Означення 0.0.1. *Означимо* **розмічене дерево типу** D_f *для автоморфізму* $f \in AutZ_2$ *наступним чином.*

- *Корінь дерева помітимо автоморфізмом* f.
- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом* $a = (b, c) \circ \sigma$, *то з n+1-им рівнем цю вершину з'єднує тільки одне ребро. Іншу вершину цього ребра помітимо автоморфізмом* $b \circ c$
- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом* $a = (b, c)$, *то з n+1-им рівнем цю вершину з'єднує два ребра. Іншу вершину одного ребра помітимо автоморфізмом* b, *другого ребра -* c.

Автоморфізм, що помічає вершину $t \in D_f$ *дерева типу позначимо як* $D_f(t)$. *Множину вершин n-го рівня дерева* D *позначимо як* $L_n(D)$.

Зауваження 0.0.1. *За побудовою, піддерево розміченного дерева типу співпадає з розміченним деревом типу автоморфізму, що помічає корінь цього піддерева.*

Лема 0.0.1. *Нехай*

$$a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

$$a' = a_1 \circ a_2, b' = b_1 \circ b_2$$

та a' *і* b' *спряжені в* $FAutT_2$.

Тоді a *і* b *також спряжені в* $FAutT_2$.

Доведення. За умовою леми існує $x \in FAutT2$, такий, що $(a')^x = b'$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченно-становим розв'язком рівняння спряженності

$$a^\chi = b$$

Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$a^{\hat{x}} = (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) =$$

$$= (x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x) \circ \sigma =$$

$$= ((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma = ((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma =$$

$$= (b_1, b_2) \circ \sigma = c$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 - скінченно-станові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченно-становим. Отже $\hat{x} \in FAutT_2$, щ.т.д. □

Теорема 0.0.1. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли існує ізоморфізм α їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого автоморфізми в відповідних вершинах попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2,\ D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Доведення. $\Rightarrow$

Дійсно, нехай $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_1^{x_1} \quad b_2 = a_2^{x_2}$$

і при ізоморфізмі розмічених дерев типу D_a та D_b вершина, що помічена a_1 переходить в вершину, що помічена b_1, а вершина , що помічена a_2 переходить в вершину, що помічена b_2.

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = \sigma \circ (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) \circ \sigma \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_2^{x_2} \quad b_2 = a_1^{x_1}$$

і при ізоморфізмі розмічених дерев типу D_a та D_b вершина, що помічена a_1 переходить в вершину, що помічена b_2, а вершина , що помічена a_2 переходить в вершину, що помічена b_1.

Далі, нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma, a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) = (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_2 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) =$$

$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_2 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

Згідно з вищезазначеним, відповідні автоморфізми дерева типу спряжені станами автоморфізму x.

$\Leftarrow$ Якщо такий ізоморфізм розмічених дерев типу існує, то автоморфізми, якими помічаются корені цих дерев, спряжені, отже автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$.

$\square$

Зауважимо, що достатньо перевірити спряженність автоморфізмів хоча б одного рівня. Дійсно, згідно з лемою 0.0.1, зі спряженності відповідних автоморфізмів $(n+1)$-го рівня виплива є спряженність автоморфізмів n-го рівня. Отже, згідно з теоремою 0.0.1, має місце наступна теорема:

Теорема 0.0.2. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого існує рівень, що всі автоморфізми в відповідних вершинах цього рівня попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2 \ D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Зауважимо, що оскільки у спряженних автоморфізмів їх дерева типу ізоморфні, то в умові теореми 0.0.2 достатньо ізоморфізму $(D_a)_n$ та $(D_b)_n$

Теорема 0.0.3. *Дерево типу автоморфізму вигляду* $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ *є ланцюгом тоді, і лише тоді, коли* $a = 4k + 1, b = 2t + 1$.

Доведення. $\Rightarrow$ Якщо $b = 2t$, то дерево типу для f не є ланцюгом, оскільки

$$(ax + 2t) = \left(ax + t, ax + t + \frac{a-1}{2}\right)$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 0-му рівні.

Якщо $a = 4k + 3, b = 2t + 1$, то

$$(4k + 3)x + (2t + 1)) = ((4k + 3)x + t, (4k + 3)x + t + 1 + 2k + 1) \circ \sigma$$

і 1-й рівень D_f складається з однієї вершини, яка помічена автоморфізмом

$$((4k + 3)x + t) \circ ((4k + 3)x + t + 2k + 1) = (4k + 3)^2 x + t(4k + 3) + t + 1 + 2k + 1 =$$

$$= (4k + 3)^2 x + 2(2t + 1)(k + 1) =$$

$$= ((4k + 3)^2 x + (2t + 1)(k + 1), (4k + 3)^2 x + ((2t + 1) + 4(2k + 1))(k + 1))$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 1-му рівні.

$\Leftarrow$ 1-й рівень дерева типу автоморфізму вигляду $f(x) = (4k + 1)x + (2t + 1)$ складається з однієї вершини. Далі:

$$x * \pi_L(f) = (4k + 1)x + t$$

$$x * \pi_R(f) = (4k + 1)x + (t + 1) + 2k$$

$$x * \pi_L(f) \circ \pi_R(f) = (4k + 1)((4k + 1)x + t) + (t + 1) + 2k =$$

$$= (4k + 1)^2 x + (4k + 2)t + 2k + 1 = (4k' + 1)x + (2t' + 1),$$

$$k' = 4k^2 + 2k, t' = (2k + 1)t + k$$

Отже кожний наступний рівень дерева для цього автоморфізму буде складатись з однієї вершини. $\square$

Лема 0.0.2. *Автоморфізми* $f(x) = ax + 2^n$ *та* $g(x) = ax + 2^n(2b' + 1)$ *спряжені в* $FAutT_2$.

Доведення. Дійсно, автоморфізми f та g спряжені за допомогою скінчено-станового автоморфізму $\chi(x) = (2b' + 1)x$:

$$\left(\frac{1}{2b' + 1}x\right) \circ (ax + 2^n) \circ ((2b' + 1)x) = \left(\frac{a}{2b' + 1}x + 2^n\right) \circ ((2b' + 1)x) =$$

$$= (2b'+1)\left(\frac{a}{2b'+1}x + 2^n\right) = ax + 2^n(2b'+1)$$

□

Лема 0.0.3. *Мають місце наступні співвідношення:*

$$(2k+1)x + 2t = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t)$$

$$(2k+1)x + 2t + 1 = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t + 1) \circ \sigma$$

Доведення. Дійсно, для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2)$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x)}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1)-1}{2}$$

а для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2) \circ \sigma$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x)-1}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1)}{2}$$

Автоморфізм $f(x) = (2k+1)x$ має вигляд

$$f = (f_1, f_2)$$

оскільки залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни. Отже

$$(2k+1)x = ((2k+1)x, (2k+1)x + k)$$

$$x + 2k + 1 = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Оскільки $f(x) = x + 2k$, очевидно, залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни, то

$$\pi_L(x+2k) = \frac{2x+2k}{2} = x + k, \quad \pi_R(x+2k) = \frac{2x+1+2k-1}{2} = x + k$$

тому

$$x + 2k = (x + k, x + k)$$

Для $f(x) = x + 2k + 1$ маємо:

$$x + 2k + 1 = (x + 2k) \circ (x + 1) = (x + k, x + k) \circ (x, x + 1) \circ \sigma = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Отже

$$(2k+1)x + 2t = (2k+1)x \circ (x + 2t) =$$

$$= ((2k+1)x, (2k+1)x+k) \circ (x+t, x+t) =$$

$$= ((2k+1)x+t, (2k+1)x+k+t)$$

Аналогічно отримуємо:

$$(2k+1)x+2t+1 = (2k+1)x \circ (x+2t+1) =$$

$$= ((2k+1)x, (2k+1)x+k) \circ (x+t, x+t+1) \circ \sigma =$$

$$= ((2k+1)x+t, (2k+1)x+k+t+1) \circ \sigma$$

щ.т.д. □

Лема 0.0.4. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $g(x) = ax + (2b' + 1)$.*

Доведення. Дійсно, за лемою 0.0.3

$$(2k+1)x + 2^n t = ((2k+1)x + 2^{n-1}t, (2k+1)x + 2^{n-1}t + k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x + 2^n(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже, якщо $b \neq 0$, то рівно за n рівнів знайдеться вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x + (2t+1)$

Якщо $b = 0, k \neq 0$, то

$$(2k+1)x = ((2k+1)x, (2k+1)x + k)$$

і до автоморфізму $(2k+1)x + k$ можна застосувати попередні міркування. □

Теорема 0.0.4. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $g(x) = (4k' + 1)x + (2t' + 1)$.*

Доведення. Дійсно, за лемою 0.0.4 знайдеться вершина розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $ax + (2t + 1)$.

Оскільки $ax+b$ - ізометрія кільця Z_2, то $a = 2k+1$. Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$, виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 0.0.3, помічена автоморфізмом

$$((2k+1)x+t) \circ ((2k+1)x+k+t+1) = (2k+1)((2k+1)x+t)+k+t+1 =$$

$$= (2k+1)^2x+(2k+1)t+k+t+1 = (4(k^2+k)+1)x+(k+1)(2t+1) =$$

$$= (4k'+1)x+t'$$

За лемою 0.0.4, в піддереві розміченого дерева типу з вершиною, поміченною автоморфізмом $(4k'+1)x+t'$ знайдеться вершина, помічена автоморфізмом $(4k'+1)x+(2t''+1)$, щ.т.д. $\square$

З теореми 0.0.3 та теореми 0.0.4 випливає:

Теорема 0.0.5. *В дереві типу не тотожнього лінійного автоморфізму знайдеться хоча б один ланцюг*

Означення 0.0.2. *Співставимо кожній вершині дерева типу автоморфізму індекс, що дорівнює кількості розгалужень, починаючи з кореня на шляху до цієї вершини. Наприклад, якщо дерево типу є ланцюгом, то індекс кожної його вершини дорівнює 0.*

Зауваження 0.0.2. *Легко бачити, що для ізоморфізму $\phi : D_1 \to D_2$ двох дерев типу індекс образу вершини $\phi(x) \in D_2$ дорівнює індексу прообразу вершини $x \in D_1$.*

Лема 0.0.5. *Для автоморфізму $f(x) = ax+b$ автоморфізм, що маркує вершину n-го рівня розміченного дерева типу має вигляд*

$$a^{2^{n-k+1}}x+b'$$

де k - індекс цієї вершини.

Доведення. Дійсно, за лемою 0.0.3

$$(2k+1)x+t = ((2k+1)x+t, (2k+1)x+t+k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже при розгалуженні автоморфізми, що маркують вершини наступного рівня мають такий же самий коефіцієнт біля x.

Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$ виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 0.0.3, помічена автоморфізмом

$$((2k+1)x+t)\circ((2k+1)x+k+t+1)=(2k+1)^2x+(2k+1)t+k+t+1$$

Отже в цьому випадку автоморфізм, що маркує вершину наступного рівня має коефіцієнт біля x, що дорівнює квадрату попереднього коефіцієнту. Отже отримуємо твердження теореми.

□

Лема 0.0.6. *Два не тотожніх лінійних автоморфізми* $f(x)=ax+b'$ *та* $g(x)=-ax+b''$ *мають неізоморфні дерева типу.*

Доведення. Якщо a має вигляд $4k'+1$ то $-a$ має вигляд $4k''+3$ $(-4k'-1=-4(k'+1)+3)$.

Припустимо, що автоморфізми f та g мають ізоморфні дерева типу :

$$D_f*\alpha=D_g$$

За лемою 0.0.5 для довільного $n\in\mathbb{N}$ всі вершини n-го рівня з індексом n в розміченому дереві типу $D_{(4k'+1)x+b}$ помічені автоморфізмами вигляду $(4k'+1)x+b'$.

Множина таких вершин не є порожньою, оскільки принаймні містить корінь дерева $D_{(4k'+1)x+b}$.

З іншого боку, оскільки автоморфізм $(4k'+1)x+b$ не є тотожнім, то серед вершин n-го рівня з індексом n знайдеться вершина $v\in D_{(4k'+1)x+b}$, помічена автоморфізмом вигляду $(4k'+1)x+(2t+1)$ (інакше в кожній вершині дерева типу маємо розгалуження, що відповідає тотожньому автоморфізму).

За теоремою 0.0.3 піддерево дерева типу $D_{(4k'+1)x+b}$ з коренем в вершині v є ланцюгом.

При ізоморфізмі α дерев $D_{(4k'+1)x+b}$ та $D_{(4k''+3)x+c}$ образ $v*\alpha\in D_{(4k''+3)x+c}$ цієї вершини має такий самий індекс, як і v, і, за лемою 0.0.5, автоморфізм, що помічає вершину $v*\alpha$, має вигляд $(4k''+3)x+c'$.

Але, за теоремою 0.0.3, дерево типу автоморфізму піддерево дерева типу $D_{(4k''+3)x+c}$ з коренем в вершині $v*\alpha$ не є ланцюгом. Отже маємо протиріччя.

$\square$

Теорема 0.0.6. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ можуть бути спряжені лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. Нехай автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$.

За теоремою 0.0.5 в розміченому дереві типу D_f автоморфізму f знайдеться ланцюг. Нехай v - вершина в D_f, що належить цьому ланцюгу. За лемою 0.0.5 автоморфізм, що маркує цю вершину має вигляд $a^{2^{n-k+1}}x + b'$, де k - індекс вершини v, а n - номер рівня, якому вона належить.

Згідно з теоремою 0.0.1, при ізоморфізмі α дерев типу D_f та D_g автоморфізм $a^{2^{n-k+1}}x + b'$, що маркує вершину $v \in D_f$ спряжений в $FAutT_2$ з автоморфізмом, що маркує вершину $v * \alpha \in D_g$.

Згідно з зауваженням 0.0.2 та лемою 0.0.5 автоморфізм, що маркує вершину $v * \alpha \in D_g$ має вигляд $c^{2^{n-k+1}}x + b''$.

Згідно з зауваженням 0.0.1 дерева типу автоморфізмів $a^{2^{n-k+1}}x+b'$ та $c^{2^{n-k+1}}x+b''$ є ланцюгом, а отже є сферично-транзитивними.

За теоремою про спряженість сферично-транзитивних лінійних автоморфізмів в $FAutT_2$ маємо рівність

$$a^{2^{n-k+1}} = c^{2^{n-k+1}}$$

Отже $a = \pm c$, але, оскільки f та g спряжені в $FAutT_2$, то, за лемою 0.0.6, маємо рівність $a = c$, щ.т.д.

$\square$

Теорема 0.0.7. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax + 2^r(2b + 1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d + 1)$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай f та g - спряжені в $FAutT_2$. За теоремою 0.0.6 - $a = c$.

$\Leftarrow$ Нехай $a = c$. Тоді $f(x) = ax + 2^r(2b + 1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d + 1)$ спряжені скінчено-становим автоморфізмом

$$\chi_0(x) = \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x$$

Дійсно

$$\chi_0^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \left(\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x\right) \circ (ax + 2^r(2b+1)) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$

$$= \left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$
$$= \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)\left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) = ax + 2^r(2d+1) =$$
$$= cx + 2^r(2d+1)$$

□

Зауваження 0.0.3. *За теоремою 0.0.6 автоморфізми $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Теорема 0.0.8. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$, $s > 0$ спряжені в $FAutT_2$, якщо $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$.*

Доведення. Оскільки $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$, то

$$\frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)} \in Z_2$$

Автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$ за допомогою скінчено-станового автоморфізму

$$\chi(x) = x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}$$

Дійсно, має місце наступна рівність:

$$\chi^{-1} \circ f \circ \chi = (x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) \circ ((2^s(2k+1)+1)x + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$
$$= ((2^s(2k+1)+1)(x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$
$$= (2^s(2k+1)+1)x - \frac{(2^s(2k+1)+1-1)(b_1 - b_2)}{2^s(2k+1)} + b_1 = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$$

□

Лема 0.0.7. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + 2b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + 2b_2$ спряжені в $FAutT_2$*

Доведення. Є наслідком теореми 0.0.8. □

Теорема 0.0.9. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + b_2$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $b_1 \equiv b_2(\mod 2)$*

Доведення. $\Leftarrow$ Згідно з лемою 0.0.3, 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax+(2t+1)$ складається з однієї вершини, а 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax+2t$ складається з двох вершин. Отже автоморфізми $f(x) = (4k+3)x+b_1$ та $g(x) = (4k+3)x+b_2$ не спряжені в $AutT_2$, а отже і в $FAutT_2$, якщо $b_1 \not\equiv b_2 (\mod 2)$.

$\Rightarrow$ За теоремою 0.0.7 та лемою 0.0.7. □

Теорема 0.0.10. *Автоморфізми $f(x) = x+2^n$ та $g(x) = x+2^m$ спряжені в $AutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $m = n$.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні співвідношення:

$$(x+2^n) = (x+2^{n-1}, x+2^{n-1})$$

$$(x+1) = (x, x+1) \circ \sigma$$

Отже дерево типу автоморфізму $f(x) = x+2^n$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу D_{x+2^n}, звідси маємо твердження теореми. □

Теорема 0.0.11. *Автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^m, m < s (s > 1)$ спряжені в $AutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $m = n$.*

Доведення. За теоремою 0.0.3, дерево типу автоморфізму $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+1, s > 1$ є ланцюгом.

Далі, має місце співвідношення:

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^n) = ((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)+2^{n-1}) =$$

$$= ((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}((2k+1)2^{s-n}+1))$$

Оскільки число $(2k+1)2^{s-n}+1$ - непарне при $n < s$, то, за лемою 0.0.2 , автоморфізм $(2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}((2k+1)+2^{n-s})$ спряжен автоморфізму $(2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}$, і вони мають ізоморфні дерева типу.

Тому, згідно з зауваженням 0.0.1, автоморфізми

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)+2^{n-1})$$

та

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}, (2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1})$$

мають ізоморфні дерева типу.

Отже дерево типу автоморфізму $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + 2^n, n < s, s > 1$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, звідси маємо твердження теореми.

□

Лема 0.0.8. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s, s > 1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x$ не спряжені в $AutT_2$.*

Доведення. Оскільки має місце співвідношення

$$(2^s(2k+1)+1)x = ((2^s(2k+1)+1)x, (2^s(2k+1)+1)x + 2^{s-1}(2k+1)$$

то в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ для довільного n знайдеться вершина n-го рівня, що не є коренем ланцюга - це вершина, помічена автоморфізмом $(2^s(2k+1)+1)x$.

З іншого боку, кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, тому дерева типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$ та $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ не ізоморфні.

Отже автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x+2^n, n < s, s > 1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x$ не спряжені в $FAutT_2$.

□

Означення 0.0.3. *Означимо функцію $\phi_a(x)$ наступним чином:*

$$\phi_a(b) = \begin{cases} -n-1,\ a=1,\ b=2^n(2t+1); \\ 2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0,\ b=0 \\ (2^n \mod 2^s)+2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0\ b=2^n(2t+1); \end{cases}$$

Теорема 0.0.12. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $\phi_a(b) = \phi_c(d)$.*

Означення 0.0.4. *Назвемо автоморфізм кусково-лінійним, якщо існує $n \in \mathbb{N}$, для якого всі стани n-го рівня цього автоморфізму є лінійними.*

Зауваження 0.0.4. *Для перевірки спряженості в $FAutT_2$ кусково-лінійних автоморфізмів достатньо застосувати теорему 0.0.2 до рівня, на якому усі стани цих автоморфізмів лінійні, та теорему 0.0.12 для попарної перевірки спряженості відповідних автоморфізмів, що маркують вершини цього рівня в деревах розміченого типу цих автоморфізмів.*

Наприклад, має місце наступна теорема:

Теорема 0.0.13. *Два скінчено-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Приклад 0.0.1. *Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми*

$$f(x) = (5x + 3, 9x + 2) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (15x, 3x + 1) \circ \sigma$$

за теоремою 0.0.13 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$5 \cdot 9 = 15 \cdot 3$$