

УДК 512.54

D.I. Morozov, researcher working on
habilitation.

Centralizers of layer-transitive elements in the group of finite-state automorphisms of binary rooted tree

*In this work the centralizer of layer-transitive
finite-state automorphisms investigated.*

*Key Words: rooted tree, automorphism
group, state, centralizer.*

E-mail: denis.morozov178@gmail.com

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук

1 Вступ

Відомо, що централізатори шарово-транзитивних елементів в $AutT_2$ описуються наступною теоремою([1]):

Теорема 1.1. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$, оскільки результату, аналогічного теоремі 1.1 для $FAutT_2$ немає.

2 Централізатори шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$

Далі у роботі будемо використовувати наступні означення.

Означення 2.1. Позначимо як:

$x*a$ - дію автоморфізма a на кінець x дерева T_2 ,

$a \circ b$ - суперпозицію автоморфізмів a та b дерева T_2 ,

Z_2 - кільце цілих 2-адичних чисел.

Нехай ε - двостановий автоморфізм adding machine, що задається співвідношеннями:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$id = (id, id)$$

Д.І. Морозов, докторант.

Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінчено-станових автоморфізмів бінарного кореневого дерева

В роботі досліджено централізатори шарово-транзитивних скінчено-станових автоморфізмів.

Ключові слова: кореневе дерево, група автоморфізмів, стан, централізатор.

Лема 1. *Для $p \in Z_2$ має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

Доведення. *Оскільки $t * \varepsilon^p = t + p$, то $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$.*

Теорема 2.1. *Нехай χ_x - θ -розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t . Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

Доведення. *Оскільки $\varepsilon^{\chi_x} = x$, то має місце співвідношення:*

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

*Отже за лемою 1 та рівністю $0 * \chi_x = 0$ отримуємо:*

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) =$$

$$= ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

щ.т.д.

Має місце наступна лема:

Лема 2. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

Доведення. За теоремою 1.1

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 2.1, маємо:

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де χ_x - θ -розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t .

Оскільки χ_x - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

щ.т.д.

Означення 2.2. Означимо множину $F_p(p \in Z_2)$ наступним чином:

$$p \in F_p,$$

$$\text{якщо } 2t + 1 \in F_p, \text{ то } t \in F_p, t + 1 \in F_p,$$

$$\text{якщо } 2t \in F_p, \text{ то } t \in F_p.$$

Будемо казати, що t_k належить k -му рівню в F_p , якщо отримано з p за k кроків.

Означення 2.3. Означимо множину $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ наступним чином:

$$m \in P_{m,n},$$

$$\text{якщо } 2t + 1 \in P_{m,n}, \text{ то } t - n \in P_{m,n}, t + n + 1 \in$$

$$P_{m,n},$$

$$\text{якщо } 2t \in P_{m,n}, \text{ то } t \in P_{m,n}.$$

Будемо казати, що t_k належить k -му рівню в $P_{m,n}$, якщо отримано з m за k кроків.

Лема 3. Нехай 2 -адичне квазіперіодичне число p дорівнює $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$. Тоді множини $P_{m,n}$ та F_p скінчені або нескінчені одночасно.

Доведення. Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2 \frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2 \frac{m}{2n+1}$$

то в F_p $\frac{2m+1}{2n+1}$ породжує $\frac{m-n}{2n+1}$ та $\frac{m+n+1}{2n+1}$, а $\frac{2m}{2n+1}$ породжує $\frac{m}{2n+1}$.

Отже, якщо t_k належить k -му рівню в F_p , то $t_k(2n+1)$ належить k -му рівню в $P_{m,n}$, і навпаки, якщо t'_k належить k -му рівню в $P_{m,n}$, то $\frac{t'_k}{2n+1}$ належить k -му рівню в F_p . Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

щ.т.д.

Лема 4. Множина $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ є скінченною.

Доведення. Згідно з означенням, якщо $t \in P_{m,n}$, то або $\frac{t}{2}$ або $\frac{t-1}{2} - n$ та $\frac{t-1}{2} + n + 1$. Нехай t_k відноситься до k -го рівня в $P_{m,n}$, тоді має місце рівність:

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a * (2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність k разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1) \left(\frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2} \right)$$

Оскільки $|a_i| \leq 1$, то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left| \frac{m}{2^k} + (2n+1) \left(\frac{a_0}{2^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{2} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{m}{2^k} \right| + |2n+1| \leq |m| + 2n+1$$

Отже кількість елементів в множині $P_{m,n}$ обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leq 2(|m| + 2n+1)$$

тому множина $P_{m,n}$ є скінченною, щ.т.д.

Лема 5. Множина F_p скінчена тоді, і тільки тоді, коли p - квазіперіодичне число.

Доведення. \Rightarrow Для $2t+1$ та $2t$ число t отримується відкиданням останньої цифри у двійковому запису, отже F_p містить всі числа, що отримуються з p відкиданням декількох останніх цифр. Якщо p не квазіперіодичне, то маємо нескінчену кількість таких чисел, тому F_p не є скінченною.

\Leftarrow p - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли $p = \frac{m}{2n+1}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$. Отже за лемами 3 та 4 множина F_p є скінченною.

Теорема 2.2. Нехай ε - adding machine. Тоді

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Доведення. Оскільки має місце рівність

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 1.1, елементи централізатора $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$ мають вигляд $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$. Легко бачити, якщо p - не квазіперіодичне число, то ε^p - нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не

квазіперіодичне число p . Далі, нехай $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$, тобто квазіперіодичне. За лемою 5 множина F_p - скінчена. З іншої сторони, мають місце рівності:

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму ε^p вичерпуються автоморфізмами вигляду

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки F_p - скінчена, то ε^p - скінчено-становий автоморфізм, *ш.т.д.*

Теорема 2.3. Нехай ε - adding machine. Тоді

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. За теоремою 2.2

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 1, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

ш.т.д.

Теореми 2.2 та 2.3 можна застосувати для дослідження скінчено-станової спряженості з автоморфізмом ε - adding machine. Це показує наступна теорема:

Теорема 2.4. Якщо 0-розв'язок t_0 рівняння спряженості відносно t

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінчено-становим, то це рівняння не має скінчено-станових розв'язків.

Доведення. Припустимо, що t_0 - нескінчено-становий, а рівняння $\varepsilon^t = a$ має скінчено-становий розв'язок t' : $p \rightarrow 0$, де p - квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та $p * \varepsilon^{-p} = 0$, то за теоремою 2.2 $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$. Оскільки t_0 - нескінчено-становий, а ε^{-p} - скінчено-становий, то t' - нескінчено-становий. Отже маємо протиріччя.

Теорема 2.5. Нехай a - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де χ_a - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = a$ відносно t .

Доведення. Має місце наступна рівність:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.1 отримаємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1} \circ \chi_a) = p$$

Отже $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ може бути скінчено-становим тільки тоді, коли $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$. З іншої сторони за теоремою 1.1 усі елементи централізатора $C_{AutT_2}(a)$ мають вигляд $a^{(p*\chi_a^{-1})}$, оскільки χ_a^{-1} - автоморфізм Z_2 . Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

ш.т.д.

Теорема 2.6. Нехай x - шарово-транзитивний скінчено-становий автоморфізм. Тоді

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.5 маємо включення:

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

References

1. Морозов Д.І. Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності p .// Д.І. Морозов// Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2007.- вип.№4 - С.52-54.

Надійшла до редколегії 13.10.2012