1 Спряженність кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів

Теорема 1.1 *Нехай* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma,\ y = (y_1, y_2) \circ \sigma$, *тоді*

$$x \sim y \Leftrightarrow x_1 \circ x_2 \sim y_1 \circ y_2$$

Доведення $\Rightarrow$ Нехай $x^{(a_1,a_2)} = y$ або $x^{(a_1,a_2)\circ\sigma} = y$.

Якщо $x^{(a_1,a_2)} = y$, то

$$y_1 = a_1^{-1} \circ x_1 \circ a_2,\ y_2 = a_2^{-1} \circ x_2 \circ a_1 \Rightarrow (x_1 \circ x_2)^{a_1} = y_1 \circ y_2$$

Якщо $x^{(a_1,a_2)\circ\sigma} = y$, то

$$y_1 = a_2^{-1} \circ x_2 \circ a_1,\ y_2 = a_1^{-1} \circ x_2 \circ a_2 \Rightarrow (x_1 \circ x_2)^{a_2} = y_1 \circ y_2$$

$\Leftarrow$ Нехай $(x_1 \circ x_2)^a = y_1 \circ y_2$. Тоді

$$\begin{aligned}
&x^{(a,\ x_1^{-1}\circ a\circ y_1)} = \\
&\quad = (a^{-1},\ y_1^{-1} \circ a^{-1} \circ x_1) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma \circ (a,\ x_1^{-1} \circ a \circ y_1) = \\
&\quad\quad = (y_1, y_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_2)^a) \circ \sigma = \\
&\quad\quad\quad = (y_1, y_2) \circ \sigma = y
\end{aligned}$$

ч.т.д

Побудуємо послідовність автоморфізмів $x^{(n)}$ по шарово-транзитивному автоморфізму x наступним чином:

$$x^{(1)} = x$$

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \circ \sigma$$

$$x^{(n+1)} = x_1^{(n)} \circ x_2^{(n)}$$

Теорема 1.2

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x^{(n)} \sim y^{(n)}$$

Доведення За індукцією і за теоремою 1.1:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{(1)} \sim y^{(1)} \Leftrightarrow x^{(2)} \sim y^{(2)} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^{(n)} \sim y^{(n)}$$

Означення Означимо функцію $Lin^{(n)} : AutT_2 \to Z_2$ наступним чином - якщо всі стани n-го рівня автоморфізму a є лінійними функціями $a_1x + b_1, a_2x + b_2, \ldots, a_{2^n}x + b_{2^n}$, то

$$Lin^{(n)}(a) = \prod_{i=1}^{2^n} a_i$$

в іншому випадку значення $Lin^{(n)}(a)$ є невизначеним.

Лема 1.3 *Якщо автоморфізм $a \in AutT_2$ є кусково-лінійним, то $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$, що значення функції $Lin^{(n)}(a)$ є визначеним.*

Теорема 1.4 *Кусково-лінійні функції a та b є спряженими в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді коли*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ Lin^{(N)}(a) = Lin^{(N)}(b)$$

Теорема 1.5 *Кусково-лінійні функції a та b не є спряженими в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді коли*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ Lin^{(N)}(a) \neq Lin^{(N)}(b)$$

Зауваження Згідно з теоремою о дифференційовних скінченно-станових автоморфізмах теореми 1.4 та 1.5 є крітерієм спряженності таких автоморфізмів.