УДК 512.54

D.I. Morozov, researcher working on habilitation.

Centralizers of layer-transitive elements in the group of finite-state automorphisms of binary rooted tree

In this work the centralizer of layer-transitive finite-state automorphisms investigated.

Key Words: rooted tree, automorphism group, state, centralizer.

Д.І. Морозов, докторант.

Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінчено-станових автоморфізмів бінарного кореневого дерева

В роботі досліджено централізатори шарово-транзитивних скінчено-станових автоморфізмів.

Ключові слова: кореневе дерево, група автоморфізмів, стан, централізатор.

E-mail: denis.morozov178@gmail.com
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук

1 Вступ

У даній статті будемо використовувати наступні означення:

Означення 1.1. T_2 - бінарне кореневе дерево,
$AutT_2$ - група автоморфізмів T_2,
$x{*}a$ - дія автоморфізму a на кінець x дерева T_2,
$a \circ b$ - суперпозиція автоморфізів a та b дерева T_2

Автоморфізм $a \in AutT_2$ індукує дію на піддеревах T_2. Назвемо a скінчено-становим, якщо він індукує скінченну кількість дій на піддеревах.

Означення 1.2. $FAutT_2$ - група скінчено-станових автоморфізмів T_2
Z_2 - кільце цілих 2-адичних чисел,

Ребрам дерева T_2 можна приписати мітки — 0,1 для лівого та правого ребра, що йдуть униз. При цьому кожному нескінченному шляху на дереві, що починається з кореня, буде відповідати нескінченна послідовність нулів та одиниць, яку можна зіставити з цілим 2-адичним числом. Після цього автоморфізми дерева T_2 можуть бути ототожнені з ізометріями кільця цілих 2-адичних чисел Z_2.

Означення 1.3. Ототожнімо автоморфізм a дерева T_2 з функцією $f_a : Z_2 \to Z_2$ наступним чином:

$$x * a = f_a(x)$$

Наприклад, нижченаведений 2-становий автоморфізм ε можна визначити рекурентно:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$id = (id, id)$$

тут вказано, що автоморфізм ε діє на лівому піддереві тотожно, на правому самоподібно, а σ переставляє ці піддерева. З іншого боку, автоморфізм ε може бути визначений як функція $f_\varepsilon(x) = x + 1$, і тому має назву "додавальна машина" (adding machine).

Означення 1.4. Будемо казати, що автоморфізм χ_0 є 0-розв'язком рівняння $a^{\chi_0} = b$, якщо

$$0 * \chi_0 = 0$$

В роботі [1] автором було доведено наступну теорему:

Теорема 1.1. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$, оскільки результату, аналогічного теоремі 1.1 для $FAutT_2$ немає.

2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$

Далі у роботі будемо використовувати наступні означення.

Нехай ε - двостановий автоморфізм adding machine, що задається співвідношеннями:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$id = (id, id)$$

Нехай ε - adding machine, тобто $x * \varepsilon = x + 1$. Тоді має місце наступна лема:

Лема 1. *Для $p \in Z_2$ має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

Доведення. *Оскільки $t * \varepsilon^p = t + p$, то $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$.*

Теорема 2.1. *Нехай χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t. Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

Доведення. *Оскільки $\varepsilon^{\chi_x} = x$, то має місце співвідношення:*

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

Отже за лемою 1 та рівністю $0 * \chi_x = 0$ отримуємо:

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) =$$

$$= ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x) = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

щ.т.д.

Має місце наступна лема:

Лема 2. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

Доведення. *За теоремою 1.1*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 2.1, маємо:

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t.

Оскільки χ_x - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

щ.т.д.

Означення 2.1. Означимо множину $F_p (p \in Z_2)$ наступним чином:

$p \in F_p$,

якщо $2t + 1 \in F_p$, то $t \in F_p, t + 1 \in F_p$,

якщо $2t \in F_p$, то $t \in F_p$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в F_p, якщо отримано з p за k кроків.

Означення 2.2. Означимо множину $P_{m,n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ наступним чином:

$m \in P_{m,n}$,

якщо $2t+1 \in P_{m,n}$, то $t-n \in P_{m,n}$, $t+n+1 \in P_{m,n}$,

якщо $2t \in P_{m,n}$, то $t \in P_{m,n}$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, якщо отримано з m за k кроків.

Лема 3. *Нехай 2-адичне квазіперіодичне число p дорівнює $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$. Тоді множини $P_{m,n}$ та F_p скінчені або нескінчені одночасно.*

Доведення. *Оскільки мають місце рівності:*

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2\frac{m}{2n+1}$$

то в F_p $\frac{2m+1}{2n+1}$ породжує $\frac{m-n}{2n+1}$ та $\frac{m+n+1}{2n+1}$, а $\frac{2m}{2n+1}$ породжує $\frac{m}{2n+1}$.

Отже, якщо t_k належить k-му рівню в F_p, то $t_k(2n+1)$ належить k-му рівню в $P_{m,n}$, і навпаки, якщо t'_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, то $\frac{t'_k}{2n+1}$ належить k-му рівню в F_p. Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

щ.т.д.

Лема 4. *Множина $P_{m,n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ є скінченою.*

Доведення. *Згідно з означенням, якщо* $t \in P_{m,n}$*, то або* $\frac{t}{2}$ *або* $\frac{t-1}{2} - n$ *та* $\frac{t-1}{2} + n + 1$*.Нехай* t_k *відноситься до* k*-го рівня в* $P_{m,n}$*, тоді має місце рівність:*

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a * (2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність k *разів, отримаємо:*

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})$$

Оскільки $|a_i| \leqslant 1$*, то маємо наступну оцінку:*

$$|t_k| = \left| \frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{m}{2^k} \right| + |2n+1| \leqslant |m| + 2n + 1$$

Отже кількість елеметів в множині $P_{m,n}$ *обмежено нерівністю:*

$$|P_{m,n}| \leqslant 2(|m| + 2n + 1)$$

тому множина $P_{m,n}$ *є скінченою, щ.т.д.*

Лема 5. *Множина* F_p *скінчена тоді, і тільки тоді, коли* p *- квазіперіодичне число.*

Доведення. $\Rightarrow$ *Для* $2t+1$ *та* $2t$ *число* t *отримується відкиданням останьої цифри у двійковому запису, отже* F_p *містить всі числа, що отримуються з* p *відкиданням декількох останніх цифр. Якщо* p *не квазіперіодичне, то маємо нескінчену кількість таких чисел, тому* F_p *не є скінченою.*

$\Leftarrow$ p *- квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли* $p = \frac{m}{2n+1} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$*. Отже за лемами 3 та 4 множина* F_p *є скінченою.*

Теорема 2.2. *Нехай* ε *- adding machine. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Доведення. *Оскільки має місце рівність*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 1.1, елементи централізатора $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$ *мають вигляд* $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$*. Легко бачити, якщо* p *- не квазіперіодичне число, то* ε^p *- нескінчено-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число* p*. Далі, нехай* $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$*, тобто квазіперіодичне. За лемою 5 множина* F_p *- скінчена. З іншої сторони, мають місце рівності:*

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму ε^p *вичерпуються автоморфізмами вигляду*

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки F_p *- скінчена, то* ε^p *- скінчено-становий автоморфізм, щ.т.д.*

Теорема 2.3. *Нехай* ε *- adding machine. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. *За теоремою 2.2*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 1, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

щ.т.д.

Теореми 2.2 та 2.3 можна застосувати для дослідження скінчено-станової спряженності з автоморфізмом ε - adding machine. Це показує наступна теорема:

Теорема 2.4. *Якщо 0-розв'язок* t_0 *рівняння спряженності відносно* t

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінчено-становим, то це рівняння не має скінчено-станових розв'язків.

Доведення. *Припустимо, що* t_0 *- нескінчено-становий, а рівняння* $\varepsilon^t = a$ *має скінчено-становий розв'язок* $t' : p \to 0$*, де* p *- квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок единим чином можна представити у вигляді*

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та $p * \varepsilon^{-p} = 0$*, то за теоремою 2.2* $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$*. Оскільки* t_0 *- нескінчено-становий, а* ε^{-p} *- скінчено-становий, то* t' *- нескінчено-становий. Отже маємо протиріччя.*

Теорема 2.5. *Нехай a - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де χ_a - 0-розв'язок рівняння спряженності $\varepsilon^t = a$ відносно t.

Доведення. *Має місце наступна рівність:*

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.1 отримаємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1} \circ \chi_a) = p$$

Отже $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ може бути скінчено-становим тільки тоді, коли $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$. З іншої сторони за теоремою 1.1 усі елементи централізатора $C_{AutT_2}(a)$ мають вигляд $a^{(p*\chi_a^{-1})}$, оскільки χ_a^{-1} - автоморфізм Z_2. Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

щ.т.д.

Теорема 2.6. *Нехай x - шарово-транзитивний скінчено-становий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. *Згідно з теоремою 2.5 маємо включення:*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

References

1. *Морозов Д.І.* Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності p./ Д.І. Морозов// Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2007.– вип.№4 – С.52-54.

Надійшла до редколегії 13.10.2012