-101J340ціойJ340льйJ350йJ340 J300кJ340дбJ354ія"

-101J340J356пJ35

$\pm$	-суперпозиція автоморфізмів, функцій.
T_n	- кореневе однорідне дерево валентності n ;
$AutT_n$	

Вступ

станами автоморфізму ¾. Особливо цікавими є скінченностанові автоморфізми, які утворюють групу, про будову якої відомо дуже мало.[8]

Дисертація присвячена дослідженню проблеми спряженості елемен-

Теорема 3.3.3 *Нехай w- довільний елемент максимального про-*

Співставимо простору Бера над р-літерним алфавітом регулярне однокореневе дерево T

автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Аналогом циклового типу на групі підстановок є дерево циклового типу на $\overline{W}_1(X)$.

Означення 1.1.1. *Елемент a групи $\overline{W}_1$ задає розбиття множини вершин кожного рівня дерева T_p на множину орбіт дії цього елементу на T_p. Побудуємо по a дерево циклового типу D_a цього елементу. Вершинами цього дерева будуть класи еквівалент˜. .234˜i61Ю кь ope2л´,52ь т*

отже, b_1

Означимо на множині функцій N ! N бінарне відношення 4.

Множення автоморфізмів відбувається наступним чином:

$$(a;b) \pm (c;d) = (a \pm c; b \pm d)$$

$$(a;b) \pm ((c;d) \pm \sigma) = (a \pm c; b \pm d) \pm \sigma$$

$$((a;b) \pm \sigma) \pm (c;d) = (a \pm d; b \pm c) \pm \sigma$$

$$((a;b) \pm \sigma) \pm ((c;d) \pm \sigma) = (a \pm d; b \pm c)$$

Також зручно записувати обернений до автоморфізму дерева:

$$(a;b)^{i\,1} = (a^{i\,1}; b^{i\,1})$$

$$((a;b) \pm \sigma)^{i\,1} = \sigma \pm (a^{i\,1}; b^{i\,1}) = (b^{i\,1}; a^{i\,1}) \pm \sigma$$

$$\text{„}_{2k+1}\text{k+1}$$

Приклад 1.1.6. *Автоморфізм, що задається функцією* $f(x) = 5x + 1$

Для автоморфізму $2\ Aut T_p$ циклами n-того рівня назвемо орбіти дії a на n-тий рівень T_p

Доведення. Дійсно $\frac{1}{2}_{a;n}(x;y$

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм необхідно, що б ця функція пару кінців з

$a^{((}$ *Доведення.*

$$(ax + b) \pm (\frac{1}{a}(x\ _{i}\ b)) = {}^{1}$$

добуток лінійних функцій є лінійною функцією:

$$(ax + b) \pm (cx + d) = c(ax + b) + d = cax + (cb + d);$$

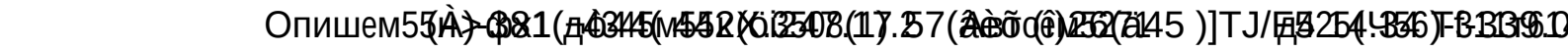
Для автоморфізмів $a; b; c; d:::$ з $AutT_2$ мають місце наступні співвідношення:

$$a \pm b = a \copyright [b]a$$

Означення 2.1.2. *Якщо стан автоморфізму діє на піддереві дерева T_2, то портрет цього стану є аналогічним піддеревом портрету цього автоморфізму.*

Згідно з цім означенням автоморфізм є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли множина різних портретів двійкових піддерев дерева T_2 є скінченною.

2.2 Автоматні перетворення

Опишем5 

для автоморфізму $\varphi_{i\,1}$

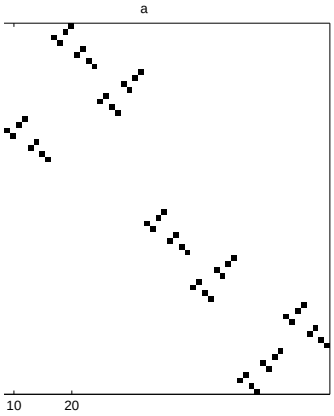
та тотожнього автоморфізму

Для *adding machine* маємо орієнтований граф вигляду:

Для тотожнього автоморфізму *id*

Тип автоморфізму відповідає цикловому типу елемента в групі під-

$$\ldots\delta(x_2 - x_1 - 1 + \kappa) = \ldots\delta(x_2 - x_1 - 0) :$$



де під крапками розуміються 1-ці.

має вигляд:

$$\psi_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & id_{(6)} \\ \psi_{(6)} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогічно для $\psi_{(6)}$, $\psi_{(5)}$ і т.д.

Приклад чотирьох автоморфізмів дерева $(T_2)_5$:

Обчислення матриці автоморфізма $f(x) = x - 1$, як оберненого до автоморфізму $f(x) = x + 1$:

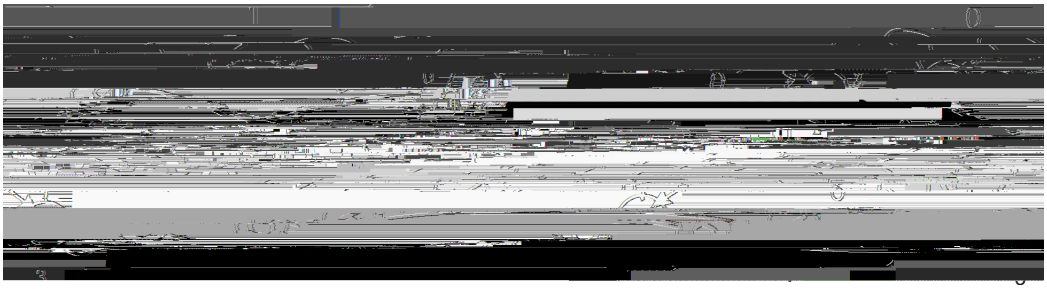
для автоморфізму

2.5 Зв’язок між представленнями

Опишемо зв’язок між представленнями, побудованими в попередніх розділах. На малюнку маємо представлення adding machine у п’яти вищезгаданих мовах:

$f(x) = 5x + 3$

та $f(x) = 5x+$

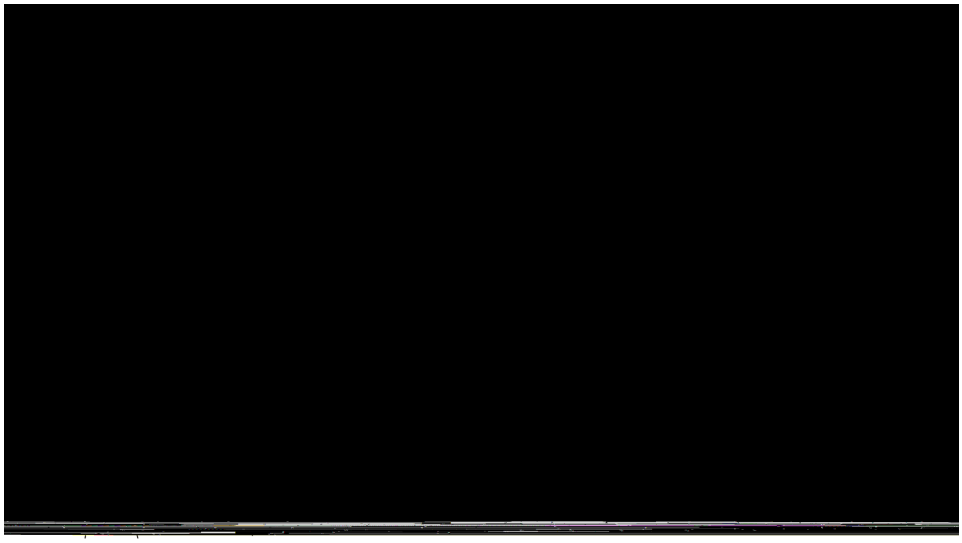


Покажемо, як по автомату будується портрет автоморфізму.

Автомат з початковим ініціальним станом задає автоморфізм двійкового дерева. З початкового ініціального стану виходять дві стрілки, помічені 0 та 1, кінцями яких є стани a_0 та a_1 відповідно.

Автомат з початковим станом $a_{0\,0}$

(*x*x7ё 14.34 Tf 31.38 07.02x



Приймаючи до уваги, що автоморфізм $f(x) = 3x + 1$ переставляє вершини першого рівня дере˜96□0□TD[(f)]TJ/F8¨□Tf□35.27□0□TD[(19)(9.87□2.16

побудуємо орієнтований граф. Кожен цикл цього графа буде мати вигляд

$$\ldots \to f^{i-1}(x_0^{(1)}) \to f^{0}(x_0^{(1)}) \to f^{1}(x_0^{(1)}) \to f^{2}(x_0^{(1)}) \to \ldots$$

$$\ldots \to f^{i-1}(x_0^{(2)}) \to f^{0}(x_0^{(2)}) \to f^{1}(x_0^{(2)}) \to f^{2}(x_0^{(2)}) \to \ldots \to f^{i-1}(x$$

$$f(x_0^{(a)}) \;!\; f(x_0^{(b)})$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

$$f^{kk}(x^{(b)})$$

та матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Продовжуючи цю процедуру до n-го кроку отримаємо матричне представлення для епіморфного образу автоморфізма на ($AutT_2$)

а матриці 0 @ 0 B C 0 1 A

портрет

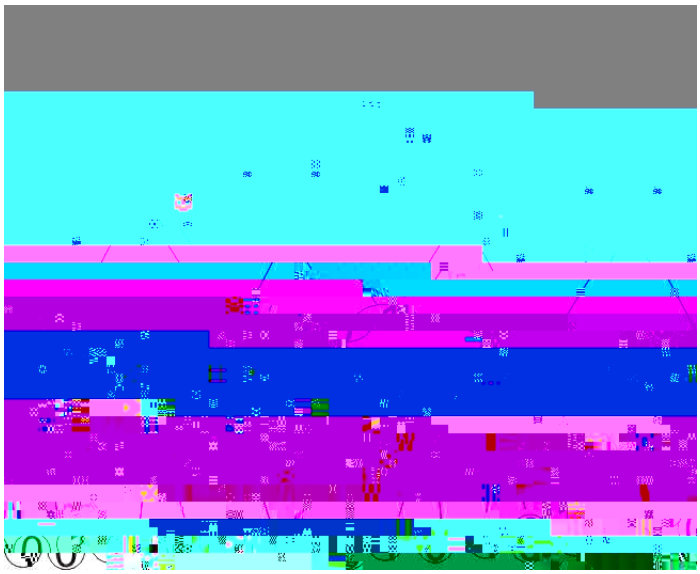
то побудова портрету зводиться до послідовного використання функції,

при 240835 0 0 43352 ˚ до

$Iup^{(3)}(A)$

$Iup^{(2)}(A)$

і остаточно маємо портрет для автоморфізму a, побудований по матриці A:



3 Централізатори

Елементом номеру p для автоморфізму $f(x) = 25$

ляє дві суміжні вершини k_i го рівня (див. вище п. в)) і є ноль якщо автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Добре відомим фактом (див. [1],[2]) є наступна теорема

рівності є константа, яка є сумою всіх значень функції f; причому оскільки g_i максимального порядку, то вона не дорівнює 0, тобто $g^{2^{n_i 1}} = z$.

В якості прикладу такого елемента можна навести такий автоморфізм дерева

$$< 1; x_1; x_1x_2; x_1x_2x_3; : : : > :$$

Неважко переконатися, що всі елементи максимального про-порядку спряжені між собою, тобто спряжені з вищенаведеним елементом. Вияв-

. Звідси $h^z \ 2 \ B_k(g^x)$

3.3 Кільце розширенних по дереву 2-адичних чисел

Розглянемо сукупність дерев, у яких кожна вершина суміжна тільки з однією або з двома вершинами наступного рівня.

Назвемо ребро, що з’єднує вершину k-56го -78.іЬ5м9354а .іЬ-,7.08□7ю354к

Кожному кінцю x розміченного дерева d відповідає двійкова послідовність x_d складена з цифр, якими відмічені вертикальні ребра цього кінця.

x_d

$$x_{d_1+d_2} = x_{d_1} + x_{d_2}$$

$$y_{d_1+d_2} = y_{d_1} + y_{d_2}$$

$$z_{d_1+d_2} = z_{d_1} + z_{d_2}$$

$$v_{d_1+d_2} = v_{d_1} + v_{d_2}$$

При множенні розмічених дерев з D двійкові послідовності відповідних кінців перемножуються, як елементи кільця цілих 2-адичних чисел. x_{d_1}

$$x_{d_1 \pm d_2} = x_{d_1} \text{¢} x_{d_2}$$

$$y_{d_1 \pm d^{+}} {}^{1}_{d}$$

Для d_1 послідовність на лівому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 1, на правому ланцюзі відповідає 2-адичному числу -1.

Для d_2 послідовність на лівому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 2, на правому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 3.

Результат[illegible]

Нагадаємо, що деревом циклового типу D_a автоморфізму a будемо

Теорема 3.4.4. $C_{AutT_2}(a) \cong H_a$ h K_a.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$a^{\hat{A}} =$$

4 Спряженість в $FAutT_2$

4.1 Група скінченностанових автоматних підстановок.

Детальніше опишемо групу скінченностанових автоматних підстановок $FAutT_2$.

Дію автоморфізму ® $2\ AutT_2$ 2

(Нехай "

раціональним. □

Теорема 4.1.2. *Множина автоморфізмів, що задаються скінченностановими лінійними функціями є станово-замкненою самоподібною підгрупою групи скінченностанових автоморфізмів бінарного дерева* $FAutT_2$.

Доведення. Якщо числа

$$a; b; c; d; 2k$$

є раціональними, то очев˜ числа

та обернена до скінченностанової лінійної функції є скінченностановою лінійною функцією:

$$(ax + b)^{i\,1} = \frac{1}{a}x \;\; i \;\; \frac{b}{a}:$$

Нейтральним елементом групи є скінченностанова лінійна функція:

$$f(x) = x:$$

□

Обчислимо централізатори елементів в групі скінченностанових лінінійних функцій.

Теорема 4.1.3. *Якщо автоморфізм ® дерева T_2, що задається функцією $f(x) = ax + b$ є скінченностановим автоморфізмом максимального*

, де r- раціональне число. Згідно з лемою 4.1.4 автоморфізм

$$f(x) = ax + b$$

є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли a та b- раціональні числа.

піддерево діє автоморфізмом °

Лема 4.2.1. *Всі функції* $f(x) = ax + p; a$ (p *2* $(Z_2^Q)^¤$) *спряжені з функцією* $f(x) = ax$

де $(4k + 1)^x$ -функція, що продовжується з Z на Z_2 по неперервності в топології на Z_2, оскільки функція $^{(4}$

$$= \left(\frac{¡\, a^{k\,i\,1}x + a^{k}}{a^{k\,i\,1}((a\ ¡\ 1)x\ ¡\ a)}\right) \pm (ax + 1) \pm \left(\frac{a^{k}x + a^{k}}{a^{k\,i\,1}((a\ ¡\ 1)x + 1)}\right) =$$

$$= (a($$

тобто на портреті вершини, що належать кінцю t відмічені 1-ю, всі інші вершини відмічені 0-м.

Співставимо кінцю 2-адичне число, що має такий же двійковий розклад. Поставимо у відповідність t автоморфізм дерева T_2, портрет якого будується наступним чином: якщо на к-му місці у двійковому розкладі t стоїть 1-ця, то всі вершини k ¡ 1-го рівня відповідного портрету відмічені 1-ми, якщо на к-му місці у двійковому розкладі t стоїть 0, то всі вершини k ¡ 1-го рівня відповідного flm1356ершини ві˜84мі\342350 відЯ2

[9] Adams, S. and Spacier, R.,Kazhdan Groups, Cocycles and Trees, Am.J.Math., 1990, vol.112. pp.271-287.

[10] Bartholdi, L. and Grigorchuk, R., On Parabolic Subgroups and Hecke Algebras of Some Fractal Groups, Preprint of Forschungsinst. Math.,ETH-Zurich, 1999.

[11] Bartholdi, L. and Grigorchuk, R., On the Spectrum of Hecke Type Operators Related to Some Fractal Groups, Present edition, pp.1-41.

[12]

[19]

[27] Sidki, S., Automorphisms of One-Rooted Trees: Growth, Circuit

[37] Oliinyk, A., Free Groups of Automatic Permutations, Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukr., 1998, no. 7, pp. 40-44.

[38] Oliinyk, A.,Free Abelian Groups of Finite Automata, Visn. Kiiv. Univ., Ser. Fiz. - Mat. Nauki, 1999, no. 1, pp. 74-77.

[54] Rostislav I.Grigorchuk, Just infinite branched groups,Horizons in Profinite Groups (Dan Segal, Marku6,P.F.due,eAnern halevl,