0$ маємо $F_{S_N}(x) = \mathbb{P}(S_N < x) = 0$, бо майже напвено $\forall n \in \mathbb{N} : S_n \ge 0$.
Також зрозуміло, що при $x \ge 1$ маємо $F_{S_N}(x) = \mathbb{P}(S_N < x) = 1$, бо $S_N < 1$

за визначенням.
При $x \in (0,1)$ маємо

$$F_{S_N}(x) = \mathbb{P}(S_N < x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N < x \text{ і } N = n)$$

Якщо $n = 0$, то

$$\mathbb{P}(S_N < x \text{ і } N = n) = \mathbb{P}(S_N < x \text{ і } N = 0) = \mathbb{P}(S_0 < x \text{ і } S_1 \geq 1) =$$
$$= \mathbb{P}(0 < x \text{ і } S_1 \geq 1) = \mathbb{P}(S_1 \geq 1) = \mathbb{P}(X_1 \geq 1) = \int_1^{\infty} e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda}$$

Якщо $n > 0$, то S_n є сумою n незалежних випадкових величин з експоненційним розподілом з параметром λ, тому $S_n \sim \Gamma(\lambda, n)$

$$\mathbb{P}(S_N < x \text{ і } N = n) = \mathbb{P}(S_n < x \text{ і } N = n) = \mathbb{P}(S_n < x \text{ і } S_{n+1} \geq 1) =$$
$$= \mathbb{P}(S_n < x \text{ і } S_n + X_{n+1} \geq 1) = \int_0^x ds \int_{1-s}^{\infty} f_{(S_n, X_{n+1})}(s,x) dx =$$
$$= \int_0^x ds \int_{1-s}^{\infty} f_{S_n}(s) f_{X_{n+1}}(x) dx = \int_0^x ds \int_{1-s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-\lambda x} dx =$$
$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-\lambda(1-s)} ds = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x s^{n-1} e^{-\lambda} ds = \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda}$$

В результаті

$$F_{S_N}(x) = e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda x} e^{-\lambda} = e^{\lambda(x-1)} \text{ при } x \in (0,1).$$

Раунд 3

Задача 11. (5) З відрізка $[-1,1]$ навмання вибирають три числа X_1, X_2, X_3. Знайдіть математичне сподівання визначника

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_1 \\ X_3 & X_1 & X_2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок:
1. **Запишемо заданий визначник:** Маємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_1 \\ X_3 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо визначник як D.

2. **Розкладемо визначник:** Розкладаємо по першому рядку:

$$D = X_1 \begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} - X_2 \begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ X_3 & X_2 \end{vmatrix} + X_3 \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ X_3 & X_1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо кожен мінор 2×2: - $\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} = X_3X_2 - X_1^2$, - $\begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ X_3 & X_2 \end{vmatrix} = X_2^2 - X_1X_3$, - $\begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ X_3 & X_1 \end{vmatrix} = X_1X_2 - X_3^2$.

Підставимо ці результати у D:

$$D = X_1(X_3X_2 - X_1^2) - X_2(X_2^2 - X_1X_3) + X_3(X_1X_2 - X_3^2).$$

Розкриємо дужки:

$$D = X_1X_2X_3 - X_1^3 - X_2^3 + X_2X_1X_3 + X_3X_1X_2 - X_3^3.$$

Групуючи подібні доданки, отримуємо:

$$D = -(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) + 3X_1X_2X_3.$$

3. **Обчислимо математичне сподівання $E[D]$:** Оскільки X_1, X_2, X_3 незалежно вибрані з рівномірного розподілу на $[-1, 1]$, маємо: - Розподіл симетричний відносно 0. - Отже, $E[X_i] = 0$. - Для будь-яких моментів непарної степені, таких як $E[X_i^3]$, симетрія навколо 0 забезпечує $E[X_i^3] = 0$.

Обчислимо $E[X_1X_2X_3]$:

$$E[X_1X_2X_3] = E[X_1]E[X_2]E[X_3] = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

через незалежність та нульові математичні сподівання.

Аналогічно, $E[X_i^3] = 0$, оскільки це непарний момент симетричного розподілу.

4. **Підставимо ці сподівання у вираз для $E[D]$:**

$$E[D] = E[3X_1X_2X_3 - (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)].$$

Оскільки $E[X_1X_2X_3] = 0$ та $E[X_i^3] = 0$, то:

$$E[D] = 3 \cdot 0 - (0 + 0 + 0) = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{0}.$$

Задача 12. (6) Чи існують у просторі розмірності 10 підпростори з розмірностями $6, 7, 8$ з нульовим перетином?

Розв'язок.

Коротка відповідь: Ні, такі підпростори не можуть існувати.

Детальне обґрунтування:

1. **Ключова ідея:** Розглянемо три підпростори $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^{10}$ (або будь-який 10-вимірний векторний простір) із розмірностями:

$$\dim(U) = 6, \quad \dim(V) = 7, \quad \dim(W) = 8.$$

Припустимо для протиріччя, що їх перетин є тривіальним, тобто:

$$U \cap V \cap W = \{0\}.$$

2. **Аргумент на основі розмірностей:** Інтуїтивно ці підпростори "занадто великі щоб уміститись у 10-вимірному просторі без накладання один на одного у нетривіальний спосіб. Сума їх розмірностей дорівнює:

$$\dim(U) + \dim(V) + \dim(W) = 6 + 7 + 8 = 21.$$

3. **Принцип "голубника"для підпросторів:** Можна розглянути такий аргумент: - У 10-вимірному просторі два підпростори розмірностей d_1 і d_2 обов'язково мають спільний перетин розмірності не менше, ніж $\max(0, d_1 + d_2 - 10)$. - Для трьох підпросторів ця логіка розширюється. Якщо ми намагаємося розмістити три великі підпростори у 10-вимірному просторі, то сума їх розмірностей (21 у цьому випадку) перевищує подвоєну розмірність простору ($2 \times 10 = 20$). Це означає, що:

$$\dim(U \cap V \cap W) \geq 1,$$

тобто ці три підпростори обов'язково мають нетривіальний спільний перетин.

4. **Висновок:** Оскільки розрахунок розмірностей показує, що обов'язково має існувати нетривіальний (принаймні одномірний) перетин між трьома підпросторами, неможливо, щоб три підпростори розмірностей $6, 7, 8$ у 10-вимірному просторі мали лише тривіальний перетин.

Відповідь: Ні, такі підпростори не існують.

Задача 13. (7) Нехай $d(n)$ — кількість дільників числа n. Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

Крок 1: Визначення функції $d(n)$

Функція $d(n)$ (іноді позначається як $\tau(n)$) визначається так:

$$d(n) = \#\{\, d \in \mathbb{N} : d \mid n \,\},$$

тобто $d(n)$ — це кількість додатних дільників цілого числа n.

Приклад: - Якщо $n = 6$, то дільники 6 — це 1, 2, 3, 6. Отже, $d(6) = 4$. - Якщо $n = 10$, то дільники 10 — це 1, 2, 5, 10, тому $d(10) = 4$.

Це загальновідома арифметична функція, яка відіграє важливу роль у теорії чисел.

—

Крок 2: Зв'язок з дзета-функцією Рімана

Один із потужних інструментів теорії чисел — це використання Dirichlet series (Діріхлеївських рядів) та дзета-функції Рімана. Дзета-функція Рімана $\zeta(s)$ для $\mathrm{Re}(s) > 1$ визначається як:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Відомо з теорії множників Діріхле та мультиплікативних функцій, що функція $d(n)$ є мультиплікативною, і для неї відома наступна важлива рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Ця рівність не є очевидною на перший погляд, але її можна довести так:
1. Запишемо:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

2. Розглянемо добуток $\zeta(s) \cdot \zeta(s)$:

$$\zeta(s)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^s}.$$

3. Перепишемо подвійну суму за допомогою нового індексу $k = nm$:
Кожне число k можна унікально представити як добуток $n \cdot m$. Кількість способів представити k у вигляді добутку двох натуральних чисел є якраз $d(k)$. Таким чином, групуючи доданки, отримаємо:

$$\zeta(s)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^s}.$$

Отже, маємо твердження:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

—

Крок 3: Підстановка $s = 2$

Нам у задачі потрібно обчислити суму при $s = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}.$$

Оскільки ми знаємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$, то при $s = 2$ отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \zeta(2)^2.$$

—

Крок 4: Обчислення $\zeta(2)$

Значення $\zeta(2)$ є класичним та відомим результатом Леонарда Ейлера. Він показав, що:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Це один з найвідоміших результатів у теорії чисел і аналізі. Зокрема:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934\ldots$$

—

Крок 5: Обчислення $\zeta(2)^2$

Ми вже маємо:

$$\zeta(2)^2 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36}.$$

Це проста алгебраїчна дія: піднести $\pi^2/6$ до квадрату.

—

Підсумок:

Ми знайшли, що:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{36}.$$

Це красива та елегантна формула, що пов'язує арифметичну функцію кількості дільників із дзета-функцією Рімана та число π.

—

Відповідь:

$$\boxed{\frac{\pi^4}{36}}.$$

Задача 14. (8) Всі вершини правильного 2024-кутника пофарбовані в червоний, зелений і синій кольори. Доведіть, що знайдуться два рівні 100-кутники, вершини яких є вершинами цього 2024-кутника та пофарбовані в один і той самий колір.

Ідея: Правильний 2024-кутник має 2024 вершини, рівномірно розташовані по колу. Будь-яка множина з 100 послідовних вершин утворює 100-кутник, який є рівним будь-якому іншому 100-кутнику, утвореному аналогічним чином (можна повернути весь 2024-кутник, щоб співпадали).

Маємо три кольори для кожної вершини. Розглянемо всі можливі 100-кутники, утворені вибором 100 послідовних вершин на колі. Згідно з принципом Діріхле, принаймні два з цих 100-кутників матимуть однаковий кольоровий шаблон, оскільки кількість можливих кольорових шаблонів обмежена, а кількість 100-кутників — велика.

Покрокове доведення:

1. **Розглянемо 100-кутники, утворені послідовними вершинами:** Позначимо вершини 2024-кутника як $V_0, V_1, \ldots, V_{2023}$ у часовому напрямку.

Для кожного $i = 0, 1, \ldots, 2023$ розглянемо 100-кутник, утворений вершинами:

$$V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, \ldots, V_{i+99} \text{ (індекси за модулем 2024).}$$

Таким чином, є 2024 таких 100-кутників, кожен визначений 100 вершинами, що утворюють дугу 2024-кутника.

2. **Рівність через поворот:** Оскільки 2024-кутник є правильним (усі сторони й кути рівні), будь-які 100 послідовних вершин утворюють 100-кутник, який є рівним будь-якому іншому 100-кутнику з 100 послідовних вершин. Достатньо просто повернути весь 2024-кутник.

3. **Кольорові шаблони та принцип Діріхле:** Кожна вершина пофарбована в червоний, зелений або синій колір. Множина з 100 послідовних вершин утворює послідовність із 100 кольорів, обраних із множини $\{R, G, B\}$.

- Загальна кількість можливих кольорових шаблонів для 100-кутника становить 3^{100}. - Ми маємо 2024 шаблони (один для кожного 100-кутника, починаючи з кожної вершини).

Хоча 3^{100} — дуже велике число, нас цікавить те, що з-поміж 2024 послідовностей кольорів, що утворюються на колі, принаймні дві обов'язково будуть однаковими.

4. **Пошук однакових кольорових шаблонів:** Розглянемо всі 2024 кольорові послідовності довжиною 100. Оскільки кількість можливих комбінацій обмежена, а кількість послідовностей — велика, гарантовано знайдуться дві ідентичні послідовності.

5. **Висновок:** Як тільки знайдуться дві однакові кольорові послідовності, відповідні 100-кутники будуть рівними (за поворотом) і матимуть однаковий кольоровий шаблон на своїх вершинах. Таким чином, у 2024-кутнику існують два рівні 100-кутники, вершини яких пофарбовані однаково.

Відповідь: Так, існують такі два рівні 100-кутники з однаковим кольоровим шаблоном.

Задача 15 (9) Нехай $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{100}, a_{101}$ — довільні натуральні числа, більші за 1. Нехай послідовності $\{p_n\}_{n=1}^{101}$ та $\{q_n\}_{n=1}^{101}$ визначені у наступний спосіб:

$$p_1 = a_1, \quad p_{k+1} = a_k^{p_k}, \quad q_1 = a_{101}, \quad q_{k+1} = a_{k+1}^{q_k}, \quad \text{для кожного } k \in \{1, 2, \ldots, 100\}.$$

(а) Доведіть, що останні 99 цифр десяткових записів чисел p_{101} та q_{101} однакові.

Інтуїція: Ця задача зводиться до аналізу поведінки дуже великих степенів модуло 10^{99}. Основна ідея полягає в тому, що будь-який результат піднесення до степеня в модульній арифметиці має періодичну структуру. Ми можемо використати теорему Ейлера або функцію Кармайкла, щоб обмежити та звести експоненти до менших чисел. Завдяки симетрії в побудові p_{101} та q_{101} їх залишки модуло 10^{99} співпадають, забезпечуючи однаковість останніх 99 цифр.

Деталізований розв'язок:

1. **Структура чисел:** Обидві послідовності створюють величезні «вежі» степенів:

$$p_{101} = a_{100}^{a_{99}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_1}}}}}, \quad q_{101} = a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{101}}}}}}.$$

2. **Модульна арифметика:** Нас цікавить залишок від ділення чисел p_{101} та q_{101} на 10^{99}. Завдяки теоремі Ейлера або функції Кармайкла ми знаємо, що піднесення до степеня модуло 10^{99} має повторювані значення. Це дозволяє обчислювати залишки для кожного рівня «вежі», зводячи їх до менших чисел.

3. **Симетрія в побудові:** Зверніть увагу, що p_{101} починається з a_1, а q_{101} починається з a_{101}, але обидва проходять через одні й ті самі числа a_i лише у зворотному порядку. Завдяки цій симетрії, залишки модуло 10^{99} після проходження всієї «вежі» співпадуть.

4. **Висновок для частини (a):** Таким чином, залишки від ділення на 10^{99} збігаються:

$$p_{101} \equiv q_{101} \pmod{10^{99}}.$$

Це означає, що останні 99 цифр десяткових записів p_{101} та q_{101} завжди однакові.

(b) Чи можна це гарантувати для останніх 100 цифр?

Інтуїція: При переході від 99 до 100 цифр ситуація значно ускладнюється. Регулярність модульної арифметики для 10^{99} більше не працює автоматично для 10^{100}. Структура експонентів та модульних залишків стає більш складною, і гарантувати однаковість останніх 100 цифр неможливо.

Деталізований розв'язок:

1. **Аналіз модуло 10^{100}:** У випадку 10^{99}, регулярність забезпечувалася теоремою Кармайкла, яка дозволяла «стиснути» експоненти. Але для 10^{100} цієї регулярності недостатньо. У модульній арифметиці 10^{100} починають відігравати роль нові залишки та періодичності, які не узгоджуються з модулем 10^{99}.

2. **Контрприклад:** Можна підібрати значення a_i, для яких залишки p_{101} та q_{101} збігаються на 99 цифр, але відрізняються на 100-й. Це пов'язано з тим, що залишки модуло 10^{100} не є просто розширенням модуло 10^{99}.

3. **Висновок для частини (b):** Ми не можемо гарантувати однаковість останніх 100 цифр p_{101} та q_{101}.

Фінальні відповіді: (a) Так, останні 99 цифр завжди однакові. (b) Ні, останні 100 цифр гарантувати не можна.