1 Спряженність скінченно-станових кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів

Як відомо, питання спряженності для скінченно-станових лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів вирішується наступною теоремою:

Теорема 1.1 *Два лінійних скінченно-станових шарово-транзитивних автоморфізма дерева T_2 спряженні в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли мають однакові лінійні коеффіціенти.*

Приклад За теоремою 1.1 автоморфізми $5x + 1$ та $5x + 3$ спряженні в $FAutT_2$, а автоморфізми $5x + 1$ та $9x + 1$ не спряженні в $FAutT_2$.

Але теорема 1.1 не дозволяє відповісти на питання, чи спряжені, наприклад, скінченно-станові шарово-транзитивні автоморфізми вигляду $(3x, 15x+1)\circ\sigma$ та $(5x+2, 9x+3)\circ\sigma$, або $(x, 15x+1)\circ\sigma$ та $(3x, 15x+1)\circ\sigma$.

Метою данної статті є узагальнення теореми 1.1 для класу скінченно-станових кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів.

Означення Поставимо у відповідність автоморфізму a дерева T_2 функцію $a_f : Z_2 \to Z_2$:

$$a_f(\hat{x}) = x * a$$

де x - кінець дерева T_2, $\hat{x}$ - відповідне представлення кінця x в кільці Z_2 цілих 2-адичних чисел.

Означення Назвемо автоморфізм a дерева T_2 кусково-лінійним, якщо відповідна йому функція $a_f : Z_2 \to Z_2$ будується наступним чином: Z_2 розбивається на скінченну кількість околів, на кожному з яких функція $a_f : Z_2 \to Z_2$ є лінійною.

Теорема 1.2 *Нехай* $x = (x_1, x_2)\circ\sigma,\ y = (y_1, y_2)\circ\sigma$, *тоді*

$$x \sim y \Leftrightarrow x_1 \circ x_2 \sim y_1 \circ y_2$$

Доведення $\Rightarrow$ Нехай $x^{(a_1,a_2)} = y$ або $x^{(a_1,a_2)\circ\sigma} = y$.

Якщо $x^{(a_1,a_2)} = y$, то

$$y_1 = a_1^{-1}\circ x_1 \circ a_2,\ y_2 = a_2^{-1}\circ x_2\circ a_1 \Rightarrow (x_1\circ x_2)^{a_1} = y_1 \circ y_2$$

Якщо $x^{(a_1,a_2)\circ\sigma} = y$, то

$$y_1 = a_2^{-1}\circ x_2\circ a_1,\ y_2 = a_1^{-1}\circ x_2\circ a_2 \Rightarrow (x_1\circ x_2)^{a_2} = y_1\circ y_2$$

$\Leftarrow$ Нехай $(x_1 \circ x_2)^a = y_1 \circ y_2$. Тоді

$$x^{(a,\ x_1^{-1} \circ a \circ y_1)} =$$
$$= (a^{-1},\ y_1^{-1} \circ a^{-1} \circ x_1) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma \circ (a,\ x_1^{-1} \circ a \circ y_1) =$$
$$= (y_1, y_1^{-1} \circ (x_1 \circ x_2)^a) \circ \sigma =$$
$$= (y_1, y_2) \circ \sigma = y$$

ч.т.д

Побудуємо послідовність автоморфізмів $x^{(n)}$ по шарово-транзитивному автоморфізму x наступним чином:

$$x^{(1)} = x$$
$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \circ \sigma$$
$$x^{(n+1)} = x_1^{(n)} \circ x_2^{(n)}$$

Теорема 1.3
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x^{(n)} \sim y^{(n)}$$

Доведення За індукцією і за теоремою 1.2:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{(1)} \sim y^{(1)} \Leftrightarrow x^{(2)} \sim y^{(2)} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^{(n)} \sim y^{(n)}$$

Означення Означимо функцію $Lin^{(n)} : AutT_2 \to Z_2$ наступним чином - якщо всі стани n-го рівня автоморфізму a є лінійними функціями $a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_{2^n}x + b_{2^n}$, то

$$Lin^{(n)}(a) = \prod_{i=1}^{2^n} a_i$$

в іншому випадку значення $Lin^{(n)}(a)$ є невизначеним.

Лема 1.4 *Якщо автоморфізм $a \in AutT_2$ є кусково-лінійним, то $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$, що значення функції $Lin^{(n)}(a)$ є визначеним.*

Доведення Легко бачити, якщо $a \in AutT_2$ є кусково-лінійним, то існує рівень, для якого всі стани є лінійними функціями, отже значення функції $Lin^{(n)}(a)$ є визначеним.

Теорема 1.5 *Кусково-лінійні функції a та b є спряженими в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді коли*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ Lin^{(N)}(a) = Lin^{(N)}(b)$$

Доведення Оскільки функції a та b є кусково-лінійними, то існує N, для якого всі стани N-го рівня a та b є лінійними функціями.

Отже $x * a^{(N)} = c_1 x + d_1,\ x * b^{(N)} = c_2 x + d_2$, де

$$c_1 = Lin^{(N)}(a)$$

$$c_2 = Lin^{(N)}(b)$$

За теоремою 1.1 про спряженність лінійних функцій та теоремою 1.3 функції a та b є спряженими в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді коли

$$\exists N \in \mathbb{N},\ Lin^{(N)}(a) = Lin^{(N)}(b)$$

ч.т.д.

Технічно зручним при перевірці спряженності скінченно-станових шарово-транзитвних автоморфізмів є наступне переформулювання теореми 1.1:

Теорема 1.6 *Кусково-лінійні функції a та b не є спряженими в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді коли*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ Lin^{(N)}(a) \neq Lin^{(N)}(b)$$

Приклад Скінченно-станові шарово-транзитивні автоморфізми

$$(3x, 15x + 1) \circ \sigma$$

$$(5x + 2, 9x + 3) \circ \sigma$$

є спряженними в $FAutT_2$ за теоремою 1.5.

Автоморфізми

$$(x, 13x + 1) \circ \sigma$$

$$(x, 17x + 1) \circ \sigma$$

не є спряженними в $FAutT_2$ за теоремою 1.6 .