

Національний Університет "Києво-Могилянська Академія"

На правах рукопису

Морозов Денис Іванович

УДК 512.54

**Скінченностанова спряженість ізометрій простору 2-адичних чисел**

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико–математичних наук

Київ–2008

# Зміст

<b>Перелік умовних позначень</b>	<b>3</b>
<b>1 Ізометрії кільця <math>Z_2</math></b>	<b>4</b>
1.1 Стискаючи функції кільця $Z_2$ . . . . .	5
1.2 Ізометричні многочлени кільця $Z_2$ . . . . .	12
<b>2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів <math>FAutT_2</math></b>	<b>16</b>
<b>3 Загальні питання спряженості</b>	<b>22</b>
<b>4 Дифференційовні ізометрії</b>	<b>24</b>
4.1 Кусково-лінійні ізометрії . . . . .	24
4.2 Спряженність кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів .	25
<b>5 Спряженність транзитивно-стабільних автоморфізмів в <math>FAutT_2</math></b>	<b>27</b>
<b>6 Зв'язка груп</b>	<b>31</b>

## Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}^+$	- напівгрупа натуральних чисел по додаванню ;
$\bar{\mathbb{N}}^+ = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$	- напівгрупа натуральних чисел з нулем;
$Z_p$	- кільце цілих $p$ -адичних чисел;
$Z_T$	- кільце розширених по дереву $T$ цілих 2-адичних чисел ;
$C_n^{(r)}$	- декартів добуток $r$ копій циклічної групи $C_n$ ;
$G \ltimes H$	- напівпрямий добуток груп , де $H$ – нормальний дільник ;
$(G, X) \wr H$	- вінцевий добуток групи перетворень $(G, X)$ (активний співмножник) та абстрактної групи $H$ ;
$\langle M, g, \dots \rangle$	- підгрупа породжена множиною $M$ та елементами $g, \dots$ ;
$K^+, K^*$	- адитивна та мультиплікативна групи поля ;
$\circ$	- суперпозиція автоморфізмів, функцій.
$T_n$	- кореневе однорідне дерево валентності $n$ ;
$AutT_n$	- група автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності $n$ ;
$FAutT_n$	- підгрупа скінченностанових автоморфізмів групи $AutT_n$ ;
$STAutT_n$	- Множина шарово-транзитивних автоморфізмів групи $AutT_n$ ;
$\zeta(a)$	- кількість різних станів автоморфізму $a$ ;
$C_G(a)$	- централізатор елемента $a$ в групі $G$ ;

# 1 Ізометрії кільця $Z_2$

Зручною для роботи з двійковими автоматами, особливо з нескінченно-становими, є техніка їх представлення у вигляді функцій кільця  $Z_2$ .

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на  $Z_2$ . Кожен автоморфізм дерева  $\alpha$  задає функцію  $f_\alpha$  за правилом: якщо автоморфізм  $\alpha$  переводить кінець  $x$  в кінець  $y$ , то  $f_\alpha(x) = y$ . Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією  $f(x) = x + 1$ .

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, щоб функція задавала автоморфізм необхідно, щоб ця функція пару кінців з однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

**Приклад 1.0.1.** Функція  $f(x) = 2x$  переводить пару *...1111* та *...0000* в пару *...1110* та *...0000* відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція  $f(x) = 2x$  не є автоморфізмом дерева.

**Приклад 1.0.2.** Функція  $f(x) = x^2$  не є автоморфізмом дерева.

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$\begin{aligned} & (2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 = \\ &= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) = \\ &= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1) \end{aligned}$$

то для пари 2-адичних чисел  $x_1, x_2$ , що мають спільний початок ненульової довжини  $n$ , пара  $x_1^2, x_2^2$  має спільний початок довжини як найменше довжини  $n+1$  отже відображення  $f(x) = x^2$  є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Далі наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця  $Z_2$ , що є стискаючими. В цьому класі виділяється підмножина, що відповідає ізометріям, а отже груповим автоматам.

## 1.1 Стискаючи функції кільця $Z_2$

Означимо метрику  $\rho$  на кільці  $Z_2$ . Кожен елемент  $x \in Z_2$  можна єдиним чином представити у вигляді  $x = u * 2^n$ , де  $u$  - обертовний елемент кільця  $Z_2$ .

Далі під фразою  $a \in Z_2$  ділиться на  $b \in Z_2$ , будемо розуміти, що  $\frac{a}{b}$  належить кільцю  $Z_2$ .

**Означення 1.1.1.** Функція  $ord_2(x)$  для  $x \in Z_2$  означається наступним чином. Нехай  $x = u * 2^n$ , де  $u$  - обертовний елемент кільця  $Z_2$ . Тоді  $ord_2(x) = n$ .

**Означення 1.1.2.** Означимо відстань  $\rho(x, y)$  для  $x, y \in Z_2$ .

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ord_2(x-y)}$$

**Означення 1.1.3.** Функція  $f : Z_2 \rightarrow Z_2$  називається ізометрією, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$$

Множину ізометрій позначимо як  $AutZ_2$ .

**Означення 1.1.4.** Ізометрія  $f : Z_2 \rightarrow Z_2$  називається шарово-транзитивною, якщо  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f^k(0)$  має  $2^n$  різних значень по модулю  $2^n$ . Множину шарово-транзитивних ізометрій позначимо, як  $STAutZ_2$

**Лема 1.1.1.** Функція  $f$  є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли дріб  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  належить групі одиниць кільця  $Z_2$  для всіх  $x, y \in Z_2$ .

*Доведення.* Представимо  $f(x) - f(y)$  та  $x - y$  у вигляді:  $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$ ,  $x - y = u_2 * 2^{n_2}$ , де  $u_1, u_2$  обертовні елементи кільця  $Z_2$ . Оскільки  $f$  - ізометрія, то  $n_1 = n_2$ .

Отже маємо:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{u_1}{u_2} = u_1 * u_2^{-1}$$

тобто дріб належить групі одиниць кільця  $Z_2$ .

З іншої сторони, якщо для всіх  $x, y \in Z_2$  добуток  $2^{n_1-n_2} * u_1 * u_2^{-1}$  належить групі одиниць кільця  $Z_2$ , то  $n_1 = n_2$ , тому  $f$  - ізометрія.

**Означення 1.1.5.** Функція  $f : Z_2 \rightarrow Z_2$  називається стискаючою, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$$

Множину стискаючих функцій позначимо як  $EndZ_2$ .

□

**Означення 1.1.6.** Функція  $f : Z_2 \rightarrow Z_2$  називається строго-стискаючою, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

Множину строго-стискаючих функцій позначимо як  $C\text{End}Z_2$ .

**Зауваження 1.1.1.** Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Тоді те що функція  $f(x)$  є

a) ізометрією, рівносильно умові:  $f(x) - f(y)$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$  (дріб  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  належить групі одиниць кільця  $Z_2$ )

b) строго-стискаючою, рівносильно умові:  $f(x) - f(y)$  ділиться на  $2^{n+1}$  (дріб  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  належить  $2 * Z_2$ )

c) стискаючою, рівносильно умові:  $f(x) - f(y)$  ділиться на  $2^n$  (дріб  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$  належить  $Z_2$ )

**Зауваження 1.1.2.** Легко бачити, що об'єднання множини ізометрій з множиною строго стискаючих функцій є власною підмножиною множини стискаючих функцій.

**Теорема 1.1.1.** Якщо  $f$  - стискаюча,  $g$  - стискаюча, то  $f + g$  - стискаюча.

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) &= \\ &= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)) \end{aligned}$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на  $2^n$ , другий доданок також ділиться на  $2^n$ , оскільки  $f$  та  $g$  - стискаючі функції. Отже вся сума ділиться на  $2^n$  і звідси маємо, що  $f + g$  є стискаючою функцією. □

**Теорема 1.1.2.** Якщо  $f$  - ізометрія,  $g$  - строго стискаюча, то  $f + g$  - ізометрія

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) &= \\ &= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)) \end{aligned}$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ , другий доданок ділиться на  $2^{n+1}$ , оскільки  $f$  - ізометрія, а  $g$  - строго стискаюча функція. Отже вся сума ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$  і звідси маємо, що  $f + g$  є ізометрією.  $\square$

**Теорема 1.1.3.** *Якщо  $f$  - строго стискаюча,  $g$  - строго стискаюча, то  $f + g$  - строго стискаюча*

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) &= \\ &= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)) \end{aligned}$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на  $2^{n+1}$ , другий доданок ділиться на  $2^{n+1}$ , оскільки  $f$  та  $g$  - строго стискаючі функції. Отже вся сума ділиться на  $2^{n+1}$ , і звідси маємо, що  $f + g$  є строго стискаючою функцією.  $\square$

**Теорема 1.1.4.** *Якщо  $f$  - ізометрія,  $g$  - ізометрія, то  $f + g$  - строго стискаюча*

*Доведення.*

$$\begin{aligned} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))}{x - y} &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} + \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = a_1 + a_2 \\ a_1 &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \end{aligned}$$

Оскільки  $f$  та  $g$  - ізометрії, то  $a_1$  та  $a_2$  належать множині обертовних елементів кільця  $Z_2$  для всіх  $x, y \in Z_2$ . Отже  $a_1 + a_2$  ділиться на 2 для всіх  $x, y \in Z_2$  і тому  $f + g$  - строго стискаюча функція.  $\square$

**Наслідок 1.1.1.** *Якщо  $f$ ,  $g$  та  $h$  - ізометрії, то  $f + g + h$  - ізометрія*

Дійсно, оскільки за теоремою  $g + h$  - строго стискаюча, а  $f$  - ізометрія, то за теоремою  $f + (g + h)$  - ізометрія.

**Теорема 1.1.5.** *Якщо  $f$  - стискаюча, то  $2 * f$  - строго стискаюча функція.*

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Тоді  $f(x) - f(y)$  також ділиться на  $2^n$ , оскільки  $f$  є стискаючою. Розглянемо різницю

$$2 * f(x) - 2 * f(y) = 2 * (f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності ділиться на  $2^{n+1}$ , отже маємо, що  $2 * f$  є строго стискаючою функцією.  $\square$

**Теорема 1.1.6.** *Якщо  $f$  - стискаюча,  $g$  - стискаюча, то  $f * g$  - стискаюча.*

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Тоді різниці  $f(x) - f(y)$  та  $g(x) - g(y)$  обидві діляться на  $2^n$ , оскільки  $f$  та  $g$  - стискаючі функції.

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) - f(y) * g(y) &= \\ &= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на  $2^n$ . Отже вся сума ділиться на  $2^n$  і звідси маємо, що  $f * g$  є стискаючою функцією.  $\square$

**Теорема 1.1.7.** *Якщо  $f$  - строго стискаюча,  $g$  - строго стискаюча, то  $f * g$  - строго стискаюча.*

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Тоді різниці  $f(x) - f(y)$  та  $g(x) - g(y)$  обидві діляться на  $2^{n+1}$ , оскільки  $f$  та  $g$  - строго стискаючі функції.

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) - f(y) * g(y) &= \\ &= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на  $2^{n+1}$ . Отже вся сума ділиться на  $2^{n+1}$  і звідси маємо, що  $f * g$  є строго стискаючою функцією.  $\square$

**Теорема 1.1.8.** *Нехай  $f$  - ізометрія, а  $g$  - стискаюча функція.*

*Тоді  $f * (2 * g + 1)$  - ізометрія*

*Доведення.* Нехай різниця  $x - y$  ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Тоді різниці  $f(x) - f(y)$  та  $g(x) - g(y)$  обидві діляться на  $2^n$ , але не діляться на  $2^{n+1}$ , оскільки  $f$  та  $g$  - ізометрії.

Розглянемо різницю

$$f(x) * (2 * g(x) + 1) - f(y) * (2 * g(y) + 1) =$$



$$= 2 * f(x) * (g(x) - g(y)) + (2 * g(y) + 1) * (f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на  $2^{n+1}$ , другий доданок ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$ . Отже вся сума ділиться на  $2^n$ , але не ділиться на  $2^{n+1}$  і звідси маємо, що  $f * (2 * g + 1)$  є ізометрією.  $\square$

**Наслідок 1.1.2.** *Нехай  $f$  - ізометрія, а  $g$  - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді  $f * (2 * g + 1)$  - ізометрія*

Дійсно, і ізометрія і строго стискаюча функція є стискаючими.

**Теорема 1.1.9.** *Нехай функції  $f$  та  $g$  є стискаючими.*

*Тоді  $2 * f * g$  - строго стискаюча функція*

*Доведення.* Розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} \frac{2f(x) * g(x)}{x - y} - \frac{2f(y) * g(y)}{x - y} &= \frac{2((f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)))}{x - y} = \\ &= 2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2 \\ a_1 &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \end{aligned}$$

Оскільки  $f$  та  $g$  - стискаючи, то  $a_1$  та  $a_2$  належать  $Z_2$  для всіх  $x, y \in Z_2$ . Отже  $2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2$  ділиться на 2 для всіх  $x, y \in Z_2$  і тому  $2 * f * g$  - строго стискаюча функція.  $\square$

**Наслідок 1.1.3.** *Нехай  $f$  - ізометрія, або строго стискаюча функція,  $g$  - ізометрія, або строго стискаюча функція. Тоді  $2 * f * g$  - строго стискаюча функція.*

**Теорема 1.1.10.** *Якщо  $f$  - ізометрія, а  $g$  - стискаюча функція, то*

$$\frac{f}{2 * g + 1}$$

*- ізометрія.*

*Доведення.* Розглянемо різницю:

$$\frac{f(x)}{2g(x) + 1} - \frac{f(y)}{2g(y) + 1} = \frac{2(f(x)g(y) - f(y)g(x)) + f(x) - f(y)}{(2g(x) + 1)(2g(y) + 1)}$$

Знаменник не впливає на парність дробу, оскільки є добутком обертовних елементів кільця  $Z_2$ .

Розглянемо відношення:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(f(x)g(y) - f(y)g(x)) + f(x) - f(y)}{x - y} = \\
 &= \frac{2((f(x) - f(y))g(y) - f(y)(g(x) - g(y))) + (f(x) - f(y))}{x - y} = \\
 &= \frac{2(f(x) - f(y))g(y)}{x - y} - \frac{2f(y)(g(x) - g(y))}{x - y} + \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \\
 &= (2g(y) + 1) * a_1 - 2f(y) * a_2 \\
 & a_1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}
 \end{aligned}$$

Оскільки  $f$  - ізометрія, а  $g$  - стискаюча функція, то  $a_1$  належить множині обертовних елементів кільця  $Z_2$ , а  $a_2$  належить  $Z_2$  для всіх  $x, y \in Z_2$ . Отже

$$(2g(y) + 1) * a_1 - 2f(y) * a_2$$

належить множині обертовних елементів кільця  $Z_2$ , і тому  $\frac{f}{2*g+1}$  - ізометрія.  $\square$

**Наслідок 1.1.4.** *Нехай  $f$  - ізометрія, а  $g$  - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді  $\frac{f}{2*g+1}$  - ізометрія*

**Теорема 1.1.11.** *Якщо  $f$  - строго стискаюча функція,  $g$  - строго стискаюча функція, то суперпозиція  $f \circ g = g(f(x))$  - строго стискаюча функція.*

*Доведення.* Покажемо, що

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y}$$

ділиться на 2 для всіх  $x, y \in Z_2$ .

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} * \frac{g(f(x)) - g(f(y))}{f(x) - f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб ділиться на 2, оскільки  $f$  - строго стискаюча функція. Другий дріб також ділиться на 2, оскільки  $g$  - строго стискаюча функція. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця  $Z_2$ , і тому суперпозиція  $f \circ g = g(f(x))$  є строго стискаючою функцією.  $\square$

**Теорема 1.1.12.** *Якщо  $f$  - ізометрія,  $g$  - ізометрія, то суперпозиція  $f \circ g = g(f(x))$  - ізометрія.*

*Доведення.* Скористаємось лемою 1.1.1. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y}$$

належить групі одиниць кільця  $Z_2$  для всіх  $x, y \in Z_2$ .

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} * \frac{g(f(x)) - g(f(y))}{f(x) - f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб належить групі одиниць кільця  $Z_2$ , оскільки  $f$  - ізометрія. Другий дріб також належить групі одиниць кільця  $Z_2$ , оскільки  $g$  - ізометрія. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця  $Z_2$ , і тому суперпозиція  $f \circ g = g(f(x))$  є ізометрією.  $\square$

Наслідком попередніх теорем є наступні три теореми:

**Теорема 1.1.13.** *Стискаючи функції на кільці  $Z_2$  утворюють кільце з мультиплікативною одиницею  $f(x) = x$  відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

**Теорема 1.1.14.** *Строго стискаючи функції на кільці  $Z_2$  утворюють кільце без одиниці відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина строго стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

**Теорема 1.1.15.** *Множина ізометрій кільця  $Z_2$  є класом суміжності по підгрупі строго стискаючих функцій відносно операції поелементного додавання в групі стискаючих функцій.*

Наступна теорема потрібна для продовження натуральних функцій до 2-адичних ізометрій.

**Теорема 1.1.16.** *Ізометрія  $\chi$ , визначена на всюди щільній в  $Z_2$  підмножині  $M$ , єдиним чином продовжується до ізометрії  $\bar{\chi}$  на  $Z_2$ .*

*Доведення.* Оскільки ізометрія є непервною функцією, а множина  $M$  є всюду щільною в  $Z_2$ , то для елемента  $x \notin M$  значення  $\bar{\chi}(x)$  визначено єдиним чином, як

$$\bar{\chi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(x_n)$$

де  $\{x_n\}$  послідовність елементів із  $M$ , збіжна к  $x$  в  $Z_2$ .

На множині  $M$  функція  $\bar{\chi}$  співпадає з  $\chi$ .  $\square$

**Теорема 1.1.17.** Шарово-транзитивна функція  $f : Z_2 \rightarrow Z_2$  є ізометрією тоді і лише тоді, коли оператор примитивної рекурсії  $g(x) = I[f](x)(g(0) = 0, g(x+1) = f(g(x)))$  від функції  $f(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  дає функцію  $g$ , неперервне продовження якої на  $Z_2$  є ізометрією кільця  $Z_2$ .

*Доведення.* Якщо  $f$  -шарово-транзитивна ізометрія, то  $I[f](x)$  є 0-розв'язком (0-розв'язок - розв'язок, що переводить 0 в 0) рівняння спряженості  $\varepsilon^x = f$ . Дійсно, якщо  $\chi(0) = 0$ , то  $\chi(n) = f^n(0)$  для  $x \in \mathbb{N}$ . Звідси  $\chi(n+1) = f(f^n(0)) = f(\chi(n))$  і  $\chi(x) = I[f](x)(x \in \mathbb{N})$ . Оскільки  $\mathbb{N}$  всюди щільна в  $Z_2$ , то, згідно з теоремою 1.1.16 існує єдине продовження ізометрії  $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  до ізометрії  $\chi : Z_2 \rightarrow Z_2$ .

З іншого боку, якщо ізометрія  $f$  не є шарово-транзитивною, то замикання множини  $M = \{x | x = f^n(0), n \in \mathbb{N}\}$  є власною підмножиною  $Z_2$ , тобто  $\chi$  не є сюр'єктивним відображенням з  $Z_2$  на  $Z_2$ , і тому не є ізометрією.  $\square$

**Приклад 1.1.1.** Легко бачити, що,  $f(x) = x$  є ізометрією, а  $g(x) = c, c \in Z_2$  строго стискаючою функцією. Тому, згідно з теоремою  $f(x) + g(x) = x + c, c \in Z_2$  є ізометрією.

**Приклад 1.1.2.** Оскільки  $f(x) = x + c, c \in Z_2$  є ізометрією, а для  $c \in Z_2^*$   $f(x) = x + c$  є шарово-транзитивною ізометрією і  $I[x + c](x) = c * x$  то, згідно з теоремою  $g(x) = c * x (c \in Z_2^*)$  є ізометрією.

**Приклад 1.1.3.** Оскільки  $f(x) = a * x (a \in Z_2^*)$  є ізометрією, а  $g(x) = b, b \in Z_2$  строго стискаючою функцією, то, згідно з теоремою лінійна функція  $f(x) + g(x) = a * x + b, c \in Z_2$  є ізометрією.

## 1.2 Ізометричні многочлени кільця $Z_2$

Розглянемо многочлени кільця  $Z_2[x]$ . У цьому розділі буде сформульовано умови, при яких многочлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  буде ізометрією кільця  $Z_2$ . Означимо  $S_n(x_1, x_2)$ , як

$$S_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1} \cdot x_2^k$$

**Приклад 1.2.1.**  $S_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, S_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$  і т.д.

**Означення 1.2.1.** Означимо функцію  $\mu(x) = \bar{x}$ :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \in 2 \cdot Z_2 \\ 1, & x \in Z_2^* \end{cases}$$

**Теорема 1.2.1.**  $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$

*Доведення.*  $S_{2k}$  складається з с парної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  непарні. Тому  $S_{2k}$  є парним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  непарні. Очевидно, що  $S_{2k}$  є парним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  є парними. Крім того  $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$ , тому  $S_{2k}$  є непарним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  - різної парності. Отже таблиця значень для  $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2)$  співпадає з таблицею істинності для  $\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$ .  $\square$

**Теорема 1.2.2.**  $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cup \overline{x_2}$

*Доведення.*  $S_{2k+1}$  складається з с непарної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  непарні. Тому  $S_{2k}$  є непарним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  непарні. Очевидно, що  $S_{2k}$  є парним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  є парними. Крім того  $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$ , тому  $S_{2k}$  є непарним, якщо  $x_1$  та  $x_2$  - різної парності. Отже таблиця значень для  $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2)$  співпадає з таблицею істинності для  $\overline{x_1} \cup \overline{x_2}$ .  $\square$

**Означення 1.2.2.**

$$D_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

**Лема 1.2.1.** Для многочлена  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  має місце рівність

$$D_f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n S_k(x_1, x_2)$$

**Теорема 1.2.3.** Многочлен  $f(x) \in Z_2[x]$  є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли

$$\forall x_1, x_2 \in Z_2 \quad \overline{D_f}(x_1, x_2) = 1$$

**Означення 1.2.3.** Для многочлена  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  означимо  $A_f$  та  $B_f$ :

$$A_f = \mu \left( \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k} \right)$$

$$B_f = \mu \left( \sum_{k=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k-1} \right)$$

**Теорема 1.2.4.** *Має місце наступна рівність:*

$$\overline{D_f}(x_1, x_2) = \overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$$

**Наслідок 1.2.1.** *Згідно з теоремами 1.2.3 та 1.2.4 многочлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли формула  $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$  є тотожньо-істиною.*

**Теорема 1.2.5.**  *$\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$  є тотожньо-істиною тоді, і тільки тоді, коли  $\overline{a_1} = 1$ ,  $A_f = 0$ ,  $B_f = 0$*

*Доведення.* Побудуємо таблицьку вигляду формули  $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$  для різних значень  $\overline{a_1}$ ,  $A_f$ ,  $B_f$ .

$\overline{a_1} = 0, A_f = 0, B_f = 0$	0
$\overline{a_1} = 0, A_f = 0, B_f = 1$	$x_1 \cup x_2$
$\overline{a_1} = 0, A_f = 1, B_f = 0$	$x_1 \oplus x_2$
$\overline{a_1} = 0, A_f = 1, B_f = 1$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1, A_f = 0, B_f = 0$	1
$\overline{a_1} = 1, A_f = 0, B_f = 1$	$\neg(x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1, A_f = 1, B_f = 0$	$\neg(x_1 \oplus x_2)$
$\overline{a_1} = 1, A_f = 1, B_f = 1$	$\neg((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2))$

Таблиці істинності формул  $x_1 \cup x_2$ ,  $x_1 \oplus x_2$  та  $(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$  мають наступний вигляд:

$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \cup x_2$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

Отже формула є тотожньо-хибною для  $\overline{a_1} = 0$ ,  $A_f = 0$ ,  $B_f = 0$ , тотожньо-істиною для  $\overline{a_1} = 1$ ,  $A_f = 0$ ,  $B_f = 0$  і виконливою у всіх інших випадках.  $\square$

**Наслідок 1.2.2.** *Згідно з наслідком 1.2.1 та теоремою 1.2.5 многочлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли коефіцієнт  $a_1$  є непарним 2-адичним числом, сума коефіцієнтів з парними номерами більше 0 є парним 2-адичним числом та сума коефіцієнтів з непарними номерами більше 3 є парним 2-адичним числом*

**Приклад 1.2.2.** Згідно з наслідком 1.2.2 наступні многочлени є ізометріями:

$$f(x) = 5x + 1$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x$$

а многочлени

$$f(x) = 4x + 1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 3x$$

не є ізометріями

## 2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів $FAutT_2$

Відомо, що централізатори шарово-транзитивних елементів в  $AutT_2$  описуються наступною теоремою:

**Теорема 2.0.6.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в  $FAutT_2$ , оскільки результату, аналогічного теоремі 2.0.6 для  $FAutT_2$  немає.

**Означення 2.0.4.** *Позначимо як:*

$x * a$  - ліву дію автоморфізма  $a$  на кінець  $x$  дерева  $T_2$ ,

$a \circ b$  - суперпозицію автоморфізмів  $a$  та  $b$  дерева  $T_2$ ,

$Z_2$  - кільце цілих 2-адичних чисел.

**Лема 2.0.2.** *Для  $p \in Z_2$  має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

*Доведення.* Оскільки  $t * \varepsilon^p = t + p$ , то  $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$ . □

**Теорема 2.0.7.** *Нехай  $\chi_x$  - 0-розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = x$  відносно автоморфізма  $t$ . Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

*Доведення.* Оскільки  $\varepsilon^{\chi_x} = x$ , то має місце співвідношення:

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

Отже за лемою 2.0.2 та рівністю  $0 * \chi_x = 0$  отримуємо:

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) = ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

ч.т.д. □

Має місце наступна лема:



**Лема 2.0.3.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

*Доведення.* За теоремою 2.0.6

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 2.0.7, маємо:

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де  $\chi_x$  - 0-розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = x$  відносно автоморфізма  $t$ .

Оскільки  $\chi_x$  - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

ч.т.д. □

**Означення 2.0.5.** *Означимо множину  $F_p(p \in Z_2)$  наступним чином:*

$$p \in F_p,$$

$$\text{якщо } 2t + 1 \in F_p, \text{ то } t \in F_p, t + 1 \in F_p,$$

$$\text{якщо } 2t \in F_p, \text{ то } t \in F_p.$$

*Будемо казати, що  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ , якщо отримано з  $p$  за  $k$  кроків.*

**Означення 2.0.6.** *Означимо множину  $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$  наступним чином:*

$$m \in P_{m,n},$$

$$\text{якщо } 2t + 1 \in P_{m,n}, \text{ то } t - n \in P_{m,n}, t + n + 1 \in P_{m,n},$$

$$\text{якщо } 2t \in P_{m,n}, \text{ то } t \in P_{m,n}.$$

*Будемо казати, що  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , якщо отримано з  $m$  за  $k$  кроків.*

**Лема 2.0.4.** *Нехай 2-адичне квазіперіодичне число  $p$  дорівнює  $\frac{m}{2n+1}$ , де  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$ . Тоді множини  $P_{m,n}$  та  $F_p$  скінченні або нескінченні одночасно.*

*Доведення.* Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2 \frac{m}{2n+1}$$

то в  $F_p$   $\frac{2m+1}{2n+1}$  породжує  $\frac{m-n}{2n+1}$  та  $\frac{m+n+1}{2n+1}$ , а  $\frac{2m}{2n+1}$  породжує  $\frac{m}{2n+1}$ .

Отже, якщо  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ , то  $t_k(2n+1)$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , і навпаки, якщо  $t'_k$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , то  $\frac{t'_k}{2n+1}$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ . Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

ч.т.д. □

**Лема 2.0.5.** Множина  $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$  є скінченною.

*Доведення.* Згідно з означенням, якщо  $t \in P_{m,n}$ , то або  $\frac{t}{2}$  або  $\frac{t-1}{2} - n$  та  $\frac{t-1}{2} + n + 1$ . Нехай  $t_k$  відноситься до  $k$ -го рівня в  $P_{m,n}$ , тоді має місце рівність:

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a * (2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність  $k$  разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1) \left( \frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2} \right)$$

Оскільки  $|a_i| \leq 1$ , то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left| \frac{m}{2^k} + (2n+1) \left( \frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{m}{2^k} \right| + |2n+1| \leq |m| + 2n+1$$

Отже кількість елементів в множині  $P_{m,n}$  обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leq 2(|m| + 2n+1)$$

тому множина  $P_{m,n}$  є скінченною, ч.т.д. □

**Лема 2.0.6.** Множина  $F_p$  скінченна тоді, і тільки тоді, коли  $p$  - квазіперіодичне число.

*Доведення.*  $\Rightarrow$  Для  $2t+1$  та  $2t$  число  $t$  отримується відкиданням останньої цифри у двійковому запису, отже  $F_p$  містить всі числа, що отримуються з  $p$  відкиданням декількох останніх цифр. Якщо  $p$  не квазіперіодичне, то маємо нескінченну кількість таких чисел, тому  $F_p$  не є скінченною.

$\Leftarrow$   $p$  - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли  $p = \frac{m}{2n+1} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ .

Отже за лемами 2.0.4 та 2.0.5 множина  $F_p$  є скінченною. □

**Теорема 2.0.8.** *Нехай  $\varepsilon$  - adding machine. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

*Доведення.* Оскільки має місце рівність

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 2.0.6, елементи централізатора  $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$  мають вигляд  $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$ . Легко бачити, якщо  $p$  - не квазіперіодичне число, то  $\varepsilon^p$  - нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число  $p$ . Далі, нехай  $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$ , тобто квазіперіодичне. За лемою 2.0.6 множина  $F_p$  - скінченна. З іншої сторони, мають місце рівності:

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму  $\varepsilon^p$  вичерпуються автоморфізмами вигляду

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки  $F_p$  - скінченна, то  $\varepsilon^p$  - скінченно-становий автоморфізм, ч.т.д. □

**Теорема 2.0.9.** *Нехай  $\varepsilon$  - adding machine. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

*Доведення.* За теоремою 2.0.8

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 2.0.2, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

ч.т.д. □

Теореми 2.0.8 та 2.0.9 можна застосувати для дослідження скінченно-станової спряженості з автоморфізмом  $\varepsilon$  - adding machine. Це показує наступна теорема:

**Теорема 2.0.10.** Якщо  $\theta$ -розв'язок  $t_0$  рівняння спряженості відносно  $t$

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінченно-становим, то це рівняння не має скінченно-станових розв'язків.

*Доведення.* Припустимо, що  $t_0$  - нескінченно-становий, а рівняння  $\varepsilon^t = a$  має скінченно-становий розв'язок  $t' : p \rightarrow 0$ , де  $p$  - квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та  $p * \varepsilon^{-p} = 0$ , то за теоремою 2.0.8  $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$ . Оскільки  $t_0$  - нескінченно-становий, а  $\varepsilon^{-p}$  - скінченно-становий, то  $t'$  - нескінченно-становий. Отже маємо протиріччя.  $\square$

**Теорема 2.0.11.** Нехай  $a$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де  $\chi_a$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = a$  відносно  $t$ .

*Доведення.* Має місце наступна рівність:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.0.7 отримаємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1} \circ \chi_a) = p$$

Отже  $a^{(p*\chi_a^{-1})}$  може бути скінченно-становим тільки тоді, коли  $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$ . З іншої сторони за теоремою 2.0.6 усі елементи централізатора  $C_{AutT_2}(a)$  мають вигляд  $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ , оскільки  $\chi_a^{-1}$  - автоморфізм  $Z_2$ . Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

ч.т.д.  $\square$

**Означення 2.0.7.** *Означимо функцію  $h_x : C_{AutZ_2}(x) \rightarrow Z_2$ , де  $x$  - шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм, наступним чином:*

$$h_x(u) = 0 * u$$

Зауважимо, що згідно з означенням

**Теорема 2.0.12.** *Скінченностановий автоморфізм  $x$  є шарово-транзитивним тоді, і тільки тоді, коли  $h_x : C_{AutT_2}(x) \rightarrow Z_2$  - бієкція.*

**Означення 2.0.8.** *Означимо функцію  $Log_x : C_{AutZ_2}(x) \rightarrow Z_2$ , де  $x$  - шарово-транзитивний скінченно-становий автоморфізм, наступним чином:  $Log_x(u) = t$  для  $u = x^t$ .*

**Теорема 2.0.13.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

*Доведення.* Згідно з теоремою 2.0.11 маємо включення:

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

□

**Теорема 2.0.14.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді  $Log_x : C_{AutT_2}(x) \rightarrow Z_2$  - бієкція.*

**Гіпотеза 2.0.1.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

### 3 Загальні питання спряженості

**Означення 3.0.9.** *Означимо функцію  $\varphi : STAutZ_2 \rightarrow STAutZ_2$  наступним чином  $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$ , де  $x_1, x_2$  визначаються співвідношенням  $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

Функція визначена коректно, оскільки, якщо  $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$  є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця  $Z_2$ , то і  $x_1 \circ x_2$  є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця  $Z_2$ .

**Означення 3.0.10.** *Означимо функцію  $\pi_L : AutZ_2 \rightarrow AutZ_2$  наступним чином  $\pi_L(x) = x_1$ , де  $x_1$  визначається співвідношенням  $x = (x_1, x_2)$  або  $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

**Означення 3.0.11.** *Означимо функцію  $\pi_R : AutZ_2 \rightarrow AutZ_2$  наступним чином  $\pi_R(x) = x_2$ , де  $x_2$  визначається співвідношенням  $x = (x_1, x_2)$  або  $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

Очевидно, що для шарово-транзитивного автоморфізма  $a$  має місце рівність  $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$  і значення  $\pi_L(a), \pi_R(a)$  та  $\varphi(a)$  зв'язані наступним співвідношенням:

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a)$$

Крім того, для автоморфізмів  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$  мають місце наступні співвідношення:

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1}, \quad \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1}$$

$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1}, \quad \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1}$$

$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b), \quad \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b)$$

$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a), \quad \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a)$$

**Теорема 3.0.15.** *Нехай  $a, b$  - шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця  $Z_2$ , а  $\chi_0$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $a^{\chi_0} = b$ . Тоді  $\forall n \in \mathbb{N}$  має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b)$$

*Доведення.* Дійсно, оскільки  $a^{\chi_0} = b$ , то  $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0)$$

$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0)$$

Скористаємось методом математичної індукції:

1) Для  $n=0$  маємо рівність  $a^{\chi_0} = b$  і твердження виконується. 2) Нехай для  $n = k$  твердження теореми виконується, тобто  $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$ . Покажемо, що воно також має місце для  $n = k + 1$ .

Оскільки  $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$ , то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і  $\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) = \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)}$ , тому має місце рівність  $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$  і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми.  $\square$

**Теорема 3.0.16.** *Нехай  $a, b$  - шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця  $Z_2$ . Тоді має місце твердження, що  $\chi_0$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $a^{\chi_0} = b$  є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли  $\pi_L^n(\chi_0)$  є скінченностановим для деякого  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Наслідок 3.0.3.** *Нехай  $a, b$  - шарово-транзитивні  $\theta$ -повні скінченно-станові ізометрії кільця  $Z_2$ . Тоді  $a$  та  $b$  спряжені в  $F\text{Aut}T_2$  тоді, і тільки тоді, коли  $\varphi^n(a)$  та  $\varphi^n(b)$  спряжені в  $F\text{Aut}T_2$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ .*

## 4 Дифференційовні ізометрії

### 4.1 Кусково-лінійні ізометрії

**Теорема 4.1.1.** *Скінчено-станова ізометрія кільця  $Z_2$  є дифференційовною в раціональній точці тоді і лише тоді, коли вона є лінійною в певному околі цієї точки.*

*Доведення.* Нехай  $x$  - кінець дерева  $T_2$ .  $x_{(n)}$  - початок довжини  $n$ ,  $x^{(n)}$  - хвіст кінця  $x$ .

$$x = x^{(n)}x_{(n)}.$$

$a$  - скінчено-становий автоморфізм, що відповідає деякій скінчено-становій ізометрії. Означимо:

$$F_a(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$

Дифференційовність ізометрії  $a$  в точці  $x$  рівносильно існуванню границі в ультраметриці:

$$\lim_{y \rightarrow x} F_a(x, y)$$

Нехай  $b_0(a, x), b_1(a, x), \dots, b_n(a, x) \dots$  - послідовність станів вздовж кінця  $x$ ,  $b_n(x) = a_{x_{(n)}}$ , а  $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x) \dots$  - послідовність кінців  $y_n(x) = x^{(n)}$ .

Оскільки  $a$  - скінчено-становий, а  $x$  раціональний, то послідовності  $b_n(a, x)$  та  $y_n(x)$  є квазіперіодичними. Отже послідовність пар  $(b_n(a, x), y_n(x))$  є квазіперіодичною і існує пара, яка зустрічається нескінчену кількість разів. Позначимо її як  $(a_c, x_c)$ .

Далі  $B(x, r)$  - шар радіусу  $r$  з центром в кінці  $x$ . Означимо  $D(a, x, r)$  як множину значень  $F_a(x, y)$ , де  $x$  - фіксований кінець, а  $y \in B(x, r)$ :

$$D(a, x, r) = B(x, r) \circ F_a(x, *)$$

Оскільки має місце рівність

$$F_a(x^{(n)}x_{(n)}, y^{(n)}x_{(n)}) = F_{a_{x_{(n)}}}(x, y)$$

то

$$\exists c \forall r D(a, x, r) \supseteq D(a_c, x_c, 1) \quad (1)$$

Отже, згідно з (1) для існування границі

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$



необхідно, щоб множина  $D(a_c, x_c, 1)$  складалась з єдиного елемента, тому

$$\frac{a(x) - a(x_c)}{x - x_c} = \text{const} \Rightarrow a(x) = \text{const} * (x - x_c) + a(x_c).$$

□

**Лема 4.1.1.** *Якщо скінченно-станова ізометрія кільця  $Z_2$  є дифференційовною в раціональній точці, то вона є дифференційовною в кожній точці деякого її околу.*

*Доведення.* Дійсно, функція, що є лінійною в певному околі є дифференційовною в кожній точці цього околу. □

**Теорема 4.1.2.** *Скінченно-станова ізометрія  $f$  кільця  $Z_2$  є дифференційовною тоді і лише тоді, коли вона є кусочно-лінійною функцією.*

*Доведення.* Оскільки ультраметричний простір  $Z_2$  є компактим, а множина раціональних 2-адичних чисел є всюди щільною в  $Z_2$ , то з покриття околами з теореми 4.1.1 можна виділити скінченне підпокриття. Оскільки простір є ультраметричним, то з цього підпокриття можна виділити підпокриття, що складається з куль, що не перетинаються. На кожній такій кулі ізометрія  $f$  є лінійною, отже  $f$  - кусочно-лінійна функція. □

## 4.2 Спряженість кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів

**Означення 4.2.1.** *Означимо фактор  $n$ -го рівня шарово-транзитивного автоморфізму  $a = (b, c) \circ \sigma$  індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму  $a$  називається автоморфізм  $b \circ c$ . Фактором  $n$ -го рівня автоморфізму  $a$  називається фактор 1-го рівня для фактора  $(n-1)$ -рівня автоморфізму  $a$ .*

**Означення 4.2.2.** *Фактор-послідовністю для автоморфізму  $a \in \text{Aut}Z_2$  назвемо послідовність  $\{a_n\}$  автоморфізмів, в якій  $a_n$  дорівнює фактору  $n$ -го рівня для автоморфізму  $a$ .*

**Лема 4.2.1.** *Для довільної кусочно-лінійної функції існує  $n$ , для якого фактор  $n$ -го рівня є лінійною функцією.*

**Теорема 4.2.1.** *Дві шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії 0-спряжені в  $F\text{Aut}T_2$  тоді, і тільки тоді, коли існує рівень, для якого спряжені в  $F\text{Aut}T_2$  їх фактори.*

**Теорема 4.2.2.** *Дві скінченно-станові шарово-транзитивні кусочно лінійні функції спряжені в  $FAutT_2$  тоді, і тільки тоді, коли вони 0-спряжені в  $FAutT_2$ .*

**Теорема 4.2.3.** *Дві скінченно-станові шарово-транзитивні кусочно лінійні функції спряжені в  $FAutT_2$  тоді, і тільки тоді, коли існує рівень, для якого спряжені в  $FAutT_2$  лінійні функції їх факторів.*

## 5      Спряженність      транзитивно-стабільних автоморфізмів в $FAutT_2$

Відсутність на даний момент необхідної та достатньої умови спряженності автоморфізмів в групі скінченно-автоматних підстановок примушує при дослідженні рівняння спряженності використовувати певні достатні умови (Наприклад, шарово-транзитивні автоморфізми  $a$  та  $b$  не спряжені, якщо фактор-послідовність для  $a$  періодична, а для  $b$  - не періодична, або - якщо  $a$  та  $b$  мають різний ріст). Стабільно-транзитивні автоморфізми дуже близьки по своїх властивостях один до одного, тому цілий клас достатніх умов є не ефективним при дослідженні питання спряженності таких автоморфізмів. В роботі пропонується підхід, що дозволяє побудувати перетин класу спряженності в групі скінченно-автоматних підстановок, що містить автоморфізм adding machine, з множиною транзитивно стабільних автоморфізмів.

**Означення 5.0.3.** *Означимо фактор  $n$ -го рівня шарово-транзитивного автоморфізма*

$$a = (b, c) \circ \sigma$$

*індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму  $a$  називається автоморфізм  $b$  о  $c$ . Фактором  $n$ -го рівня автоморфізма  $a$  називається фактор 1-го рівня для фактора  $(n-1)$ -рівня автоморфізма  $a$ .*

**Означення 5.0.4.** *Фактор-послідовністю для автоморфізму  $a \in AutZ_2$  назовемо послідовність  $\{a_n\}$  автоморфізмів, в якій  $a_n$  дорівнює фактору  $n$ -го рівня для автоморфізму  $a$ .*

**Означення 5.0.5.** *Назвемо автоморфізм  $x \in AutT_2$  транзитивно-стабільним, якщо фактор-послідовність для цього автоморфізму є стаціонарною.*

Рекурсивно означимо множини  $W_x$  та  $R_x$  для шарово-транзитивного автоморфізму  $x \in AutT_2$ .

**Означення 5.0.6.** *Тотожний автоморфізм  $id$  належить  $W_x$ . Нехай автоморфізм  $t = (t_1, t_2)$  або автоморфізм  $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$  належить  $W_x$ . Тоді автоморфізм  $x \circ t_2$  належить  $W_x$ .*

**Означення 5.0.7.** Тотожний автоморфізм  $id$  належить  $R_x$ . Нехай автоморфізм  $t = (t_1, t_2)$  або автоморфізм  $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$  належить  $R_x$ . Тоді автоморфізми  $t_1$  та  $x \circ t_2$  належать  $R_x$ .

Легко бачити, що  $W_x$  належить  $R_x$ .

**Приклад 5.0.1.** Обчислимо множини  $W_\varepsilon$  та  $R_\varepsilon$  для автоморфізма *adding machine*, що задається співвідношенням  $\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$ .

Обчислимо  $W_\varepsilon$ . Згідно рекурсивної процедури разом з  $id$  множині  $W_\varepsilon$  належить автоморфізм  $\varepsilon$ . Далі з  $\varepsilon$  отримуємо  $\varepsilon^2$ , з  $\varepsilon^2$  отримуємо  $\varepsilon^2$ . Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині  $W_\varepsilon$  не має. Отже  $W_\varepsilon$  складається з автоморфізмів  $id$ ,  $\varepsilon$  та  $\varepsilon^2$ .

Обчислимо  $R_\varepsilon$ . Згідно рекурсивної процедури разом з  $id$  множині  $R_\varepsilon$  належать автоморфізми  $id$  та  $\varepsilon$ . Далі з  $\varepsilon$  отримуємо  $id$  та  $\varepsilon^2$ , з  $\varepsilon^2$  отримуємо  $\varepsilon$  та  $\varepsilon^2$ . Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині  $R_\varepsilon$  не має. Отже  $R_\varepsilon$  складається з автоморфізмів  $id$ ,  $\varepsilon$  та  $\varepsilon^2$ .

**Означення 5.0.8.** Назвемо автоморфізм  $x \in AutT_2$  регулярним, якщо множина  $R_x$  - скінченна.

**Означення 5.0.9.** Назвемо автоморфізм  $x \in AutT_2$  слабо регулярним, якщо множина  $W_x$  - скінченна.

Оскільки  $W_x$  належить  $R_x$ , то регулярний автоморфізм є слабо регулярним. Згідно з прикладом 5.0.1 автоморфізм *adding machine*  $\varepsilon$  є регулярним.

**Лема 5.0.2.** Автоморфізм  $b \in AutT_2$  є транзитивно-стабільним тоді, і тільки тоді, коли знайдеться  $t \in AutT_2$ , такий, що  $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$

*Доведення.*  $\Rightarrow$  Нехай  $b = (t, l) \circ \sigma$ . Оскільки  $b$  - транзитивно-стабільний, то  $b = t \circ l$ , отже  $l = t^{-1} \circ b$ .

$\Leftarrow$   $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$ . Оскільки  $t \circ t^{-1} \circ b = b$ , то  $b$  - транзитивно-стабільний.  $\square$

**Теорема 5.0.4.** Нехай  $b$  - транзитивно-стабільний автоморфізм, що задається співвідношенням  $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$ . Тоді 0-розв'язком рівняння  $\varepsilon^x = b$  є автоморфізм, що задається співвідношенням  $a = (a, a \circ t)$

*Доведення.* Зауважимо, що для автоморфізму  $a = (a, a \circ t)$

$$\dots 000 * a = \dots 000$$

Дійсно,

$$x0 * (a, b) = (x * a)0$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ \varepsilon \circ a &= (a, a \circ t)^{-1} \circ \varepsilon \circ (a, a \circ t) = \\ &= (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma \circ (a, a \circ t) = \\ &= (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ (a \circ t, a) \circ \sigma = \\ &= (t, t^{-1} \circ (a^{-1} \circ \varepsilon \circ a)) \circ \sigma \end{aligned}$$

Оскільки для шарово-транзитивних, а отже і для стабільно-транзитивних автоморфізмів  $\alpha$  та  $\beta$ , 0-розв'язок рівняння  $\alpha^x = \beta$  існує і єдиний, то, згідно з зауваженням та отриманною рівністю, автоморфізм  $a = (a, a \circ t) \in 0$ - розв'язком рівняння  $\varepsilon^x = b$ .  $\square$

Природнім є питання, при яких  $t$  автоморфізм  $a = (a, a \circ t)$  є скінченно-становим. Умова скінченно-становості автоморфізму  $t$  є необхідною. Дійсно, оскільки автоморфізм  $a$  є скінченно-становим, то його права проекція  $\pi_R(a) = a \circ t$  є скінченно-становим автоморфізмом, і тому автоморфізм

$$t = a^{-1} \circ (a \circ t) = a^{-1} \circ \pi_R(a)$$

також є скінченно-становим. Але ця умова не є достатньою. Це показують наступні теорема та приклад:

**Теорема 5.0.5.** *Автоморфізм  $a = (a, a \circ t)$  є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли  $t$  - регулярний.*

*Доведення.* Нехай  $\pi_L(a)$  ліва, а  $\pi_R(a)$  - права проекція автоморфізму  $a = (a, a \circ t)$ . Тоді мають місце рівності:

$$\pi_L(a \circ f) = a \circ \pi_L(f)$$

$$\pi_R(a \circ f) = a \circ (t \circ \pi_R(f))$$

Тобто станами автоморфізму  $a$  є автоморфізми вигляду  $\{a \circ x | x \in R_t\}$ . Тому  $a$  є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли множина  $R_t$  є скінченною.  $\square$

**Приклад 5.0.2.** Автоморфізм  $a = (a, a \circ 3x)$  не є скінченно-становим.

Покажемо, що множина  $W_{3x}$  - нескінченна. Дійсно, вона містить нескінченну кількість автоморфізмів вигляду  $3^n x + c_n$ . Отже автоморфізм  $x * t = 3x$  є скінченно-становим (зі станами  $3x, 3x + 1, 3x + 2$ ), але не є слабо-регулярним, тому не є і регулярним. За теоремою 5.0.5 автоморфізм  $a = (a, a \circ 3x)$  - нескінченно-становий.

Наслідком теорем 5.0.4 та 5.0.5 є наступна теорема:

**Теорема 5.0.6.** Нехай  $b$  - транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм  $t$  - ліва проєкція автоморфізма  $b$ . Автоморфізми  $\varepsilon$  та  $b$  спряженні в  $F\text{Aut}T_2$  тоді, і тільки тоді, коли  $t$  - регулярний.

Далі сформулюємо критерій скінченно-становості для транзитивно-стабільних автоморфізмів.

**Теорема 5.0.7.** Нехай  $b$  - транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм  $t$  - ліва проєкція автоморфізма  $b$ . Автоморфізм  $b$  є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли  $t$  - слабо регулярний.

*Доведення.* Очевидно  $b$  та  $b^{-1}$  мають однакову кількість станів. Покладемо

$$b' = b^{-1} = (b^{-1} \circ t, t^{-1}) \circ \sigma$$

Кожен стан  $b'$  з вершиною, що належить кінцю ...000 має вигляд

$$b' \circ x \mid x \in W_t$$

Якщо множина  $W_t$  - скінченна, то інші стани мають вигляд ,

$$t^{-1} \circ t_1 \circ \dots \circ t_N$$

(де  $t_i$  є підстанами автоморфізму  $t$  і кількість доданків обмежена деяким натуральним  $N$ , що залежить від  $|W_t|$ ), або є підстанами таких станів.

Отже  $b$  є скінченно-становим тоді, і лише тоді, коли множина  $W_t$  є скінченою.

□

Як було зауважено регулярний автоморфізм є слабо регулярним. Цікаво отримати приклад слабо регулярного автоморфізму, який не є регулярним. Згідно з теоремами 5.0.6 та 5.0.7 такий автоморфізм дозволяє побудувати приклад скінченно-станового стабільно-транзитивного автоморфізму, що не є спряженим з adding machine в  $F\text{Aut}T_2$ . Побудувати слабо регулярний автоморфізм, який не є регулярним дозволяє наступна теорема.

**Теорема 5.0.8.** *Скінченно-становий автоморфізм  $t = (t_1, t_2)$  є слабо регулярним тоді і тільки тоді, коли автоморфізм  $t_2$  є слабо регулярним.*

*Доведення.* Достатньо звернути увагу на те, що:

$$W_t = \{id, t, t \circ t_2, \dots\} = id \cup \{t \circ x | x \in W_{t_2}\}$$

Тобто множини  $W_t$  та  $W_{t_2}$  скінченні або нескінченні одночасно. □

**Приклад 5.0.3.** *Згідно з прикладом 5.0.2 автоморфізм  $t' : x \rightarrow 3x$  не є регулярним, автоморфізм  $id$  є слабо регулярним. Тому автоморфізм  $t = (3x, id)$  є слабо-регулярним автоморфізмом, що не є регулярним.*

Маємо приклад двох транзитивно-стабільних скінченно-станових автоморфізмів не спряжених в  $FAutT_2$ :

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$b = ((3x, id), (\frac{1}{3}x, id) \circ b) \circ \sigma$$

Сформулюємо основний результат:

Перетин множини транзитивно-стабільних автоморфізмів з класом спряженості в групі скінченно-станових автоморфізмів, що містить adding machine, складається з транзитивно-стабільних автоморфізмів з регулярною лівою проекцією.

## 6 Зв'язка груп

Сформулюємо твердження, за допомогою яких буде побудована конструкція зв'язки двох груп.

A1.  $a * b = f_b(a) \circ b$

A2.  $(G, \circ)$  - група

A3.  $(G, *)$  - напівгрупа (A3a.  $(G, *)$  - група)

A4.  $f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$

A5.  $f_c(a \circ b) = f_c(a) \circ f_c(b)$

Сформулюємо твердження

$$T1. f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$$

та

$$T1a. f_c(f_b(a) \circ b) = f_{f_c(b) \circ c}(a) \circ f_c(b)$$

**Теорема 6.0.9.**  $A1, A2, A3 \vdash T1$

Доведення.	1	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A3$
	2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A1, 1$
	3	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$2, A2$

□

**Теорема 6.0.10.**  $A1, A2, T1 \vdash A3$

Доведення.	1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
	2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A2, 1$
	3	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A1, 2$

□

**Теорема 6.0.11.**  $A2, A5, T1 \vdash A4$

Доведення.	1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
	2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
	3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

□

**Теорема 6.0.12.**  $A1, A2, A5, A3 \vdash A4$

Доведення.	1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
	2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
	3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

□

**Теорема 6.0.13.**  $A1, A2, A5, A4 \vdash A3$

Сформулюємо твердження  $T2 : \forall b f_b(x) - \text{сюр'єкція.}$

**Теорема 6.0.14.**  $A1, A2, A3, A4, T2 \vdash A5$



**Приклад 6.0.4.**  $\boxed{a \circ b = f_b(a) \hat{\circ} b}$  - приклад зв'язки відомих конструкцій множення та антимноження

$$\circ_1 \sim \hat{\circ}, \circ_2 \sim \circ$$

$a \circ b$  - множення в групі

$a \hat{\circ} b = b \circ a$  - антимноження в групі

$$f_a(b) = a^{-1} \circ b \circ a$$

**Приклад 6.0.5.**  $\boxed{a \hat{\circ} b = f_b(a) \oplus b}$  - приклад визначення множення автоморфізмів на портретах за допомогою простої операції додавання портретів за модулем 2

$$\circ_1 \sim \oplus, \circ_2 \sim \hat{\circ}$$

$a \oplus b$  - додавання по модулю 2 портретів автоморфізмів  $a$  та  $b$

$a \hat{\circ} b = b \circ a$  - антимноження в групі автоморфізмів

$f_a(b)$  - перестановка кінців портрету автоморфізму  $a$  під дією автоморфізму  $b^{-1}$

**Приклад 6.0.6.**  $\boxed{a * b = f_b(a) \circ b}$

$$\circ_1 \sim \circ, \circ_2 \sim *$$

$a \circ b$  - множення в групі автоморфізмів

Означимо функцію  $g$  на множині автоморфізмів вигляду  $a = (a, a \circ t)$  наступним чином  $g(a) = a^{-1} \circ \pi_R(a) = t$

$$a * b = g(g^{-1}(a) \circ g^{-1}(b))$$

$$f_a(b) = (g^{-1}(a))^{-1} \circ b \circ g^{-1}(a) = b^{g^{-1}(a)}$$

**Приклад 6.0.7.**  $\boxed{a * b = (a + 1) \cdot b + a = a \cdot b + a + b}$

$$\circ_1 \sim +, \circ_2 \sim *$$

$a + b$  - додавання дійсних чисел

$a * b$  - асоціативна операція на множині дійсних чисел

$$f_a(b) = (a + 1) \cdot b$$

## Література