2-АДИЧНА МОДЕЛЬ У ВИР“ШЕНН“ СК“НЧЕННО-СТАНОВОЇ СПРЯЖЕНОСТ“ КУСОЧНО-Л“Н“ЙНИХ СФЕРИЧНО-ТРАНЗИТИВНИХ АВТОМОРФ“ЗМ“В КОРЕНЕВОГО Б“НАРНОГО ДЕРЕВА.

к.ф.-м.н. Морозов Денис Иванович

Анотація. Дана стаття дає відповідь на питання скінченно-станової спряженості кусочно-лінійних сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.

1

Результати, отримані при вивченні групи обертовних скінченних автоматів, мають чисельні застосування у computer science - в теорії інфрмації, кодування та формальних мов.

Зауважимо, що група обертовних автоматів ізоморфна групі автоморфізмів однорідного кореневого дерева валентності p, де p - кількість елементів з алфавіту, над яким побудована відповідна автоматна група (див. [1]).

Дослідження групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева за допомогою ізометрій кільця цілих p-адичних чисел надає зручну техніку для вирішення низки проблем, пов'язанних з цією групою. Отримаємо представлення данної групи у 2-адичній моделі наступним чином:

Definition 1. Поставимо у відповідність автоморфізму a дерева T_2 функцію a_f : $Z_2 \to Z_2$:

$$a_f(\hat{x}) = x * a$$

де x - кінець дерева T_2, $\hat{x}$ - відповідне представлення кінця x в кільці Z_2 цілих 2-адичних чисел.

Розглянемо вирішення проблеми скінченно-станової спряженності для сферично-транзитивних кусочно-лінійних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.

В статті [2] було доведено наступні твердження ($FAutT_2$ - група скінченно-станових автоморфізмів кореневого бінарного дерева):

Lemma 1. $f(x) = p_1x + p_2 \in FAutT_2 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$

Theorem 1. *Автоморфізми* $f(x) = (4k+1)x + (2t+1)(k, t \in Z_2)$ *є сферично-транзитивними.*

Theorem 2. *Ізометрії* $f_1(x) = (4k_1+1)x + 1$ *та* $f_2(x) = (4k_2+1)x + 1$ $(k_1, k_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}})$ *спряжені в* $FAutT_2 \Leftrightarrow 4k_1 + 1 = 4k_2 + 1$.

В статті [3] була доведена наступна теорема:

Theorem 3. *Нехай a, b - сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряжені в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Скористаємося цими твердженнями далі.

Наприклад, за теоремою 2 автоморфізми $5x + 1$ та $5x + 3$ спряженні в $FAutT_2$, а автоморфізми $5x + 1$ та $9x + 1$ не спряженні в $FAutT_2$.

Але теорема 2 не дозволяє відповісти на питання, чи спряжені, наприклад, скінченно-станові шарово-транзитивні автоморфізми вигляду $(3x, 15x + 1) \circ \sigma$ та $(5x + 2, 9x + 3) \circ \sigma$, або $(x, 15x + 1) \circ \sigma$ та $(3x, 15x + 1) \circ \sigma$.

Метою данної статті є узагальнення теореми 2 для класу скінченно-станових кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів.

Lemma 2. *Скінченно-станова лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні рівності:

$$(((a-1)t+1)x+bt) \circ (ax+b) = a(((a-1)t+1)x+bt)+b =$$
$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

та

$$(ax+b) \circ (((a-1)t+1)x+bt) = ((a-1)t+1)(ax+b)+bt =$$
$$= a((a-1)t+1)x+b(a-1)t+b+bt =$$
$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

Отже автоморфізм $((a-1)t+1)x+bt$ комутує з автоморфізмом $ax+b(a, b, t \in Z_2)$.

Згідно з лемою 1, при $a, b, t \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$ автоморфізм $((a-1)t+1)x+bt$ є скінченно-становим, а отже належить централізатору $C_{FAutT_2}(ax+b)$.

За теоремою 1 якщо автоморфізм $ax + b$ є сферично-транзитивним, то $a = 4a' + 1, b = 2b' + 1, a', b' \in Z_2$. Оскільки b є обертовним елементом кільця Z_2 та

$$0 * ((4a't+1)x+(2b'+1)t) = (2b'+1)t$$

а $4a't + 1$ є обертовним для довільного $t \in Z_2$ (умова автоморфності $(4a't + 1)x + (2b' + 1)t$), то

$$0 * C_{FAutT_2}(ax+b) = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

□

Lemma 3. *Скінченно-станова ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi^n(a)$ є 0-повною для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для ізометрії $a = (b, c) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$0 * a^{2t} = 2(0 * \varphi(a)^t)$$

$$0 * a^{2t+1} = 2(0 * \varphi(a)^t b) + 1$$

Отже, ізометрія a є 0-повною, тоді, і лише тоді, коли $\varphi(a)$ є 0-повною. Застосувавши отримане твердження n разів отримаємо аналогічне твердження для $\varphi^n(a)$. □

Theorem 4. *Скінченно-станова кусково-лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Для кусково-лінійної сферично-транзитивної ізометрії a існує $n \in \mathbb{N}$, такий, що ізометрія $\varphi^n(a)$ є лінійною. Отже за лемами 2 та 3 маємо твердження теореми. □

Theorem 5. *Два скінченно-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Доведення. За теоремою 2 скінченно-станові сферично-транзитивні втоморфізми $ax + b$ та $cx + d$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $a = c$. Отже, за теоремою 3 та теоремою 4 маємо твердження теореми. □

Розглянемо наступний приклад застосування теореми 5.

Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми

$$f(x) = (3x + 1, 3x) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (9x + 2, x + 7) \circ \sigma$$

за теоремою 5 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$$

Література

[1] *Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский* Автоматы, динамические системы и группы. Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей, Тр. МИАН, 231, Наука, М., 2000, 134–214

[2] *Морозов Д.І.* Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева . Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2008.– вип.№1 –С.40- 43.

[3] *Морозов Д.І.* Скінченно-станова спряженість сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева. Науковий часопис НПУ Драгоманова. Вісник Київського ун-ту. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. -2013. №12.-С.5-12.