Національний Університет "Києво-Могилянська Академія"

На правах рукопису

Морозов Денис Іванович

УДК 512.54

Скінченностанова спряженість ізометрій простору 2-адичних чисел

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико–математичних наук

Київ–2008

Зміст

Перелік умовних позначень **3**

1 Ізометрії кільця Z_2 **4**

1.1 Стискаючи функції кільця Z_2 5

1.2 Ізометричні многочлени кільця Z_2 12

2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів $FAutT_2$ **16**

3 Загальні питання спряженності **22**

3.1 Спряженність кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів . 25

4 Спряженість лінійних ізометрій у загальному випадку **25**

5 Дифференційовні ізометрії **37**

5.1 Кусково-лінійні ізометрії 37

6 Спряженність транзитивно-стабільних автоморфізмів в $FAutT_2$ **40**

7 Зв'язка груп **44**

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}^+$	- напівгрупа натуральних чисел по додаванню ;
$\bar{\mathbb{N}}^+ = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$	- напівгрупа натуральних чисел з нулем;
Z_p	-кільце цілих р-адичних чисел;
Z_T	-кільце розширених по дереву T цілих 2-адичних чисел ;
$C_n^{(r)}$	-декартів добуток r копій циклічної групи C_n;
$G \ltimes H$	- напівпрямий добуток груп , де $H-$ нормальний дільник ;
$(G, X) \wr H$	-вінцевий добуток групи перетворень (G, X) (активний співмножник) та абстрактної групи H;
$< M, g, \ldots >$	- підгрупа породжена множиною M та елементами $g, \ldots$;
K^+, K^*	- адитивна та мультиплікативна групи поля ;
$\circ$	-суперпозиція автоморфізмів, функцій.
T_n	- кореневе однорідне дерево валентності n ;
$AutT_n$	- група автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності n ;
$FAutT_n$	- підгрупа скінченностанових автоморфізмів групи $AutT_n$;
$STAutT_n$	- Множина шарово-транзитивних автоморфізмів групи $AutT_n$;
$\zeta(a)$	- кількість різних станів автоморфізму а ;
$C_G(a)$	- централізатор елемента a в групі G;

1 Ізометрії кільця Z_2

Зручною для роботи з двійковими автоматами, особливо з нескінченно-становими, є техніка їх представлення у вигляді функцій кільця Z_2.

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на Z_2. Кожен автоморфізм дерева α задає функцію f_α за правилом: якщо автоморфізм α переводить кінець x в кінець y, то $f_\alpha(x) = y$. Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією $f(x) = x + 1$.

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм необхідно, що б ця функція пару кінців з однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

Приклад 1.0.1. *Функція $f(x) = 2x$ переводить пару ...1111 та ...0000 в пару ...1110 та ...0000 відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція $f(x) = 2x$ не є автоморфізмом дерева.*

Приклад 1.0.2. *Функція $f(x) = x^2$ не є автоморфізмом дерева.*

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$(2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 =$$

$$= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) =$$

$$= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1)$$

то для пари 2-адичних чисел x_1, x_2, що мають спільний початок ненульової довжини n, пара x_1^2, x_2^2 має спільний початок як найменше довжини n+1, отже відображення $f(x) = x^2$ є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Далі наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця Z_2, що є стискаючими, тобто такими, що задовільняють умові Ліпшиця порядку 1 в ультраметриці:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$$

В цьому класі виділяється підмножина, що відповідає ізометріям, а отже груповим автоматам.

1.1 Стискаючи функції кільця Z_2

Означимо метрику ρ на кільці Z_2. Кожен елемент $x \in Z_2$ можна єдиним чином представити у вигляді $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2.

Далі під фразою $a \in Z_2$ ділиться на $b \in Z_2$, будемо розуміти, що $\frac{a}{b}$ належить кільцю Z_2.

Означення 1.1.1. *Функція $ord_2(x)$ для $x \in Z_2$ означається наступним чином. Нехай $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2. Тоді $ord_2(x) = n$.*

Означення 1.1.2. *Означимо відстань $\rho(x, y)$ для $x, y \in Z_2$.*

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ord_2(x-y)}$$

Означення 1.1.3. *Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називаеться ізометрією, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$$

Множину ізометрій позначимо як $AutZ_2$.

Означення 1.1.4. *Ізометрія $f : Z_2 \to Z_2$ називаеться шарово-транзитивною, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^k(0)$ має 2^n різних значень по модулю 2^n. Множину шарово-транзитивних ізометрій позначимо, як $STAutZ_2$*

Лема 1.1.1. *Функція f є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$.*

Доведення. Представимо $f(x) - f(y)$ та $x - y$ у вигляді: $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$, $x - y = u_2 * 2^{n_2}$, де - u_1, u_2 обертовні елементи кільця Z_2. Оскільки f - ізометрія, то $n_1 = n_2$. Отже маємо:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{u_1}{u_2} = u_1 * u_2^{-1}$$

тобто дріб належить групі одиниць кільця Z_2.

З іншої сторони, якщо для всіх $x, y \in Z_2$ добуток $2^{n_1-n_2} * u_1 * u_2^{-1}$ належить групі одиниць кільця Z_2, то $n_1 = n_2$, тому f - ізометрія.

Означення 1.1.5. *Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називаеться стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$$

Множину стискаючих функцій позначимо як $EndZ_2$.

$\square$

Означення 1.1.6. *Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається строго-стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

Множину строго-стискаючих функцій позначимо як $CEndZ_2$.

Зауваження 1.1.1. *Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n $(n \in \mathbb{N})$. Тоді те що функція $f(x)$ є*

a) ізометрією, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} (дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить групі одиниць кільця Z_2)

b) строго-стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^{n+1}(дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить $2 * Z_2$)

c) стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^n (дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить Z_2)

Зауваження 1.1.2. *Легко бачити, що об'єднання множини ізометрій з множиною строго стискаючих функцій є власною підмножиною множини стискаючих функцій.*

Теорема 1.1.1. *Якщо f - стискаюча, g - стискаюча, то $f + g$ - стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, другий доданок також ділиться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f + g$ є стискаючою функцією. $\square$

Теорема 1.1.2. *Якщо f - ізометрія, g - строго стискаюча, то $f + g$ - ізометрія*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f - ізометрія, а g - строго стискаюча функція. Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f+g$ є ізометрією. $\square$

Теорема 1.1.3. *Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f+g$ - строго стискаюча*

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))=$$
$$=(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1}, і звідси маємо, що $f+g$ є строго стискаючою функцією. $\square$

Теорема 1.1.4. *Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то $f+g$ - строго стискаюча*

Доведення.

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=a_1+a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f та g - ізометрії, то a_1 та a_2 належать множині обертовних елементів кільця Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже a_1+a_2 ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$ і тому $f+g$ - строго стискаюча функція. $\square$

Наслідок 1.1.1. *Якщо f, g та h - ізометрії, то то $f+g+h$ - ізометрія*

Дійсно, оскільки за теоремою $g+h$ - строго стискаюча, а f- ізометрія, то за теоремою $f+(g+h)$ - ізометрія.

Теорема 1.1.5. *Якщо f - стискаюча, то $2*f$ - строго стискаюча функція.*

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді $f(x)-f(y)$ також ділиться на 2^n, оскільки f є стискаючою. Розглянемо різницю

$$2*f(x)-2*f(y)=2*(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності ділиться на 2^{n+1}, отже маємо, що $2 * f$ є строго стискаючою функцією. $\square$

Теорема 1.1.6. *Якщо f - стискаюча, g - стискаюча, то $f * g$ - стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x) * g(x) - f(y) * g(y) =$$

$$= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^n. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f * g$ є стискаючою функцією. $\square$

Теорема 1.1.7. *Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f*g$ - строго стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x) * g(x) - f(y) * g(y) =$$

$$= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^{n+1}. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f * g$ є строго стискаючою функцією. $\square$

Теорема 1.1.8. *Нехай f - ізометрія, а g - стискаюча функція.*

Тоді $f * (2 * g + 1)$ - ізометрія

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^n, але не діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - ізометрії.

Розглянемо різницю

$$f(x) * (2 * g(x) + 1) - f(y) * (2 * g(y) + 1) =$$

$$= 2 * f(x) * (g(x) - g(y)) + (2 * g(y) + 1) * (f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} . Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f * (2 * g + 1)$ є ізометрією. □

Наслідок 1.1.2. *Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $f * (2 * g + 1)$ - ізометрія*

Дійсно, і ізометрія і строго стискаюча функція є стискаючими.

Теорема 1.1.9. *Нехай функції f та g є стискаючими.*

Тоді $2 * f * g$ - строго стискаюча функція

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{2f(x) * g(x)}{x - y} - \frac{2f(y) * g(y)}{x - y} = \frac{2((f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)))}{x - y} =$$

$$= 2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2$$

$$a_1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},\ a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

Оскільки f та g - стискаючи, то a_1 та a_2 належать Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$. Отже $2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2$ ділиться на 2 для всіх $x, y \in Z_2$ і тому $2 * f * g$ - строго стискаюча функція. □

Наслідок 1.1.3. *Нехай f - ізометрія, або строго стискаюча функція, g - ізометрія, або строго стискаюча функція. Тоді $2 * f * g$ - строго стискаюча функція.*

Теорема 1.1.10. *Якщо f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то*

$$\frac{f}{2 * g + 1}$$

- ізометрія.

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{f(x)}{2g(x) + 1} - \frac{f(y)}{2g(y) + 1} = \frac{2(f(x)g(y) - f(y)g(x)) + f(x) - f(y)}{(2g(x) + 1)(2g(y) + 1)}$$

Знаменник не впливає на парність дробу, оскільки є добутком обертовних елементів кільця Z_2.

Розглянемо відношення:

$$\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(y)-f(y)(g(x)-g(y)))+(f(x)-f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{2(f(x)-f(y))g(y)}{x-y}-\frac{2f(y)(g(x)-g(y))}{x-y}+\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то a_1 належить множині обертовних елементів кільця Z_2, а a_2 належить Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже

$$(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

належить множині обертовних елементів кільця Z_2, і тому $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія. □

Наслідок 1.1.4. *Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія*

Теорема 1.1.11. *Якщо f - строго стискаюча функція, g - строго стискаюча функція, то суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ - строго стискаюча функція.*

Доведення. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$.

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}*\frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб ділиться на 2, оскільки f - строго стискаюча функція. Другий дріб також ділиться на 2, оскільки g - строго стискаюча функція. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ є строго стискаючою функцією. □

Теорема 1.1.12. *Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ - ізометрія.*

Доведення. Скористаємось лемою 1.1.1. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y}$$

належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} * \frac{g(f(x)) - g(f(y))}{f(x) - f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки f - ізометрія. Другий дріб також належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки g - ізометрія. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ є ізометрією. □

Наслідком попередніх теорем є наступні три теореми:

Теорема 1.1.13. *Стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце з мультиплікативною одиницею $f(x) = x$ відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 1.1.14. *Строго стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце без одиниці відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина строго стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 1.1.15. *Множина ізометрій кільця Z_2 є класом суміжності по підгрупі строго стискаючих функцій відносно операції поелементного додавання в групі стискаючих функцій.*

Наступна теорема потрібна для продовження натуральних функцій до 2-адичних ізометрій.

Теорема 1.1.16. *Ізометрія χ, визначена на всюди щільній в Z_2 підмножині M, єдиним чином продовжується до ізометрії $\overline{\chi}$ на Z_2.*

Доведення. Оскільки ізометрія є неперевною функцією, а множина M є всюду щільною в Z_2, то для елемента $x \notin M$ значення $\overline{\chi}(x)$ визначено єдиним чином, як

$$\overline{\chi}(x) = \lim_{n \to \infty} \chi(x_n)$$

де $\{x_n\}$ послідовність елементів із M, збіжна к x в Z_2.

На множині M функція $\overline{\chi}$ співпадає з χ. □

Теорема 1.1.17. *Шарово-транзитивна функція* $f : Z_2 \to Z_2$ *є ізометрією тоді і лише тоді, коли оператор примитивної рекурсії* $g(x) = I[f](x)(g(0) = 0, g(x+1) = f(g(x)))$ *від функції* $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *визначає функцію* g*, неперервне продовження якої на* Z_2 *є ізометрією кільця* Z_2*.*

Доведення. Якщо f -шарово-транзитивна ізометрія, то $I[f](x)$ є 0-розв'язком(0-розв'язок - розв'язок, що переводить 0 в 0) рівняння спряженності $\varepsilon^{\chi} = f$. Дійсно, якщо $\chi(0) = 0$, то $\chi(n) = f^n(0)$ для $x \in \mathbb{N}$. Звідси $\chi(n+1) = f(f^n(0)) = f(\chi(n))$ і $\chi(x) = I[f](x)(x \in \ \mathbb{N})$. Оскільки $\mathbb{N}$ всюди щільна в Z_2, то, згідно з теоремою 1.1.16 існує єдине продовження ізометрії $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ до ізометрії $\chi : Z_2 \to Z_2$.

З іншого боку, якщо ізометрія f не є шарово-транзитивною, то замикання множини $M = \{x | x = f^n(0), n \in \mathbb{N}\}$ є власною підмножиною Z_2, тобто χ не є сюр'єктивним відображеням з Z_2 на Z_2, і тому не є ізометрією. □

Приклад 1.1.1. *Легко бачити, що,* $f(x) = x$ *є ізометрією, а* $g(x) = c, c \in Z_2$ *строго стискаючою функцією. Тому, згідно з теоремою* $f(x) + g(x) = x + c,\ c \in Z_2$ *є ізометрією.*

Приклад 1.1.2. *Оскільки* $f(x) = x+c,\ c \in Z_2$ *є ізометрією, а для* $c \in Z_2^*$ $\ f(x) = x+c$ *є шарово-транзитивною ізометрією і* $I[x+c](x) = c * x$ *то, згідно з теоремою* $g(x) = c * x\ (c \in Z_2^*)$ *є ізометрією.*

Приклад 1.1.3. *Оскільки* $f(x) = a * x\ (a \in Z_2^*)$ *є ізометрією, а* $g(x) = b, b \in Z_2$ *строго стискаючою функцією, то, згідно з теоремою лінійна функція* $f(x) + g(x) = a * x + b,\ c \in Z_2$ *є ізометрією.*

1.2 Ізометричні многочлени кільця Z_2

Розглянемо многочлени кільця $Z_2[x]$. У цьому розділі буде сформульовано умови, при яких многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ буде ізометрією кільця Z_2. Означимо $S_n(x_1, x_2)$, як

$$S_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1} \cdot x_2^k$$

Приклад 1.2.1. $S_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\ S_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ *і т.д.*

Означення 1.2.1. *Означимо функцію* $\mu(x) = \overline{x}$*:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \in 2 \cdot Z_2 \\ 1, x \in Z_2^* \end{cases}$$

Теорема 1.2.1. $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$

Доведення. S_{2k} складається з с парної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Тому S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 непарні. Очевидно, що S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 є парними. Крім того $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$, тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 - різної парності. Отже таблиця значень для $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2)$ співпадає з таблицею істинності для $\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$. □

Теорема 1.2.2. $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cup \overline{x_2}$

Доведення. S_{2k+1} складається з с непарної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Очевидно, що S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 є парними. Крім того $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$, тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 - різної парності. Отже таблиця значень для $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2)$ співпадає з таблицею істинності для $\overline{x_1} \cup \overline{x_2}$. □

Означення 1.2.2.

$$D_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Лема 1.2.1. *Для многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ має місце рівність*

$$D_f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x_1, x_2)$$

Теорема 1.2.3. *Многочлен $f(x) \in Z_2[x]$ є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли*

$$\forall\ x_1, x_2 \in Z_2\ \overline{D_f}(x_1, x_2) = 1$$

Означення 1.2.3. *Для многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ означимо A_f та B_f:*

$$A_f = \mu \left(\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} a_{2k} \right)$$

$$B_f = \mu \left(\sum_{k=2}^{[\frac{n+1}{2}]} a_{2k-1} \right)$$

Теорема 1.2.4. *Має місце наступна рівність:*

$$\overline{D_f}(x_1, x_2) = \overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$$

Наслідок 1.2.1. *Згідно з теоремами 1.2.3 та 1.2.4 многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли формула $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ є тотожньо-істиною.*

Теорема 1.2.5. $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ *є тотожньо-істиною тоді, і тільки тоді, коли* $\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$

Доведення. Побудуємо табличку вигляду формули $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ для різних значень $\overline{a_1},\ A_f,\ B_f$.

$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 0,\ B_f = 0$	0
$\overline{a_1} = 0,\ A = 0,\ B_f = 1$	$x_1 \cup x_2$
$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 1,\ B_f = 0$	$x_1 \oplus x_2$
$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 1,\ B_f = 1$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$	1
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 1$	$\neg(x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 1,\ B_f = 0$	$\neg(x_1 \oplus x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 1,\ B_f = 1$	$\neg((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2))$

Таблиці істинності формул $x_1 \cup x_2$, $x_1 \oplus x_2$ та $(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$ мають наступний вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \cup x_2$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

Отже формула є тотожньо-хибною для $\overline{a_1} = 0,\ A_f = 0,\ B_f = 0$, тотожньо-істиною для $\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$ і виконливою у всіх інших випадках. ☐

Наслідок 1.2.2. *Згідно з наслідком 1.2.1 та теоремою 1.2.5 многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли коефіцієнт a_1 є непарним 2-адичним числом, сума коефіцієнтів з парними номерами більше 0 є парним 2-адичним числом та сума коефіцієнтів з непарними номерами більше 3 є парним 2-адичним числом*

Приклад 1.2.2. *Згідно з наслідком 1.2.2 наступні многочлени є ізометріями:*

$$f(x) = 5x + 1$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x$$

а многочлени

$$f(x) = 4x + 1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 3x$$

не є ізометріями

2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів $FAutT_2$

Відомо, що централізатори шарово-транзитивних елементів в $AutT_2$ описуються наступною теоремою:

Теорема 2.0.6. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$, оскільки результату, аналогічного теоремі 2.0.6 для $FAutT_2$ немає.

Означення 2.0.4. *Позначимо як:*

$x * a$ - ліву дію автоморфізма a на кінець x дерева T_2,

$a \circ b$ - суперпозицію автоморфізмів a та b дерева T_2,

Z_2 - кільце цілих 2-адичних чисел.

Лема 2.0.2. *Для $p \in Z_2$ має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

Доведення. Оскільки $t * \varepsilon^p = t + p$, то $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$. □

Теорема 2.0.7. *Нехай χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t. Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

Доведення. Оскільки $\varepsilon^{\chi_x} = x$, то має місце співвідношення:

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

Отже за лемою 2.0.2 та рівністю $0 * \chi_x = 0$ отримуємо:

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) = ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x) = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

ч.т.д. □

Має місце наступна лема:

Лема 2.0.3. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

Доведення. За теоремою 2.0.6

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 2.0.7, маємо:

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t.

Оскільки χ_x - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

ч.т.д. □

Означення 2.0.5. *Означимо множину $F_p(p \in Z_2)$ наступним чином:*

$p \in F_p$,

якщо $2t + 1 \in F_p$, то $t \in F_p, t + 1 \in F_p$,

якщо $2t \in F_p$, то $t \in F_p$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в F_p, якщо отримано з p за k кроків.

Означення 2.0.6. *Означимо множину $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ наступним чином:*

$m \in P_{m,n}$,

якщо $2t + 1 \in P_{m,n}$, то $t - n \in P_{m,n}$, $t + n + 1 \in P_{m,n}$,

якщо $2t \in P_{m,n}$, то $t \in P_{m,n}$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, якщо отримано з m за k кроків.

Лема 2.0.4. *Нехай 2-адичне квазіперіодичне число p дорівнює $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$. Тоді множини $P_{m,n}$ та F_p скінченні або нескінченні одночасно.*

Доведення. Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2\frac{m}{2n+1}$$

то в F_p $\frac{2m+1}{2n+1}$ породжує $\frac{m-n}{2n+1}$ та $\frac{m+n+1}{2n+1}$, а $\frac{2m}{2n+1}$ породжує $\frac{m}{2n+1}$.

Отже, якщо t_k належить k-му рівню в F_p, то $t_k(2n+1)$ належить k-му рівню в $P_{m,n}$, і навпаки, якщо t'_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, то $\frac{t'_k}{2n+1}$ належить k-му рівню в F_p. Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

ч.т.д. □

Лема 2.0.5. *Множина* $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ *є скінченою.*

Доведення. Згідно з означенням, якщо $t \in P_{m,n}$, то або $\frac{t}{2}$ або $\frac{t-1}{2} - n$ та $\frac{t-1}{2} + n + 1$.Нехай t_k відноситься до k-го рівня в $P_{m,n}$, тоді має місце рівність:

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a * (2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність k разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})$$

Оскільки $|a_i| \leq 1$, то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left|\frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})\right| \leq \left|\frac{m}{2^k}\right| + |2n+1| \leq |m| + 2n + 1$$

Отже кількість елеметів в множині $P_{m,n}$ обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leq 2(|m| + 2n + 1)$$

тому множина $P_{m,n}$ є скінченою, ч.т.д. □

Лема 2.0.6. *Множина* F_p *скінченна тоді, і тільки тоді, коли* p *- квазіперіодичне число.*

Доведення. $\Rightarrow$ Для $2t+1$ та $2t$ число t отримується відкиданням останьої цифри у двійковому запису, отже F_p містить всі числа, що отримуються з p відкиданням декількох останніх цифр. Якщо p не квазіперіодичне, то маємо нескінченну кількість таких чисел, тому F_p не є скінченною.

$\Leftarrow$ p - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли $p = \frac{m}{2n+1}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$. Отже за лемами 2.0.4 та 2.0.5 множина F_p є скінченною. □

Теорема 2.0.8. *Нехай ε - adding machine. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Доведення. Оскільки має місце рівність

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 2.0.6, елементи централізатора $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$ мають вигляд $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$. Легко бачити, якщо p - не квазіперіодичне число, то ε^p - нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число p. Далі, нехай $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$, тобто квазіперіодичне. За лемою 2.0.6 множина F_p - скінченна. З іншої сторони, мають місце рівності:

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму ε^p вичерпуються автоморфізмами вигляду

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки F_p - скінченна, то ε^p - скінченно-становий автоморфізм, ч.т.д. □

Теорема 2.0.9. *Нехай ε - adding machine. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. За теоремою 2.0.8

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 2.0.2, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

ч.т.д. □

Теореми 2.0.8 та 2.0.9 можна застосувати для дослідження скінченно-станової спряженності з автоморфізмом ε - adding machine. Це показує наступна теорема:

Теорема 2.0.10. *Якщо 0-розв'язок t_0 рівняння спряженності відносно t*

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінченно-становим, то це рівняння не має скінченно-станових розв'язків.

Доведення. Припустимо, що t_0 - нескінченно-становий, а рівняння $\varepsilon^t = a$ має скінченно-становий розв'язок $t' : p \to 0$, де p - квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та $p * \varepsilon^{-p} = 0$, то за теоремою 2.0.8 $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$. Оскільки t_0 - нескінченно-становий, а ε^{-p} - скінченно-становий, то t' - нескінченно-становий. Отже маємо протиріччя. □

Теорема 2.0.11. *Нехай a - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де χ_a - 0-розв'язок рівняння спряженності $\varepsilon^t = a$ відносно t.

Доведення. Має місце наступна рівність:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.0.7 отримаємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1}) \circ \chi_a) = p$$

Отже $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ може бути скінченно-становим тільки тоді, коли $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$. З іншої сторони за теоремою 2.0.6 усі елементи централізатора $C_{AutT_2}(a)$ мають вигляд $a^{(p*\chi_a^{-1})}$, оскільки χ_a^{-1} - автоморфізм Z_2. Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

ч.т.д. □

Означення 2.0.7. *Означимо функцію* $h_x : C_{AutZ_2}(x) \to Z_2$*, де* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм, наступним чином:*

$$h_x(u) = 0 * u$$

Зауважимо, що згідно з означенням

Теорема 2.0.12. *Скінченностановий автоморфізм* x *є шарово-транзитивним тоді, і тільки тоді, коли* $h_x : C_{AutT_2}(x) \to Z_2$ *- бієкція.*

Означення 2.0.8. *Означимо функцію* $Log_x : C_{AutZ_2}(x) \to Z_2$*, де* x *- шарово-транзитивний скінченно-становий автоморфізм, наступним чином:* $Log_x(u) = t$ *для* $u = x^t$*.*

Теорема 2.0.13. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.0.11 маємо включення:

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

□

Теорема 2.0.14. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді* $Log_x : C_{AutT_2}(x) \to Z_2$ *- бієкція.*

Гіпотеза 2.0.1. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

3 Загальні питання спряженності

Означення 3.0.9. *Означимо функцію* $\varphi : STAutZ_2 \to STAutZ_2$ *наступним чином* $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$, *де* x_1, x_2 *визначаються співвідношенням* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$

Функція визначена корректно, оскільки, якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2, то і $x_1 \circ x_2$ є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2.

Означення 3.0.10. *Означимо функцію* $\pi_L : AutZ_2 \to AutZ_2$ *наступним чином* $\pi_L(x) = x_1$, *де* x_1 *визначається співвідношенням* $x = (x_1, x_2)$ *або* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$

Означення 3.0.11. *Означимо функцію* $\pi_R : AutZ_2 \to AutZ_2$ *наступним чином* $\pi_R(x) = x_2$, *де* x_2 *визначається співвідношенням* $x = (x_1, x_2)$ *або* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$

Очевидно, що для шарово-транзитивного автоморфізма a має місце рівність $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$ і значення $\pi_L(a), \pi_R(a)$ та $\varphi(a)$ зв'язані наступним співвідношенням:

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a)$$

Крім того, для автоморфізмів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1},\ \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1}$$

$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1},\ \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1}$$

$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b),\ \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b)$$

$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a),\ \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a)$$

Теорема 3.0.15. *Нехай* a, b *- шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця* Z_2, *а* χ_0 *- 0-розв'язок рівняння спряженності* $a^{\chi_0} = b$ *. Тоді* $\forall n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b)$$

Доведення. Дійсно, оскільки $a^{\chi_0} = b$, то $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0)$$

$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0)$$

Скористаємось методом математичної індукції:

1) Для n=0 маємо рівність $a^{\chi_0} = b$ і тверження виконується. 2) Нехай для $n = k$ твердження теореми виконується, тобто $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$. Покажемо, що воно також має місце для $n = k + 1$.

Оскільки $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$, то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і $\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) = \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)}$, тому має місце рівність $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$ і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми. □

Теорема 3.0.16. *Нехай a, b - шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2. Тоді має місце твердження, що χ_0 - 0-розв'язок рівняння спряженності $a^{\chi_0} = b$ є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли $\pi_L^n(\chi_0)$ є скінченностановим для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Означення 3.0.12. *Назвемо скінченно-станову ізометрію f 0-повною якщо образ 0 при дії на нього централізатором цього елементу співпадає з множиною квазіперіодичних елементів кільця Z_2*

$$0 * C_{FAutT_2}(f) = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

Наслідок 3.0.3. *Нехай a, b - шарово-транзитивні скінченно-станові 0-повні ізометрії кільця Z_2. Тоді a та b спряженні в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряженні в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Лема 3.0.7. *Скінченно-станова кусково-лінійна шарово-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Теорема 3.0.17. *Два скінчено-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Доведення. За теоремою про скінченно-станову спряженість лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів два таких автоморфізми $ax + b$ та $cx + d$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $a = c$. Отже, за наслідком 3.0.3 та лемою 3.0.7 маємо твердження теореми. $\square$

Приклад 3.0.3. *Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми*

$$f(x) = (3x + 1, 3x) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (9x + 2, x + 7) \circ \sigma$$

за теоремою 4.0.16 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$$

3.1 Спряженність кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів

Означення 3.1.1. *Означимо фактор n-го рівня шарово-транзитивного автоморфізма* $a = (b, c) \circ \sigma$ *індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму a называється автоморфізм* $b \circ c$. *Фактором n-го рівня автоморфізма a называється фактор 1-го рівня для фактора (n-1)-рівня автоморфізма a .*

Означення 3.1.2. *Фактор-послідовністью для автоморфізму* $a \in AutZ_2$ *назвемо послідовність* $\{a_n\}$ *автоморфізмів, в якій* a_n *дорівнює фактору n-го рівня для автоморфізму a.*

Лема 3.1.1. *Для довільної кусково-лінійної функції існує n, для якого фактор n-го рівня є лінійною функцією.*

Теорема 3.1.1. *Дві шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії 0-спряжені в* $FAutT_2$ *тоді, і тількі тоді, коли існує рівень, для якого спряжені в* $FAutT_2$ *їх фактори.*

Теорема 3.1.2. *Дві скінченно-станові шарово-транзитивні кусково лінійні функції спряжені в* $FAutT_2$ *тоді, і тількі тоді, коли вони 0-спряжені в* $FAutT_2$.

Теорема 3.1.3. *Дві скінченно-станові шарово-транзитивні кусково лінійні функції спряжені в* $FAutT_2$ *тоді, і тількі тоді, коли існує рівень, для якого спряжені в* $FAutT_2$ *лінійні функції їх факторів.*

4 Спряженість лінійних ізометрій у загальному випадку

Означення 4.0.3. *Означимо* **розмічене дерево типу** D_f *для автоморфізму* $f \in AutZ_2$ *наступним чином.*

- *Корінь дерева помітимо автоморфізмом* f.
- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом* $a = (b, c) \circ \sigma$, *то з n+1-им рівнем цю вершину з'еднує тільки одне ребро. Іншу вершину цього ребра помітимо автоморфізмом* $\pi_L(a) \circ \pi_R(a)$

- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом $a = (b, c)$, то з n+1-им рівнем цю вершину з'єднує два ребра. Іншу вершину одного ребра помітимо автоморфізмом $\pi_L(a)$, другого ребра - $\pi_R(a)$.*

Автоморфізм, що помічає вершину $t \in D_f$ дерева типу позначимо як $D_f(t)$. Множину вершин n-го рівня дерева D позначимо як $L_n(D)$.

Зауваження 4.0.1. *За побудовою, піддерево розміченного дерева типу співпадає з розміченним деревом типу автоморфізму, що помічає корінь цього піддерева.*

Приклад 4.0.1. *Побудуємо розмічене дерево типу для автоморфізму $f(x) = 3x+2$ (рис. 1)*

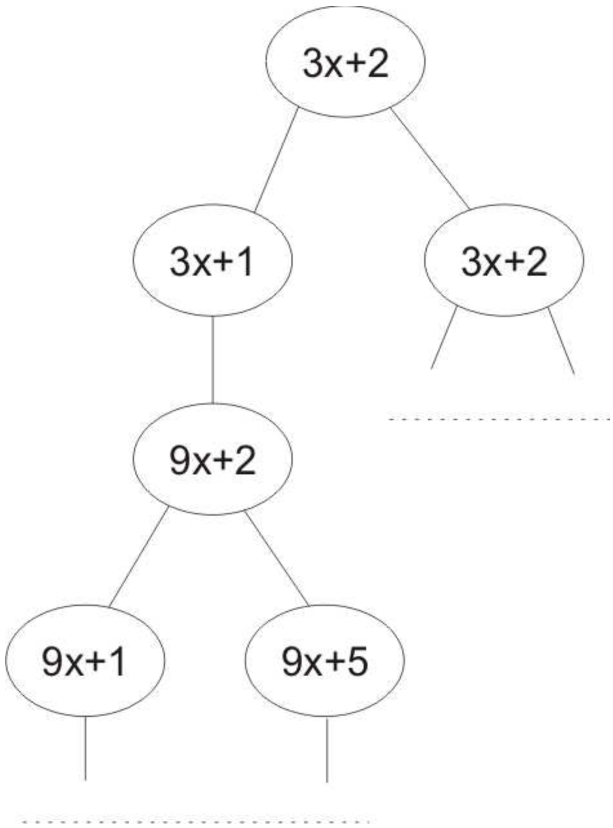

Рис. 1: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = 3x + 2$.

Лема 4.0.2. *Нехай*

$$a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

$$a' = a_1 \circ a_2, b' = b_1 \circ b_2$$

та a' і b' спряжені в $FAutT_2$.

Тоді a і b також спряжені в $FAutT_2$.

Доведення. За умовою леми існує $x \in FAutT2$, такий, що $(a')^x = b'$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченно-становим розв'язком рівняння спряженності

$$a^{\chi} = b$$

Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$a^{\hat{x}} = (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) =$$

$$= (x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x) \circ \sigma =$$

$$= ((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma = ((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma =$$

$$= (b_1, b_2) \circ \sigma = c$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 - скінченно-станові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченно-становим. Отже $\hat{x} \in FAutT_2$, щ.т.д.

□

Теорема 4.0.4. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли існує ізоморфізм α їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого автоморфізми в відповідних вершинах попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2, \;\; D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Доведення. $\Rightarrow$ Дійсно, нехай $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_1^{x_1} \quad b_2 = a_2^{x_2}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = \sigma \circ (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) \circ \sigma \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_2^{x_2} \quad b_2 = a_1^{x_1}$$

Далі, нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma, a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) = (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_2 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) =$$

$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_2 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

Згідно з вищезазначеним, відповідні автоморфізми дерева типу спряжені станами автоморфізму x.

$\Leftarrow$ Якщо такий ізоморфізм розмічених дерев типу існує, то автоморфізми, якими помічаются корені цих дерев, спряжені, отже автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$.

$\square$

Зауважимо, що достатньо перевірити спряженність автоморфізмів хоча б одного рівня. Дійсно, згідно з лемою 4.0.2, зі спряженності відповідних автоморфізмів $(n+1)$-го рівня випливає спряженність автоморфізмів n-го рівня. Отже, згідно з теоремою 4.0.4, має місце наступна теорема:

Теорема 4.0.5. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого існує рівень, що всі автоморфізми в відповідних вершинах цього рівня попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2 \; D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Зауважимо, що оскільки у спряженних автоморфізмів їх дерева типу ізоморфні, то в умові теореми 4.0.5 достатньо ізоморфізму $(D_a)_n$ та $(D_b)_n$

Теорема 4.0.6. *Дерево типу автоморфізму вигляду $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ є ланцюгом тоді, і лише тоді, коли $a = 4k + 1, b = 2t + 1$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Якщо $b = 2t$, то дерево типу для f не є ланцюгом, оскільки

$$(ax + 2t) = \left(ax + t, ax + t + \frac{a-1}{2}\right)$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 0-му рівні.

Якщо $a = 4k + 3, b = 2t + 1$, то

$$(4k+3)x + (2t+1)) = ((4k+3)x + t, (4k+3)x + t + 1 + 2k + 1) \circ \sigma$$

і 1-й рівень D_f складається з однієї вершини, яка помічена автоморфізмом

$$((4k+3)x + t) \circ ((4k+3)x + t + 2k + 1) = (4k+3)^2 x + t(4k+3) + t + 1 + 2k + 1 =$$

$$= (4k+3)^2 x + 2(2t+1)(k+1) =$$

$$= ((4k+3)^2 x + (2t+1)(k+1), (4k+3)^2 x + ((2t+1) + 4(2k+1))(k+1))$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 1-му рівні.

$\Leftarrow$ 1-й рівень дерева типу автоморфізму вигляду $f(x) = (4k+1)x + (2t+1)$ складається з однієї вершини. Далі:

$$x * \pi_L(f) = (4k+1)x + t$$

$$x * \pi_R(f) = (4k+1)x + (t+1) + 2k$$

$$x * \pi_L(f) \circ \pi_R(f) = (4k+1)((4k+1)x + t) + (t+1) + 2k =$$

$$= (4k+1)^2 x + (4k+2)t + 2k + 1 = (4k'+1)x + (2t'+1),$$

$$k' = 4k^2 + 2k, t' = (2k+1)t + k$$

Отже кожний наступний рівень дерева для цього автоморфізму буде складатись з однієї вершини. $\square$

Лема 4.0.3. *Автоморфізми* $f(x) = ax + 2^n$ *та* $g(x) = ax + 2^n(2b' + 1)$ *спряжені в* $FAutT_2$.

Доведення. Дійсно, автоморфізми f та g спряжені за допомогою скінчено-станового автоморфізму $\chi(x) = (2b' + 1)x$:

$$\left(\frac{1}{2b'+1}x\right) \circ (ax + 2^n) \circ ((2b'+1)x) = \left(\frac{a}{2b'+1}x + 2^n\right) \circ ((2b'+1)x) =$$

$$= (2b'+1)\left(\frac{a}{2b'+1}x + 2^n\right) = ax + 2^n(2b'+1)$$

□

Лема 4.0.4. *Мають місце наступні співвідношення:*

$$(2k+1)x + 2t = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t)$$

$$(2k+1)x + 2t + 1 = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t + 1) \circ \sigma$$

Доведення. Дійсно, для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2)$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x)}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1) - 1}{2}$$

а для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2) \circ \sigma$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x) - 1}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1)}{2}$$

Автоморфізм $f(x) = (2k+1)x$ має вигляд

$$f = (f_1, f_2)$$

оскільки залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни. Отже

$$(2k+1)x = ((2k+1)x, (2k+1)x + k)$$

$$x + 2k + 1 = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Оскільки $f(x) = x + 2k$, очевидно, залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни, то

$$\pi_L(x + 2k) = \frac{2x + 2k}{2} = x + k, \quad \pi_R(x + 2k) = \frac{2x + 1 + 2k - 1}{2} = x + k$$

тому

$$x + 2k = (x + k, x + k)$$

Для $f(x) = x + 2k + 1$ маємо:

$$x + 2k + 1 = (x + 2k) \circ (x + 1) = (x + k, x + k) \circ (x, x + 1) \circ \sigma = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Отже

$$(2k + 1)x + 2t = (2k + 1)x \circ (x + 2t) =$$

$$= ((2k + 1)x, (2k + 1)x + k) \circ (x + t, x + t) =$$

$$= ((2k + 1)x + t, (2k + 1)x + k + t)$$

Аналогічно отримуємо:

$$(2k + 1)x + 2t + 1 = (2k + 1)x \circ (x + 2t + 1) =$$

$$= ((2k + 1)x, (2k + 1)x + k) \circ (x + t, x + t + 1) \circ \sigma =$$

$$= ((2k + 1)x + t, (2k + 1)x + k + t + 1) \circ \sigma$$

щ.т.д. □

Лема 4.0.5. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $g(x) = ax + (2b' + 1)$.*

Доведення. Дійсно, за лемою 4.0.4

$$(2k + 1)x + 2^n t = ((2k + 1)x + 2^{n-1}t, (2k + 1)x + 2^{n-1}t + k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k + 1)x + 2^n(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже, якщо $b \neq 0$, то рівно за n рівнів знайдеться вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k + 1)x + (2t + 1)$

Якщо $b = 0, k \neq 0$, то

$$(2k + 1)x = ((2k + 1)x, (2k + 1)x + k)$$

і до автоморфізму $(2k + 1)x + k$ можна застосувати попередні міркування. □

Теорема 4.0.7. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду* $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ *знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду* $g(x) = (4k' + 1)x + (2t' + 1)$.

Доведення. Дійсно, за лемою 4.0.5 знайдеться вершина розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $ax + (2t + 1)$.

Оскільки $ax+b$ - ізометрія кільця Z_2, то $a = 2k+1$. Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k + 1)x + (2t + 1)$, виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 4.0.4, помічена автоморфізмом

$$((2k + 1)x + t) \circ ((2k + 1)x + k + t + 1) = (2k + 1)((2k + 1)x + t) + k + t + 1 =$$

$$= (2k + 1)^2 x + (2k + 1)t + k + t + 1 = (4(k^2 + k) + 1)x + (k + 1)(2t + 1) =$$

$$= (4k' + 1)x + t'$$

За лемою 4.0.5, в піддереві розміченого дерева типу з вершиною, поміченною автоморфізмом $(4k' + 1)x + t'$ знайдеться вершина, помічена автоморфізмом $(4k' + 1)x + (2t'' + 1)$, щ.т.д. □

З теореми 4.0.6 та теореми 4.0.7 випливає:

Теорема 4.0.8. *В дереві типу не тотожнього лінійного автоморфізму знайдеться хоча б один ланцюг*

Означення 4.0.4. *Співставимо кожній вершині дерева типу автоморфізму індекс, що дорівнює кількості розгалужень, починаючи з кореня на шляху до цієї вершини. Наприклад, якщо дерево типу є ланцюгом, то індекс кожної його вершини дорівнює 0.*

Зауваження 4.0.2. *Легко бачити, що для ізоморфізму* $\phi : D_1 \to D_2$ *двох дерев типу індекс образу вершини* $\phi(x) \in D_2$ *дорівнює індексу прообразу вершини* $x \in D_1$.

Лема 4.0.6. *Для автоморфізму* $f(x) = ax + b$ *автоморфізм, що маркує вершину n-го рівня розміченного дерева типу має вигляд*

$$a^{2^{n-k+1}} x + b'$$

де k *- індекс цієї вершини.*

Доведення. Дійсно, за лемою 4.0.4

$$(2k+1)x+t = ((2k+1)x+t, (2k+1)x+t+k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже при розгалуженні автоморфізми, що маркують вершини наступного рівня мають такий же самий коефіцієнт біля x.

Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$ виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 4.0.4, помічена автоморфізмом

$$((2k+1)x+t)\circ((2k+1)x+k+t+1) = (2k+1)^2x+(2k+1)t+k+t+1$$

Отже в цьому випадку автоморфізм, що маркує вершину наступного рівня має коефіцієнт біля x, що дорівнює квадрату попереднього коефіцієнту. Отже отримуємо твердження теореми.

□

Лема 4.0.7. *Два не тотожніх лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b'$ та $g(x) = -ax+b''$ мають неізоморфні дерева типу.*

Доведення. Якщо a має вигляд $4k'+1$ то $-a$ має вигляд $4k''+3$ ($-4k'-1 = -4(k'+1)+3$).

Припустимо, що автоморфізми f та g мають ізоморфні дерева типу :

$$D_f * \alpha = D_g$$

За лемою 4.0.6 для довільного $n\in\mathbb{N}$ всі вершини n-го рівня з індексом n в розміченому дереві типу $D_{(4k'+1)x+b}$ помічені автоморфізмами вигляду $(4k'+1)x+b'$.

Множина таких вершин не є порожньою, оскільки принаймні містить корінь дерева $D_{(4k'+1)x+b}$.

З іншого боку, оскільки автоморфізм $(4k'+1)x+b$ не є тотожнім, то серед вершин n-го рівня з індексом n знайдеться вершина $v\in D_{(4k'+1)x+b}$, помічена автоморфізмом вигляду $(4k'+1)x+(2t+1)$ (інакше в кожній вершині дерева типу маємо розгалуження, що відповідає тотожньому автоморфізму).

За теоремою 4.0.6 піддерево дерева типу $D_{(4k'+1)x+b}$ з коренем в вершині v є ланцюгом.

При ізоморфізмі α дерев $D_{(4k'+1)x+b}$ та $D_{(4k''+3)x+c}$ образ $v * \alpha \in D_{(4k''+3)x+c}$ цієї вершини має такий самий індекс, як і v, і, за лемою 4.0.6, автоморфізм, що помічає вершину $v * \alpha$, має вигляд $(4k''+3)x + c'$.

Але, за теоремою 4.0.6, дерево типу автоморфізму піддерево дерева типу $D_{(4k''+3)x+c}$ з коренем в вершині $v * \alpha$ не є ланцюгом. Отже маємо протиріччя.

□

Теорема 4.0.9. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ можуть бути спряжені лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. Нехай автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$.

За теоремою 4.0.8 в розміченому дереві типу D_f автоморфізму f знайдеться ланцюг. Нехай v - вершина в D_f, що належить цьому ланцюгу. За лемою 4.0.6 автоморфізм, що маркує цю вершину має вигляд $a^{2^{n-k+1}}x + b'$, де k - індекс вершини v, а n - номер рівня, якому вона належить.

Згідно з теоремою 4.0.4, при ізоморфізмі α дерев типу D_f та D_g автоморфізм $a^{2^{n-k+1}}x + b'$, що маркує вершину $v \in D_f$ спряжений в $FAutT_2$ з автоморфізмом, що маркує вершину $v * \alpha \in D_g$.

Згідно з зауваженням 4.0.2 та лемою 4.0.6 автоморфізм, що маркує вершину $v * \alpha \in D_g$ має вигляд $c^{2^{n-k+1}}x + b''$.

Згідно з зауваженням 4.0.1 дерева типу автоморфізмів $a^{2^{n-k+1}}x+b'$ та $c^{2^{n-k+1}}x+b''$ є ланцюгом, а отже є сферично-транзитивними.

За теоремою про спряженість сферично-транзитивних лінійних автоморфізмів в $FAutT_2$ маємо рівність

$$a^{2^{n-k+1}} = c^{2^{n-k+1}}$$

Отже $a = \pm c$, але, оскільки f та g спряжені в $FAutT_2$, то, за лемою 4.0.7, маємо рівність $a = c$, щ.т.д.

□

Теорема 4.0.10. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax + 2^r(2b+1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d+1)$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай f та g - спряжені в $FAutT_2$. За теоремою 4.0.9 - $a = c$.

$\Leftarrow$ Нехай $a = c$. Тоді $f(x) = ax + 2^r(2b+1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d+1)$ спряжені скінчено-становим автоморфізмом

$$\chi_0(x) = \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x$$

Дійсно

$$\chi_0^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \left(\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x\right) \circ (ax + 2^r(2b+1)) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$

$$= \left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$

$$= \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)\left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) = ax + 2^r(2d+1) =$$

$$= cx + 2^r(2d+1)$$

□

Зауваження 4.0.3. *За теоремою 4.0.9 автоморфізми $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Теорема 4.0.11. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$, $s > 0$ спряжені в $FAutT_2$, якщо $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$.*

Доведення. Оскільки $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$, то

$$\frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)} \in Z_2$$

Автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$ за допомогою скінчено-станового автоморфізму

$$\chi(x) = x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}$$

Дійсно, має місце наступна рівність:

$$\chi^{-1} \circ f \circ \chi = (x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) \circ ((2^s(2k+1)+1)x + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$

$$= ((2^s(2k+1)+1)(x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$

$$= (2^s(2k+1)+1)x - \frac{(2^s(2k+1)+1-1)(b_1 - b_2)}{2^s(2k+1)} + b_1 = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$$

□

Лема 4.0.8. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + 2b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + 2b_2$ спряжені в $FAutT_2$*

Доведення. Є наслідком теореми 4.0.11. □

Теорема 4.0.12. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + b_2$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $b_1 \equiv b_2 (\mod 2)$*

Доведення. $\Leftarrow$ Згідно з лемою 4.0.4, 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax + (2t+1)$ складається з однієї вершини, а 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax + 2t$ складається з двох вершин. Отже автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + b_2$ не спряжені в $AutT_2$, а отже і в $FAutT_2$, якщо $b_1 \not\equiv b_2 (\mod 2)$.

$\Rightarrow$ За теоремою 4.0.10 та лемою 4.0.8. □

Теорема 4.0.13. *Автоморфізми $f(x) = x + 2^n$ та $g(x) = x + 2^m$ спряжені в $AutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $m = n$.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні співвідношення:

$$(x + 2^n) = (x + 2^{n-1}, x + 2^{n-1})$$

$$(x + 1) = (x, x + 1) \circ \sigma$$

Отже дерево типу автоморфізму $f(x) = x + 2^n$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу D_{x+2^n}, звідси маємо твердження теореми. □

Теорема 4.0.14. *Автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + 2^n, n < s$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x + 2^m, m < s (s > 1)$ спряжені в $AutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $m = n$.*

Доведення. За теоремою 4.0.6, дерево типу автоморфізму $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + 1, s > 1$ є ланцюгом.

Далі, має місце співвідношення:

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^n) = ((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)+2^{n-1}) =$$

$$= ((2^s(2k+1)+1)x + 2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x + 2^{n-1}((2k+1)2^{s-n}+1))$$

Оскільки число $(2k+1)2^{s-n}+1$ - непарне при $n < s$, то, за лемою 4.0.3 , автоморфізм $(2^s(2k+1)+1)x + 2^{s-1}((2k+1)+2^{n-s})$ спряжен автоморфізму $(2^s(2k+1)+1)x + 2^{n-1}$, і вони мають ізоморфні дерева типу.

Тому, згідно з зауваженням 4.0.1, автоморфізми

$$((2^s(2k+1)+1)x + 2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x + 2^{s-1}(2k+1) + 2^{n-1})$$

та

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1})$$

мають ізоморфні дерева типу.

Отже дерево типу автоморфізму $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s, s > 1$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, звідси маємо твердження теореми.

□

Лема 4.0.9. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s, s > 1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x$ не спряжені в $AutT_2$.*

Доведення. Оскільки має місце співвідношення

$$(2^s(2k+1)+1)x = ((2^s(2k+1)+1)x, (2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)$$

то в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ для довільного n знайдеться вершина n-го рівня, що не є коренем ланцюга - це вершина, помічена автоморфізмом $(2^s(2k+1)+1)x$.

З іншого боку, кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, тому дерева типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$ та $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ не ізоморфні.

Отже автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s, s > 1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x$ не спряжені в $FAutT_2$.

□

Означення 4.0.5. *Означимо функцію $\phi_a(x)$ наступним чином:*

$$\phi_a(b) = \begin{cases} -n-1,\ a=1,\ b=2^n(2t+1); \\ 2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0,\ b=0 \\ (2^n \mod 2^s)+2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0\ b=2^n(2t+1); \end{cases}$$

Теорема 4.0.15. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $\phi_a(b) = \phi_c(d)$.*

Означення 4.0.6. *Назвемо автоморфізм кусково-лінійним, якщо існує $n \in \mathbb{N}$, для якого всі стани n-го рівня цього автоморфізму є лінійними.*

Зауваження 4.0.4. *Для перевірки спряженості в $FAutT_2$ кусково-лінійних автоморфізмів достатньо застосувати теорему 4.0.5 до рівня, на якому усі стани цих* *автоморфізмів лінійні, та теорему 4.0.15 для попарної перевірки спряженості відповідних автоморфізмів, що маркують вершини цього рівня в деревах розміченого типу ціх автоморфізмів.*

Наприклад, має місце наступна теорема:

Теорема 4.0.16. *Два скінчено-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Приклад 4.0.2. *Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми*

$$f(x) = (5x + 3, 9x + 2) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (15x, 3x + 1) \circ \sigma$$

за теоремою 4.0.16 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$5 \cdot 9 = 15 \cdot 3$$

5 Дифференційовні ізометрії

5.1 Кусково-лінійні ізометрії

Теорема 5.1.1. *Скінчено-станова ізометрія кільця Z_2 є дифференційовною в раціональній точці тоді і лише тоді, коли вона є лінійною в певному околі цієї точки.*

Доведення. Нехай x - кінець дерева T_2. $x_{(n)}$ - початок довжини n, $x^{(n)}$ - хвіст кінця x.

$x = x^{(n)}x_{(n)}$.

a - скінчено-становий автоморфізм, що відповідає деякій скінчено-становій ізометрії. Означимо:

$$F_a(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$

Дифференційовність ізометрії a в точці x рівносильно існуванню границі в ультраметриці:

$$\lim_{y \to x} F_a(x, y)$$

Нехай $b_0(a,x), b_1(a,x), ..., b_n(a,x)...$ -послідовність станів вздовж кінця x, $b_n(x) = a_{x_{(n)}}$, а $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x)...$ -послідовність кінців $y_n(x) = x^{(n)}$.

Оскільки a - скінчено-становий, а x раціональний, то послідовності $b_n(a,x)$ та $y_n(x)$ є квазіперіодичними. Отже послідовність пар $(b_n(a,x), y_n(x))$ є квазіперіодичною і існує пара, яка зустрічається нескінчену кількість разів. Позначимо її як (a_c, x_c).

Далі $B(x,r)$ - шар радіусу r з центром в кінці x. Означимо $D(a,x,r)$ як множину значень $F_a(x,y)$, де x - фіксований кінець, а $y \in B(x,r)$:

$$D(a,x,r) = B(x,r) \circ F_a(x,*)$$

Оскільки має місце рівність

$$F_a(x^{(n)}x_{(n)}, y^{(n)}x_{(n)}) = F_{a_{x_{(n)}}}(x,y)$$

то

$$\exists c \forall r D(a,x,r) \supseteq D(a_c, x_c, 1) \qquad (1)$$

Отже, згідно з (1) для існування границі

$$\lim_{y \to x} \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$

необхідно, щоб множина $D(a_c, x_c, 1)$ складалась з єдиного елемента, тому

$$\frac{a(x) - a(x_c)}{x - x_c} = const \Rightarrow a(x) = const * (x - x_c) + a(x_c).$$

□

Лема 5.1.1. *Якщо скінченно-станова ізометрія кільця Z_2 є дифференційовною в раціональній точці, то вона є дифференційовною в кожній точці деякого її околу.*

Доведення. Дійсно, функція, що є лінійною в певному околі є дифференційовною в кожній точці цього околу. □

Теорема 5.1.2. *Скінченно-станова ізометрія f кільця Z_2 є дифференційовною тоді і лише тоді, коли вона є кусково-лінійною функцією.*

Доведення. Оскільки ультраметричний простір Z_2 є компактним, а множина раціональних 2-адичних чисел є всюди щільною в Z_2, то з покриття околами з теореми 5.1.1 можна виділити скінчене підпокриття. Оскільки простір є ультраметричним, то з цього підпокриття можна виділити підпокриття, що складається з куль, що не перетинаються. На кожній такій кулі ізометрія f є лінійною, отже f - кусково-лінійна функція. $\square$

6 Спряженність транзитивно-стабільних автоморфізмів в $FAutT_2$

Відсутність на даний момент необхідної та достатньої умови спряженності автоморфізмів в групі скінченно-автоматних підстановок примушує при дослідженні рівняння спряженності використовувати певні достатні умови(Наприклад, шарово-транзитивні автоморфізми a та b не спряжені, якщо фактор-послідовність для a періодична, а для b - не періодична, або - якщо a та b мають різний ріст). Стабільно-транзитивні автоморфізми дуже близьки по своїх властивостях один до одного, тому цілий клас достатніх умов є не еффективним при дослідженні питання спряженності таких автоморфізмів. В роботі пропонується підхід, що дозволяє побудувати перетин класу спряженності в групі скінченно-автоматних підстановок, що містить автоморфізм adding machine, з множиною транзитивно стабільних автоморфізмів.

Означення 6.0.1. *Означимо фактор n-го рівня шарово-транзитивного автоморфізма*

$$a = (b, c) \circ \sigma$$

індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму a называється автоморфізм $b \circ c$. Фактором n-го рівня автоморфізма a називаеться фактор 1-го рівня для фактора (n-1)-рівня автоморфізма a .

Означення 6.0.2. *Фактор-послідовністью для автоморфізму $a \in AutZ_2$ назвемо послідовність $\{a_n\}$ автоморфізмів, в якій a_n дорівнює фактору n-го рівня для автоморфізму a.*

Означення 6.0.3. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ транзитивно-стабільним, якщо фактор-послідовність для цього автоморфізму є стаціонарною.*

Рекурсивно означимо множини W_x та R_x для шарово-транзитивного автоморфізму $x \in AutT_2$.

Означення 6.0.4. *Тотожній автоморфізм id належить W_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить W_x. Тоді автоморфізм $x \circ t_2$ належить W_x.*

Означення 6.0.5. *Тотожній автоморфізм id належить R_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить R_x. Тоді автоморфізми t_1 та $x \circ t_2$ належать R_x.*

Легко бачити, що W_x належить R_x.

Приклад 6.0.1. *Обчислимо множини W_ε та R_ε для автоморфізма adding machine, що задається співвідношенням $\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$.*

Обчислимо W_ε. Згідно рекурсивної процедури разом з id множині W_ε належить автоморфізм ε. Далі з ε отримаємо ε^2, з ε^2 отримаємо ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині W_ε не має. Отже W_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Обчислимо R_ε. Згідно рекурсивної процедури разом з id множині R_ε належать автоморфізми id та ε. Далі з ε отримаємо id та ε^2, з ε^2 отримаємо ε та ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині R_ε не має. Отже R_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Означення 6.0.6. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ регулярним, якщо множина R_x - скінченна.*

Означення 6.0.7. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ слабко регулярним, якщо множина W_x - скінченна.*

Оскільки W_x належить R_x, то регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Згідно з прикладом 6.0.1 автоморфізм adding machine ε є регулярним.

Лема 6.0.2. *Автоморфізм $b \in AutT_2$ є транзитивно-стабільним тоді, і тільки тоді, коли знайдеться $t \in AutT_2$, такий, що $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай $b = (t, l) \circ \sigma$. Оскільки b - транзитивно-стабільний, то $b = t \circ l$, отже $l = t^{-1} \circ b$.

$\Leftarrow$ $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Оскільки $t \circ t^{-1} \circ b = b$, то b - транзитивно-стабільний. □

Теорема 6.0.3. *Нехай b - транзитивно-стабільний автоморфізм, що задається співвідношенням $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Тоді 0-розв'язком рівняння $\varepsilon^\chi = b$ є автоморфізм, що задається співвідношенням $a = (a, a \circ t)$*

Доведення. Зауважимо, що для автоморфізму $a = (a, a \circ t)$

$$...000 * a = ...000$$

Дійсно,

$$x0 * (a, b) = (x * a)0$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ \varepsilon \circ a = (a, a \circ t)^{-1} \circ \varepsilon \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ (a \circ t, a) \circ \sigma = \\ = (t, t^{-1} \circ (a^{-1} \circ \varepsilon \circ a)) \circ \sigma \end{aligned}$$

Оскільки для шарово-транзитивних, а отже і для стабільно-транзитивних автоморфізмів α та β, 0-розв'язок рівняння $\alpha^{\chi} = \beta$ існує і єдиний, то, згідно з зауваженням та отриманною рівністю, автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є 0- розв'язком рівняння $\varepsilon^{\chi} = b$. □

Природнім є питання, при яких t автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим. Умова скінченно-становості автоморфізму t є необхідною. Дійсно, оскільки автоморфізм a є скінченно-становим, то його права проекція $\pi_R(a) = a \circ t$ є скінченно-становим автоморфізмом, і тому автоморфізм

$$t = a^{-1} \circ (a \circ t) = a^{-1} \circ \pi_R(a)$$

також є скінченно-становим. Але ця умова не є достатньою. Це показують наступні теорема та приклад:

Теорема 6.0.4. *Автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли t - регулярний.*

Доведення. Нехай $\pi_L(a)$ ліва, а $\pi_R(a)$ - права проекція автоморфізму $a = (a, a \circ t)$. Тоді мають місце рівності:

$$\pi_L(a \circ f) = a \circ \pi_L(f)$$

$$\pi_R(a \circ f) = a \circ (t \circ \pi_R(f))$$

Тобто станами автоморфізму a є автоморфізми вигляду $\{a \circ x | x \in R_t\}$. Тому a є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли множина R_t є скінченною. □

Приклад 6.0.2. *Автоморфізм* $a = (a, a \circ 3x)$ *не є скінченно-становим.*

Покажемо, що множина W_{3x} *- нескінченна. Дійсно, вона містить нескінченну кількість автоморфізмів вигляду* $3^n x + c_n$*. Отже автоморфізм* $x * t = 3x$ *є скінченно-становим(зі станами* $3x, 3x+1, 3x+2$*), але не є слабко-регулярним, тому не є і регулярним. За теоремою 6.0.4 автоморфізм* $a = (a, a \circ 3x)$*- нескінченно-становий.*

Наслідком теорем 6.0.3 та 6.0.4 є наступна теорема:

Теорема 6.0.5. *Нехай* b *- транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм* t *- ліва проекція автоморфізма* b*. Автоморфізми* ε *та* b *спряженні в* $FAutT_2$ *тоді, і тільки тоді, коли* t *- регулярний.*

Далі сформулюємо крітерій скінченно-становості для транзитивно-стабільних автоморфізмів.

Теорема 6.0.6. *Нехай* b *- транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм* t *- ліва проекція автоморфізма* b*. Автоморфізм* b *є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли* t *- слабко регулярний.*

Доведення. Очевидно b та b^{-1} мають однакову кількість станів. Покладемо

$$b' = b^{-1} = (b^{-1} \circ t, t^{-1}) \circ \sigma$$

Кожен стан b' з вершиною, що належить кінцю ...000 має вигляд

$$b' \circ x \mid x \in W_t$$

Якщо множина W_t - скінчена, то інші стани мають вигляд ,

$$t^{-1} \circ t_1 \circ ... \circ t_N$$

(де t_i є підстанами автоморфізму t і кількість доданків обмежена деяким натуральним N, що залежить від $|W_t|$), або є підстанами таких станів.

Отже b є скінченно-становим тоді, і лише тоді, коли множина W_t є скінченою.

$\square$

Як було зауважено регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Цікаво отримати приклад слабко регулярного автоморфізму, який не є регулярним. Згідно з теоремами 6.0.5 та 6.0.6 такий автоморфізм дозволяє побудувати приклад скінченно-становового стабільно-транзитивного автоморфізму, що не є спряженим з adding machine в $FAutT_2$. Побудувати слабко регулярний автоморфізм, який не є регулярним дозволяє наступна теорема.

Теорема 6.0.7. *Скінченно-становий автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ є слабко регулярним тоді і тільки тоді, коли автоморфізм t_2 є слабко регулярним.*

Доведення. Достатньо звернути увагу на те, що:

$$W_t = \{id, t, t \circ t_2, ...\} = id \cup \{t \circ x | x \in W_{t_2}\}$$

Тобто множини W_t та W_{t_2} скінченні або нескінченні одночасно. $\square$

Приклад 6.0.3. *Згідно з прикладом 6.0.2 автоморфізм $t' : x \to 3x$ не є регулярним, автоморфізм id є слабко регулярним. Тому автоморфізм $t = (3x, id)$ є слабко-регулярним автоморфізмом, що не є регулярним.*

Маємо приклад двох транзитивно-стабільних скінченно-станових автоморфізмів не спряженних в $FAutT_2$:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$b = ((3x, id), (\frac{1}{3}x, id) \circ b) \circ \sigma$$

Сформулюємо основний результат:

Перетин множини транзитивно-стабільних автоморфізмів з класом спряженності в групі скінченно-станових автоморфізмів, що містить adding machine, складається з транзитивно-стабільних автоморфізмів з регулярною лівою проекцією.

7 Зв'язка груп

Сформулюємо твердження, за допомогою яких буде побудована конструкція зв'язки двох груп.

$A1.$ $a * b = f_b(a) \circ b$

$A2.$ $(G, \circ)$ - група

$A3.$ $(G, *)$ - напівгрупа ($A3a.$ $(G, *)$ - група)

$A4.$ $f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$

$A5.$ $f_c(a \circ b) = f_c(a) \circ f_c(b)$

Сформулюємо твердження

$$T1.\ f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$$

та

$$T1a.\ f_c(f_b(a) \circ b) = f_{f_c(b) \circ c}(a) \circ f_c(b)$$

Теорема 7.0.8. $A1, A2, A3 \vdash T1$

Доведення.

1	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A3$
2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A1, 1$
3	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$2, A2$

□

Теорема 7.0.9. $A1, A2, T1 \vdash A3$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A2, 1$
3	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A1, 2$

□

Теорема 7.0.10. $A2, A5, T1 \vdash A4$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

□

Теорема 7.0.11. $A1, A2, A5, A3 \vdash A4$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

□

Теорема 7.0.12. $A1, A2, A5, A4 \vdash A3$

Сформулюємо твердження $T2 : \forall b\ f_b(x)-$ сюр'єкція.

Теорема 7.0.13. $A1, A2, A3, A4, T2 \vdash A5$

Приклад 7.0.4. $\boxed{a \circ b = f_b(a) \hat{\circ} b}$ *- приклад зв'язки відомих конструкцій множення та антимноження*

$\circ_1 \sim \hat{\circ}, \circ_2 \sim \circ$

$a \circ b$ *- множення в групі*

$a \hat{\circ} b = b \circ a$ *- антимноження в групі*

$f_a(b) = a^{-1} \circ b \circ a$

Приклад 7.0.5. $\boxed{a \hat{\circ} b = f_b(a) \oplus b}$ *- приклад визначення множення автоморфізмів на портретах за допомогою простої операції додавання портретів за модулем 2*

$\circ_1 \sim \oplus, \circ_2 \sim \hat{\circ}$

$a \oplus b$ *- додавання по модулю 2 портретів автоморфізмів a та b*

$a \hat{\circ} b = b \circ a$ *- антимноження в групі автоморфізмів*

$f_a(b)$ *- перестановка кінців портрету автоморфізму a під дією автоморфізму* b^{-1}

Приклад 7.0.6. $\boxed{a * b = f_b(a) \circ b}$

$\circ_1 \sim \circ, \circ_2 \sim *$

$a \circ b$ *- множення в групі автоморфізмів*

Означимо функцію g на множині автоморфізмів вигляду $a = (a, a \circ t)$ наступним чином $g(a) = a^{-1} \circ \pi_R(a) = t$

$a * b = g(g^{-1}(a) \circ g^{-1}(b))$

$f_a(b) = (g^{-1}(a))^{-1} \circ b \circ g^{-1}(a) = b^{g^{-1}(a)}$

Приклад 7.0.7. $\boxed{a * b = (a+1) \cdot b + a = a \cdot b + a + b}$

$\circ_1 \sim +, \circ_2 \sim *$

$a + b$ *- додавання дійсних чисел*

$a * b$ *- асоціативна операція на множині дійсних чисел*

$f_a(b) = (a+1) \cdot b$

Література