

УДК 512.54

D.I. Morozov, researcher working on  
habilitation.

## Centralizers of layer-transitive elements in the group of finite-state automorphisms of binary rooted tree

*In this work the centralizer of layer-transitive  
finite-state automorphisms investigated.*

*Key Words: rooted tree, automorphism  
group, state, centralizer.*

E-mail: denis.morozov178@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук

### 1 Вступ

Відомо, що централізатори шарово-транзитивних елементів в  $AutT_2$  описуються наступною теоремою([1]):

**Теорема 1.1.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в  $FAutT_2$ , оскільки результату, аналогічного теоремі 1.1 для  $FAutT_2$  немає.

### 2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$

Далі у роботі будемо використовувати наступні означення.

*Означення 2.1.* Позначимо як:

$x * a$  - ліву дію автоморфізма  $a$  на кінець  $x$  дерева  $T_2$ ,

$a \circ b$  - суперпозицію автоморфізмів  $a$  та  $b$  дерева  $T_2$ ,

$Z_2$  - кільце цілих 2-адичних чисел.

**Лема 1.** *Для  $p \in Z_2$  має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

**Доведення.** *Оскільки  $t * \varepsilon^p = t + p$ , то  $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$ .*

Д.І. Морозов, докторант.

## Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінчено-станових автоморфізмів бінарного кореневого дерева

*В роботі досліджено централізатори шарово-транзитивних скінчено-станових автоморфізмів.*

*Ключові слова: кореневе дерево, група автоморфізмів, стан, централізатор.*

**Теорема 2.1.** *Нехай  $\chi_x$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = x$  відносно автоморфізма  $t$ . Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

**Доведення.** *Оскільки  $\varepsilon^{x^p} = x$ , то має місце співвідношення:*

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

*Отже за лемою 1 та рівністю  $0 * \chi_x = 0$  отримуємо:*

$$\begin{aligned} 0 * x^p &= 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) = \\ &= ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x \end{aligned}$$

*щ.т.д.*

Має місце наступна лема:

**Лема 2.** *Нехай  $x$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

**Доведення.** *За теоремою 1.1*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

*Далі, скориставшись теоремою 2.1, маємо:*

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

*де  $\chi_x$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = x$  відносно автоморфізма  $t$ .*

*Оскільки  $\chi_x$  - автоморфізм, то*

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

*щ.т.д.*

**Означення 2.2.** Означимо множину  $F_p (p \in \mathbb{Z}_2)$  наступним чином:

$p \in F_p$ ,  
якщо  $2t + 1 \in F_p$ , то  $t \in F_p, t + 1 \in F_p$ ,  
якщо  $2t \in F_p$ , то  $t \in F_p$ .

Будемо казати, що  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ , якщо отримано з  $p$  за  $k$  кроків.

**Означення 2.3.** Означимо множину  $P_{m,n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$  наступним чином:

$m \in P_{m,n}$ ,  
якщо  $2t + 1 \in P_{m,n}$ , то  $t - n \in P_{m,n}, t + n + 1 \in P_{m,n}$ ,  
якщо  $2t \in P_{m,n}$ , то  $t \in P_{m,n}$ .

Будемо казати, що  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , якщо отримано з  $m$  за  $k$  кроків.

**Лема 3.** Нехай 2-адичне квазіперіодичне число  $p$  дорівнює  $\frac{m}{2n+1}$ , де  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$ . Тоді множини  $P_{m,n}$  та  $F_p$  скінчені або нескінчені одночасно.

**Доведення.** Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2\frac{m}{2n+1}$$

то в  $F_p$   $\frac{2m+1}{2n+1}$  породжує  $\frac{m-n}{2n+1}$  та  $\frac{m+n+1}{2n+1}$ , а  $\frac{2m}{2n+1}$  породжує  $\frac{m}{2n+1}$ .

Отже, якщо  $t_k$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ , то  $t_k(2n+1)$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , і навпаки, якщо  $t'_k$  належить  $k$ -му рівню в  $P_{m,n}$ , то  $\frac{t'_k}{2n+1}$  належить  $k$ -му рівню в  $F_p$ . Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

щ.т.д.

**Лема 4.** Множина  $P_{m,n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$  є скінченою.

**Доведення.** Згідно з означенням, якщо  $t \in P_{m,n}$ , то або  $\frac{t}{2}$  або  $\frac{t-1}{2} - n$  та  $\frac{t-1}{2} + n + 1$ . Нехай  $t_k$  відноситься до  $k$ -го рівня в  $P_{m,n}$ , тоді має місце рівність:

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a * (2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність  $k$  разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1)\left(\frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2}\right)$$

Оскільки  $|a_i| \leq 1$ , то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left| \frac{m}{2^k} + (2n+1)\left(\frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2}\right) \right| \leq \left| \frac{m}{2^k} \right| + |2n+1| \leq |m| + 2n+1$$

Отже кількість елементів в множині  $P_{m,n}$  обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leq 2(|m| + 2n+1)$$

тому множина  $P_{m,n}$  є скінченою, щ.т.д.

**Лема 5.** Множина  $F_p$  скінчена тоді, і тільки тоді, коли  $p$  - квазіперіодичне число.

**Доведення.**  $\Rightarrow$  Для  $2t+1$  та  $2t$  число  $t$  отримується відкиданням останньої цифри у двійковому запису, отже  $F_p$  містить всі числа, що отримуються з  $p$  відкиданням декількох останніх цифр. Якщо  $p$  не квазіперіодичне, то маємо нескінчену кількість таких чисел, тому  $F_p$  не є скінченою.

$\Leftarrow$   $p$  - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли  $p = \frac{m}{2n+1} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ . Отже за лемами 3 та 4 множина  $F_p$  є скінченою.

**Теорема 2.2.** Нехай  $\varepsilon$  - adding machine. Тоді

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in \mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

**Доведення.** Оскільки має місце рівність

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 1.1, елементи централізатора  $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$  мають вигляд  $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$ . Легко бачити, якщо  $p$  - не квазіперіодичне число, то  $\varepsilon^p$  - нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число  $p$ . Далі, нехай  $p \in \mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Q}$ , тобто квазіперіодичне. За лемою 5 множина  $F_p$  - скінчена. З іншої сторони, мають місце рівності:

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму  $\varepsilon^p$  вичерпуються автоморфізмами вигляду

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки  $F_p$  - скінчена, то  $\varepsilon^p$  - скінченно-становий автоморфізм, щ.т.д.

**Теорема 2.3.** Нехай  $\varepsilon$  - adding machine. Тоді

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

**Доведення.** За теоремою 2.2

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 1, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

щ.т.д.

Теорема 2.2 та 2.3 можна застосувати для дослідження скінчено-станової спряженості з автоморфізмом  $\varepsilon$  - adding machine. Це показує наступна теорема:

**Теорема 2.4.** Якщо  $\theta$ -розв'язок  $t_0$  рівняння спряженості відносно  $t$

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінчено-становим, то це рівняння не має скінчено-станових розв'язків.

**Доведення.** Припустимо, що  $t_0$  - нескінченно-становий, а рівняння  $\varepsilon^t = a$  має скінченно-становий розв'язок  $t'$  :  $p \rightarrow 0$ , де  $p$  - квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та  $p * \varepsilon^{-p} = 0$ , то за теоремою 2.2  $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$ . Оскільки  $t_0$  - нескінченно-становий, а  $\varepsilon^{-p}$  - скінченно-становий, то  $t'$  - нескінченно-становий. Отже маємо протиріччя.

**Теорема 2.5.** Нехай  $a$  - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де  $\chi_a$  -  $\theta$ -розв'язок рівняння спряженості  $\varepsilon^t = a$  відносно  $t$ .

**Доведення.** Має місце наступна рівність:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.1 отримуємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1} \circ \chi_a) = p$$

Отже  $a^{(p*\chi_a^{-1})}$  може бути скінчено-становим тільки тоді, коли  $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$ . З іншої сторони за теоремою 1.1 усі елементи централізатора  $C_{AutT_2}(a)$  мають вигляд  $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ , оскільки  $\chi_a^{-1}$  - автоморфізм  $Z_2$ . Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

щ.т.д.

**Теорема 2.6.** Нехай  $x$  - шарово-транзитивний скінченно-становий автоморфізм. Тоді

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

**Доведення.** Згідно з теоремою 2.5 маємо включення:

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

## References

1. Морозов Д.І. Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності  $p$ .// Д.І. Морозов// Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2007.- вип.№4 - С.52-54.

Надійшла до редколегії 13.10.2012