ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2000, т. 231, с. 134–214

УДК 515.164.63

Автоматы, динамические системы и группы[1]

©2000 г. Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский

Поступило в мае 2000 г.

Статья посвящена группам конечных автоматов и их приложениям в алгебре, динамических системах и геометрии. Рассматриваются как синхронные, так и асинхронные автоматы. Исследованы вопросы редукции конечных асинхронных автоматов, типы роста конечных синхронных автоматов, условия вложимости групп с дополнительными условиями в группу автоматов. Рассматриваются группы автоморфизмов клеточных автоматов. Введена группа рациональных гомеоморфизмов множества Кантора. Исследуется динамика на границе дерева, порожденная автоматным заданием группы. Формулируются нерешенные проблемы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Автоматы играют определяющую роль в той области науки, которую сейчас принято называть информатикой (а на Западе — “computer science”). Важнейшими функциями автоматов являются распознавание и преобразование множеств. Соответственно автоматы бывают двух типов: акцепторы и трансформаторы.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора программой “Ведущие научные школы” (проект 00-15-96107).

Оба типа автоматов играют важную роль в алгебре и теории динамических систем. Существует значительное число монографий и статей обзорного характера [65, 18, 17, 35, 39, 76, 69, 52, 55, 36] (не говоря об исследовательских работах), посвященных применению автоматов в указанных разделах математики.

Целью этой работы (совмещающей черты обзора и исследования) является представить нетрадиционные приложения автоматов в алгебре, теории динамических систем, теории графов и спектральной теории.

Мы рассматриваем в основном трансформаторы (как синхронные, так и асинхронные). Если входной и выходной алфавиты автомата совпадают, а автомат инициальный (т.е. имеет начальное состояние), то он индуцирует преобразование пространства последовательностей в себя. Эти последовательности могут быть как конечными, так и бесконечными. Во втором случае возникает непрерывное преобразование множества Кантора, с которым естественным образом отождествляется пространство последовательностей. Обратно, любое непрерывное преобразование определяется некоторым автоматом (вообще говоря, с бесконечным числом состояний). Важнейший класс преобразований множества Кантора составляют гомеоморфизмы, определенные конечными автоматами, которые мы называем рациональными. Примерами рациональных гомеоморфизмов являются счетные машины ("adding machines") и сдвиги Бернулли.

Суперпозиции отображений, определенных автоматами, соответствует операция суперпозиции автоматов, превращающая множество классов эквивалентности автоматов в полугруппу. Особая роль принадлежит группам обратимых автоматов, среди которых выделяются группы конечных автоматов.

Группы синхронных автоматов зависят от мощности алфавита и являются финитно аппроксимируемыми. В то же время зависимость от алфавита и свойство финитной аппроксимируемости пропадают при переходе к асинхронным автоматам.

Одним из удивительных явлений современной математики является открытие того, что уже простейшие автоматы с числом состояний $2, 3, 4, \ldots$ порождают сложнейшие группы, обладающие редкими и необычными свойствами.

Так оказалось, что группы конечных автоматов дают ответ на вопрос Бернсайда о существовании бесконечных конечно порожденных периодических групп. Впервые эта проблема была решена Голодом с помощью теоремы Голода–Шафаревича [70]. Однако наиболее простое и элегантное решение было получено именно с помощью автоматов [63, 71], идея применения которых к проблеме Бернсайда высказывалась Глушковым [69, с. 46].

Второе открытие состояло в том, что среди групп автоматов существуют группы промежуточного роста между экспоненциальным и степенным, что дало решение проблемы Милнора [72]. Понятие роста можно определять не только для групп и полугрупп, но и для конечных автоматов, причем рост автомата совпадает с ростом определенной им полугруппы [74]. В настоящий момент известны примеры автоматов с двумя состояниями, обладающих промежуточным ростом.

Автоматы имеют также непосредственное отношение к ветвящимся группам, т.е. к группам, действующим на сферически однородных корневых деревьях, структура решетки субнормальных подгрупп которых похожа на структуру дерева [24]. Важность этого класса групп определяется тем, что они составляют один из трех классов, на которые естественным образом распадается класс экстремальных групп (т.е. бесконечных групп с конечными факторами).

Одним из центральных вопросов теории конечно автоматных групп является вопрос о вложимости в них других известных классов групп. Он положительно решен для свободных групп, свободных абелевых групп, некоторых классов линейных и разрешимых групп, групп Р. Томпсона. Оказалось также, что группы автоморфизмов сдвигов конечного типа (т.е. группы обратимых клеточных автоматов) являются группами конечных (асинхронных) автоматов.

Всякая группа G, порожденная синхронными автоматами, действует на k-регулярном бесконечном корневом дереве T, где k — мощность алфавита, а следовательно, действует гомеоморфизмами и на границе дерева ∂T. Группа, порожденная асинхронными автоматами, также действует гомеоморфизмами на ∂T, однако это действие уже не индуцируется действием автоморфизмами дерева. В синхронном случае действие на границе сохраняет инвариантной равномерную меру μ на границе. Таким образом возникают топологическая динамическая система $(G, \partial T)$ и метрическая динамическая система $(G, \partial T, \mu)$. Заметим, что фактически речь идет о динамических системах на множестве Кантора, топологическому типу которого принадлежит граница ∂T.

В последнее время исследование топологической динамики на множестве Кантора идет быстрыми темпами [22, 23, 37], и наше исследование дает некоторый вклад в это направление. Одним из актуальных является вопрос о свойствах разбиения на орбиты, где особая роль принадлежит так называемому конфинальному разбиению. Как обычно, в траекторной теории важную роль играют вопросы аменабельности (группы G и действия G на ∂T), Т-свойство Каждана и многие другие вопросы асимптотической теории групп.

Конечно порожденной группе автоматов, действующей сферически транзитивно на границе, соответствует бесконечный регулярный граф, а также последовательность конечных регулярных графов, аппроксимирующая бесконечный граф. Эти графы изоморфны графам Шрейера $\Gamma(G, P, S)$ и $\Gamma(G, P_n, S)$, где $P, P_n < G$ — параболические подгруппы (стабилизаторы точки границы ∂T и вершины n-го уровня дерева T соответственно), а S — система порождающих группы. Они обладают рядом интересных свойств. Например, во многих случаях бесконечные графы, ассоциированные с ветвящимися группами автоматов, являются подстановочными графами фрактального типа и имеют полиномиальный рост [7, 6]. Есть надежда на то, что с помощью автоматов, порождающих свободную группу или группу, близкую к свободной, можно получить новые серии экспандеров и даже графов Рамануджана (определение этих понятий дано в [41]).

Конечному автомату можно сопоставить также понятие спектра, причем двумя способами. Во-первых, как спектр (некоммутативной) динамической системы, порожденной этим автоматом, во-вторых, как спектр дискретного оператора Лапласа на графе $\Gamma(G, P, S)$. В случае, если параболическая подгруппа P аменабельна или аменабельно действие G на G/P, эти спектры совпадают как множества.

Примеры, для которых удалось провести явное вычисление спектров, дали поразительные результаты. Оказалось, что спектры автоматов могут быть как объединениями конечного числа интервалов, так и вполне несвязными множествами, например множеством Кантора [7]. С другой стороны, в [30] с помощью автомата с двумя состояниями удалось вычислить спектральную меру оператора Лапласа на графе Кэли группы "мигающих лампочек" ("lamplighter group"). Более того, оказалось, что спектральная мера этого оператора дискретна — факт совершенно неожиданный для теории случайных блужданий на группах. Непосредственным следствием результата из [30] является отрицательное решение гипотезы Атьи о знаменателях рациональных значений L^2 когомологических инвариантов бесконечных групп [25].

Изучение групп конечных автоматов, динамических систем, графов и спектров, порожденных конечными автоматами, прошло начальную фазу развития. Остаются нерешенными многие вопросы, открываются новые области применений. Мы надеемся, что эта статья привлечет внимание читателя к указанной проблематике.

2. АСИНХРОННЫЕ АВТОМАТЫ

2.1. Пространства слов. Пусть X — конечное множество, $|X| > 1$, которое мы будем называть *алфавитом*.

Для данного алфавита X мы обозначаем через X^* свободный моноид, порожденный множеством X. Элементы моноида X^* записывают в виде слов $x_1x_2\dots x_n$ (включая пустое слово $\varnothing$). Если $w = x_1x_2\dots x_n \in X^*$, то $|w| = n$ — длина слова w. Длина пустого слова равна нулю.

Наряду с конечными словами из X^* мы рассматриваем и бесконечные последовательности (бесконечные слова) вида $x_1x_2x_3\dots$, где $x_i \in X$. Множество всех таких бесконечных слов обозначаем X^ω.

Для произвольных $w \in X^*$, $u \in X^* \cup X^\omega$ естественно определена конкатенация (произведение) $wu \in X^\omega$.

Слово $w \in X^*$ является *началом*, или *префиксом*, слова $u \in X^*$ $(\in X^\omega)$, если $u = wv$ для некоторого $v \in X^*$ $(\in X^\omega)$, в этом случае мы обозначаем $v = u - w$. Если u — начало слова w, то полагаем $u - w = \varnothing$, во всех остальных случаях $u - w$ не определено.

Для произвольного множества слов $A \subseteq X^* \cup X^\omega$ определено единственным образом наибольшее общее начало (начало наибольшей длины) слов из A, которое мы обозначаем $\mathcal{P}(A)$. Заметим, что $\mathcal{P}(A)$ бесконечно в том и только том случае, когда множество A состоит из одного бесконечного слова.

Множество X^ω является бесконечным декартовым произведением $X^{\mathbb{N}}$, и на нем можно ввести топологию прямого тихоновского произведения конечных дискретных топологических пространств X (топологию поточечной сходимости). В этой топологии X^ω гомеоморфно множеству Кантора. Таким образом топологический тип этого пространства не зависит от X.

Для каждого конечного слова $w \in X^*$ множество $wX^\omega \subseteq X^\omega$ всех слов, начинающихся на w, является в данной топологии открыто-замкнутым, а совокупность всех таких множеств $\{wX^\omega \colon w \in X^*\}$ является базой топологии.

Отметим, что множества w_1X^ω и w_2X^ω имеют непустое пересечение в том и только том случае, когда одно из слов w_1, w_2 является началом другого, и тогда множество, соответствующее более длинному слову, является подмножеством другого множества.

Пусть $\widetilde{U}_w$ — множество всех конечных и бесконечных слов с префиксом $w \in X^*$. Совокупность всех множеств $\{\widetilde{U}_w \colon w \in X^*\}$ тоже является базой открытых множеств компактной топологии на $X^* \cup X^\omega$. В этой топологии множество X^* является счетным множеством изолированных точек, замыканием которого является множество $X^* \cup X^\omega$, причем индуцированная топология на X^ω совпадает с введенной выше. Бесконечное слово $u \in X^\omega$ принадлежит замыканию множества $A \subseteq X^*$ тогда и только тогда, когда бесконечно много префиксов слова u являются префиксами некоторых слов из A.

Слово $v \in X^\omega$ называется *почти периодическим*, если оно имеет вид $uwww\dots$, где u, w — конечные слова.

Для каждой убывающей последовательности положительных чисел $\overline{\lambda} = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ такой, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, определена метрика на пространстве X^ω

$$d_{\overline{\lambda}}(w_1, w_2) = \lambda_n,$$

где $n = |\mathcal{P}(w_1, w_2)|$ — длина наибольшего общего начала слов w_1 и w_2 (расстояние между равными словами равно нулю).

Данная метрика является ультраметрикой, т.е. выполнено неравенство

$$d_{\overline{\lambda}}(w_1, w_3) \le \max(d_{\overline{\lambda}}(w_1, w_2), d_{\overline{\lambda}}(w_2, w_3))$$

для любых $w_1, w_2, w_3 \in X^\omega$. При этом множество wX^ω бесконечных слов, начинающихся на w, является шаром радиуса $\lambda_{|w|}$ с центром в произвольной точке $u \in wX^\omega$.

2.2. Автоматы-трансформаторы.

Определение 2.1. *Асинхронным автоматом* (*обобщенной последовательностной машиной* по [18]) называется набор $A = \langle X_\mathrm{I}, X_\mathrm{O}, Q, \pi, \lambda\rangle$, где

1) X_I, X_O — конечные множества (*входной и выходной алфавиты* соответственно);

2) Q — множество (*множество внутренних состояний автомата*);

3) $\pi\colon X_\mathrm{I} \times Q \to Q$ — отображение (*функция переходов*);

4) $\lambda\colon X_\mathrm{I} \times Q \to X_\mathrm{O}^*$ — отображение (*функция выходов*).

Мощностью автомата называется мощность множества его состояний. В частности, автомат A *конечный*, если $|Q| < \infty$.

Если все значения функции $\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ являются однобуквенными, то автомат A называется *синхронным* автоматом.

Функции λ, π можно продолжить на множество $X_\mathrm{I}^* \times Q$ следующими рекуррентными правилами:

$$\pi(\varnothing, q) = q, \qquad \pi(xw, q) = \pi(w, \pi(x, q)), \tag{1}$$
$$\lambda(\varnothing, q) = \varnothing, \qquad \lambda(xw, q) = \lambda(x, q)\lambda(w, \pi(x, q)), \tag{2}$$

где $x \in X_\mathrm{I}$, $q \in Q$ и $w \in X_\mathrm{I}^*$ — произвольные элементы.

Предыдущие формулы эквивалентны также формулам

$$\begin{aligned} \pi(\varnothing, q) = q, \qquad \pi(wx, q) = \pi(x, \pi(w, q)),\\ \lambda(\varnothing, q) = \varnothing, \qquad \lambda(wx, q) = \lambda(w, q)\lambda(x, \pi(w, q)). \end{aligned} \tag{3}$$

Автомат A_{q_0} с фиксированным *начальным* состоянием $q_0 \in Q$ называется *инициальным автоматом*. Каждый инициальный автомат определяет функцию $\lambda(\,\cdot\,, q_0)\colon X_\mathrm{I}^* \to X_\mathrm{O}^*$, которая определяет *действие* автомата A_{q_0} на конечных словах, обозначаемое также $\lambda(w, q_0) = w^{A_{q_0}}$.

Для инициального автомата A_{q_0} и слова $v \in X_\mathrm{I}^*$ состояние $\pi(v, q_0)$ называют *состоянием автомата в слове* v.

Конечные автоматы можно представлять в виде помеченных ориентированных графов (диаграмм Мура). Вершины такого графа соответствуют состояниям автомата, а для каждого символа $x \in X_\mathrm{I}$ входного алфавита из каждого состояния $q \in Q$ выходит стрелка в $\pi(x, q)$, помеченная меткой $x|\lambda(x, q)$. При этом если автомат инициальный, то на его диаграмме Мура рисуем начальное состояние в виде двойной окружности либо отмечаем его той же буквой, что и автомат. Чтобы узнать действие автомата на слово w, мы должны, начиная с отмеченной

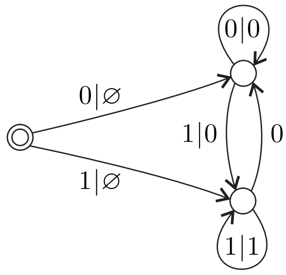


Рис. 1. Пример асинхронного автомата

вершины, двигаться по стрелкам графа так, чтобы на левых частях меток вдоль стрелок читалось слово w, тогда произведение всех правых частей меток будет равно $\lambda(w, q_0)$.

Состояние $q \in Q$ инициального автомата A_{q_0} называется *достижимым*, если существует слово $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ такое, что $\pi(w, q_0) = q$. Автомат называется *достижимым*, если все его состояния достижимы. Пусть Q' — множество всех достижимых состояний асинхронного автомата A. Тогда автомат $A'_{q_0} = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q', \pi', \lambda' \rangle_{q_0}$, где отображения π', λ' являются ограничениями на $X_{\mathrm{I}} \times Q$ соответствующих отображений для автомата A, действует на словах так же, как и автомат A_{q_0}.

Инициальный асинхронный автомат A_{q_0} называется *невырожденным* (*почти положительным* по [18]), если для каждого бесконечного слова $w \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$ рекуррентные формулы (2) определяют однозначно бесконечное слово $\lambda(w, q_0)$. Слово $\lambda(w, q_0)$ называется *образом* слова w под действием автомата и обозначается $w^{A_{q_0}}$, как и в случае конечных слов.

Инициальный автомат A_{q_0} является невырожденным тогда и только тогда, когда не существует достижимого состояния $q \in Q$ и бесконечного слова $w \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$ таких, что для произвольного префикса u слова w слово $\lambda(u, q)$ пусто. В частности, произвольный синхронный автомат является невырожденным.

Имеет место следующий критерий невырожденности.

Предложение 2.1. *Инициальный автомат будет невырожденным тогда и только тогда, когда для любого его достижимого состояния $q \in Q$ существует лишь конечное множество слов $w \in X_{\mathrm{I}}^*$, для которых слово $\lambda(u, q)$ пусто.*

Говорят, что отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$ определяется (невырожденным) автоматом A_{q_0}, если $f(w) = \lambda(w, q_0)$ для каждого $w \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$. Отображение, определенное невырожденным автоматом, называется его действием (на бесконечных словах).

Отметим, что разные асинхронные автоматы могут определять одинаковые отображения на множестве бесконечных слов. Например, автомат над двухбуквенным алфавитом $\{0, 1\}$, изображенный на рис. 1, удаляет в каждом конечном слове последнюю букву, поэтому его действие на бесконечных словах тождественно, т.е. совпадает с действием автомата, действующего тождественно на конечных словах.

В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 2.2. Два инициальных асинхронных автомата называются *эквивалентными*, если они определяют одинаковые отображения на пространстве конечных слов X_{I}^*.

Два инициальных асинхронных автомата называются *ω-эквивалентными*, если они определяют одинаковые отображения на пространстве бесконечных слов X_{I}^{ω}.

Доказательство следующего утверждения несложно.

Предложение 2.2. *Образ почти периодического слова под действием конечного асинхронного автомата — почти периодическое слово.*

Как и в классической теории автоматов, существует канонический автомат в классе ω-эквивалентных автоматов. Для более удобного его описания мы определим понятие *модифицированного автомата*, изменив определение функции выхода следующим образом:

4) функцией выхода называется отображение $\lambda\colon X_{\mathrm{I}} \times Q \to X_{\mathrm{O}}^* \cup X_{\mathrm{O}}^\omega$, причем если $\lambda(x,q) \in X_{\mathrm{O}}^\omega$, то для всех слов $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ слово $\lambda(w, \pi(x,q))$ пусто.

При этом условимся считать модифицированный автомат конечным, если у него количество состояний конечно и каждое слово $\lambda(x,q)$ либо конечное, либо почти периодическое.

Таким образом, мы разрешили асинхронному автомату давать на выход бесконечное слово за один такт, но если автомат выдает такое слово, то после этого он будет давать на выход только пустые слова. Рекуррентные формулы (2) также будут в этом случае определять действие невырожденного модифицированного автомата на бесконечных словах.

Предложение 2.3. *Класс отображений, определяемых* (*конечными*) *модифицированными автоматами, совпадает с классом отображений, определяемых обычными* (*конечными*) *асинхронными автоматами.*

Доказательство. Действительно, пусть f определяется модифицированным асинхронным автоматом. Прибавим для каждой пары $x \in X$, $q \in Q$ такой, что $w = \lambda(x,q) \in X_{\mathrm{O}}^\omega$, бесконечную последовательность новых состояний $q_1, q_2, \dots$, определим $\pi(x,q) = q_1$, $\pi(y, q_i) = q_{i+1}$ для всех $i \geq 1$, $y \in X_{\mathrm{I}}$, положим $\lambda(y, q_i)$ равным i-й букве слова w для любого $y \in X_{\mathrm{I}}$ и переопределим $\lambda(x,q) = \varnothing$. Несложно показать, что после этого мы получим асинхронный автомат, определяющий такое же отображение.

В случае конечного модифицированного автомата для каждой пары $x \in X$, $q \in Q$ такой, что $w = \lambda(x,q) \in X_{\mathrm{O}}^\omega$, прибавим новое состояние p, определим $\pi(x,q) = p$, $\pi(y,p) = p$ для всех $y \in X_{\mathrm{I}}$ и положим $\lambda(x,q) = v$, $\lambda(y,p) = u$ для всех $y \in X_{\mathrm{I}}$, где $w = vuuu\dots$ Заметим также, что если для конечного автомата слово $\lambda(uw, q)$ не зависит от $w \in X_{\mathrm{I}}^\omega$, то оно по предложению 2.2 почти периодическое. $\square$

В дальнейшем мы будем пользоваться только определением модифицированного автомата.

Теории асинхронных автоматов посвящена часть монографии [18], где в основном рассматривается их действие на конечных словах. Кроме теории групп, асинхронные автоматы нашли свое применение в теории кодирования [78, 68], с их помощью можно также производить разнообразные арифметические вычисления [18, 38].

2.3. Полугруппы асинхронных автоматов. Пусть $A_1 = \langle X_1, X_2, Q_1, \pi_1, \lambda_1 \rangle$ и $A_2 = \langle X_2, X_3, Q_2, \pi_2, \lambda_2 \rangle$ — два автомата.

Построим новый автомат $B = A_1 * A_2$ с множеством состояний $Q_1 \times Q_2$, функцией переходов π и функцией выходов λ, определенными равенствами

$$\begin{aligned}
&\pi(x, (s_1, s_2)) = (\pi_1(x, s_1), \pi_2(\lambda_1(x, s_1), s_2)),\\
&\lambda(x, (s_1, s_2)) = \lambda_2(\lambda_1(x, s_1), s_2).
\end{aligned}$$

Отметим, что $\lambda_1(x, s_1)$ в общем случае является не буквой, а словом. Смысл равенств заключается в том, что мы подключаем выход первого автомата на вход второго, а информацию обрабатываем последовательно. Автомат $B = A_1 * A_2$ называется *суперпозицией* автоматов A_1 и A_2. Суперпозицией инициальных автоматов A_{1,q_1} и A_{2,q_2} называется автомат $A_1 * A_2$ с начальным состоянием (q_1, q_2).

Легко видеть, что если w — конечное или бесконечное слово, то $w^{(A_1 * A_2)_{(q_1,q_2)}} = \left(w^{A_{1,q_1}}\right)^{A_{2,q_2}}$.

Таким образом, совокупность всех отображений $f\colon X^\omega \to X^\omega$, определяемых инициальными асинхронными автоматами, образует полугруппу относительно суперпозиции. Эту полугруппу будем называть *полугруппой асинхронных автоматов* и обозначать $\mathcal{C}(X^\omega)$.

Теорема 2.4. *Отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ является непрерывным тогда и только тогда, когда оно определяется некоторым невырожденным асинхронным автоматом.*

Доказательство. Пусть A_{q_0} — невырожденный асинхронный автомат. Для любого $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ началом слова $\lambda(wu, q_0)$ для всех $u \in X_{\mathrm{I}}^\omega$ будет $\lambda(w, q_0)$. Из этого следует непрерывность отображения $\lambda(\,\cdot\,, q_0)$.

Пусть $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ — непрерывное отображение. Построим определяющий его автомат $A = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \pi, \lambda\rangle$. Положим $Q = X_{\mathrm{I}}^*$, $q_0 = \varnothing$, и для всех $x \in X_{\mathrm{I}}^*$, $w \in Q$ пусть $\pi(x, w) = wx$. Для каждого $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ обозначим

$$l(w) = \mathcal{P}\{f(wu)\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}.$$

Поскольку отображение f непрерывно, то для каждого $x_1x_2\ldots \in X_{\mathrm{I}}^\omega$ длина слова $w_n = l(x_1x_2\ldots x_n)$ не убывает и стремится к бесконечности при $n \to \infty$ и слова w_n являются началами слова $f(x_1x_2\ldots)$.

Положим $\lambda(x, w) = l(wx) - l(w)$. Тогда построенный автомат определяет f.

Заметим, что для каждого состояния q построенного автомата наибольшее общее начало $\mathcal{P}\{\lambda(xw, q)\colon\ w \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}$ равно $\lambda(x, q)$. $\square$

В общем случае асинхронный автомат, определяющий непрерывное отображение, будет бесконечным.

Таким образом, полугруппа $\mathcal{C}(X^\omega)$ изоморфна полугруппе всех непрерывных преобразований множества Кантора X^ω. Следовательно, изоморфный тип этой полугруппы не зависит от мощности алфавита.

Если отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$, определенное некоторым асинхронным автоматом, биективно, то оно является гомеоморфизмом и обратное отображение f^{-1} тоже определяется некоторым асинхронным автоматом. Поэтому множество всех биективных отображений, определенных асинхронными автоматами с входным и выходным алфавитом X, образует группу. Эту группу назовем *группой асинхронных автоматов* и обозначим $\mathcal{H}(X^\omega)$. Она также не зависит от X, так как изоморфна группе гомеоморфизмов канторовского множества.

2.4. Конечные автоматы. Непрерывные отображения, определяемые конечными инициальными асинхронными автоматами, имеют следующую характеризацию.

Определение 2.3. Пусть $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ — непрерывное отображение, $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ — конечное слово. *Ограничением* отображения f в слове w называется отображение $f|_w\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$, определенное равенством

$$f(wu) = vf|_w(u),$$

где $v = \mathcal{P}\{f(wu)\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}$.

Если слово $f(wu)$, $u \in X_{\mathrm{I}}^\omega$, не зависит от u, то мы говорим, что ограничение $f|_w$ *пусто*, и пишем $f|_w(u) = \varnothing$.

Теорема 2.5. *Непрерывное отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ определено некоторым конечным невырожденным асинхронным автоматом тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число разных ограничений и для каждого слова $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ такого, что ограничение $f|_w$ пусто, слово $f(wu)$ является почти периодическим для любого $u \in X_{\mathrm{I}}^\omega$.*

Доказательство. Пусть A — конечный невырожденный асинхронный автомат. Для каждого $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ ограничение $f|_w$ однозначно задано состоянием $\pi(w, q_0)$, поскольку

$$\lambda(wu, q_0) = \lambda(w, q_0)\lambda(u, \pi(w, q_0)) = \lambda(w, q_0) v f|_w(u),$$

где $v = \mathcal{P}\{\lambda(u, \pi(w, q_0))\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}$. Следовательно, множество разных ограничений отображения, определенного конечным автоматом, конечно.

Обратно, пусть f — отображение с конечным множеством ограничений. Обозначим это множество Q. Построим автомат с множеством внутренних состояний Q и начальным состоянием $f|_\varnothing = f$ так, чтобы его действие на пространстве X_{I}^ω совпадало с действием отображения f.

Положим $\pi(x, f|_w) = f|_{wx}$. Отображение π определено корректно, так как $f|_{wx} = (f|_w)|_x$.

Функцию выходов определим равенством

$$\lambda(x, f|_w) = \mathcal{P}\{f|_w(xu)\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\} = \mathcal{P}\{f(wxu)\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\} - \mathcal{P}\{f(wu)\colon\ u \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}.$$

(Заметим, что если ограничение $f|_{wx}$ пусто, то $\lambda(x, f|_w)$ бесконечно.) Полученный автомат определяет отображение f. $\square$

Определение 2.4. Отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ называется *рациональным*, если оно определяется некоторым конечным асинхронным автоматом.

Поскольку множество состояний суперпозиции A_1A_2 автоматов равно декартову произведению множеств состояний автоматов A_1 и A_2, то суперпозиция конечных автоматов тоже является конечным автоматом. Поэтому множество всех конечных автоматов образует полугруппу относительно суперпозиции. Эту полугруппу называем *полугруппой конечных асинхронных автоматов* и обозначаем $\mathcal{F}(X^\omega)$.

2.5. Редуцированные автоматы. Одним из основных фактов теории конечных автоматов является то, что в классе эквивалентных автоматов существует единственный автомат с минимальным числом состояний, который называется *минимальным.* Соответствующий алгоритм описан в [18].

Здесь мы рассмотрим вопрос существования канонического асинхронного автомата, ω-эквивалентного данному. Процесс нахождения такого автомата называется *редукцией.* Она будет описана в п. 2.8.1.

Определение 2.5. Состояние $q \in Q$ асинхронного автомата A называется *состоянием с неполным ответом*, если для некоторого $x \in X$ наибольшее общее начало слов вида $\lambda(xw, q)$, $w \in X_{\mathrm{I}}^\omega$, не равно $\lambda(x, q)$.

Заметим, что в автомате, построенном в ходе доказательства теоремы 2.4, нет состояний с неполным ответом. Также легко показать, что таких состояний нет и в автомате, построенном при доказательстве теоремы 2.5. Следовательно, имеет место

Предложение 2.6. *Для каждого (конечного) асинхронного автомата существует ω-эквивалентный ему (конечный) асинхронный автомат без состояний с неполным ответом.*

Для асинхронных автоматов без состояний с неполным ответом можно использовать результаты классической теории минимизации обобщенных последовательностных машин, изложенной в книге [18], поскольку имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.7. *Два инициальных автомата без состояний с неполным ответом ω-эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что действие инициального автомата A_{q_0} без состояний с неполным ответом на множестве конечных слов X_{I}^* однозначно определено его действием на X_{I}^ω. Но из определения 2.5 следует, что если автомат не имеет состояний с неполным ответом, то для произвольного конечного слова $v \in X_{\mathrm{I}}^*$ мы имеем $v^{A_{q_0}} = \mathcal{P}\{(vw)^{A_{q_0}} : w \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}$. $\square$

Последним шагом редукции является отождествление эквивалентных состояний, где два состояния $q_1, q_2 \in Q$ автомата A называются *эквивалентными*, если для любого слова $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ слова $\lambda(w, q_1)$ и $\lambda(w, q_2)$ совпадают.

Определение 2.6. Асинхронный автомат A называется *редуцированным*, если он не имеет состояний с неполным ответом и эквивалентных состояний.

Асинхронный инициальный автомат A_{q_0} называется *редуцированным*, если он достижимый и соответствующий ему неинициальный автомат редуцированный.

Два автомата $A' = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q', \pi', \lambda' \rangle$ и $A'' = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q'', \pi'', \lambda'' \rangle$ будем называть *изоморфными*, если существует биекция $\phi\colon Q_1 \to Q_2$, коммутирующая с функциями перехода и выхода, т.е. такая, что

$$\pi''(x, \phi(q)) = \phi(\pi'(x, q)),$$
$$\lambda''(x, \phi(q)) = \lambda'(x, q).$$

Если автоматы инициальные, то биекция должна переводить начальное состояние первого автомата в начальное состояние второго.

Следующее предложение показывает, что редуцированный автомат, ω-эквивалентный данному, определен однозначно.

Предложение 2.8. *Если редуцированные инициальные автоматы ω-эквивалентны, то они изоморфны.*

Доказательство. Если автомат редуцированный, то его состояния находятся во взаимно однозначном соответствии с ограничениями отображения, которое он определяет. При этом функции выходов и переходов однозначно заданы ограничениями. Поэтому редуцированный автомат однозначно с точностью до изоморфизма задан своим определяемым отображением. $\square$

Таким образом, алгоритм редукции предоставит нам возможность эффективно выяснять, являются ли заданные автоматы ω-эквивалентными.

2.6. Рациональные множества.

Определение 2.7. Подмножество $L \subseteq X^\omega$ называется *рациональным*, если существует конечный ориентированный граф с отмеченной начальной вершиной и стрелками, помеченными элементами алфавита X, такой, что метки стрелок, исходящих из одной вершины, попарно различны и множество всех слов, которые можно получить последовательной конкатенацией меток на путях графа с началом в отмеченной вершине, совпадает с L.

Граф, фигурирующий в этом определении, называется (*детерминированным*) *автоматом, распознающим множество L.*

Очевидными примерами рациональных множеств являются сами множества X^ω, конечные множества почти периодических слов, пространства односторонних сдвигов конечного типа.

Если в определении 2.7 заменить X^ω на X^*, то данное определение является одним из возможных определений рационального или в другой, более часто используемой терминологии — регулярного префиксно-замкнутого множества (или языка).

Напомним, что регулярный язык $L \subseteq X^*$ называется *префиксно-замкнутым*, если для каждого $w \in L$ каждый префикс слова w лежит в L (см. [18, 17]).

Легко заметить, что каждое рациональное множество является замкнутым и, следовательно, компактным. Более того, непосредственно из определений можно вывести следующую характеризацию рациональных множеств.

Предложение 2.9. *Множество $L \subseteq X^\omega$ является рациональным тогда и только тогда, когда оно является замыканием некоторого префиксно-замкнутого регулярного языка $L_0 \subseteq X^*$.*

Наряду с детерминированными автоматами, распознающими множества, можно рассматривать и *недетерминированные автоматы*, т.е. конечные ориентированные графы, в которых стрелки помечены не буквами, а словами (причем из одной вершины могут выходить стрелки с одинаковыми метками). Множество бесконечных слов, читаемых на бесконечных путях с заданным началом в недетерминированном графе, тоже является рациональным множеством в силу аналогичного результата для регулярных языков (см. [18]) и предложения 2.9. Более того, существует алгоритм для нахождения минимального (т.е. с минимально возможным числом вершин) детерминированного автомата, распознающего множество, определяемое конечным недетерминированным автоматом.

Заметим, что два минимальных детерминированных автомата, определяющих одно множество, являются изоморфными, поэтому такой алгоритм позволяет выяснять, задают ли два недетерминированных автомата одинаковые множества.

Таким образом, из предложения 2.9 следует, что существует алгоритм, который по данным двум автоматам определяет, совпадают ли рациональные множества, которые они распознают.

Кроме того, справедливо

Предложение 2.10. *Пересечение конечного числа рациональных множеств является рациональным множеством. Существует алгоритм, который по двум автоматам, распознающим данные рациональные множества, строит автомат, распознающий их пересечение.*

Связь между конечными асинхронными автоматами и рациональными множествами показывает следующее

Предложение 2.11. *Множество $L \subseteq X^\omega$ является рациональным тогда и только тогда, когда оно является образом множества X_{I}^ω под действием некоторого рационального отображения $f\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \to X^\omega$, при этом в качестве X_{I} можно взять любой алфавит мощности ≥ 2. Если L не имеет изолированных точек, то отображение f можно считать взаимно однозначным.*

Доказательство. Поскольку множество X_{I}^ω является рациональным для любого конечного алфавита X_{I}, то предложение достаточно доказать для случая $|X_{\mathrm{I}}| = 2$, откуда будет легко следовать общий случай.

Если дана диаграмма Мура асинхронного инициального автомата, то для того, чтобы получить из него (недетерминированный) автомат, распознающий образ соответствующего

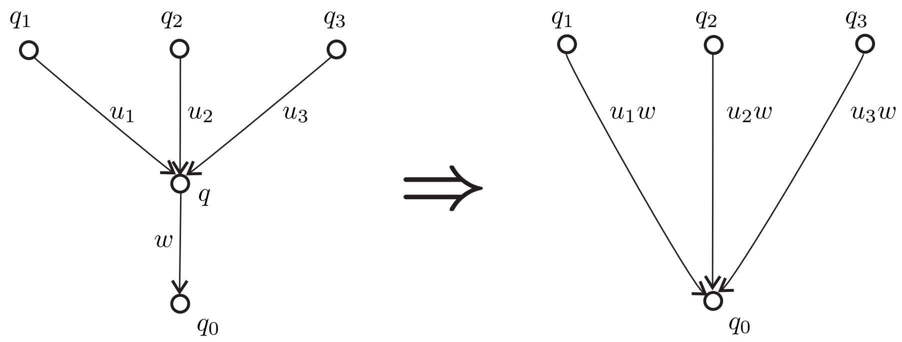


Рис. 2. Перестройка автомата на первом этапе

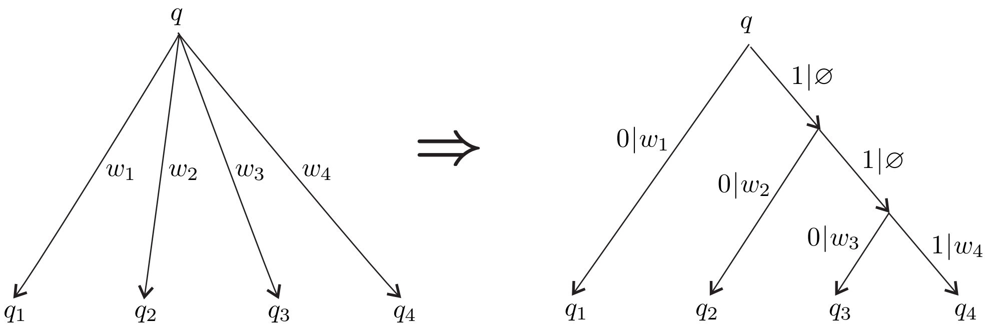


Рис. 3. Перестройка автомата на втором этапе

отображения, нужно каждую метку $x|w$ графа асинхронного автомата заменить на метку w, получая таким образом граф нового автомата.

Обратно, пусть замкнутое множество $L \subseteq X^\omega$ является рациональным и пусть Γ — граф, являющийся детерминированным автоматом, распознающим множество L. Допустим, что L не имеет изолированных точек. Тогда не существует вершины графа Γ, в которой начинается только один бесконечный путь. Если q — вершина графа Γ, из которой выходит только одна стрелка, то, сделав замену в Γ, изображенную на рис. 2, мы уменьшим количество вершин с одной исходящей стрелкой. Заметим, что $q \neq q_0$, иначе из q будет выходить только один бесконечный путь.

Бесконечные пути в новом графе получаются из путей начального графа вычеркиванием всех вхождений вершины q. Данное соответствие между бесконечными путями нового и начального графов является взаимно однозначным и сохраняет бесконечные слова, читаемые на путях. Поэтому если на любых двух бесконечных путях с общим началом в первом графе читались разные слова, то то же самое будет справедливо и для второго графа.

Продолжая действовать таким образом, мы получим автомат, распознающий множество L, в котором из каждой вершины выходит более одной стрелки. При этом хотя автомат, возможно, и перестанет быть детерминированным, но в нем на различных путях с общим началом будут читаться различные слова.

В случае, когда L имеет изолированные точки, распознающий автомат оставляем без изменений.

Превратим граф, распознающий множество L, в диаграмму Мура автомата, определяющего отображение f. Для этого каждую вершину графа с исходящими из нее несколькими стрелками мы заменим на граф асинхронного автомата, как указано на рис. 3.

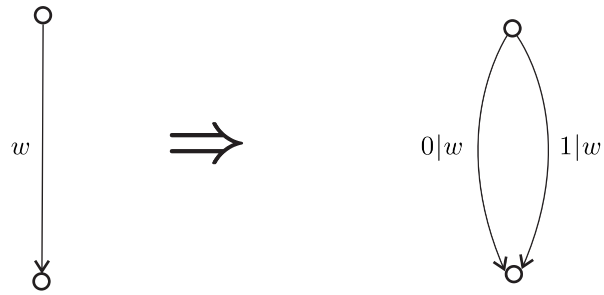
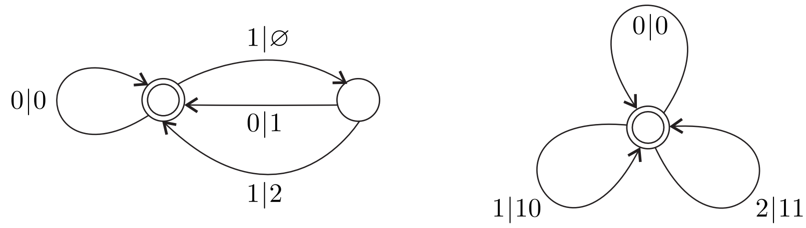


Рис. 4. Перестройка автомата на третьем этапе



а *б*

Рис. 5. Автоматы, осуществляющие биекцию между пространствами двухбуквенных и трехбуквенных последовательностей

Заметим, что некоторые из вершин $q, q_1, q_2, \dots$ на рис. 3 слева могут совпадать (тогда они должны совпадать и после замены).

В случае, если L имеет изолированные точки, в графе имеются вершины, из которых выходит только одна стрелка. Перестройка в этом случае происходит так, как показано на рис. 4.

В случае, если множество L не имеет изолированных точек, мы преобразовали распознающий автомат к графу, в котором на разных путях, исходящих из начальной вершины, читаются разные слова. Поэтому при описанном преобразовании этого автомата в диаграмму Мура асинхронного автомата соответствующее рациональное отображение будет взаимно однозначным. $\square$

Следствие 2.12. *Для любых конечных алфавитов X_{I}, X_{O} существует конечный автомат $R(X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}})$, определяющий непрерывное биективное отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$.*

Такие автоматы могут быть построены явно. Например, автомат $R(X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}})$, осуществляющий биекцию $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$ для $X_{\mathrm{I}} = \{0,1\}$ и $X_{\mathrm{O}} = \{0,1,2\}$, изображен на рис. 5, *а*. На рис. 5, *б* изображен обратный автомат $R(X_{\mathrm{O}}, X_{\mathrm{I}})$.

2.7. Группа рациональных гомеоморфизмов. Если $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$ — непрерывная биекция, то поскольку X_{I}^{ω}, X_{O}^{ω} — компактные пространства, обратное отображение f^{-1} также непрерывно. Поэтому f^{-1} также определяется асинхронным автоматом.

Используя теорему 2.5, можно доказать следующее

Предложение 2.13. *Если $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$ — биективное отображение, определенное конечным автоматом, то обратное отображение f^{-1} тоже определено конечным автоматом.*

Таким образом, для любого конечного алфавита X множество $\mathcal{Q}(X^{\omega})$ всех рациональных гомеоморфизмов $f\colon X^{\omega} \to X^{\omega}$ является группой.

Из предложения 2.12 следует

Предложение 2.14. *Изоморфные типы группы $\mathcal{Q}(X^\omega)$ и полугруппы $\mathcal{F}(X^\omega)$ не зависят от алфавита X, $|X| > 1$. Более того, группы $\mathcal{Q}(X_{\mathrm{I}}^\omega)$, $\mathcal{Q}(X_{\mathrm{O}}^\omega)$ и полугруппы $\mathcal{F}(X_{\mathrm{I}}^\omega)$, $\mathcal{F}(X_{\mathrm{O}}^\omega)$ сопряжены с помощью автомата $R(X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}})$.*

Сформулированное утверждение показывает, что естественным образом определены *полугруппа рациональных непрерывных отображений* и *группа рациональных гомеоморфизмов* множества Кантора, которые мы обозначаем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно.

Отождествляя ω-эквивалентные автоматы, мы иногда будем называть элементы полугруппы $\mathcal{F}$ и группы $\mathcal{Q}$ автоматами.

2.8. Алгоритмы для вычислений с конечными автоматами.

2.8.1. *Редукция.* Для эффективных вычислений с конечными асинхронными автоматами нужно в первую очередь уметь определять, задают ли два автомата одинаковые рациональные отображения.

Теорема 2.15. *Существует алгоритм, который по данным двум конечным асинхронным автоматам определяет, ω-эквивалентны они или нет.*

Доказательство. В силу предложения 2.8 достаточно уметь находить редуцированный автомат, ω-эквивалентный данному.

Пусть $A = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \lambda, \pi\rangle$ — некоторый конечный автомат.

Обозначим для $v \in X_{\mathrm{I}}^*$, $q \in Q$

$$\Lambda(v, q) = \mathcal{P}\{\lambda(vw, q)\colon\ w \in X_{\mathrm{I}}^\omega\}.$$

Автомат A является автоматом без состояний с неполным ответом тогда и только тогда, когда $\Lambda(v, q) = \lambda(v, q)$. В общем случае $\lambda(v, q)$ является только началом слова $\Lambda(v, q)$.

Первым шагом редукции будет построение автомата без состояний с неполным ответом, ω-эквивалентного A_q. Вначале для каждого состояния $q \in Q$ находим $\Lambda(\varnothing, q)$. Для этого вычисляем образ множества X_{I}^ω под действием автомата A_q как рациональное множество, а затем находим наибольшее общее начало всех его элементов, используя классические методы теории регулярных языков. После этого можно воспользоваться следующим предложением.

Предложение 2.16. *Пусть $A_{q_0} = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \pi, \lambda\rangle_{q_0}$ — конечный инициальный автомат. Пусть множество $Q' = Q \cup \{q_{-1}\}$, где q_{-1} — новое состояние. Положим*

$$\pi(x, q_{-1}) = \pi(x, q_0),$$
$$\lambda(x, q_{-1}) = \Lambda(x, q_0)$$

для всех $x \in X_{\mathrm{I}}$. Переопределим функцию выходов равенством

$$\lambda'(x, q) = \Lambda(x, q) - \Lambda(\varnothing, q)$$

для всех $q \in Q$, $x \in X_{\mathrm{I}}$.

Тогда автомат $A' = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q', \pi, \lambda'\rangle$ с начальным состоянием q_{-1} будет автоматом без состояний с неполным ответом, который ω-эквивалентен автомату A_{q_0}.

Кроме того, для каждого $w \in X_{\mathrm{I}}^\omega$ имеет место равенство

$$\lambda'(w, q_{-1}) = \Lambda(w, q_0).$$

Доказательство. Достаточно доказать последнее равенство. Воспользуемся индукцией по длине слова w.

Для слов длины 0 и 1 равенство выполнено. Допустим, оно выполнено для всех слов длины n. Пусть wx — слово длины $n+1$ и $x \in X_{\mathrm{I}}$.

Заметим, что для произвольного непустого слова v состояние $\pi(v, q_{-1})$ совпадает с состоянием $\pi(v, q_0)$.

Из предположения индукции получаем

$$\lambda'(wx, q_{-1}) = \lambda'(w, q_{-1})\lambda'(x, \pi(w, q_0)) = \Lambda(w, q_0)\big[\Lambda(x, \pi(w, q_0)) - \Lambda(\varnothing, \pi(w, q_0))\big] = \Lambda(wx, q_0),$$

поскольку

$$\begin{aligned} \Lambda(wx, q_0) &= \lambda(w, q_0)\Lambda(x, \pi(w, q_0)), \\ \Lambda(w, q_0) &= \lambda(w, q_0)\Lambda(\varnothing, \pi(w, q_0)). \quad \square \end{aligned}$$

Следующим шагом редукции является удаление всех недостижимых состояний в диаграмме Мура нового автомата вместе со всеми выходящими и входящими стрелками. Понятно, что все недостижимые состояния можно найти за конечное число шагов.

Полученный после этого автомат можно минимизировать (т.е. отождествить эквивалентные состояния), используя алгоритм минимизации обобщенных последовательностных машин, описанный в [18], в силу предложения 2.7. Теорема 2.15 доказана. $\square$

Как следствие предложения 2.16 получаем следующее свойство действий ω-эквивалентных автоматов на конечных словах.

Предложение 2.17. *Если A_1, A_2 — ω-эквивалентные инициальные конечные асинхронные автоматы, то существует такое положительное число N, что для всех $w \in X_{\mathrm{I}}^*$ имеет место неравенство*

$$\Big| |w^{A_1}| - |w^{A_2}| \Big| \le N.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае, когда один из автоматов редуцированный. В условиях предложения 2.16 множество всевозможных разностей $\Lambda(w, q_0) - \lambda(w, q_0) = w^{A'_{q_{-1}}} - w^{A_{q_0}}$ конечно, поскольку $\Lambda(w, q_0) - \lambda(w, q_0) = \Lambda(\varnothing, \pi(w, q_0))$. Следовательно, существует N такое, что $\big| |w^{A_{q_0}}| - |w^{A'_{q_{-1}}}| \big| \le N$. $\square$

2.8.2. *Нахождение обратного.* Следующее утверждение из [18] показывает, что отображение $f\colon X^* \to X^*$, определенное автоматом, будет обратимым только в случае синхронного автомата.

Предложение 2.18. *Если отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^* \to X_{\mathrm{O}}^*$, заданное автоматом A_{q_0}, обратимо и $|X_{\mathrm{I}}| \le |X_{\mathrm{O}}|$, то оно задано синхронным автоматом.*

Если $|X_{\mathrm{I}}| > |X_{\mathrm{O}}|$, то биективное отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^* \to X_{\mathrm{O}}^*$, заданное асинхронным автоматом, существует (см. пример 2.3 из [18]), однако обратное отображение в силу предложения 2.18 нельзя определить с помощью автомата.

Таким образом, с точки зрения применений в теории групп и теории динамических систем в случае асинхронных автоматов представляется более естественным исследовать действие автоматов на бесконечных словах. Случай отображений, определенных синхронными автоматами, будет рассмотрен отдельно в разд. 3.

Вопросы обратимости отображений, заданных асинхронными автоматами, исследовались в работах [77, 78].

Построим алгоритм, позволяющий определить, задает ли данный конечный автомат обратимое отображение.

Для того чтобы определить, является ли отображение $f\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$, определенное конечным автоматом, отображением “на”, нужно найти образ $f(X_{\mathrm{I}}^{\omega})$, являющийся рациональным множеством, т.е. найти детерминированный автомат, его распознающий, а потом выяснить, совпадает ли это множество с множеством X_{O}^{ω}. Хорошо известно, что для рациональных множеств существует алгоритм, решающий такую задачу (см. [18]).

Заметим, что для достижимого автомата A_{q_0} из взаимной однозначности определяемого им отображения следует взаимная однозначность всех отображений, определенных автоматами A_q для всех состояний q автомата A.

Более того, имеет место следующая лемма, с помощью которой можно эффективно определить, является ли отображение, определенное конечным автоматом, взаимно однозначным.

Лемма 2.19. *Отображение, определенное достижимым автоматом A_{q_0}, является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда для каждого состояния $q \in Q$ множества*

$$\{U_{x,q} = \{\lambda(xw, q)\colon\ w \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}\}\}_{x \in X_{\mathrm{I}}}$$

попарно не пересекаются.

Доказательство. Допустим, что существуют два разных бесконечных слова $w_1 = x_1x_2\ldots, w_2 = y_1y_2\ldots \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$ таких, что $f(w_1) = f(w_2)$. Пусть $x_i = y_i$ для всех $1 \le i < n$, а $x_n \ne y_n$. Рассмотрим состояние $q = \pi(x_1x_2\ldots x_{n-1}, q_0)$. Тогда

$$f(w_1) = \lambda(x_1x_2\ldots x_{n-1}, q_0)\lambda(x_nx_{n+1}\ldots, q) = \\ = f(w_2) = \lambda(x_1x_2\ldots x_{n-1}, q_0)\lambda(y_ny_{n+1}\ldots, q),$$

следовательно, множества $U_{x_n,q}$ и $U_{y_n,q}$ пересекаются.

Обратно, если $U_{x,q} \cap U_{y,q} \ne \varnothing$ для некоторого достижимого состояния $q = \pi(v, q_0)$ и различных букв $x, y \in X_{\mathrm{I}}$, то существуют бесконечные слова $u_1, u_2 \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$ такие, что $\lambda(xu_1, q) = \lambda(yu_2, q)$. Но тогда $\lambda(vxu_1, q_0) = \lambda(vyu_2, q_0)$, поэтому f не является взаимно однозначным. $\square$

Таким образом, для установления взаимной однозначности отображения достаточно для каждого $q \in Q$ найти автоматы, распознающие множества $U_{x,q}$, после чего найти попарные пересечения определяемых ими рациональных множеств и исследовать, будут ли они пустыми.

Из приведенных рассуждений следует существование алгоритма, определяющего по конечному автомату, является ли соответствующее ему преобразование взаимно однозначным и отображением “на”.

Опишем алгоритм, который по конечному автомату, задающему обратимое отображение, строит автомат, определяющий обратное отображение.

Пусть $A_{q_0} = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \lambda, \pi\rangle_{q_0}$ — достижимый автомат, f — определенное им обратимое отображение. Мы также будем рассматривать отображения $f_q\colon X_{\mathrm{I}}^{\omega} \to X_{\mathrm{O}}^{\omega}$, определенные равенством $f_q(u) = \lambda(u, q)$. Поскольку f обратимо, все отображения f_q взаимно однозначны.

Пусть $w \in X_{\mathrm{O}}^{*}$, $q \in Q$. Тогда слово $u \in X_{\mathrm{I}}^{\omega}$ лежит в $f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega})$ в том и только том случае, если $f(vu) \in \lambda(v, q_0)wX_{\mathrm{O}}^{\omega}$, где $v \in X_{\mathrm{I}}^{*}$ — произвольное слово, для которого $\pi(v, q_0) = q$. Множество $\lambda(v, q_0)wX_{\mathrm{O}}^{\omega}$ является открыто-замкнутым, f — непрерывное отображение, поэтому и $f^{-1}(\lambda(v, q_0)wX_{\mathrm{O}}^{\omega})$ открыто-замкнуто.

Таким образом имеет место соотношение

$$vf_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega}) = vX_{\mathrm{I}}^{\omega} \cap f^{-1}(\lambda(v,q_0)wX_{\mathrm{O}}^{\omega}),$$

из которого следует, что множество $f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega})$ также открыто-замкнуто и поэтому представимо в виде конечного дизъюнктного объединения $u_1X_{\mathrm{I}}^{\omega} \cup u_2X_{\mathrm{I}}^{\omega} \cup \ldots \cup u_mX_{\mathrm{I}}^{\omega}$. Слова $u_1, u_2, \ldots, u_m$ можно найти за конечное число шагов, перебирая слова из X_{I}^* в порядке возрастания их длины. Как только найдено слово $u \in X_{\mathrm{I}}^*$, для которого $\lambda(u,q)$ не является префиксом слова w, можно исключить из рассмотрения слова из X_{I}^*, начинающиеся на u. Аналогично, как только найдено минимальное слово u, для которого $\lambda(u,q)$ начинается на w, исключаются из рассмотрения слова, начинающиеся на u, а слово u включается в список искомых слов $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Несложно доказать, что данный алгоритм прекращает свою работу через конечное число шагов.

Если $f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega}) = u_1X_{\mathrm{I}}^{\omega} \cup u_2X_{\mathrm{I}}^{\omega} \cup \ldots \cup u_mX_{\mathrm{I}}^{\omega}$, то

$$\mathcal{P}(f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega})) = \mathcal{P}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}.$$

Таким образом можно эффективно найти $\mathcal{P}(f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega}))$. Обозначим $\mathcal{P}(f_q^{-1}(wX_{\mathrm{O}}^{\omega})) = L_q(w)$.

Лемма 2.20. *Пусть $u_0, v \in X_{\mathrm{O}}^*$, $q \in Q$, $u = L_q(u_0)$, причем u_0 является префиксом слова $\lambda(u,q)v$. Тогда имеет место равенство*

$$L_q(\lambda(u,q)v) = uL_{\pi(u,q)}(v).$$

Доказательство. Для того чтобы слово $\lambda(uw,q)$ начиналось на $\lambda(u,q)v$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(w,\pi(u,q))$ начиналось на v. Кроме того, все слова из $f_q^{-1}(\lambda(u,q)vX_{\mathrm{O}}^{\omega}) \subseteq$ $\subseteq f_q^{-1}(u_0X_{\mathrm{O}}^{\omega})$ начинаются на $u = L_q(u_0)$.

Поэтому $f_q^{-1}(\lambda(u,q)vX_{\mathrm{O}}^{\omega}) = uf_{\pi(u,q)}^{-1}(vX_{\mathrm{O}}^{\omega})$, следовательно, $L_q(\lambda(u,q)v) = uL_{\pi(u,q)}(v)$. $\square$

Заметим, что если w_n — начало длины n бесконечного слова $w \in X_{\mathrm{O}}^{\omega}$, то $\lambda(L_q(w_n),q)$ — тоже начало слова w, причем $|\lambda(L_q(w_n),q)| \to \infty$ при $n \to \infty$. Кроме того, если w' является началом слова w'', то $L_q(w')$ — начало слова $L_q(w'')$.

Найдем для каждого $q \in Q$ множество всех слов $w \in X_{\mathrm{O}}^*$ таких, что $L_q(w) = \varnothing$. Таких слов конечное число, и их можно найти за конечное число шагов, перебирая слова из X_{O}^* в порядке возрастания длины. После этого обратный автомат находится следующим образом.

Предложение 2.21. *Для каждого состояния $q \in Q$ автомата $A_{q_0} = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \lambda, \pi\rangle_{q_0}$ пусть $\{w_1, w_2, \ldots, w_{m_q}\}$ — множество всех слов таких, что $L_q(w_i) = \varnothing$. Пусть*

$$Q' = \bigcup_{q \in Q} \{(w_1,q), (w_2,q), \ldots, (w_{m_q},q)\}.$$

Для произвольных $(w_i,q) \in Q'$, $x \in X_{\mathrm{O}}$ положим

$$\begin{aligned} &\lambda'(x,(w_i,q)) = L_q(w_ix),\\ &\pi'(x,(w_i,q)) = \Big(w_ix - \lambda(L_q(w_ix),q),\ \pi(L_q(w_ix),q)\Big). \end{aligned}$$

Тогда конечный асинхронный инициальный автомат

$$A'_{(\varnothing,q_0)} = \langle X_{\mathrm{O}}, X_{\mathrm{I}}, Q', \pi', \lambda'\rangle_{(\varnothing,q_0)}$$

определяет отображение, обратное к отображению, определенному автоматом A_{q_0}.

Доказательство. Докажем корректность определения функции переходов. Применив лемму 2.20 для $u_0 = w_i x$, $v = w_i x - \lambda(L_q(w_i x), q)$, получаем

$$L_q(w_i x) = L_q(\lambda(u,q)v) = L_q(w_i x) L_{\pi(u,q)}(v),$$

следовательно, $L_{\pi(u,q)}(v) = \varnothing$ и $\pi'(x, (w_i, q)) \in Q'$.

Одновременной индукцией по длине слова w докажем, что $\lambda'(w, (\varnothing, q_0)) = L_{q_0}(w)$ и что из равенства $\pi'(w, (\varnothing, q_0)) = (w_i, q)$ следуют равенства

$$\pi(L_{q_0}(w), q_0) = q,$$
$$\lambda(L_{q_0}(w), q_0) w_i = w.$$

Для слова $w = \varnothing$ это верно. Допустим, мы доказали наше утверждение для всех слов длины n. Пусть wx — слово длины $n+1$, где $x \in X_{\mathrm{O}}$. Пусть $\pi'(w, (\varnothing, q_0)) = (w_i, q)$. Из предположения индукции и леммы 2.20 (для $u_0 = w$, $v = w_i x$) следует, что

$$L_{q_0}(wx) = L_{q_0}(\lambda(L_{q_0}(w), q_0) w_i x) = L_{q_0}(w) L_q(w_i x),$$

значит, $L_{q_0}(wx) = \lambda'(wx, (q_0, \varnothing))$.

По определению

$$\pi'(wx, (\varnothing, q_0)) = \pi'(x, (w_i, q)) = \Big(w_i x - \lambda(L_q(w_i x), q),\ \pi(L_q(w_i x), q)\Big),$$

но

$$\pi(L_{q_0}(wx), q_0) = \pi(L_{q_0}(w) L_q(w_i x), q_0) = \pi(L_q(w_i x), q),$$

а

$$\begin{aligned}\lambda(L_{q_0}(wx), q_0)(w_i x - \lambda(L_q(w_i x), q)) &= \lambda(L_{q_0}(w), q_0)\lambda(L_q(w_i x), q)(w_i x - \lambda(L_q(w_i x), q)) = \\ &= \lambda(L_{q_0}(w), q_0) w_i x = wx.\end{aligned}$$

Индуктивное доказательство завершено.

Пусть $u \in X_{\mathrm{O}}^{\omega}$ — произвольное бесконечное слово, u_n, $n \in \mathbb{N}$, — его начало длины n. Тогда последовательность $\lambda(\lambda'(u_n, (\varnothing, q_0))) = \lambda(L_{q_0}(u_n), q_0)$, $n = 1, 2, \dots$, стремится к u при $n \to \infty$, поэтому автомат $A'_{(\varnothing, q_0)}$ является обратным к автомату A_{q_0}. $\square$

Итак, существуют алгоритмы для нахождения суперпозиции двух автоматов, алгоритмы, выясняющие, будет ли отображение, заданное конечным автоматом на бесконечных словах, обратимым, и алгоритмы для нахождения обратного автомата. Кроме того, по теореме 2.15 существует алгоритм, выясняющий, задают ли два данных конечных автомата одинаковые отображения. Таким образом имеет место

Теорема 2.22. *В группе $\mathcal{Q}$ и полугруппе $\mathcal{F}$ разрешима проблема равенства слов. В частности, эта проблема разрешима в любой конечно порожденной группе, вложимой в $\mathcal{Q}$.*

Так как $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{F}$ являются бесконечно порожденными объектами, то подчеркнем, что под разрешимостью проблемы слов в них понимается существование алгоритма, распознающего по любым двум суперпозициям нескольких конечных автоматов, ω-эквивалентны они или нет.

3. СИНХРОННЫЕ АВТОМАТЫ

3.1. Автоматы Мили. Напомним, что автомат называется синхронным, если для любых $x \in X_{\mathrm{I}}$, $q \in Q$ слово $\lambda(x,q)$ однобуквенное. Синхронные автоматы называются также *автоматами Мили*. Синхронный автомат называется *автоматом Мура*, если функцию выходов можно представить в виде $\lambda(x,q) = \mu(\pi(x,q))$, где $\mu\colon Q \to X_{\mathrm{O}}$ — некоторое отображение. Для каждого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура.

В дальнейшем мы будем рассматривать автоматы, у которых входной и выходной алфавиты совпадают.

Из определения суперпозиции автоматов следует, что суперпозиция двух синхронных автоматов снова является синхронным автоматом. Поэтому все преобразования $f\colon X^\omega \to X^\omega$, определенные синхронными автоматами, образуют полугруппу. Эту полугруппу мы будем обозначать $\mathcal{SA}(X)$. Все преобразования, определенные конечными синхронными автоматами, тоже образуют полугруппу, которую мы будем обозначать $\mathcal{SF}(X)$. Заметим, что в отличие от асинхронного случая полугруппы $\mathcal{SA}(X)$ и $\mathcal{SF}(X)$ зависят от алфавита X.

Каждое состояние $q \in Q$ синхронного автомата определяет некоторое отображение $\lambda_q\colon X_{\mathrm{I}} \to X_{\mathrm{O}}$, заданное формулой $\lambda_q(x) = \lambda(x,q)$. В связи с этим в графе синхронного автомата иногда стрелки отмечают не двойной меткой вида $x|y$, а только буквой x, одновременно отмечая каждую вершину q преобразованием λ_q. В случае синхронного автомата мы в основном будем использовать именно такие диаграммы.

Из определения следует, что синхронный автомат всегда является невырожденным. Более того, синхронный автомат сохраняет длины конечных слов и его действие на пространстве X^ω однозначно определяет действие на X^* и наоборот. В частности, полугруппы преобразований, задаваемых (конечными) синхронными автоматами на множествах X^ω и X^*, изоморфны как абстрактные полугруппы и понятия ω-эквивалентности и эквивалентности для синхронных автоматов совпадают.

Кроме того, в каждом классе эквивалентных инициальных синхронных автоматов содержится единственный достижимый синхронный автомат без различных эквивалентных состояний. Поэтому в синхронном случае вопрос о существовании состояний с неполным ответом не ставится и *редуцированным* (или *минимальным*) называется автомат без недостижимых состояний и пар эквивалентных состояний. Минимальный автомат, эквивалентный данному, находят простым отождествлением эквивалентных состояний, как описано во многих монографиях, например в [18]. Такой автомат является единственным с точностью до изоморфизма автоматом с минимальным числом состояний среди синхронных автоматов, эквивалентных данному.

3.2. Синхронно автоматные преобразования и их свойства. Преобразование $g\colon X^* \to X^*$ ($g\colon X^\omega \to X^\omega$) называется *синхронно автоматным*, если существует синхронный инициальный автомат, его задающий.

Будем говорить, что преобразование $f\colon X^* \to X^*$ ($f\colon X^\omega \to X^\omega$) сохраняет общие начала слов, если для произвольных $u, v \in X^*$ ($u, v \in X^\omega$) длина $|\mathcal{P}\{f(u), f(v)\}|$ общего начала слов $f(u)$, $f(v)$ не меньше чем длина общего начала слов u и v.

Синхронно автоматные преобразования описываются следующим образом.

Предложение 3.1. *Преобразование $f\colon X^\omega \to X^\omega$ ($f\colon X^* \to X^*$) является синхронно автоматным тогда и только тогда, когда оно сохраняет общие начала (и длины) слов.*

В связи с тем что синхронно автоматные преобразования сохраняют общие начала и длины слов, более удобным определением ограничения синхронно автоматного преобразования является следующее.

Определение 3.1. Пусть $f\colon X^\omega \to X^\omega$ — синхронно автоматное преобразование, $w \in X^*$ — конечное слово. *Ограничением отображения f в слове w* называется отображение $f|_w\colon X^\omega \to X^\omega$, определенное равенством

$$f(wu) = vf|_w(u),$$

где v — конечное слово длины, равной длине w.

Заметим, что v является общим началом всех слов вида $f(wu)$, $u \in X^\omega$, определено единственным образом и является образом w под действием синхронного автомата, определяющего f.

Следующие простые утверждения устанавливают связь между ограничениями синхронно автоматных преобразований и состояниями синхронных автоматов [89, 90].

Предложение 3.2. *Если A_q определяет синхронно автоматное преобразование f, то $A_{\pi(w,q)}$ определяет преобразование $f|_w$.*

Состояния минимального автомата, определяющего синхронно автоматное преобразование f, находятся во взаимно однозначном соответствии с ограничениями $f|_w$.

Условие обратимости и алгоритм нахождения обратного к преобразованию, заданному синхронным автоматом, формулируются проще, чем в случае асинхронного автомата.

Предложение 3.3. *Пусть $A = \langle X, X, Q, \lambda, \pi\rangle$ — синхронный автомат. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Автомат A_{q_0} действует обратимым преобразованием на X^*.*

2. *Автомат A_{q_0} действует обратимым преобразованием на X^ω.*

3. *Для каждого достижимого состояния $q \in Q$ преобразование $\lambda_q\colon X \to X$ является обратимым.*

Неинициальный автомат, в котором все преобразования λ_q являются обратимыми, называется *обратимым.*

Автомат, определяющий обратное отображение, находится с помощью следующего утверждения.

Предложение 3.4. *Пусть $A = \langle X, X, Q, \lambda, \pi\rangle$ — синхронный обратимый автомат, и пусть $A' = \langle X, X, Q, \lambda', \pi'\rangle$, где $\pi(x, q) = \pi'(\lambda(x, q), q)$ и $\lambda(\lambda'(x, q), q) = x$. Тогда для каждого состояния $q_0 \in Q$ инициальный автомат A'_{q_0} определяет отображение (множества X^* или множества X^ω), обратное отображению, определяемому инициальным автоматом A_{q_0}.*

Неинициальный автомат A', описанный в предложении, будем называть *обратным к автомату A*. Соответственно инициальный автомат A'_q называется *обратным к инициальному автомату A_q*.

Таким образом, для того чтобы найти диаграмму автомата, обратного данному, нужно только заменить на каждой стрелке метку $x|y$ на $y|x$.

Следовательно, множество всех биективных преобразований, определенных синхронными автоматами, является группой относительно суперпозиции. Эту группу называют *группой синхронных автоматов* и обозначают $\mathcal{GA}(X)$. Множество всех биективных преобразований, определенных конечными синхронными автоматами, тоже является группой, которую называют *группой конечных синхронных автоматов* и обозначают $\mathcal{FGA}(X)$. Эти группы зависят от алфавита X. Группа $\mathcal{FGA}(X)$, по-видимому, впервые была определена в работе [33].

Из предложения 3.1 следует

Предложение 3.5. *Для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *подгруппа* $\mathrm{St}(n) \leq \mathcal{GA}(X)$ *всех автоматов, действующих тривиально на множестве* X^n, *является нормальной подгруппой группы* $\mathcal{GA}(X)$. *При этом последовательность* $\mathrm{St}(1) \geq \mathrm{St}(2) \geq \mathrm{St}(3) \geq \ldots$ *является базой окрестностей единицы в проконечной топологии на группе* $\mathcal{GA}(X)$.

Таким образом, группа $\mathcal{GA}(X)$ является проконечной, а все ее подгруппы и, в частности, группа $\mathcal{FGA}$ являются финитно аппроксимируемыми.

Подгруппа $\mathrm{St}(n)$ из формулировки предложения 3.5 называется *стабилизатором n-го уровня*. Аналогично определяется стабилизатор $\mathrm{St}_G(n)$ для произвольной подгруппы $G < \mathcal{GA}(X)$.

В связи с предложением 3.1 естественно интерпретировать синхронные автоматные преобразования как морфизмы некоторого корневого дерева $T(X)$. Вершинами дерева $T(X)$ являются элементы множества X^*, при этом две вершины u, v инцидентны тогда и только тогда, когда $u = vx$ или $v = ux$ для некоторого $x \in X$. Корнем дерева $T(X)$ является вершина $\varnothing$. *Морфизмом* корневого дерева называется отображение, которое сохраняет корень и отношение инцидентности вершин (при этом если две вершины соединены ребром, то их образы должны быть различными).

Предложение 3.6. *Преобразование* $f\colon X^* \to X^*$ *является синхронно автоматным тогда и только тогда, когда оно индуцирует морфизм дерева* $T(X)$.

Обратимые синхронно автоматные преобразования находятся в биективном соответствии с автоморфизмами дерева $T(X)$.

Более подробно о действиях на деревьях сказано в разд. 6.

Множество X^ω естественно отождествляется с границей (т.е. с множеством бесконечных путей без повторений, соединяющих корневую вершину с бесконечностью) дерева $T(X)$.

Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_n)$ — строго убывающая, стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — соответствующая ультраметрика на множестве X^ω, определенная в п. 2.1. Справедливо следующее уточнение теоремы 2.4.

Предложение 3.7. *Преобразование* $f\colon X^\omega \to X^\omega$ *является синхронно автоматным тогда и только тогда, когда оно является нерасширяющим, т.е. когда выполнено неравенство*

$$d(f(u), f(v)) \leq d(u, v)$$

для всех $u, v \in X^\omega$.

Обратимое отображение $f\colon X^\omega \to X^\omega$ *является синхронно автоматным тогда и только тогда, когда оно является изометрией метрического пространства* (X^ω, d).

3.3. Сплетения и группы автоматов. Группы и полугруппы автоматов тесно связаны со сплетениями. Напомним, что сплетением по конечной или бесконечной последовательности полугрупп преобразований

$$(H_1, X_1),\ (H_2, X_2),\ (H_3, X_3), \ldots$$

называется полугруппа $\wr_i H_i$ всех преобразований g декартова произведения $\mathbf{X}^\omega = \prod_i X_i$, удовлетворяющих следующим условиям (действие g на последовательность указывается верхним индексом справа):

i) если $(y_1, y_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)^g$, то y_i зависит только от i первых координат $x_1, \ldots, x_i$ прообраза;

ii) если фиксировать $x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0$, то преобразование g_i множества X_i, определенное равенством $(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, \ldots)^g = (y_1^0, \ldots, y_{i-1}^0, x_i^{g_i}, \ldots)$, принадлежит полугруппе H_i.

Из определений следует, что любое преобразование $g \in \wr_i H_i$ определяет последовательность $g_1, g_2, \ldots$, где g_i — функция на $X_1 \times \ldots \times X_{i-1}$ со значениями в H_i. Иными словами, преобразования такого вида можно задавать конечными или бесконечными кортежами (называемыми также таблицами)

$$g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \ldots], \tag{4}$$

где $g_1 \in H_1$, $g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in H_i^{X_1 \times \ldots \times X_{i-1}}$. Таблица (4) действует на элемент $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ по формуле

$$\overline{a}^g = (a_1^{g_1}, a_2^{g_2(a_1)}, a_3^{g_3(a_1, a_2)}, \ldots).$$

Отметим следующие простые свойства конструкции сплетения полугрупп преобразований.

- Сплетение $\wr_i H_i$ будет группой в том и только том случае, когда каждая из полугрупп H_i является группой.
- Если H_i° — группа обратимых элементов полугруппы H_i, то группа обратимых элементов сплетения $\wr_i H_i$ совпадает со сплетением по последовательности
$$(H_1^\circ, X_1),\ (H_2^\circ, X_2), \ldots$$
- Сплетение $\wr_i H_i$ действует точно как на множестве $\mathbf{X}^\omega = \prod_i X_i$, так и на множестве $\mathbf{X}^* = \bigcup_i (X_1 \times \ldots \times X_i)$. При этом действие на $\mathbf{X}^\omega$ транзитивно тогда и только тогда, когда каждая из полугрупп H_i действует транзитивно на множестве X_i, а действие на $\mathbf{X}^*$ никогда не является транзитивным, поскольку множества вида $X_1 \times \ldots \times X_i$ являются инвариантными.

Предложение 3.8. *Полугруппа* $(\mathcal{SA}(X), X^\omega)$ *изоморфна (как полугруппа преобразований) сплетению по бесконечной последовательности полных симметрических полугрупп преобразований алфавита* X.

Группа подстановок $(\mathcal{GA}(X), X^\omega)$ *изоморфна (как группа подстановок) сплетению по бесконечной последовательности симметрических групп над алфавитом* X.

В частности, отсюда получаем, что группа $\mathcal{GA}(X)$ является полупрямым произведением симметрической группы $\mathrm{Sym}(X)$, отождествленной с подгруппой автоматов, оставляющих неизменными все буквы слова, кроме, возможно, первой, и прямого произведения $\mathcal{GA}(X)^X = \mathrm{St}(1)$, которое является нормальной подгруппой автоматов, действующих тривиально на однобуквенных словах. При этом $\mathrm{Sym}(X)$ действует на $\mathcal{GA}(X)^X$ перестановками прямых сомножителей.

Расположим элементы алфавита X в последовательность $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда, используя предыдущее разложение группы $\mathcal{GA}(X)$ в полупрямое произведение своих подгрупп, мы будем иногда записывать ее элементы в виде $(g_1, g_2, \ldots, g_n)\alpha$, где $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \mathcal{GA}(X)^X$, $g_i \in \mathcal{GA}(X)$, а $\alpha \in \mathrm{Sym}(X)$. В этой записи автомат $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)\alpha$ действует на слова над алфавитом X по правилу

$$(a_i x_2 x_3 \ldots)^g = a_i^\alpha (x_2 x_3 \ldots)^{g_i}.$$

Заметим, что если синхронный автомат A_{q_0} допускает разложение $(g_1, g_2, \dots, g_n)\alpha$, то g_i задаются автоматами $A_{\pi(a_i,q_0)}$, а подстановка α совпадает с подстановкой $\lambda_{q_0} = \lambda(\,\cdot\,, q_0)$, где π, λ — соответственно функции переходов и выходов автомата A_{q_0}.

Поэтому действие каждого конечного синхронного автомата можно однозначно задать рекуррентными формулами вида

$$\begin{gathered} g_1 = (h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n})\tau_1, \\ g_2 = (h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2n})\tau_2, \\ \dots \\ g_n = (h_{n1}, h_{n2}, \dots, h_{nn})\tau_n, \end{gathered}$$

где каждое преобразование h_{ij} равно некоторому g_i. Обратно, любой набор формул такого вида однозначно определяет преобразование, заданное некоторым конечным синхронным автоматом.

Предыдущие формулы однозначно определяют некоторое синхронно автоматное преобразование и в случае, когда h_{ij} являются произвольными групповыми словами от g_i. Такие синхронно автоматные преобразования называются *функционально рекурсивными* (см. [58]). Множество всех функционально рекурсивных преобразований является счетной группой, содержащей группу обратимых конечных автоматов и не совпадающей с ней.

4. ПРИМЕРЫ СИНХРОННО АВТОМАТНЫХ ГРУПП

Из предложения 3.5 следует, что все подгруппы группы синхронных автоматов $\mathcal{GA}(X)$ и все подполугруппы полугруппы синхронных автоматов $\mathcal{SA}$ являются финитно аппроксимируемыми.

Язык конечных синхронных автоматов оказался эффективным для построения и изучения примеров групп, связанных с неограниченной проблемой Бернсайда, групп промежуточного роста и групп с другими интересными свойствами.

При вычислении в группе, порожденной конечно автоматными преобразованиями, часто оказывается удобно переходить к группе, порожденной всеми инициальными автоматами, получаемыми из данного выбором различных начальных состояний. В связи с этим естественным представляется исследование групп, *определенных* синхронными автоматами.

Определение 4.1. Пусть $A = \langle X, X, Q, \pi, \lambda \rangle$ — синхронный автомат. *Полугруппой, определенной автоматом* A, называется подполугруппа полугруппы $\mathcal{SA}(X)$, порожденная всеми инициальными автоматами вида A_q, $q \in Q$.

Если автомат A обратимый, то *определенной им группой* называется подгруппа группы $\mathcal{GA}(X)$, порожденная инициальными автоматами A_q для всех $q \in Q$.

Полугруппу и группу, определенные автоматом A, будем обозначать $S(A)$ и $G(A)$ соответственно.

4.1. Автоматы с двумя состояниями. Произвольный синхронный автомат A с одним состоянием однозначно задан подстановкой σ, которую он определяет на множестве однобуквенных слов. При этом его действие на остальные слова определяется равенством $(x_1 x_2 \dots)^A = x_1^\sigma x_2^\sigma \dots$

Рассмотрим вопрос о том, какие группы определяются автоматом с двумя состояниями над алфавитом из двух букв.

Предложение 4.1 [30]. *Пусть A — автомат с двумя состояниями над алфавитом $\{0,1\}$, G — группа, которую он определяет. Тогда группа G изоморфна одной из следующих групп:*

1) *тривиальной группе;*

2) *группе второго порядка $\mathbb{Z}_2$;*

3) *четверной группе Клейна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;*

4) *бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$;*

5) *бесконечной диэдральной группе $\mathbb{D}_\infty$;*

6) *группе "мигающих лампочек" $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Пусть $\{q, s\}$ — состояния автомата A. Тогда группа G порождена элементами $a = A_q$, $b = A_s$, причем в свете соглашений п. 3.3 выполнены соотношения

$$a = (x_{11}, x_{12})\sigma^{i_1},$$
$$b = (x_{21}, x_{22})\sigma^{i_2},$$

где каждое x_{ij} равно либо a, либо b, σ — транспозиция $(0,1)$, а i_1, i_2 равны либо нулю, либо единице.

Если оба показателя i_k равны нулю, то a, b действуют тождественно и группа, определенная автоматом, тривиальна. Будем считать, что $i_1 = 1$.

Возможны следующие случаи.

1. Пусть $a = (a,a)\sigma$. В этом случае $a^2 = (a^2, a^2)$, поэтому $a^2 = 1$. Преобразование a в каждом слове меняет каждую букву на противоположную.

Если $b = (b,b)$, $b = (a,a)\sigma$ или $b = (b,b)\sigma$, то группа G имеет порядок 2 (в первом случае $b = 1$, во втором и третьем $b = a$).

Поскольку при сопряжении преобразования $c = (c_1, c_2)\sigma^i$ с помощью $a = (a,a)\sigma$ получаем $c^a = (c_2^a, c_1^a)\sigma^i$, то нам осталось рассмотреть только случаи $b = (a,a)$, $b = (a,b)\sigma$ и $b = (a,b)$.

Если $b = (a,a)$, то b меняет в каждом слове все буквы, кроме первой, и поэтому группа G изоморфна группе Клейна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Если $b = (a,b)\sigma$, то $a^{-1}b = \sigma(a^{-1}, a^{-1})(a,b)\sigma = (a^{-1}b, 1)$, поэтому $a^{-1}b = 1$, значит, $a = b$ и группа G имеет порядок 2.

Если $b = (a,b)$, то $b^{-1}a = (a^{-1}, b^{-1})(a,a)\sigma = (1, b^{-1}a)\sigma$, т.е. $b^{-1}a$ действует на бесконечные последовательности над алфавитом $\{0,1\}$ как прибавление единицы к 2-адическому числу (так называемая *счетная машина*). С другой стороны, a действует на 2-адические записи отображением $x \mapsto -1 - x$, поскольку меняет все цифры. Поэтому группа, порожденная a и b, изоморфна группе функций вида $(-1)^k x + n$, $n, k \in \mathbb{Z}$, относительно суперпозиции, т.е. бесконечной диэдральной группе $\mathbb{D}_\infty$.

2. Пусть теперь $a = (b,a)\sigma$ (случай $a = (a,b)\sigma$ рассматривается аналогично).

Если $b = (b,a)\sigma$, то $a = b$ и $a = (a,a)\sigma$, т.е. $|G| = 2$.

Если $b = (a,b)\sigma$, то

$$a^{-1}b = \sigma(b^{-1}, a^{-1})(a,b)\sigma = (a^{-1}b, b^{-1}a),$$
$$b^{-1}a = \sigma(a^{-1}, b^{-1})(b,a)\sigma = (b^{-1}a, a^{-1}b),$$

следовательно, $a = b$ и снова $a = (a,a)\sigma$ и $|G| = 2$.

Случай $b = (b,b)\sigma$ уже разобран. Если $b = (a,a)\sigma$, то, как и выше, доказываем, что $b = a = (a,a)\sigma$.

Если $b=(b,b)$, то $b=1$ и $a=(1,a)\sigma$, т.е. является счетной машиной, поэтому $G\simeq\mathbb{Z}$.

Если $b=(a,a)$, то имеют место следующие равенства:

$$ab=(b,a)\sigma(a,a)=(ba,a^2)\sigma,$$
$$ba=(a,a)(b,a)\sigma=(ab,a^2)\sigma,$$

откуда получаем, что $ab=ba$. Следовательно,

$$a^2b=(b,a)\sigma(b,a)\sigma(a,a)=(baa,aba)=(a^2b,a^2b),$$

поэтому $a^2b=1$ и группа G циклическая. Для доказательства того, что она бесконечна, достаточно, например, показать, что a сферически транзитивно, т.е. что для каждого n количество слов w длины n таких, что $\pi(w,a)=a$, нечетно (см. определение 4.2 и предложение 4.3). Последнее легко доказывается по индукции.

Рассмотрим самый сложный случай, когда $b=(b,a)$. Группа G порождается элементами b и $c=b^{-1}a$.

Отождествим алфавит $X=\{0,1\}$ с циклической группой $\mathbb{Z}_2$. Несложно проверить, что тогда c действует на бесконечные последовательности по правилу

$$(x_1x_2\dots)^c=(x_1+1)x_2x_3x_4\dots$$

Автомат b действует по правилу

$$(x_1x_2\dots)^b=x_1(x_2+x_1)(x_3+x_2)(x_4+x_3)\dots$$

Это можно проверить непосредственно либо используя линейность автомата, что будет сделано в п. 4.6.

Поставим в соответствие каждой последовательности $x_1x_2\dots$ формальный степенной ряд $x_1+x_2t+x_3t^2+\dots\in\mathbb{Z}_2[[t]]$. Тогда непосредственно из предыдущих формул следует, что такое отождествление сопрягает c с отображением $\phi_c\colon F(t)\mapsto F(t)+1$, а b с $\phi_b\colon F(t)\mapsto(1+t)F(t)$. Поэтому группа G изоморфна группе, порожденной такими преобразованиями кольца $\mathbb{Z}_2[[t]]$. Данная группа состоит из преобразований вида

$$F(t)\mapsto(1+t)^nF(t)+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}k_s(1+t)^s, \tag{5}$$

где $n\in\mathbb{Z}$ и все коэффициенты $k_s\in\mathbb{Z}_2$, кроме, возможно, конечного числа, равны нулю. Действительно, преобразования такого вида образуют группу, содержащую ϕ_c и ϕ_b, но, с другой стороны,

$$F(t)+(1+t)^s=(F(t)(1+t)^{-s}+1)(1+t)^s=\phi_b^s\cdot\phi_c\cdot\phi_b^{-s}(F(t)),$$

поэтому все преобразования вида (5) лежат в группе, порожденной ϕ_c и ϕ_b.

Из этого следует, что G изоморфна группе “мигающих лампочек” $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}_2$, где база сплетения $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}$ отождествляется с нормальной подгруппой преобразований вида

$$F(t)\mapsto F(t)+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}k_s(1+t)^s,$$

на которой ϕ_b действует сопряжением как сдвиг

$$(1+t)^{-1}\left((1+t)F(t)+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}k_s(1+t)^s\right)=F(t)+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}k_{s+1}(1+t)^s.$$

Случай $b=(a,b)$ переходом к $a^{-1}=(a^{-1},b^{-1})\sigma$, $b^{-1}=(a^{-1},b^{-1})$ и сопряжением с помощью $d=(d,d)\sigma$ (тогда $(a^{-1})^d=((b^{-1})^d,(a^{-1})^d)\sigma$, $(b^{-1})^d=((b^{-1})^d,(a^{-1})^d)$) сводим к предыдущему.

3. Осталось рассмотреть случай, когда $a=(b,b)\sigma$.

Случаи $b=(a,b)\sigma$ и $b=(b,a)\sigma$ уже рассмотрены. Если $b=(b,b)\sigma$ или $b=(a,a)\sigma$, то $a=b=(a,a)\sigma$ и группа имеет порядок 2.

Если $b=(b,b)$, то $b=1$ и $a=\sigma$, поэтому группа имеет порядок 2.

Пусть $b=(a,b)$ (случай $b=(b,a)$ рассматривается аналогично). Тогда

$$a^2=(b^2,b^2),$$
$$b^2=(a^2,b^2),$$

поэтому $a^2=b^2=1$ и группа G диэдральная. То, что она бесконечная, следует из того, что ab сферически транзитивно, что легко доказать, используя предложение 4.3 (см. ниже), поскольку

$$ab=(1,ba)\sigma,$$
$$ba=(ab,1)\sigma.$$

Осталось разобрать последний случай $b=(a,a)$. Имеем

$$a^2=(b^2,b^2),$$
$$b^2=(a^2,a^2),$$
$$ab=(ba,ba)\sigma,$$
$$ba=(ab,ab)\sigma,$$

поэтому $a^2=b^2=1$ и $ab=ba=(ab,ab)\sigma$. Следовательно, ab тоже имеет порядок 2 и G — четверная группа Клейна $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. Это можно также доказать, заметив, что a меняет на противоположные все буквы слова с нечетными номерами, а b — все буквы с четными номерами. $\square$

Заметим, что приведенное здесь доказательство того, что одна из групп, определяемых автоматом с двумя состояниями, является группой “мигающих лампочек”, существенно короче доказательства аналогичного утверждения из [30].

В настоящий момент не известно, какие группы определяются автоматами с тремя состояниями над алфавитом с двумя буквами, а также автоматами с двумя состояниями с более чем двухбуквенным алфавитом.

Рассмотрим детальнее автомат, определяющий группу $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}_2$. Он имеет диаграмму, изображенную на рис. 6.

Предложение 4.2. *Пусть A — автомат, изображенный на рис.* 6, *$A^{(n)}$ — его n-я суперпозиция. Тогда автомат $A^{(n)}$ имеет 2^n попарно неэквивалентных состояний, причем для каждого его состояния q инициальный автомат $A^{(n)}_q$ является достижимым.*

Доказательство. Рассмотрим редуцированный автомат, соответствующий преобразованию b^n. Для этого рассмотрим всевозможные ограничения $b^n|_v$. Пусть $v=x_1x_2\dots x_m$, а

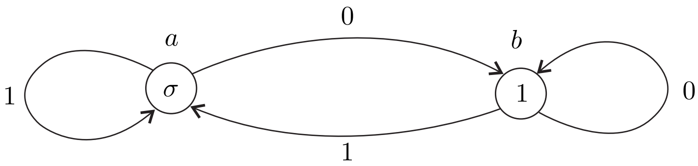


Рис. 6. Автомат, определяющий группу “мигающих лампочек”

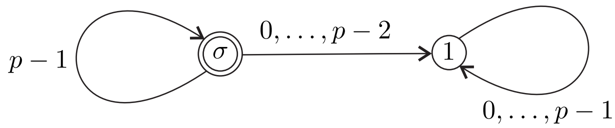


Рис. 7. Счетная машина

$g = x_1 + x_2 t + \ldots + x_m t^{m-1} \in \mathbb{Z}_2[t]$ — соответствующий многочлен. Пусть $w = y_1 y_2 \ldots \in X^\omega$ — произвольное бесконечное слово, $F(t) = y_1 + y_2 t + \ldots$ — соответствующий ряд, а $G(t)$ — ряд, который соответствует образу w под действием $b^n|_v$. Тогда

$$(1+t)^n (g + t^m F(t)) = \tilde{g} + t^m G(t),$$

где $\tilde{g} \in \mathbb{Z}_2[t]$ — многочлен степени не выше $m-1$.

Таким образом, $b^n|_v$ действует на формальные степенные ряды по формуле

$$F(t) \mapsto (1+t)^n F(t) + f,$$

где f — такой многочлен, что $\deg((1+t)^n g - t^m f) < m$, т.е. частное при делении многочлена $(1+t)^n g$ на многочлен t^m. Поскольку многочлен g имеет степень не выше $m-1$, то многочлен f имеет степень не выше $n-1$.

Пусть f — произвольный многочлен степени не выше $n-1$, а g — частное от деления $t^m f$ (где $m \geq n$) на $(1+t)^n$, тогда $\deg g < m$ и $\deg((1+t)^n g - t^m f) < n \leq m$. Таким образом, f может быть произвольным и количество ограничений b^n равно количеству многочленов $f \in \mathbb{Z}_2[t]$ степени не выше n, т.е. 2^n. Следовательно, количество состояний автомата $A^{(n)}$ тоже равно 2^n и все они попарно неэквивалентны.

Заметим, что частное от деления $(1+t)^n g$ на t^m не зависит от коэффициентов многочлена g при одночленах t^k, $k < m-n$, поэтому ограничение $b^n|_v$ зависит только от последних n букв слова v. Из этого следует достижимость любого состояния автомата $A^{(n)}$ из любого. □

4.2. Счетная машина. *Счетной машиной* (adding machine) или *одометром* называется преобразование пространства X^ω, $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, определенное инициальным автоматом над алфавитом X, изображенным на рис. 7 (также называемым счетной машиной).

На рисунке буквой σ обозначена циклическая подстановка $(0, 1, \ldots, p-1)$. Начальным состоянием является состояние, расположенное слева (автомат с другим начальным состоянием действует тождественно).

Рекуррентное определение счетной машины следующее:

$$a = (1, 1, \ldots, 1, a)\sigma.$$

В частности, в случае $p = 2$ мы получаем $a = (1, a)\sigma$.

Отождествим каждую бесконечную последовательность $w = x_1x_2\ldots$ над алфавитом X с p-адическим числом

$$x_1 + x_2p + x_3p^2 + \ldots + x_{n+1}p^n + \ldots$$

Такое отождествление сопрягает счетную машину с преобразованием кольца целых p-адических чисел, которое к каждому числу прибавляет единицу. (Это следует из классического правила переносов знака.) От этого и происходит название “счетная машина”.

Определение 4.2. Синхронно автоматное преобразование $\alpha\colon X^* \to X^*$, а также соответствующий инициальный автомат называются *сферически транзитивными*, если циклическая группа $\langle\alpha\rangle$ действует транзитивно на множестве X^n для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Из интерпретации счетной машины как прибавления единицы в группе p-адических чисел следует, что счетная машина действует сферически транзитивно. Действительно, тогда множества X^n естественно отождествляются с группами $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, на которых счетная машина действует прибавлением $1 + p^n\mathbb{Z}$, т.е. транзитивно.

Имеет место следующий результат (см. [9, 66, 67]).

Предложение 4.3. *Синхронно автоматное преобразование является сферически транзитивным тогда и только тогда, когда оно сопряжено со счетной машиной в группе* $\mathcal{GA}(X)$.

В случае алфавита из двух букв сферическая транзитивность инициального автомата исследуется с помощью следующего критерия.

Лемма 4.4. *Инициальный синхронный автомат* $A_{q_0} = \langle X, X, Q, \lambda, \pi\rangle$ *над двухбуквенным алфавитом будет сферически транзитивным тогда и только тогда, когда для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *число слов* v *длины* n *таких, что* $\lambda(\,\cdot\,, \pi(v, q_0))\colon X \to X$ *является транспозицией, нечетно.*

Доказательство. Докажем по индукции, что для того, чтобы автомат A_{q_0} действовал транзитивно на первых n уровнях, необходимо и достаточно, чтобы число слов v длины $k \le n$ таких, что $\lambda(\,\cdot\,, \pi(v, q_0))$ является транспозицией, было нечетно.

Для $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, оно верно для n. Автомат $A_{q_0}^{(2^n)}$ действует тривиально на уровне n. Из транзитивности действия автомата A_{q_0} на этом уровне следует, что подстановка, посредством которой действует автомат $A_{q_0}^{(2^n)}$ на последнюю букву произвольного слова длины $n+1$, равна произведению всех подстановок вида $\lambda(\,\cdot\,, \pi(v, q_0))$, $v \in X^n$, взятых в некотором порядке.

Если среди подстановок $\lambda(\,\cdot\,, \pi(v, q_0))$, $v \in X^n$, четное число транспозиций, то $A_{q_0}^{(2^n)}$ действует тривиально на $n+1$-м уровне, поэтому A_{q_0} не действует на нем транзитивно. Если же транспозиций нечетное число, то $A_{q_0}^{(2^n)}$ меняет в каждом слове длины $n+1$ последнюю букву, откуда легко следует транзитивность автомата A_{q_0} на $n+1$-м уровне. $\square$

4.3. Рост синхронных автоматов. Пусть $A = \langle X, X, Q, \lambda, \pi\rangle$ — конечный (неинициальный) синхронный автомат. Минимизируем (т.е. отождествим эквивалентные состояния) суперпозицию $A^{(n)} = \underbrace{A * \ldots * A}_{n}$. Полученный автомат обозначим $\overline{A^{(n)}}$. Из определения суперпозиции автоматов следует, что $|\overline{A^{(n)}}| \le |A|^n$, где $|A|$ — число состояний автомата A.

Определение 4.3. *Функцией роста* (*неинициального*) *автомата* A называется функция $\gamma_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определенная равенством

$$\gamma_A(n) = |\overline{A^{(n)}}|.$$

Аналогично если A_q — конечный инициальный синхронный автомат, то после минимизации суперпозиции $A_q^{(n)}$ (т.е. после отбрасывания недостижимых и отождествления эквивалентных состояний) мы получим некоторый автомат $\overline{A_q^{(n)}}$. Функция $\gamma_{A_q}(n) = |\overline{A_q^{(n)}}|$ называется *функцией роста инициального автомата* A_{q_0}. Очевидно, что $\gamma_{A_q}(n) \le \gamma_A(n)$.

Пусть H — полугруппа (группа), порожденная конечной системой образующих S (в случае группы будем считать, что $S = S^{-1}$). Положим $\gamma_H(n)$ равным количеству элементов H, представимых в виде произведения элементов S длины не более n. Функция $\gamma_H(n)$ называется *функцией роста* полугруппы (группы) H относительно системы образующих S.

Полугруппа H (автомат) называется полугруппой (автоматом) *полиномиального роста*, если существуют положительные числа C, d такие, что $\gamma_H(n) \le Cn^d$ для всех натуральных n. В этом случае число $d = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma_H(n)}{\ln n}$ называется показателем полиномиального роста полугруппы (автомата).

Полугруппа (автомат) обладает *экспоненциальным ростом*, если существует положительное число C такое, что для каждого натурального n имеет место неравенство

$$\gamma_H(n) \ge e^{Cn}.$$

Инициальный автомат обладает *логарифмическим ростом*, если существуют положительные числа C, d такие, что $\gamma_A(n) \le C \ln n + d$.

Говорят, что полугруппа или автомат обладают *промежуточным ростом*, если их рост больше роста любого полинома, но меньше экспоненциального роста.

Для двух неубывающих функций $\gamma_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, говорят, что γ_1 имеет *не больший порядок роста* (используется обозначение $\gamma_1 \preceq \gamma_2$), если существует натуральное число C такое, что $\gamma_1(n) \le \gamma_2(Cn)$. Две функции γ_1, γ_2 имеют *одинаковый порядок роста*, если одновременно $\gamma_1 \preceq \gamma_2$ и $\gamma_2 \preceq \gamma_1$. Функция γ_1 имеет порядок роста *строго меньше* порядка роста функции γ_2, если $\gamma_1 \preceq \gamma_2$, но $\gamma_2 \not\preceq \gamma_1$.

Через $[\gamma]$ обозначается класс эквивалентности функций роста. Он также называется *порядком роста* (или *степенью роста*) функции γ.

Если γ_1, γ_2 — функции роста полугруппы (группы) H относительно разных систем образующих, то порядки роста функций γ_1 и γ_2 одинаковые, т.е. $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

Следовательно, свойство быть полугруппой полиномиального, экспоненциального или промежуточного роста не зависит от выбора системы образующих S полугруппы.

Следующая теорема описывает все полугруппы с сокращениями полиномиального роста.

Теорема 4.5 [74]. *Конечно порожденная полугруппа H с сокращениями обладает полиномиальным ростом тогда и только тогда, когда она содержит нильпотентную подполугруппу конечного индекса.*

Напомним, что полугруппа называется *нильпотентной* (по А.И. Мальцеву), если для некоторого натурального n и любых элементов $x, y, a_1, a_2, \dots, a_n$ полугруппы H выполнено равенство $X_n = Y_n$, где X_n, Y_n определяются индуктивно:

$$X_0 = x, \quad Y_0 = y, \qquad X_{i+1} = X_i a_{i+1} Y_i, \quad Y_{i+1} = Y_i a_{i+1} X_i.$$

Мальцевым [80] было доказано, что группа является n-ступенной нильпотентной, когда в ней выполнено тождество $X_n = Y_n$ и не выполнено тождество $X_{n-1} = Y_{n-1}$.

Подполугруппа $H_0 \le H$ имеет *конечный индекс*, если существует конечное множество $K \subseteq H$ такое, что для каждого $h \in H$ существует $k \in K$ такое, что $hk \in H_0$.

Теорема 4.5 является обобщением теоремы Громова [26], описывающей группы полиномиального роста как почти нильпотентные.

Имеет место следующее свойство, связывающее понятия роста автомата и роста полугруппы (см. [74]).

Предложение 4.6. *Функция роста неинициального автомата A совпадает с функцией роста полугруппы $S(A)$ относительно системы образующих $S = \{A_q\colon\ q \in Q\}$.*

Следствие 4.7. *Обратимый автомат A имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда полугруппа $S(A)$ содержит нильпотентную подполугруппу конечного индекса.*

Напомним, что группа $\mathcal{FGA}(X)$ является финитно аппроксимируемой, следовательно, для любого синхронного автомата A группа $G(A)$, а следовательно, и полугруппа $S(A)$ являются финитно аппроксимируемыми.

Для класса групп, аппроксимируемых конечными p-группами, существует лакуна в множестве степеней роста: если порядок роста такой группы строго меньше $e^{\sqrt{n}}$, то она имеет полиномиальный рост [75]. Поэтому имеет место и аналогичное свойство роста автоматов.

Теорема 4.8. *Пусть A — обратимый синхронный автомат над алфавитом $\{0, 1, \dots, p-1\}$ (p — простое число), причем для любого состояния q функция выходов $\lambda(\,\cdot\,, q)$ является степенью циклической подстановки $(0, 1, \dots, p-1)$. Тогда если порядок роста автомата A строго меньше $e^{\sqrt{n}}$, то $S(A)$ содержит нильпотентную подполугруппу конечного индекса и рост A полиномиальный.*

Используя предложение 4.6, можно строить автоматы, имеющие полиномиальный, экспоненциальный, а также промежуточный рост.

Примером автомата, имеющего промежуточный рост, является автомат, определяющий 2-группу Григорчука, диаграмма которого изображена на рис. 14.

Действительно, все инициальные автоматы, которые мы можем получить, выбирая в нем начальное состояние, имеют в группе $\mathcal{FGA}(X)$ порядок 2, поэтому полугруппа, которую он определяет, совпадает с определенной им группой. Как замечено Мерзляковым [81], эта группа изоморфна 2-группе, построенной в [71], и как доказано в [72], она является группой промежуточного роста. Более того, имеют место оценки $e^{n^\alpha} \preceq \gamma(n) \preceq e^{n^\beta}$, где $\alpha = 0.51$, $\beta = 0.7$ [72, 79, 4].

Другим примером автомата промежуточного роста является автомат над алфавитом $X = \{0, 1, 2\}$, изображенный на рис. 9, что следует из результата Гупты–Фабриковского [19] о промежуточности роста определенной этим автоматом группы.

Более того, над трехбуквенным алфавитом существует автомат промежуточного роста с двумя состояниями. А именно в [5] доказано, что группа, определенная автоматом, изображенным на рис. 8, имеет промежуточный рост.

Новые примеры автоматов промежуточного роста с тремя состояниями можно получить из недавних результатов Л. Бартольди и Ю. Леонова о промежуточности роста групп Гупты–Сидки и других GGS-групп. Например, таким является автомат на рис. 15.

Примером автомата полиномиального роста является счетная машина — автомат, изображенный на рис. 7. Поскольку полугруппа, которую он определяет, изоморфна полугруппе целых неотрицательных чисел, то его функция роста равна $\gamma(n) = n + 1$.

Исследуем рост счетной машины как инициального автомата A_q. Для этого нам нужно найти количество состояний редуцированного автомата $\overline{A_q^{(n)}}$, т.е. найти количество различных ограничений преобразования множества X^ω, которое он определяет.

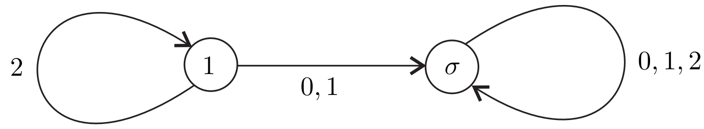


Рис. 8. Автомат промежуточного роста с двумя состояниями

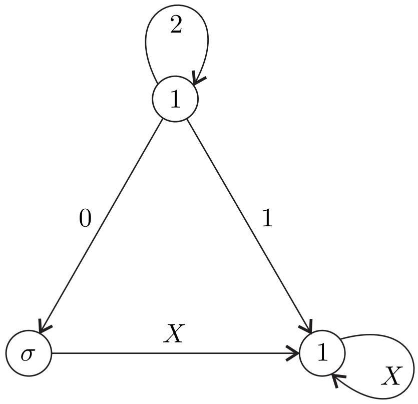


Рис. 9. Автомат промежуточного роста с тремя состояниями

Пусть $w \in X^*$ — конечное слово. Интерпретируем его как p-адическую запись ($X = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$) некоторого целого числа m. Это число будет находиться в промежутке $0 \le m \le p^s - 1$, где s — длина слова w. Автомат $A_q^{(n)}$ действует на p-адические записи как прибавление числа n. Из определения ограничения автоматного преобразования и правил сложения p-адических записей следует, что ограничением $A_q^{(n)}$ в слове w будет преобразование $A_q^{(k)}$, где $k = [\frac{m+n}{p^s}]$ (здесь $[\,\cdot\,]$ — целая часть).

Если $n < p^s$, то $0 = [\frac{n}{p^s}] \le k \le [\frac{n+p^s-1}{p^s}] = 1$. Если же $p^s \le n$, то количество чисел вида $[\frac{m+n}{p^s}]$, где $0 \le m \le p^s - 1$, не больше чем

$$\left[\frac{n+p^s-1}{p^s}\right] - \left[\frac{n}{p^s}\right] + 1 < \frac{n+p^s-1}{p^s} - \frac{n}{p^s} + 2 = 3 - p^{-s} < 3.$$

Таким образом, автомат $\overline{A_q^{(n)}}$ имеет не более чем $2\log_p n + 2$ состояний и рост счетной машины как инициального автомата логарифмический.

Автомат A, изображенный на рис. 6, определяет группу $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$, однако, как доказано в работе [30], $S(A)$ изоморфна свободной полугруппе с двумя образующими, следовательно, этот автомат имеет экспоненциальный рост. Его рост как инициального автомата тоже экспоненциальный, что следует из предложения 4.2.

В общем случае рост инициального автомата может быть существенно ниже его роста как неинициального автомата. Например, рост автомата, определяющего группу Григорчука, при произвольном выборе начального состояния является ограниченным, поскольку его вторая степень является единичным автоматом.

Не известно никакого аналога предложения 4.6 для инициальных автоматов.

Изучение порядка роста инициального автомата может быть полезным при исследовании конечно автоматных преобразований, поскольку рост является его инвариантом относительно сопряженности в группе $\mathcal{FGA}(X)$.

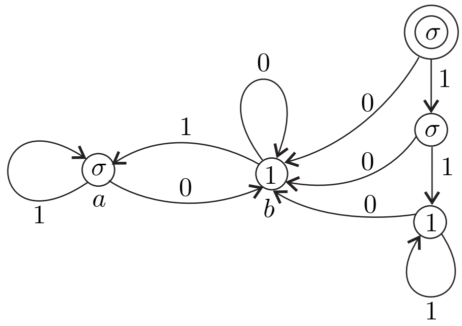


Рис. 10. Сферически транзитивный автомат экспоненциального роста

Предложение 4.9. *Пусть* A_p, B_q *— инициальные автоматы, сопряженные в группе конечных синхронных автоматов* $\mathcal{FGA}(X)$, $\gamma_A(n)$, $\gamma_B(n)$ *— их функции роста. Тогда существует число* $K > 1$ *такое, что*

$$K^{-1}\gamma_A(n) \le \gamma_B(n) \le K\gamma_A(n)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если C — автомат, сопрягающий автоматы A и B, то $C^{-1} * A^{(n)} * C = B^{(n)}$ для каждого n, поэтому $|\overline{B^{(n)}}| = |\overline{C^{-1} * A^{(n)} * C}| \le |C^{-1}|\,|\overline{A^{(n)}}|\,|C| = |C|^2|\overline{A^{(n)}}|$ и $|\overline{A^{(n)}}| = |\overline{C * B^{(n)} * C^{-1}}| \le |C|^2|\overline{B^{(n)}}|$, поэтому достаточно положить $K = |C|^2$. $\square$

Используя предложение 4.9, можно привести пример двух автоматов, сопряженных в группе $\mathcal{GA}(X)$ всех синхронных автоматов, но не сопряженных в группе $\mathcal{FGA}(X)$ конечных синхронных автоматов.

Рассмотрим автомат A_q с диаграммой, изображенной на рис. 10. Двойной окружностью отмечено начальное состояние.

С помощью леммы 4.4 несложно показать, что автомат A_q сферически транзитивный, а значит, сопряжен в группе $\mathcal{GA}(X)$ со счетной машиной. Покажем, что его рост экспоненциальный, откуда будет следовать, что он не сопряжен в $\mathcal{FGA}(X)$ со счетной машиной, поскольку у нее рост логарифмический.

Часть автомата A_q, достижимая из состояния b, является автоматом L, определяющим $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}_2$ (ср. рис. 6). Заметим также, что для произвольного $v \in X^*$ состояние $\pi(v, q)$ принадлежит L, кроме случая, когда v состоит только из единиц.

Докажем, что число $|\overline{A_q^{(n)}}| \ge 2^n$ для каждого n. Пусть k такое, что $2^k > n$. Автомат A_q действует на множестве X^k как циклическая перестановка. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{2^k}$ — такое упорядочение элементов множества X^k, что $v_i^{A_q} = v_{i+1}$ (индексы рассматриваются по модулю 2^k). Тогда ограничение действия A_q^n в слове v_i равно действию автомата

$$A_{\pi(v_i,q)}A_{\pi(v_{i+1},q)}\ldots A_{\pi(v_{i+n-1},q)}.$$

Но только для одного слова v_i автомат $A_{\pi(v_i,q)}$ не является автоматом L, поэтому существует v_i такое, что ограничение действия $A_q^{(n)}$ в слове v_i является некоторым состоянием автомата $L^{(n)}$. По предложению 4.2 из любого состояния $L^{(n)}$ достижимы любые из 2^n его состояний. Поэтому $|\overline{A_q^{(n)}}| \ge 2^n$, т.е. A_q имеет экспоненциальный рост.

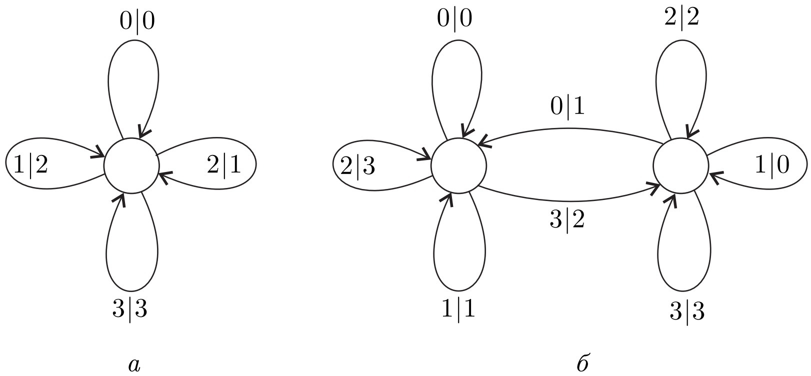


Рис. 11. Автоматы, порождающие $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$

4.4. Абелевы и линейные группы. Конструкцию счетной машины можно обобщить построением автомата, определяющего свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^n$ ранга n. Более того, автоматами можно представлять также линейные группы.

Пусть $\overrightarrow{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)$ — произвольный целый 2-адический вектор, где

$$m_i=a_{i0}+a_{i1}2+a_{i2}2^2+\ldots+a_{ik}2^k+\ldots,$$

а $a_{ij}\in\{0,1\}$. Определим биекцию ϕ между множеством n-мерных целых 2-адических векторов и пространством X^ω бесконечных слов над алфавитом $X=\{0,1\}^n$, элементами которого являются кортежи вида $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, где $x_i\in\{0,1\}$, следующим образом:

$$\phi(\overrightarrow{m})=(a_{10},a_{20},\dots,a_{n0})(a_{11},a_{21},\dots,a_{n1})\dots(a_{1k},a_{2k},\dots,a_{nk})\dots$$

В работе [10] доказаны следующие утверждения.

Теорема 4.10. *Для каждого целого вектора $\overrightarrow{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)$ и целочисленной матрицы $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ сопряжение преобразования $\overrightarrow{x}\mapsto\overrightarrow{x}A+\overrightarrow{m}$ с помощью ϕ является конечно автоматным преобразованием пространства X^ω.*

Таким образом, получаем представление свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$, линейной группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ и аффинной группы синхронными конечно автоматными преобразованиями над алфавитом из 2^n букв.

В частности, аффинная группа преобразований вида $\overrightarrow{x}\mapsto\overrightarrow{x}A+\overrightarrow{m}$, где $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, $\overrightarrow{m}\in\mathbb{Z}^2$, определяется автоматами, изображенными на рис. 11. Автоматы действуют на алфавите $\{0,1,2,3\}$, где 0 соответствует вектору $(0,0)$, 1 — вектору $(0,1)$, 2 — $(1,0)$, 3 — $(1,1)$. Автомат, изображенный на рис. 11, *а*, соответствует умножению векторов справа на матрицу $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, а автомат, изображенный на рис. 11, *б*, при выборе левого состояния в качестве начального действует на векторы умножением на матрицу $T=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, тогда как при выборе правого состояния в качестве начального действует на векторы преобразованием $\overrightarrow{m}\mapsto\overrightarrow{m}T+(0,1)$.

С другой стороны, можно определить биекцию ψ между пространством n-мерных целых 2-адических векторов и пространством X^ω бесконечных слов над алфавитом из двух букв $X=\{0,1\}$:

$$\psi(\overrightarrow{m})=a_{10}a_{20}\dots a_{n0}a_{11}a_{21}\dots a_{n1}\dots a_{1k}a_{2k}\dots a_{nk}\dots$$

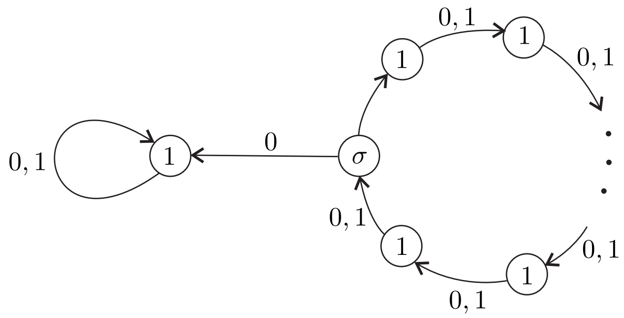


Рис. 12. Автомат, определяющий $\mathbb{Z}^n$

Теорема 4.11 [45]. *Пусть* $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *— целочисленный вектор и* $A \in \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. *Тогда сопряжение преобразования* $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x}A + \overrightarrow{m}$ *с помощью биекции* ψ *является синхронным конечно автоматным преобразованием пространства* X^ω *в том и только том случае, когда все элементы матрицы* A *ниже главной диагонали — четные числа.*

Таким образом, подгруппу $B \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ индекса $(2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \ldots (2^2 - 1)$ матриц с четными элементами под диагональю можно представить как группу синхронных конечно автоматных преобразований над алфавитом из двух букв.

При этом группа синхронных конечно автоматных преобразований, изоморфная $\mathbb{Z}^n$, которая получается с помощью конструкции из теоремы 4.11, определяется автоматом, изображенным на рис. 12.

Методы работ [10, 45] позволяют также строить вложения линейных групп над кольцами целых p-адических чисел.

В работе [45] исследуются подгруппы группы синхронных автоматов $\mathcal{FGA}(X)$ для $|X| = 2$, представимые в виде $G(A)$ для некоторого конечного автомата A и изоморфные свободным абелевым группам $\mathbb{Z}^n$. Доказано, что для каждого n множество таких подгрупп распадается на конечное число классов таких, что любые две группы из одного класса пересекаются по подгруппе конечного индекса.

В частности, при $n = 1$ таких классов два: класс, содержащий группу, определенную счетной машиной, и класс, содержащий группу, определенную автоматом с рекурсивным определением $\mu = (1, \mu^{-1})\sigma$, где $\sigma = (0, 1)$ — транспозиция.

Для $n = 2$ таких классов шесть. В общем случае классов будет столько, сколько существует классов сопряженности в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с неприводимым характеристическим многочленом и определителем, равным 2. Другие примеры абелевых групп синхронно автоматных преобразований построены в [83].

Из представимости линейных групп конечными синхронными автоматами следует и существование свободной подгруппы в группе $\mathcal{FGA}(X)$ для любого конечного алфавита X, $|X| > 1$. Действительно, в определенной выше подгруппе B существует свободная подгруппа, что следует, например, из альтернативы Титса. А группа $\mathcal{FGA}(X)$ при $|X| > 2$ содержит изоморфную копию группы $\mathcal{FGA}(\{0, 1\})$.

Первой работой, в которой строился пример свободной подгруппы группы $\mathcal{FGA}(X)$ для $|X| = 2$, была статья Алешина [64], в которой утверждается, что автоматы, изображенные на рис. 13, порождают свободную группу. К сожалению, однако, детального доказательства этого факта до сих пор не опубликовано.

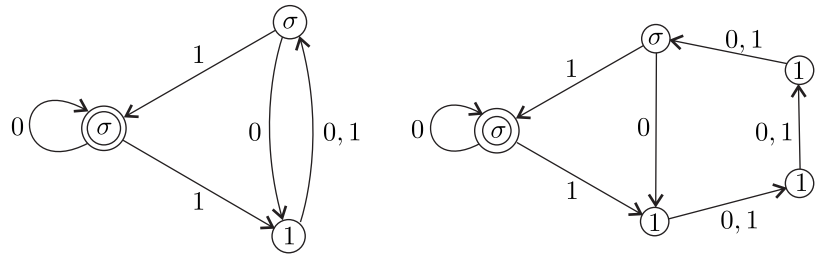


Рис. 13. Автоматы Алешина

Вопрос из [59] о том, определяет ли первый автомат Алешина свободную группу с тремя образующими, решен положительно[2].

С другой стороны, используя идеи работы [40], Ш. Мозес построил автомат с четырьмя состояниями, определяющий свободную группу. В [40] показано, что для произвольной равномерной решетки Γ группы автоморфизмов некорневого регулярного дерева любой автоморфизм дерева, соизмеряющий Γ (т.е. автоморфизм g такой, что $\Gamma^g \cap \Gamma$ — подгруппа конечного индекса в Γ и Γ^g), можно интерпретировать как "периодическое перекрашивание". Последнее условие легко интерпретируется как конечная автоматность. В работе [42] описываются автоматы, которые получаются таким образом.

Пример свободной группы синхронных конечно автоматных преобразований получается из представления полной линейной группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ конечными автоматами над алфавитом из четырех букв, построенного в работе [10].

Первый пример свободной подгруппы группы $\mathcal{FGA}(X)$ над алфавитом из двух букв был построен в работах [49, 82] с использованием техники "маркера" из теории клеточных автоматов (автоморфизмов сдвига Бернулли, см. [35]). А именно доказано, что свободное произведение любого числа циклических групп второго порядка является подгруппой группы $\mathcal{FGA}(X)$.

Группу из [49] можно реализовать как подгруппу группы бесконечных унитреугольных матриц над полем из двух элементов с помощью следующей конструкции.

Пусть $\Bbbk$ — произвольное конечное поле. Рассмотрим множество $\Bbbk^\omega$ бесконечных последовательностей над алфавитом $\Bbbk$ как векторное пространство над $\Bbbk$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число. Произвольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $a_{ij} \in \Bbbk$, определяет линейное преобразование пространства $\Bbbk^\omega$ умножением вектор-строк справа. Несложно проверить, что данное преобразование множества бесконечных слов $\Bbbk^\omega$ является синхронно автоматным.

Таким образом, мы имеем естественный изоморфизм между группой верхних унитреугольных матриц над полем $\Bbbk$ и подгруппой группы синхронных автоматов над алфавитом $\Bbbk$ (см. [84]).

[2] Готовится к печати работа: *Grigorchuk R.I., Żuk A.* A free group defined by a free state automaton.

Например, действие автомата, изображенного на рис. 6 с начальным состоянием b (автомат, определяющий группу “мигающих лампочек”), в пространстве $\mathbb{Z}_2^\omega$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}.$$

Матрица (6) определяет конечно автоматное преобразование тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные k, l, i_0, j_0, что для всех $i \geq i_0$, $j > 0$ имеет место равенство $a_{i,i+j} = a_{i+k,i+j+k}$, а для всех $i > 0$, $j \geq j_0$ имеет место равенство $a_{i,i+j} = a_{i,i+j+l}$, т.е. все строки и все диагонали матрицы являются почти периодическими с равномерно ограниченной длиной периодов.

Пусть $\Bbbk = F_2$ — поле с двумя элементами. Определим матрицы F_1, F_2 следующим образом:

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & B_1 & C_1 & O & O & \dots \\ O & E & B_1 & C_1 & O & \dots \\ O & O & E & B_1 & C_1 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} E & B_2 & C_2 & O & O & \dots \\ O & E & B_2 & C_2 & O & \dots \\ O & O & E & B_2 & C_2 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{pmatrix},$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а O и E — нулевая и единичная матрицы третьего порядка соответственно.

Предложение 4.12 [84]. *Группа $\mathcal{F}$, порожденная матрицами F_1 и F_2, является свободной группой ранга 2.*

Отметим, что матрицы F_1, F_2 удовлетворяют вышеуказанному условию почти периодичности строк и диагоналей, поэтому ими определенные преобразования являются конечно автоматными.

4.5. Периодические группы, порожденные конечными автоматами. Как было предсказано Глушковым в [69], синхронные автоматы могут быть эффективно использованы для построения примеров бесконечных конечно порожденных периодических групп, вопрос о существовании которых составлял суть общей проблемы Бернсайда (впервые решенной в [70] с помощью теоремы Голода–Шафаревича).

Первый пример бесконечной конечно порожденной периодической группы, порожденной конечно автоматными преобразованиями, был построен в работе Алешина [63] в 1972 г. Эта группа порождалась двумя инициальными автоматами над алфавитом из двух букв: один автомат состоял из трех состояний, другой из семи.

В 1979 г. в [86] Сущанским были построены примеры бесконечных p-групп, порожденных двумя синхронно автоматными преобразованиями над алфавитом $\{0, 1, \dots, p-1\}$ (p — простое нечетное число). Первый образующий равен $(1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p-1})\sigma$. Для построения второго образующего занумеруем все пары (α_i, β_i), $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, числами $1 \leq i \leq p^2$. Второй образующий определяет на множестве бесконечных слов преобразование

$$x_1 x_2 \dots \mapsto a_1(x_1) a_2(x_1, x_2) a_3(x_1, x_2, x_3) \dots,$$

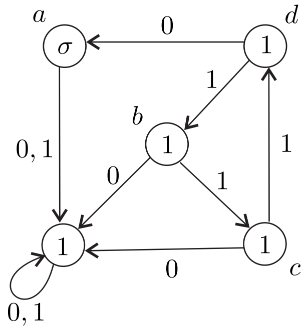


Рис. 14. Автомат, определяющий группу Григорчука

где $a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n$ всегда, кроме следующих случаев:

1) $a_3(2, 1, x_3) = x_3 + 1$;
2) если $n \geq 4$, $1 \leq i \leq p^2$ такие, что $n \equiv (i - 3) \,(\operatorname{mod} p^2)$ и $\beta_i \neq 0$, то $a_n(0, 0, \ldots, 0, 1, x_n) = x_n + 1$ и $a_n(1, 0, 0, \ldots, 0, 1, x_n) = x_n - \alpha_i/\beta_i$;
3) если же $\beta_i = 0$, то $a_n(1, 0, 0, \ldots, 0, 1, x_n) = x_n + 1$.

Несложно показать, что такое преобразование пространства бесконечных слов определяется с помощью конечного синхронного автомата.

Другие конструкции автоматных групп были предложены Сущанским в [87, 88] в связи с применениями в теории факторизируемых групп.

В 1980 г. Р.И. Григорчуком были построены два примера конечно порожденных 2-групп преобразований отрезка $[0, 1]$ и квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$. Эти группы имеют естественную реализацию и как группы синхронно автоматных преобразований над алфавитом из двух букв, если отождествить точки отрезка и квадрата с их двоичными записями. В такой интерпретации первая группа определяется автоматом, изображенным на рис. 14. Более подробно об этой группе см. в [24] и [31].

В 1983 г. Н. Гупта и С. Сидки построили примеры p-групп ($p > 2$ — простое число), действующие на p-регулярном дереве автоморфизмами. Эти группы определяются автоматом с четырьмя состояниями [27, 28]. Группа Гупты–Сидки порождается циклической перестановкой $\sigma = (0, 1, \ldots, p - 1)$ и преобразованием, определенным формулой $t = (\sigma, \sigma^{-1}, 1, 1, \ldots, t)$.

В 1985 г. в [73] был построен автомат с минимальным числом состояний 3, определяющий бесконечную периодическую группу. Приведем этот пример.

Пусть A — автомат, изображенный на рис. 15. Здесь $p \geq 3$ — простое число, $\sigma = (0, 1, \ldots \ldots, p - 1)$ — циклическая перестановка.

Теорема 4.13. *Группа $G(A)$ является бесконечной p-группой.*

Доказательство. Преобразования, соответствующие инициальным автоматам, получаемым из данного, можно задать рекуррентно равенствами

$$a = (a, a, \ldots, a)\sigma,$$
$$b = (a, a, \ldots, a, a^2, b),$$

где $\sigma = (0, 1, 2, \ldots, p - 1)$ — циклическая перестановка порядка p. При этом $a^2 = (a^2, \ldots, a^2)\sigma^2$.

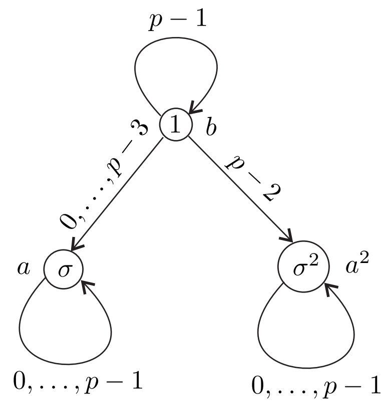


Рис. 15. Автомат, определяющий бесконечную периодическую группу

Заметим, что $a^p = (a^p, a^p, \ldots, a^p)$, поэтому $a^p = 1$. Следовательно,

$$b^p = (a^p, \ldots, a^p, a^{2p}, b^p) = (1, 1, \ldots, 1, b^p),$$

поэтому и $b^p = 1$.

Таким образом, произвольный элемент группы $G(A)$ можно представить в виде слова $g = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_n} a^{s(g)}$ в свободном произведении циклических групп $\langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p$, где $b_{i_j} = a^{-i_j} b a^{i_j}$, $0 \le i_j \le p-1$, а $s\colon \langle a \rangle * \langle b \rangle \to \mathbb{Z}_p$ — гомоморфизм, для которого $s(a) = 1$, $s(b) = 0$. Минимальное число n в таком разложении будет называться длиной элемента g и обозначаться $l(g)$. Докажем индукцией по длине, что g имеет порядок p^m для некоторого m в группе $G(A)$. Для $l(g) = 0$ утверждение очевидно. Допустим, мы доказали это для всех g таких, что $l(g) \le n-1$.

Пусть $g = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_n} a^{s(g)}$ — элемент длины n. Сначала рассмотрим случай, когда $s(g) = 0$. Заметим, что $a^{-i_k} b a^{i_k} = (a, \ldots, a, a^2, a^{-i_k} b a^{i_k}, a, \ldots)$, где в левой части стоит результат применения к кортежу $(a, \ldots, a, a^2, a^{-i_k} b a^{i_k})$ циклической перестановки σ^{i_k}. Следовательно, если $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{p-1})$, то $n = l(g) \ge l(g_0) + l(g_1) + \ldots + l(g_{p-1})$. Поэтому либо $l(g_i) < l(g)$ для всех $0 \le i \le p-1$ и тогда по предположению индукции для некоторого m $g^{p^m} = (g_0^{p^m}, g_1^{p^m}, \ldots, g_{p-1}^{p^m}) = 1$, либо все $l(g_i)$, кроме одного, равны нулю. Но последний вариант возможен только в случае, когда $g = b_{i_1}^n$, а такой элемент имеет порядок p.

Пусть теперь $g = h a^{s(g)}$, где $h = b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_n}$. Тогда $g^p = h h^{a^{-s(g)}} h^{a^{-2s(g)}} \ldots h^{a^{-(p-1)s(g)}}$. Пусть $h = (h_0, h_1, \ldots, h_{p-1})$. Тогда $s(h_0) + s(h_1) + \ldots + s(h_{p-1}) = 0$, поскольку для каждого $0 \le k \le p-1$ сумма значений гомоморфизма s на элементах кортежа $a^{-k} b a^k = (a, \ldots, a, a^2, a^{-k} b a^k, a, \ldots)$ равна нулю. Кроме того, $h^{a^{-ks(g)}} = (h_{(0,k)}, h_{(1,k)}, \ldots, h_{(p-1,k)})$, где (i,k) — образ i под действием циклической перестановки $\sigma^{-ks(g)}$. Поскольку p — простое число, то отсюда следует, что если $g^p = (g_0, g_1, \ldots, g_{p-1})$, то для каждого $0 \le i \le p-1$ имеем $l(g_i) = l(h) = n$ и $s(g_i) = 0$. Но по индуктивному предположению из этого следует, что g_i имеет конечный порядок вида p^{m_i}, следовательно, и g имеет конечный порядок вида p^m, где $m = \max m_i + 1$.

Для доказательства бесконечности группы $G(A)$ достаточно доказать ее сферическую транзитивность. Индукцией по n покажем, что в множестве X^n конечных слов длины n существует слово w и существуют элементы $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1} \in G(A)$ такие, что в словах w^{g_i} первые $n-1$ букв совпадают с первыми $n-1$ буквами слова w, а последняя буква принимает все возможные значения из алфавита. Таким словом будет слово 0 для $n = 1$ и элементов $1, a, a^2, \ldots, a^{p-1}$, слово 00 для $n = 2$ и слово $(p-1, p-1, \ldots, p-1, 0, 0)$ для остальных n и элементов $1, b, b^2, \ldots, b^{p-1}$. $\square$

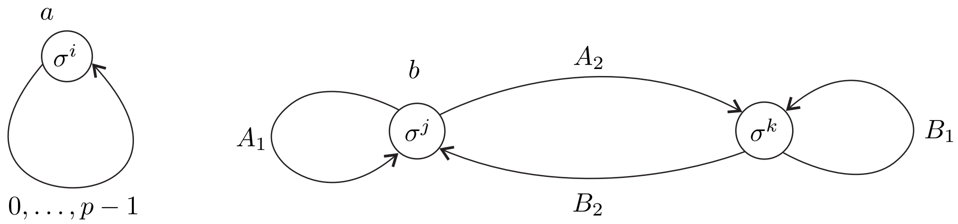


Рис. 16

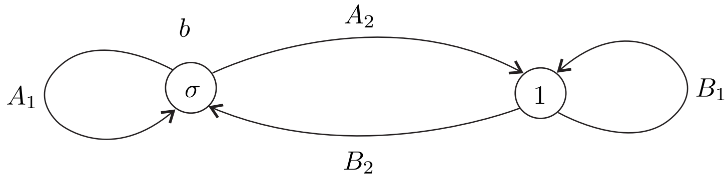


Рис. 17

Заметим, что при $p = 3$ данная конструкция приводит нас к группе, сопряженной с группой Гупты–Сидки [27]. Действительно, сопряжем преобразование a с помощью $c = (a^2c, ac, c)$:

$$a^c = (c^{-1}a^{-2}, c^{-1}a^{-1}, c^{-1})(a, a, a)\sigma(a^2c, ac, c) =$$
$$= (c^{-1}a^{-2}, c^{-1}a^{-1}, c^{-1})(a, a, a)(ac, c, a^2c)\sigma = (1, 1, c^{-1}a^3c)\sigma = \sigma,$$

поскольку $a^3 = (a^3, a^3, a^3) = 1$. Сопряжем b:

$$b^c = (c^{-1}a^{-2}, c^{-1}a^{-1}, c^{-1})(a, a^2, b)(a^2c, ac, c) = (a^c, (a^c)^2, b^c) = (\sigma, \sigma^2, b^c),$$

поэтому $b^c = t$.

Сопрягающее преобразование c является конечно автоматным, поскольку $ac = c\sigma$, $a^2c = c\sigma^2$.

Группа из теоремы 4.13 порождается двумя инициальными автоматами с суммарным числом состояний $1+3 = 4$. То, что в случае алфавита из p букв это суммарное число является минимальным для бесконечных периодических групп автоматов, вытекает из следующего утверждения. (Подчеркнем, что рассматриваются автоматы, каждое состояние которых действует на входные символы степенью циклической перестановки.)

Предложение 4.14 [73]. *Группы, порожденные двумя автоматами с одним и двумя состояниями соответственно над алфавитом из p букв, где p — простое число, не могут быть бесконечными p-группами.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть инициальные автоматы a, b вида, изображенного на рис. 16 (i, j, k — некоторые целые числа из промежутка $0 \le i, j, k \le p-1$, $A = A_1 \uplus A_2$, $B = B_1 \uplus B_2$ — два разбиения алфавита; левое состояние второго автомата считается начальным).

Сделав замену b на $b' = ba^{-l}$, где число l, $0 \le l \le p-1$, подобрано таким образом, чтобы $il \equiv k \pmod p$, и заменив σ и a некоторыми их степенями, можно считать, что автоматы a, b имеют более специальный вид: $a = (a, a, \ldots, a)\sigma$, а b — автомат, изображенный на рис. 17.

Рассмотрим ряд случаев. (Заметим, что одновременно A_2 и B_2 не могут быть пустыми множествами.)

1. Допустим, что $A_2 = \varnothing$. Тогда автомат b эквивалентен автомату a и группа $G = \langle a, b\rangle$ циклическая.

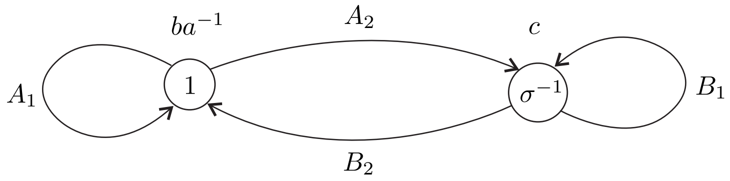


Рис. 18

2. Допустим, что $A_1 = \varnothing = B_1$. Тогда автомат b действует на входные последовательности, циклически меняя координаты на нечетных местах, т.е. $b = (c, c, \dots, c)\sigma$, где $c = (b, b, \dots, b)$.

Тогда

$$ab = (a, a, \dots, a)\sigma(c, c, \dots, c)\sigma = (ac, ac, \dots, ac)\sigma^2,$$
$$ba = (c, c, \dots, c)\sigma(a, a, \dots, a)\sigma = (ac, ac, \dots, ac)\sigma^2,$$

следовательно, $ab = ba$ и поэтому $G = \langle a, b\rangle$ — коммутативная группа.

3. Предположим, что хотя бы одно из равенств $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ неверно. Тогда по крайней мере одно из пересечений $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$ непусто. Действительно, если $A_1 \cap B_2 = \varnothing$, $A_2 \cap B_1 = \varnothing$, то верно хотя бы одно из неравенств $|A_1 \cup B_2| < p$, $|A_2 \cup B_1| < p$, а следовательно, и одно из неравенств $|A_1| + |B_2| < p$, $|A_2| + |B_1| < p$, значит, $|A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2| < 2p$ — противоречие. Если же $|A_1| + |B_2| = p$ и $A_1 \cap B_2 = \varnothing$, то $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$.

Далее мы можем считать, что $A_2 \cap B_1$ непусто. Действительно, если $A_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, то автомат ba^{-1} задается диаграммой, изображенной на рис. 18, и мы можем заменить b автоматом ba^{-1}.

Если $x \in A_2$, то автомат ba^{-1} действует на входные последовательности, начинающиеся на x, оставляя первую координату неизменной, а на оставшуюся часть действуя как автомат c. Если порядок автомата c не ограничен, то не ограничен и порядок автомата ba^{-1}.

Итак, мы считаем, что автомат b имеет вид, как на рис. 17, где $A_2 \cap B_1 \neq \varnothing$.

Покажем, что b имеет неограниченный порядок. Предположим противное. Пусть $x \in A_2 \cap$ $\cap\, B_1$. Пусть N — наименьшее натуральное число такое, что $b^N = 1$, и $w = xx\dots x\dots$ Рассмотрим слова

$$w,\ w^b,\ w^{b^2}, \dots,\ w^{b^{N-1}},\ w^{b^N} = w.$$

Заметим, что

$$w^{b^l} = y_1 y_2 \dots y_l x \dots xx \dots,$$

где $y_1, \dots, y_l$ — некоторые символы, т.е. никакая степень автомата b не меняет хвоста последовательности w. Точнее, пусть

$$w^{b^l} = y_1 y_2 \dots y_{d(l)} x \dots x,$$

где $y_{d(l)} \neq x$. Число $d(l)$ будем называть дефектом последовательности w^{b^l}. Среди последовательностей $w, w^b, \dots, w^{b^l}, \dots, w^{b^N}$ имеется последовательность с максимальным дефектом. Пусть это последовательность w^{b^s}, следовательно, последовательность $w^{b^{s+1}}$, $s+1 < N$, имеет меньший дефект.

Кроме того, пусть последовательности $w^{b^t}, w^{b^{t+1}}, \dots, w^{b^{s-1}}$, $t \leq s$, имеют тот же (максимальный) дефект, а последовательность $w^{b^{t-1}}$ имеет меньший дефект.

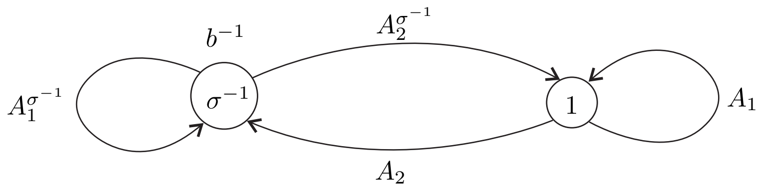


Рис. 19

Итак,

$$\begin{array}{r|l} w^{b^{t-1}} = y_1^{(t-1)} \dots y_{d(t-1)}^{(t-1)} \dots x & x \dots x \dots, \\ w^{b^{t}} = y_1^{(t)} \dots y_{d(t)-1}^{(t)} y_{d(t)}^{(t)} & x \dots x \dots, \\ \dots & \\ w^{b^{s}} = y_1^{(s)} \dots y_{d(s)-1}^{(s)} y_{d(s)}^{(s)} & x \dots x \dots, \\ w^{b^{s+1}} = y_1^{(s+1)} \dots y_{d(s+1)}^{(s+1)} \dots x & x \dots x \dots \end{array}$$

Так как σ — циклическая перестановка символов входного алфавита, то среди символов $y_{d(t)}^{(t)}, \dots, y_{d(s)}^{(s)}$ есть все символы алфавита X, кроме буквы x, в частности, найдутся два рядом стоящих символа $y_{d(q)}^{(q)}, y_{d(q+1)}^{(q+1)}$ таких, что $y_{d(q)}^{(q)} \neq y_{d(q+1)}^{(q+1)}$ и $y_{d(q)}^{(q)} \in A_1$. Из этого следует, что при чтении буквы $y_{d(q)}^{(q)}$ автомат был в состоянии b, поэтому в следующий момент он останется в этом же состоянии. Значит,

$$w^{b^{q+1}} = y_1^{(q+1)} \dots y_{d(q+1)}^{(q+1)} \cdot \Big[(x \dots x \dots)^b\Big] = y_1^{(q+1)} \dots y_{d(q+1)}^{(q+1)} (x^\sigma) \cdot x \dots x \dots$$

и мы видим, что дефект последовательности $w^{b^{q+1}}$ больше $d(s)$ вопреки предположению. Этим доказано, что порядок автомата b не ограничен.

4. Теперь рассмотрим последний из оставшихся случаев, когда $\varnothing \neq A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_1 \neq X$.

Но тогда обратный автомат b^{-1} имеет вид, изображенный на рис. 19, а поскольку $A_1^{\sigma^{-1}} \neq A_1$, то все сводится к предыдущему случаю. Утверждение доказано. $\square$

4.6. Группы, порожденные линейными автоматами.

Определение 4.4. *Линейным автоматом* над полем $\Bbbk$ называется набор $L = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \lambda, \pi\rangle$, где

i) X_{I}, X_{O}, Q — векторные пространства над $\Bbbk$ (входной и выходной алфавиты и множество состояний соответственно);

ii) $\lambda\colon X_{\mathrm{I}} \oplus Q \to X_{\mathrm{O}}$ — линейное отображение (функция выходов);

iii) $\pi\colon X_{\mathrm{I}} \oplus Q \to Q$ — линейное отображение (функция переходов).

В случае, когда X_{I}, X_{O}, Q — конечномерные пространства над конечным полем, линейный автомат с конечным числом состояний можно рассматривать как конечный синхронный автомат.

Пример конечного синхронного автомата, который является линейным, дает автомат, изображенный на рис. 6 и определяющий группу "мигающих лампочек", т.е. метабелеву группу $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$.

Данный автомат можно определить как автомат над полем $\mathbb{Z}_2$ с одномерным входным и выходным алфавитом $X = \mathbb{Z}_2$ и одномерным пространством внутренних состояний $Q = \mathbb{Z}_2$. Функции выходов и переходов определяются равенствами

$$\lambda(x,q) = x + q, \qquad \pi(x,q) = x.$$

Состояниям a и b на рисунке будут соответствовать 1 и $0 \in \mathbb{Z}_2$.

Как и в случае обычных синхронных автоматов, инициальным линейным автоматом называется линейный автомат с фиксированным начальным состоянием $q_0 \in Q$. Инициальный линейный автомат также преобразует слова над алфавитом X_{I} в слова над алфавитом X_{O}.

При этом множество конечных слов X_{I}^n (X_{O}^n) рассматривают как прямую сумму пространств вместе с естественным вложением $X_{\mathrm{I}}^{n-1} \hookrightarrow X_{\mathrm{I}}^n$, отождествляющим слово $x_1x_2\dots x_{n-1}$ со словом $x_1x_2\dots x_{n-1}0$. В частности, пустое слово отождествляется с нулевым вектором. Множества X_{I}^* и X_{O}^* являются индуктивными пределами построенных прямых спектров $\{X_{\mathrm{I}}^n\}$ и $\{X_{\mathrm{O}}^n\}$ соответственно. Пространства бесконечных последовательностей X_{I}^ω и X_{O}^ω тоже рассматриваются как векторные пространства с покоординатными действиями. При этом X_{I}^* является подпространством X_{I}^ω.

Для произвольного линейного автомата имеют место разложения $\lambda(x,q) = \lambda(0,q) + \lambda(x,0)$ и $\pi(x,q) = \pi(0,q) + \pi(x,0)$.

Используя эти соотношения и определение действия автомата на конечные и бесконечные слова, легко вывести

Предложение 4.15 [61]. *Отображения* $\lambda\colon X_{\mathrm{I}}^n \oplus Q \to X_{\mathrm{O}}^n$, $\pi\colon X_{\mathrm{I}}^n \oplus Q \to Q$ *являются линейными.*

Отображение $\lambda\colon X_{\mathrm{I}}^\omega \oplus Q \to X_{\mathrm{O}}^\omega$ *тоже линейно и раскладывается в сумму* $\lambda(w,q) = \lambda(0,q) + \lambda(w,0)$.

Отсюда получаются следующие утверждения.

Предложение 4.16. *Для произвольного линейного автомата A группа $G(A)$, им определенная, является расширением абелевой группы с помощью циклической.*

Доказательство. Поскольку $\lambda(w,q) = \lambda(w,0) + \lambda(0,q)$, то для каждого состояния q инициальный автомат A_q действует на пространстве X^ω как некоторое аффинное преобразование $w \mapsto \phi(w)+v$, причем линейное преобразование $\phi(w)$ не зависит от состояния q. Следовательно, все преобразования пространства X^ω, принадлежащие группе $G(A)$, имеют вид $w \mapsto \phi^n(w)+v$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, $v \in X^\omega$. Отсюда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Предложение 4.17. *Пусть алфавит X является одномерным векторным пространством. Тогда любая группа, порожденная линейными автоматами, является метабелевой.*

Доказательство. Если λ — функция выходов линейного автомата, то мы имеем разложение $\lambda(x,q) = \lambda(x,0) + \lambda(0,q)$. Линейное отображение $\lambda(\,\cdot\,,0)\colon X \to X$ является скалярным, т.е. для некоторого $k \in \Bbbk$ имеет место тождество $\lambda(x,0) = k \cdot x$, в силу одномерности пространства X. Из этого следует, что произвольный инициальный линейный автомат действует на X^ω аффинным преобразованием вида $w \mapsto k \cdot w + v$ для некоторого $v \in X^\omega$. Но группа преобразований такого вида является метабелевой. $\square$

Элементы пространств X_{I}^*, X_{O}^* удобно рассматривать и как многочлены над X_{I} и X_{O} соответственно, отождествляя слово $x_0x_2\dots x_n$ с выражением $x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_nt^n$. Данное отождествление согласуется с описанным выше вложением $X_{\mathrm{I}}^{n-1} \hookrightarrow X_{\mathrm{I}}^n$. Множества многочленов над X_{I} и X_{O} будем обозначать $X_{\mathrm{I}}[t]$ и $X_{\mathrm{O}}[t]$ соответственно. На этих множествах, кроме структуры векторного пространства над полем $\Bbbk$, определена также естественная структура $\Bbbk[t]$-модуля.

Аналогично пространства X_{I}^{ω}, X_{O}^{ω} отождествляются с пространствами формальных степенных рядов $X_{\mathrm{I}}[[t]]$ и $X_{\mathrm{O}}[[t]]$ соответственно, которые являются $\Bbbk[[t]]$-модулями.

Используя данную интерпретацию, можно получить более точную характеризацию отображений, определенных линейными автоматами.

Предложение 4.18 [18]. *Пусть* $L = \langle X_{\mathrm{I}}, X_{\mathrm{O}}, Q, \lambda, \pi\rangle$ — *линейный автомат над полем* $\Bbbk$. *Тогда определенное им отображение* $\lambda(\,\cdot\,,0)\colon X_{\mathrm{I}}[[t]] \to X_{\mathrm{O}}[[t]]$ *является морфизмом* $\Bbbk[[t]]$-*модулей.*

Доказательство. В силу предложения 4.15 отображение $\lambda(\,\cdot\,,0)$ является $\Bbbk$-линейным, поэтому нам достаточно показать, что оно коммутирует с умножением на t.

Пусть $w = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots \in X_{\mathrm{I}}[[t]]$. Мы получаем последовательность внутренних состояний $\{q_0 = 0, q_1, q_2, \ldots\}$, определенную равенствами $q_{n+1} = \pi(x_n, q_n) = \pi(0, q_n) + \pi(x_n, 0)$. Тогда образ w под действием L равен $y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots$, где $y_n = \lambda(x_n, q_n) = \lambda(0, q_n)+\lambda(x_n, 0)$.

Из данных формул следует, что для $tw = 0 + x_0t + x_1t^2 + \ldots$ соответствующая последовательность состояний равна $\{0, 0, q_1, q_2, \ldots\}$, поэтому образ слова tw равен $0 + y_0t + y_1t^2 + \ldots = t(y_0 + y_1t + y_2t^2 + \ldots)$. Таким образом, $\lambda(tw, 0) = t\lambda(w, 0)$, что и требовалось доказать. □

В качестве примера рассмотрим случай автомата, определяющего группу “мигающих лампочек”. Пусть $w = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \ldots \in \mathbb{Z}_2[[t]]$. Поскольку $\lambda(x, q) = x + q$, $\pi(x, q) = x$, последовательность состояний автомата равна $\{0, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, а $\lambda(w, 0) = y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots$, где $y_0 = x_0$ и $y_n = x_{n-1} + x_n$ для $n \geq 1$, следовательно, $\lambda(w, 0) = (1 + t)w$.

5. ПРИМЕРЫ АСИНХРОННО АВТОМАТНЫХ ГРУПП

5.1. Группы автоморфизмов сдвигов. *Двусторонней последовательностью* над алфавитом X называется последовательность вида $\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \ldots$, где точка указывает положение между нулевой и (-1)-й координатой. Множество всех двусторонних последовательностей над алфавитом X обозначается $X^{\mathbb{Z}}$ и снабжается тихоновской топологией.

Двусторонним сдвигом Бернулли называется преобразование σ, определенное соотношением

$$(\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \ldots)^{\sigma} = (\ldots x_{-2}x_{-1}x_0 \cdot x_1x_2 \ldots).$$

Очевидно, двусторонний сдвиг является гомеоморфизмом пространства $X^{\mathbb{Z}}$.

Односторонним сдвигом называется преобразование пространства односторонних бесконечных последовательностей X^{ω}, заданное правилом

$$(x_1x_2 \ldots)^{\sigma} = x_2x_3 \ldots$$

Легко видеть, что односторонний сдвиг определяется конечным асинхронным автоматом с диаграммой, изображенной на рис. 20.

Начальное состояние данного автомата вне зависимости от входящей буквы выдает на выход пустое слово, после чего автомат выдает на выход входящие буквы без изменений.

Пусть $\nu_0\colon X^{\mathbb{Z}} \to X^{\omega}$ — отображение, определенное равенством

$$(\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \ldots)^{\nu_0} = x_0x_{-1}x_1x_{-2}x_2x_{-3} \ldots, \tag{7}$$

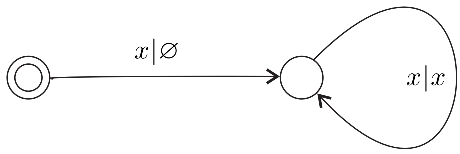


Рис. 20. Односторонний сдвиг

где в правой части равенства на нечетных местах расположены все неотрицательные координаты в порядке возрастания номера, а на четных — все отрицательные в порядке убывания номера. Отображение ν_0 является гомеоморфизмом.

Аналогично определим отображение $\nu_1\colon X^{\mathbb{Z}} \to X^{\omega}$:

$$(\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2\ldots)^{\nu_1} = x_{-1}x_0x_{-2}x_1x_{-3}x_2\ldots, \tag{8}$$

которое также является гомеоморфизмом.

Гомеоморфизм α пространства $X^{\mathbb{Z}}$ называется *эндоморфизмом сдвига*, если он коммутирует со сдвигом.

Отображение будет эндоморфизмом сдвига тогда и только тогда, когда оно задается некоторым *клеточным автоматом*, т.е. существуют числа $m, n \in \mathbb{N}$ (которые называются *предвидением и памятью* соответственно) и функция $F\colon X^{n+m+1} \to X$ такие, что если

$$(\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2\ldots)^{\alpha} = (\ldots y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2\ldots),$$

то $y_i = F(x_{i-n}, x_{i-n+1}, \ldots, x_{i+m})$.

Пусть $\alpha\colon X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ — эндоморфизм сдвига. Для каждой пары конечных слов $v_- = a_{-r}a_{-r+1}\ldots a_{-1}$, $v_+ = a_0a_1\ldots a_s \in X^*$ определим отображение $\alpha|_{(v_-,v_+)}\colon X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ такое, что соотношение

$$(\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2\ldots)^{\alpha|_{(v_-,v_+)}} = (\ldots y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2\ldots)$$

имеет место в том и только том случае, когда

$$\begin{aligned}(\ldots x_{-2}x_{-1}(a_{-r}a_{-r+1}\ldots a_{-1} \cdot a_0a_1\ldots a_s)x_0x_1x_2\ldots)^{\alpha} = \\ = (\ldots y_{-2}y_{-1}(b_{-r}b_{-r+1}\ldots b_{-1} \cdot b_0b_1\ldots b_s)y_0y_1y_2\ldots),\end{aligned}$$

где $b_{-r}b_{-r+1}\ldots b_{-1}b_0b_1\ldots b_s$ — некоторое слово.

Лемма 5.1. *Для любого эндоморфизма сдвига $\alpha\colon X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ множество всевозможных отображений вида $\alpha|_{(v_-,v_+)}$ конечно.*

Доказательство. Если $m, n \in \mathbb{N}$ — предвидение и память соответственно клеточного автомата, определяющего эндоморфизм α, то $\alpha|_{(v_-,v_+)}$ зависит только от первых m букв слова v_- и последних n букв слова v_+, поэтому различных отображений вида $\alpha|_{(v_-,v_+)}$ конечное число. □

Из леммы 5.1 и теоремы 2.5 следует

Предложение 5.2. *Пусть ν_0 — гомеоморфизм, определенный равенством* (7), *α — эндоморфизм двустороннего сдвига. Тогда непрерывное отображение $\nu_0^{-1}\alpha\nu_0\colon X^{\omega} \to X^{\omega}$ является рациональным.*

Доказательство. Пусть $v = a_1 a_2 \dots a_k \in X^*$ — произвольное конечное слово. Если k четно, то ограничение $(\nu_0^{-1}\alpha\nu_0)|_v$ равно $\nu_0^{-1}\alpha|_{(v_-,v_+)}\nu_0$, где

$$v_- = a_k a_{k-2} \dots a_4 a_2,$$
$$v_+ = a_1 a_3 \dots a_{k-3} a_{k-1}.$$

Если же k нечетно, то ограничение $(\nu_0^{-1}\alpha\nu_0)|_v$ равно $\nu_1^{-1}\alpha|_{(v_-,v_+)}\nu_1$, где

$$v_- = a_{k-1} a_{k-3} \dots a_4 a_2,$$
$$v_+ = a_1 a_3 \dots a_{k-2} a_k,$$

а ν_1 — отображение, определенное равенством (8).

Таким образом, по лемме 5.1 ограничений $(\nu_0^{-1}\alpha\nu_0)|_v$ конечное число, следовательно, по теореме 2.5 $\nu_0^{-1}\alpha\nu_0$ рационально. $\square$

Как частный случай предложения 5.2 получаем

Предложение 5.3. *Пусть σ — двусторонний сдвиг. Тогда гомеоморфизм $\nu_0^{-1}\sigma\nu_0\colon X^\omega \to X^\omega$ является рациональным.*

Из предложения 5.2 также следует

Теорема 5.4. *Полугруппа эндоморфизмов двустороннего сдвига Бернулли изоморфна подполугруппе полугруппы конечных асинхронных автоматов $\mathcal{F}$.*

Аналогично определяется понятие эндоморфизма одностороннего сдвига. Отображение $\alpha\colon X^\omega \to X^\omega$ будет эндоморфизмом одностороннего сдвига тогда и только тогда, когда оно задается клеточным автоматом с нулевой памятью.

Заметим, что множество всех эндоморфизмов двустороннего сдвига с нулевой памятью является полугруппой. Эта полугруппа изоморфна полугруппе эндоморфизмов одностороннего сдвига. Аналогично множество эндоморфизмов с нулевым предвидением двустороннего сдвига тоже является полугруппой, изоморфной полугруппе эндоморфизмов с нулевой памятью.

Эндоморфизм (одностороннего или двустороннего) сдвига называется его *автоморфизмом*, если он является гомеоморфизмом. Множество всех автоморфизмов сдвига является группой. Группа автоморфизмов одностороннего сдвига является группой обратимых элементов его полугруппы эндоморфизмов, следовательно, изоморфна группе обратимых элементов полугруппы эндоморфизмов двустороннего сдвига с нулевой памятью.

Имеют место следующие свойства групп автоморфизмов одностороннего и двустороннего сдвигов (см. [35]).

- Группа автоморфизмов одностороннего сдвига при $|X| = 2$ имеет порядок 2. Если $|X| > 2$, то эта группа является бесконечной, счетной и финитно аппроксимируемой.
- Группа автоморфизмов двустороннего сдвига содержит изоморфную копию любой конечной группы.
- Свободное произведение конечного числа циклических групп вложимо в группу автоморфизмов одностороннего или двустороннего сдвига над алфавитом достаточно большой мощности. В частности, свободное произведение трех циклических групп порядка 2 вкладывается в группу автоморфизмов как одностороннего, так и двустороннего сдвига при $|X| \geq 6$.

- Конечная группа G вкладывается в группу автоморфизмов одностороннего сдвига над алфавитом X тогда и только тогда, когда все композиционные факторы G изоморфны подгруппам симметрической группы $\mathrm{Sym}(X)$.
- Группа автоморфизмов произвольного полного двустороннего сдвига вкладывается в группу автоморфизмов любого другого полного двустороннего сдвига.

Отметим, что остается открытым вопрос об изоморфности групп автоморфизмов полных двусторонних сдвигов для разных алфавитов мощности ≥ 2.

Из теоремы 5.4 получаем следующий факт.

Следствие 5.5. *Группа автоморфизмов двустороннего сдвига изоморфна некоторой подгруппе группы рациональных автоморфизмов $\mathcal{Q}$.*

В случае одностороннего сдвига получаем более сильное утверждение.

Теорема 5.6 [48]. *Полугруппа эндоморфизмов полного одностороннего сдвига над алфавитом X изоморфна подполугруппе полугруппы конечных синхронных автоматов $\mathcal{SF}(X)$.*

Доказательство. Обозначим через P_n множество всех бесконечных последовательностей $x_1x_2\ldots \in X^\omega$ таких, что $x_i = x_n$ для всех $i > n$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим биекцию $\rho_n\colon X^n \to P_n$:

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{\rho_n} = x_nx_{n-1}\ldots x_2x_1x_1x_1\ldots$$

Пусть α — произвольный эндоморфизм одностороннего сдвига на X^ω. Из определения клеточного автомата с нулевой памятью следует, что множество P_n является инвариантным относительно α, т.е. $P_n^\alpha \subseteq P_n$. Следовательно, α индуцирует на X^n отображение $\alpha_n = \rho^{-1}\alpha\rho$. Легко видеть, что отображения α_n сохраняют общие начала и длины слов, поэтому из предложения 3.1 следует, что α_n в совокупности определяют синхронно автоматное преобразование множества X^*, а значит, и индуцируют синхронно автоматное преобразование множества X^ω. Обозначим последнее преобразование α^*. Из определений непосредственно следует, что отображение $\alpha \mapsto \alpha^*$ является гомоморфизмом полугрупп.

Пусть $F\colon X^{m+1} \to X$ — функция, определяющая эндоморфизм α (m — предвидение), тогда если $(x_1x_2\ldots)^{\alpha^*} = y_1y_2\ldots$, то

$$y_i = F(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-m}),$$

где мы полагаем $x_j = x_1$ для $j \leq 0$.

Пусть множество состояний автомата A_{q_0} равно множеству X^m с присоединенным начальным состоянием $q_0 \notin X^m$. Функцию переходов и функцию выходов определим равенствами

$$\begin{aligned}
\pi(x, q_0) &= xx\ldots x,\\
\pi(x, x_1x_2\ldots x_n) &= x_2x_3\ldots x_nx,\\
\lambda(x, q_0) &= F(x, x, \ldots x),\\
\lambda(x, x_1x_2\ldots x_n) &= F(x, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что при таком определении действие автомата A_{q_0} совпадает с действием преобразования α^*. $\square$

Из теоремы 5.6 теперь вытекает

Следствие 5.7. *Группа автоморфизмов полного одностороннего сдвига над алфавитом X изоморфна некоторой подгруппе группы конечных синхронных автоматов $\mathcal{FGA}(X)$.*

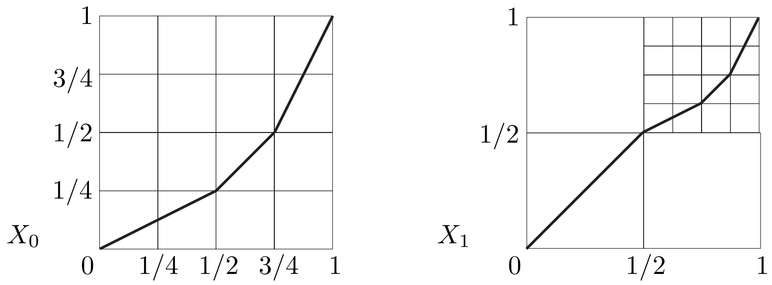


Рис. 21. Порождающие группы Томпсона

5.2. Группы Томпсона. В 1965 г. Р. Томпсон, занимаясь вопросами логики, открыл замечательные группы, носящие его имя. В дальнейшем эти группы и их обобщения исследовались Г. Хигманом, М. Брином, К. Сквайером, К. Брауном, Р. Гейганом, Э. Гизом, В. Сергиеску, Дж. Кэнноном, В. Флойдом, В. Парри, В. Губой, М. Сапиром и многими другими математиками. Эти группы нашли применения в топологии, теории когомологий, теории динамических систем, анализе и других областях математики (см. [14]).

Группой Томпсона F называется группа с операцией суперпозиции, состоящая из возрастающих кусочно линейных гомеоморфизмов f отрезка $[0,1]$ таких, что $f(0)=0$, $f(1)=1$, с конечным числом точек недифференцируемости, которые являются двоично-рациональными (т.е. имеют вид $\frac{m}{2^n}$, $m,n\in\mathbb{N}$), и производная во всех точках, в которых она существует, является целочисленной степенью двойки.

Группа F порождается двумя функциями X_0, X_1 с графиками, изображенными на рис. 21, причем график функции X_1 на отрезке $[1/2,1]$ подобен графику функции X_0. Определим бесконечную последовательность X_n, $n\geq 0$, элементов группы F условием, что график функции X_n на отрезке $[0,1-2^{-n}]$ идет вдоль диагонали, а на отрезке $[1-2^{-n},1]$ подобен графику функции X_0. Тогда F обладает копредставлением, т.е. заданием образующими и соотношениями:

$$F=\langle X_0,X_1,\dots:\ X_jX_iX_j^{-1}=X_{i+1},\ j<i\rangle.$$

На самом деле группа F является конечно определенной и может быть описана сбалансированным заданием с двумя образующими и двумя соотношениями

$$F=\langle a,b:\ [ab^{-1},a^{-1}ba]=[ab^{-1},a^{-2}ba^2]=1\rangle.$$

Группа F обладает многими интересными свойствами. Она не содержит свободных подгрупп ранга 2, в ней не выполнено никакое нетривиальное тождество, произвольная ее подгруппа либо свободная абелева, либо содержит сплетение $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$, следовательно, и свободную абелеву подгруппу произвольного конечного ранга. Все неединичные нормальные подгруппы F содержат ее коммутант F', который является простой группой, и $F/F'\simeq\mathbb{Z}^2$. Остается открытым вопрос, является ли группа F аменабельной.

Группу Томпсона можно также рассматривать как группу преобразований границы бинарного дерева. Отождествим бесконечные последовательности над алфавитом $X=\{0,1\}$ с числами из отрезка $[0,1]$ в их двоичной записи с помощью отображения

$$\phi\colon x_1x_2x_3\ldots\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot 2^{-k}.$$

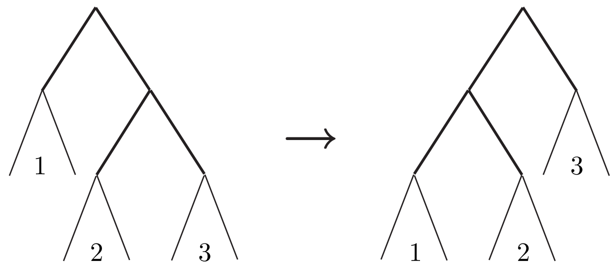


Рис. 22. Действие X_0 на дереве

Пусть $D = [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ — множество всех двоично-рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Если $a \notin D$, то существует единственная последовательность $w \in X^\omega$ такая, что $\phi(w) = a$. В другом случае a имеет два прообраза: один вида $x_1x_2 \ldots x_n1000\ldots$, другой $x_1x_2 \ldots x_n0111\ldots$

Для $w \notin \phi^{-1}(D)$ и $g \in F$ определим $w^g = \phi^{-1}(\phi(w)^g)$. После продления полученного действия группы F на все пространство X^ω по непрерывности получим корректно определенное действие F гомеоморфизмами множества Кантора X^ω.

Несложно видеть, что гомеоморфизм, соответствующий образующему элементу X_0, задается на бесконечных словах соотношениями

$$(0w)^{X_0} = 00w,$$
$$(10w)^{X_0} = 01w,$$
$$(11w)^{X_0} = 1w,$$

где $w \in X^\omega$ — произвольное бесконечное слово.

Аналогично образующий элемент X_1 определяется соотношениями

$$(0w)^{X_1} = 0w,$$
$$(10w)^{X_1} = 100w,$$
$$(110w)^{X_1} = 101w,$$
$$(111w)^{X_1} = 11w.$$

Более того, для произвольного элемента Y группы F существуют два набора конечных слов $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ таких, что для любого бесконечного слова w ровно одно из слов v_i и ровно одно из слов u_i являются префиксами слова w, причем действие Y определяется соотношениями

$$(v_iw')^Y = u_iw', \tag{9}$$

где $w = v_iw'$. Матрица $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{smallmatrix}\right)$ называется *таблицей* элемента группы Томпсона.

Действие элементов группы Томпсона F геометрически удобно представлять в виде перекладывания поддеревьев бинарного дерева. Например, образующий элемент X_0 действует на дереве так, как изображено на рис. 22 (цифрами обозначено, куда переходят соответствующие поддеревья).

Матрица $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{smallmatrix}\right)$ будет таблицей некоторого элемента группы F, если кортежи $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ задают разбиение пространства X^ω (т.е. если для каждого слова $w \in X^\omega$ существуют ровно один элемент u_i первого кортежа и ровно один элемент v_j второго, являющиеся префиксами w) и если оба этих кортежа являются возрастающими в лексикографическом порядке, где 0 считается меньшим 1. Заметим, что слово v_i меньше слова v_j тогда и только тогда, когда $\phi(v_i000\ldots) < \phi(v_j000\ldots)$.

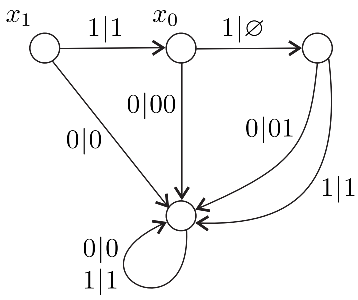


Рис. 23. Автоматы, порождающие группу Томпсона F

Кроме того, множество преобразований, задаваемых некоторой, не обязательно удовлетворяющей условию монотонности таблицей $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{smallmatrix}\right)$, тоже является группой. Эта группа называется группой Томпсона V (или “partition group”) и содержит группу F в качестве подгруппы. Она также является конечно определенной группой и, кроме того, простой. В работе [62] группа V и ее обобщения применяются в исследовании групп с разрешимыми проблемами равенства слов.

Группа V порождается элементами F и преобразованиями, заданными таблицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 \\ 10 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 10 & 110 & 111 \\ 0 & 110 & 10 & 111 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 \\ 0 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Кроме групп F и V, рассматривают также и промежуточную группу T, $F < T < V$, состоящую из элементов, заданных таблицами $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{smallmatrix}\right)$, в которых последовательности $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $u_1, u_2, \dots, u_n$ становятся возрастающими в лексикографическом порядке после применения некоторых циклических перестановок. Группа T является первым примером конечно определенной простой группы.

Гомеоморфизм множества Кантора, определенный произвольным элементом группы Томпсона V (а значит, и элементами групп F и T), является рациональным. На рис. 23 изображены автоматы, определяющие преобразования, порождающие группу F. Автоматы с начальными состояниями x_0, x_1 определяют порождающие X_0, X_1 соответственно.

Таким образом, имеет место следующее

Предложение 5.8. *В группе $\mathcal{Q}$ рациональных автоморфизмов множества Кантора существуют подгруппы, изоморфные группам Томпсона V, T и F. В частности, группа $\mathcal{Q}$ не является финитно аппроксимируемой.*

Используя теорему 1.10 из работы [62], можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.9 [56]**.** *Подгруппа в $\mathcal{Q}$, порожденная группой Томпсона V и группой Григорчука, является конечно определенной простой группой.*

Как недавно доказал К. Рьовер, эта группа изоморфна абстрактному соизмерителю группы Григорчука.

6. ДЕЙСТВИЯ НА КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЯХ

6.1. Группы, действующие на корневых деревьях. Группы и полугруппы автоматов естественным образом действуют на регулярных корневых деревьях. Один из подходов к изучению таких действий, основанный на использовании функции длины, предложен в [54].

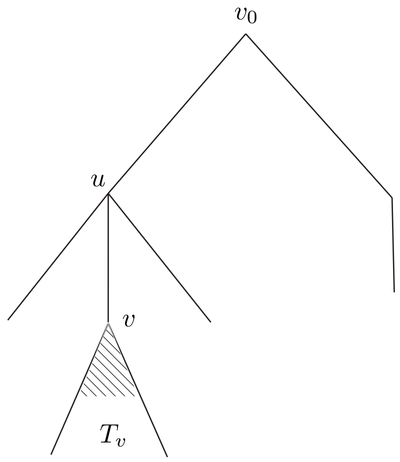


Рис. 24. Корневое дерево

Здесь мы используем более геометрический подход, а также рассматриваем более широкий класс деревьев, концентрируя свое внимание на действии на границе дерева.

Пусть T — локально конечное корневое дерево, т.е. дерево с отмеченной вершиной, которую в дальнейшем будем обозначать v_0. На множестве вершин определено комбинаторное расстояние, равное числу ребер в кратчайшем пути, соединяющем две вершины. Множество вершин корневого дерева естественно разбивается на *уровни* (или *сферы*), где n-м уровнем (сферой радиуса n) называется множество L_n вершин, находящихся на расстоянии n от корня. В частности, нулевой уровень состоит из корневой вершины. Уровень вершины v обозначается $|v|$.

Вершина v лежит *ниже* вершины u, если путь, соединяющий вершину v и корень, проходит через u. Поддерево, состоящее из вершин, лежащих ниже вершины v, с вершиной v в качестве корня и теми же ребрами, что и в T, обозначается T_v и называется *поддеревом с корневой вершиной* v (см. рис. 24).

Автоморфизмом корневого дерева называется биекция множества вершин, оставляющая на месте корень и сохраняющая отношение инцидентности. Группа всех автоморфизмов обозначается $\operatorname{Aut} T$. Из определений непосредственно следует, что относительно автоморфизмов корневого дерева уровни инвариантны.

Группа G, действующая автоморфизмами на корневом дереве, называется *сферически транзитивной*, если она транзитивна на сферах.

Дерево T называется *сферически однородным* (или *сферически транзитивным*), если его полная группа автоморфизмов сферически транзитивна.

Если дерево T сферически однородно, то валентности всех вершин одного уровня равны между собой. *Сферическим индексом* (или *индексом ветвления*) сферически однородного дерева T называется последовательность натуральных чисел $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots)$, где m_1 — валентность корня, а при $n > 1$ $m_n + 1$ — валентность каждой вершины уровня $(n-1)$. Другими словами, m_n определяет индекс ветвления каждой вершины уровня $(n-1)$.

Будем рассматривать только деревья, для которых $m_n > 1$.

В случае конечного корневого сферически однородного дерева сферический индекс — конечная последовательность.

Наоборот, всякая последовательность $\overline{m} = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел определяет корневое сферически однородное дерево.

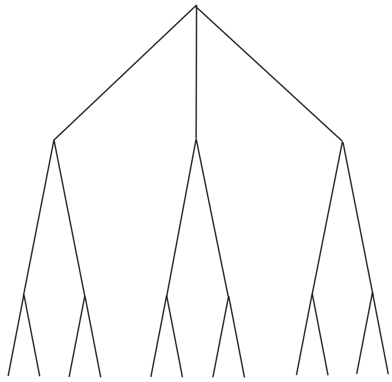


Рис. 25. Сферически однородное дерево

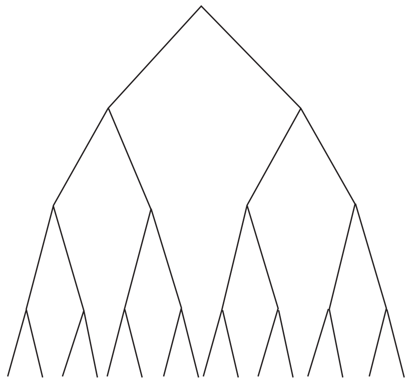


Рис. 26. Бинарное дерево

На рис. 25 приведен пример (конечного) корневого сферически однородного дерева со сферическим индексом $(3, 2, 2)$.

Сферически однородное корневое дерево называется *регулярным*, если все компоненты m_i его сферического индекса равны между собой. Примером регулярного дерева является *бинарное* дерево (дерево со сферическим индексом $(2, 2, \ldots)$, см. рис. 26).

Пусть $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность множеств, что $|X_n| = m_n$. Обозначим $\mathbf{X}^0 = \{\varnothing\}$, $\mathbf{X}^n = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $\mathbf{X}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}^n$. Элементы множества $\mathbf{X}^n$ отождествим со словами вида $x_1 x_2 \ldots x_n$, где $x_i \in X_i$. Соответствующее корневое дерево обозначают $T(\mathbf{X})$. Корневое дерево со сферическим индексом $\overline{m}$ изоморфно дереву $T(\mathbf{X})$ для подходящей последовательности $\mathbf{X}$.

Если последовательность $\mathbf{X} = (X, X, \ldots)$ постоянная, то вершины регулярного дерева $T(\mathbf{X})$ являются словами над алфавитом X. Напомним, что в этом случае в силу предложения 3.6 синхронные автоматы над алфавитом X своим действием на X^* определяют автоморфизмы дерева $T(\mathbf{X})$, а группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} T(\mathbf{X})$ изоморфна группе синхронных автоматов $\mathcal{GA}(X)$. Аналогично для каждого неинициального синхронного автомата A группа $G(A)$, определенная автоматом A, действует автоморфизмами на дереве $T(\mathbf{X})$.

Действие автоморфизма $g \in \operatorname{Aut} T$ на вершину v обозначается v^g.

Определение 6.1. Пусть группа G действует автоморфизмами на корневом дереве T, u — вершина дерева.

- *Стабилизатором вершины* u называется подгруппа $\operatorname{St}_G(u) = \{g \in G \colon u^g = u\}$.

- *Стабилизатором n-го уровня* $\mathrm{St}_G(n)$ называется пересечение всех стабилизаторов вершин этого уровня.
- *Жестким стабилизатором вершины u* называется группа $\mathrm{rist}_G(u)$ автоморфизмов из G, действующих тривиально на дополнении к поддереву T_u.
- *Жестким стабилизатором n-го уровня* $\mathrm{rist}_G(n)$ называется подгруппа, порожденная всеми жесткими стабилизаторами вершин этого уровня.

В тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем опускать индекс G.

Стабилизаторы и жесткие стабилизаторы имеют следующие элементарные свойства.

Предложение 6.1. *Пусть $G \le \mathrm{Aut}\,T$. Стабилизатор уровня $\mathrm{St}_G(n)$ — нормальная подгруппа конечного индекса в G. Пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{St}_G(n)$ — тривиальная группа.*

Жесткий стабилизатор уровня $\mathrm{rist}_G(n)$ — нормальная подгруппа группы G, являющаяся прямым произведением жестких стабилизаторов вершин данного уровня.

Определение 6.2. Сферически транзитивная группа $G \le \mathrm{Aut}\,T$ называется *ветвящейся*, если $\mathrm{rist}(n)$ является подгруппой конечного индекса для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Сферически транзитивная группа $G \le \mathrm{Aut}\,T$ называется *слабо ветвящейся*, если $|\mathrm{rist}(n)| = \infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Примерами ветвящихся групп являются вся группа $\mathrm{Aut}\,T$ автоморфизмов сферически транзитивного дерева T, группа конечных синхронных автоматов $\mathcal{FGA}(X)$, группа Григорчука, группы, определенные автоматами, которые изображены на рис. 9 и 15, группа Гупты–Сидки и другие.

Ветвящиеся группы составляют важный класс финитно аппроксимируемых групп, включающий в себя примеры экстремальных групп (групп, в которых все собственные факторы конечны), групп бернсайдового типа, групп промежуточного роста, групп конечной ширины и групп, обладающих другими интересными свойствами (см. [24]).

6.2. Граница дерева. *Концом* корневого дерева T называется бесконечный путь без повторений, начинающийся в корневой вершине. Множество концов называется *границей дерева* и обозначается ∂T. Для дерева вида $T(\mathbf{X})$ концы естественно отождествляются с бесконечными последовательностями вида $x_1x_2\ldots$, где $x_i \in X_i$, т.е. граница $\partial(T(\mathbf{X}))$ отождествляется с декартовым произведением $\mathbf{X}^\omega = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$.

Если дерево T сферически транзитивно, то $\mathrm{Aut}\,T$ действует на границе ∂T транзитивно.

Стабилизатор конца $\gamma \in \partial T$ в группе $G \le \mathrm{Aut}\,T$ называется *параболической подгруппой* группы G и обозначается $\mathrm{St}_G(e)$ или P, если ясно, о какой группе и о каком конце идет речь.

Пусть $\overline{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — строго убывающая последовательность положительных действительных чисел, стремящаяся к нулю. Определим метрику $d_{\overline{\lambda}}$ на границе: $d_{\overline{\lambda}}(\gamma,\gamma) = 0$ и $d_{\overline{\lambda}}(\gamma_1,\gamma_2) = \lambda_n$, где n — номер уровня, на котором пути $\gamma_1, \gamma_2 \in \partial T$ разошлись.

Пространство $(\partial T, d_{\overline{\lambda}})$ является компактным ультраметрическим пространством. Каждый открытый шар радиуса λ_n этого пространства (т.е. множество вида $\{\gamma \in \partial T\colon\ d(\gamma,\gamma_0) < \lambda_n\}$, где $\gamma_0 \in \partial T$) естественно отождествляется с границей поддерева T_v для некоторой вершины v уровня $n-1$.

Группа $\mathrm{Aut}\,T$ действует на ∂T изометриями. Кроме того, имеет место равенство $\mathrm{Aut}\,T = \mathrm{Isom}(\partial T, d_{\overline{\lambda}})$.

Следующее утверждение относится к числу фольклорных.

Предложение 6.2. *Пусть $(\mathcal{X}, d)$ — компактное ультраметрическое пространство. Тогда существуют корневое дерево T и (конечная, если пространство конечно, и бесконечная, стремящаяся к нулю в случае бесконечного пространства) монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\overline{\lambda} = \{\lambda_n\}$ такие, что пространство $(\mathcal{X}, d)$ изометрично пространству $(\partial T, d_{\overline{\lambda}})$.*

Если группа изометрий пространства $(\mathcal{X}, d)$ транзитивна на $\mathcal{X}$, то дерево T сферически однородно.

Доказательство. Из того что d — ультраметрика, следует, что для любого положительного R отношение $d(x, y) < R$ на множестве $\mathcal{X}$ является отношением эквивалентности, а открытые шары радиуса R являются классами эквивалентности данного отношения. Поэтому каждая точка шара является его центром, два шара одного радиуса либо совпадают, либо не пересекаются и два открытых шара пространства $(\mathcal{X}, d)$ либо не пересекаются, либо один является подмножеством другого.

Пространство $\mathcal{X}$ по условию является компактным, следовательно, для каждого $R > 0$ существует его конечное покрытие открытыми шарами радиуса R. Таким образом, множество различных открытых шаров радиуса R конечно и все они являются замкнутыми и компактными.

Пусть $n(R)$ — количество различных открытых шаров радиуса R. Функция $n(R)$ при $R > 0$ принимает только натуральные значения, непрерывна слева и убывает. Если пространство бесконечно, то она стремится к бесконечности при $R \to 0$. Следовательно, она кусочно постоянная и множество ее точек разрыва можно упорядочить в убывающую последовательность $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > 0$, конечную для конечного $\mathcal{X}$ и бесконечную, стремящуюся к нулю для бесконечного пространства. Если $R_1, R_2 \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i]$, то количество шаров радиуса R_1 равно количеству шаров радиуса R_2, следовательно, множество шаров радиуса R_1 совпадает с множеством шаров радиуса R_2. Если $R \in (\lambda_1, +\infty)$, то любой шар радиуса R совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$.

Построим корневое дерево T, отождествив его корневую вершину с $\mathcal{X}$, а n-й уровень с множеством шаров радиуса λ_n. Два шара из соседних уровней соединим ребром в том и только том случае, если один является подмножеством другого. Поскольку два шара либо не пересекаются, либо один содержится в другом, полученный граф будет корневым деревом. Из вышесказанного следует, что любой шар пространства $(\mathcal{X}, d)$ совпадает с шаром, соответствующим одной из вершин дерева T.

Каждый конец $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ (где B_i — вершины построенного дерева, т.е. шары пространства $(\mathcal{X}, d)$) дерева T мы отождествляем с точкой $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ пространства $(\mathcal{X}, d)$. Из построения следует, что такое отождествление является биекцией между границей T и пространством $(\mathcal{X}, d)$.

Если $d(x, y) = \lambda$, то для любого $R > \lambda$ точки x, y лежат в одном шаре радиуса R, но лежат в различных шарах радиуса λ. Поэтому $\lambda = \lambda_n$ для некоторого $n \geq 1$ и пути, соответствующие точкам x, y, впервые расходятся на уровне с номером n. Таким образом построенная биекция между $\mathcal{X}$ и ∂T является изометрией для метрики на границе, определенной последовательностью $\overline{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$.

Если группа изометрий пространства $(\mathcal{X}, d)$ транзитивна, то она транзитивна и на множествах шаров фиксированного радиуса, поэтому полученное дерево T является сферически однородным. $\square$

Конструкцию из доказательства можно обобщить на общий случай вполне несвязного компактного *метрического* пространства следующим образом.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольное компактное вполне несвязное метрическое пространство. Его *открыто-замкнутым разбиением* называется конечный набор попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств $\mathsf{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n A_i$. *Диаметром* разбиения A называется максимум диаметров множеств A_i.

Открыто-замкнутое разбиение $\{A_i\}_{i=1}^n$ является *измельчением* разбиения $\{B_i\}_{i=1}^m$, если каждое множество A_i является объединением некоторых множеств B_i.

Открыто-замкнутым покрытием пространства $\mathcal{C}$ называется конечный набор открыто-замкнутых множеств $\{U_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Пусть $\{U_i\}_{i=1}^n$ — открыто-замкнутое покрытие пространства $\mathcal{C}$. Открыто-замкнутое разбиение $\{A_j\}_{j=1}^m$ *вписано* в покрытие $\{U_i\}_{i=1}^n$, если каждое множество U_i является объединением некоторых множеств A_j. Среди всех разбиений, вписанных в данное покрытие, существует разбиение с наименьшим возможным числом элементов. Каждый элемент этого минимального разбиения является пересечением нескольких множеств вида U_i и $\mathcal{C} \setminus U_i$.

Если $\mathsf{A}_1 = \{A_{1,i}\}_{i=1}^{n_1}$, $\mathsf{A}_2 = \{A_{2,i}\}_{i=1}^{n_2}, \ldots, \mathsf{A}_k = \{A_{k,i}\}_{i=1}^{n_k}$ — конечный набор открыто-замкнутых разбиений, то $\mathsf{A}_1 \wedge \mathsf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathsf{A}_k$ — открыто-замкнутое разбиение, элементами которого являются непустые множества вида $A_{1,i_1} \cap A_{2,i_2} \cap \ldots \cap A_{k,i_k}$. Разбиение $\mathsf{A}_1 \wedge \mathsf{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathsf{A}_k$ является разбиением с наименьшим числом элементов среди разбиений, измельчающих разбиения $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$.

Последовательность открыто-замкнутых разбиений

$$\{\mathcal{C}\},\ \{A_{1,i}\}_{i=1}^{n_1},\ \{A_{2,i}\}_{i=1}^{n_2}, \ldots$$

называется *разделяющей*, если каждое разбиение является измельчением предыдущего и диаметр разбиений стремится к нулю.

Совокупность всех множеств $A_{k,i}$ разделяющей последовательности разбиений является базой топологии пространства $\mathcal{C}$ и естественным образом отождествляется с множеством вершин корневого дерева, в котором корень отождествляется с множеством $\mathcal{C}$, а атомы $A_{k,i}$ разбиения $\{A_{k,i}\}_{i=1}^{n_k}$ отождествляются с вершинами k-го уровня. При этом две вершины соседних уровней соединены ребром, если одно из соответствующих множеств лежит в другом. Построенное дерево называется *деревом, ассоциированным с последовательностью разбиений.*

Предложение 6.3. *Для произвольного вполне несвязного компактного метрического пространства существует разделяющая последовательность открыто-замкнутых разбиений, причем граница дерева, ассоциированного с такой последовательностью, гомеоморфна пространству $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Построим разделяющую последовательность

$$\{\mathcal{C}\},\ \{A_{1,i}\}_{i=1}^{n_1},\ \{A_{2,i}\}_{i=1}^{n_2}, \ldots$$

индуктивно. Пусть разбиение $\{A_{k-1,i}\}_{i=1}^{n_{k-1}}$ уже построено (для $k = 1$ это будет разбиение $\{\mathcal{C}\}$).

Поскольку $\mathcal{C}$ — компактное вполне несвязное пространство, то существует его конечное покрытие открыто-замкнутыми множествами диаметра $< 1/k$. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^m$ — такое покрытие.

Следующим разбиением $\{A_{k,i}\}_{i=1}^{n_k}$ будет произвольное открыто-замкнутое разбиение, вписанное в покрытие $\{B_i\}_{i=1}^m \cup \{A_{k-1,i}\}_{i=1}^{n_{k-1}}$. Каждое из $A_{k,i}$ целиком лежит в каком-то из B_i и в каком-то из $A_{k-1,j}$, значит, имеет диаметр меньше $1/k$, и разбиение $\{A_{k,i}\}_{i=1}^{n_k}$ измельчает разбиение $\{A_{k-1,i}\}_{i=1}^{n_{k-1}}$. Таким образом построенная последовательность разбиений является разделяющей.

Каждый конец дерева T, ассоциированного с разделяющей последовательностью разбиений, соответствует последовательности вложенных открыто-замкнутых множеств

$$A_{1,i_1} \supseteq A_{2,i_2} \supseteq \dots$$

Пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,i_k}$ состоит из одной точки, поскольку диаметры множеств A_{k,i_k} стремятся к нулю. Обратно, для произвольной точки $x \in \mathcal{C}$ совокупность элементов разбиений, содержащих точку x, является последовательностью вложенных множеств, т.е. концом дерева T. Таким образом элементы множеств ∂T и $\mathcal{C}$ находятся в естественном биективном соответствии.

То, что данное соответствие является гомеоморфизмом, легко следует из того, что совокупность всех элементов разбиений в разделяющей последовательности является базой топологии пространства $\mathcal{C}$. $\square$

6.3. Динамические системы, ассоциированные с действиями на деревьях. Пусть T — сферически однородное корневое дерево индекса $\overline{m} = \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечных множеств такая, что T изоморфно дереву $T(\mathbf{X})$.

Ультраметрика $d_{\overline{\lambda}}$ определяет на ∂T топологию, совпадающую с тихоновской топологией произведения $\mathbf{X}^{\omega} = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ дискретных пространств. Таким образом, граница сферически однородного корневого дерева гомеоморфна канторову множеству.

Группа G, действующая автоморфизмами на корневом дереве T, автоматически действует гомеоморфизмами на его границе. Таким образом, получаем динамическую систему вида $(G, \partial T)$ с фазовым пространством, гомеоморфным канторову совершенному множеству.

Заметим, что динамические системы на канторовом множестве играют важную роль во многих вопросах математики (см. [22]) и обладают некоторыми свойствами универсальности.

Динамические системы вида $(G, \partial T)$ имеют следующее описание.

Предложение 6.4. *Пусть группа G действует гомеоморфизмами на вполне несвязном компактном метрическом пространстве $\mathcal{C}$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Существуют корневое дерево T и действие группы G на нем автоморфизмами такие, что динамическая система $(G, \partial T)$ топологически сопряжена системе $(G, \mathcal{C})$.*

(ii) *G-орбита каждого открыто-замкнутого множества $A \subseteq \mathcal{C}$ конечна.*

Доказательство. Орбита любого открытого шара границы ∂T под действием группы автоморфизмов дерева T конечна, поскольку на множестве шаров автоморфизмы действуют, как на множестве вершин дерева. Но любое открыто-замкнутое подмножество границы дерева является объединением конечного числа шаров, поэтому и орбита произвольного открыто-замкнутого множества конечна.

Обратно, допустим, что орбита каждого открыто-замкнутого множества $A \subseteq \mathcal{C}$ конечна. Пусть $\mathsf{K} = \{K_i\}_{i=1}^{n}$ — произвольное открыто-замкнутое разбиение пространства $\mathcal{C}$. Орбита каждого K_i конечна, поэтому и орбита разбиения K тоже конечна. Пусть $\mathsf{L} = \wedge_{g \in G} \mathsf{K}^g$. В правой части равенства конечное число различных множеств, поэтому разбиение L конечное и открыто-замкнутое, кроме того, разбиение L инвариантно относительно действия группы G.

Таким образом мы доказали, что для произвольного открыто-замкнутого разбиения пространства $\mathcal{C}$ существует его G-инвариантное измельчение.

Пусть $\mathsf{K}_0, \mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots$ — разделяющая последовательность открыто-замкнутых разбиений пространства $\mathcal{C}$ (см. предложение 6.3).

Построим последовательность конечных G-инвариантных открыто-замкнутых разбиений $\mathsf{L}_0 = \{\mathcal{C}\}, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \ldots$ пространства $\mathcal{C}$, выбирая каждое L_k так, чтобы оно было измельчением разбиения $\mathsf{L}_{k-1} \wedge \mathsf{K}_{k-1}$. Тогда построенная последовательность разбиений также будет разделяющей. Пусть T — дерево, ассоциированное с этой последовательностью.

Каждый элемент $g \in G$ действует на каждом разбиении подстановками, причем эти подстановки в совокупности определяют автоморфизм дерева T. Соответственно группа G действует гомеоморфизмами на границе ∂T.

По предложению 6.3 ∂T гомеоморфна пространству $\mathcal{C}$, причем гомеоморфизм ставит в соответствие каждой точке $x \in \mathcal{C}$ конец, состоящий из элементов разбиений L_k, содержащих x. Поэтому построенное действие G на ∂T и действие G на $\mathcal{C}$ сопряжены этим гомеоморфизмом. $\square$

Кроме структуры топологического пространства, граница сферически однородного дерева обладает еще и естественной структурой пространства с мерой.

Пусть m — мера на $\mathbf{X}^\omega$, являющаяся произведением равномерных вероятностных мер $\{\frac{1}{m_n}, \ldots, \frac{1}{m_n}\}$ на множествах X_n. Тогда мера границы поддерева T_v, где v — вершина n-го уровня, равна $(m_1 m_2 \ldots m_n)^{-1}$. Заметим, что множества ∂T_v порождают σ-алгебру борелевских подмножеств пространства $\mathbf{X}^\omega$.

Пространство $(\partial T, m)$ изоморфно пространству $([0,1], l)$, где l — мера Лебега. Отождествим каждое из множеств X_n с множеством $\{0, 1, 2, \ldots, |X_n|-1\}$, тогда изоморфизм пространств $(\partial T(\mathbf{X}), m)$ и $([0,1], l)$ задается отображением $\phi\colon T(\mathbf{X}) \to [0,1]$:

$$\phi(x_1 x_2 \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_1 m_2 \ldots m_n}.$$

Оно является сюръективным, сохраняющим меру, и все точки интервала $[0,1]$, кроме счетного числа, имеют единственный прообраз. Образами шаров границы ∂T_v при отображении ϕ являются интервалы.

В силу указанного отождествления динамические системы $(G, \partial T, m)$ могут рассматриваться и как динамические системы на отрезке $[0,1]$.

Группа $\operatorname{Aut} T$ действует на $(\partial T, m)$ отображениями, сохраняющими меру. Таким образом, кроме топологических динамических систем $(G, \partial T)$, группы, действующие на корневых деревьях, определяют и метрические динамические системы $(G, \partial T, m)$.

Напомним, что топологическая динамическая система $(G, \mathcal{X})$ на топологическом пространстве $\mathcal{X}$ называется *топологически транзитивной*, если для любых двух открытых множеств U, V пространства существует элемент $g \in G$ такой, что $g(U) \cap V \neq \varnothing$. Несложно доказать, что в случае, когда пространство $\mathcal{X}$ метрическое, топологическая транзитивность эквивалентна существованию плотной орбиты.

Система $(G, \mathcal{X})$ называется *минимальной*, если каждая G-орбита является всюду плотной.

Динамическая система $(G, \mathcal{X}, m)$ на пространстве $\mathcal{X}$ с инвариантной вероятностной мерой m называется *эргодической*, если для каждого измеримого G-инвариантного множества $A \subseteq \mathcal{X}$ либо $m(A) = 0$, либо $m(A) = 1$.

Предложение 6.5. *Пусть G — группа, действующая автоморфизмами на сферически однородном дереве T. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Группа G сферически транзитивна.*

2. *Динамическая система* $(G, \partial T)$ *минимальна.*
3. *Динамическая система* $(G, \partial T)$ *топологически транзитивна.*
4. *Динамическая система* $(G, \partial T, m)$ *эргодична.*
5. *Мера* m *является единственной* σ*-аддитивной вероятностной* G*-инвариантной мерой на* ∂T.

Доказательство. Эквивалентность первых трех условий легко следует из определений.

Пусть группа G сферически транзитивна и $A \subseteq \partial T$ — G-инвариантное измеримое множество. По теореме Лебега о плотности для произвольной точки $x \in \partial T$ предел

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(A \cap B(x, \delta))}{m(B(x, \delta))},$$

где $B(x, \delta) \subset \partial T$ — шар ультраметрического пространства $(\partial T, d)$ радиуса δ с центром в точке x, равен либо нулю, либо единице.

В первом случае для каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $m(A \cap B(x, \delta)) < \epsilon m(B(x, \delta))$. Поскольку группа G транзитивна на уровнях, шары $B(x^g, \delta)$ покрывают всю границу ∂T. Заметим, что два шара радиуса δ либо совпадают, либо не пересекаются. Следовательно, $m(A) < \epsilon$ для любого $\epsilon > 0$, т.е. $m(A) = 0$. Аналогично доказывается, что в случае, когда предел равен единице, $m(A) = 1$.

Пусть группа G не является сферически транзитивной. В этом случае множество вершин некоторого уровня можно разбить на два непустых G-инвариантных множества A и B. Тогда множество концов, проходящих через вершины множества A, будет G-инвариантным и $0 < m(A) < 1$, значит, G неэргодична.

Осталось доказать, что сферическая транзитивность эквивалентна единственности G-инвариантной меры на ∂T.

Легко видеть, что σ-алгебра борелевских множеств на ∂T порождается совокупностью множеств $\{\partial T_v \colon v \in V(T)\}$. Но если группа G сферически транзитивна, то для любой G-инвариантной вероятностной меры l на ∂T имеем $l(\partial T_v) = m(\partial T_v)$, поэтому $l = m$.

Обратно, если группа G не является сферически транзитивной, то она неэргодична и для произвольных G-инвариантных множеств $A, B \subset \partial T$ таких, что $A \cap B = \varnothing$ и $0 < m(A) < 1$, условные меры $m(\,\cdot\,|A)$ и $m(\,\cdot\,|B)$ инвариантны и отличны от m. $\square$

Пусть $S = S^{-1}$ — конечный набор обратимых преобразований пространства $(\mathcal{X}, m)$, сохраняющих класс меры m. Пусть G — группа преобразований пространства $(\mathcal{X}, m)$, порожденная множеством S. Мы получаем естественное унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{X}, m)$, определенное равенством

$$(\pi(g)f)(x) = \sqrt{p_g(x)}\, f(g^{-1}x),$$

где $g \in G$, $p_g(x) = d\,gm(x)/d\,m(x)$ — производная Радона–Никодима.

Спектром динамической системы $(S, \mathcal{X}, m)$ называется спектр оператора

$$H_\pi = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi(s)$$

на гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{X}, m)$.

Определение 6.3. Пусть A — неинициальный обратимый синхронный автомат. Для каждого его внутреннего состояния q инициальный автомат A_q определяет преобразование

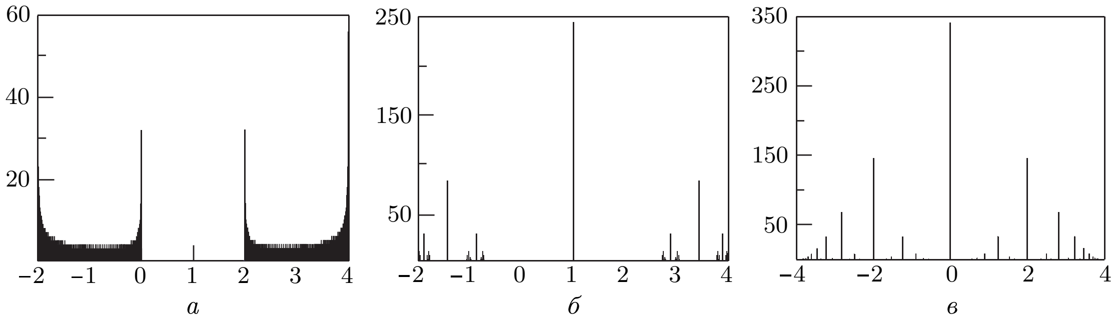


Рис. 27. Спектры динамических систем, определенных конечными автоматами

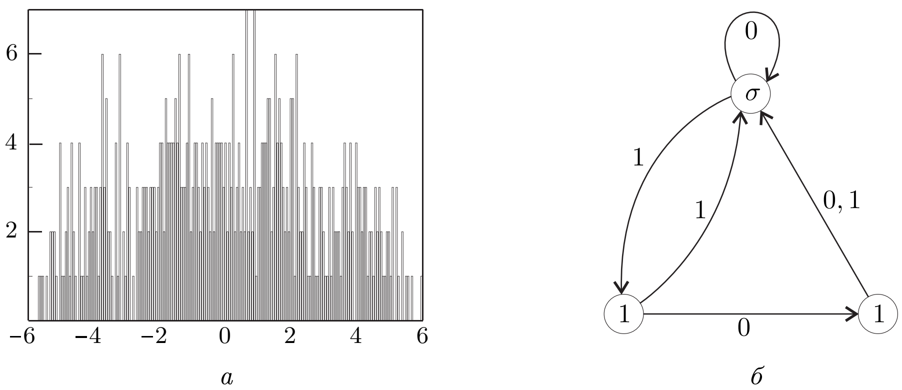


Рис. 28

пространства X^ω, сохраняющее меру. Пусть S — множество всех преобразований, определенных автоматами A_q, вместе с их обратными. Множество S порождает группу $G(A)$, *определенную автоматом* A.

Спектром динамической системы, определенной автоматом A, называют спектр динамической системы (S, X^ω, m).

Спектры динамических систем, определенных конечными синхронными автоматами, очень разнообразны даже для автоматов с небольшим количеством состояний. В качестве примеров на рис. 27 приведены гистограммы спектральных мер динамических систем, определенных некоторыми из них. (Заметим, что приведены гистограммы спектров, не нормированных числом образующих операторов типа Гекке.)

Рис. 27, *а* — это гистограмма спектра динамической системы, определяемой группой Григорчука [71], рис. 27, *б* — гистограмма, соответствующая 3-группе Гупты–Сидки [27], а рис. 27, *в* соответствует группе “мигающих лампочек” (подробнее об этом см. в [7] и [30]). Заметим, что в первом случае гистограммы сходятся к гладкой кривой, во втором случае они в пределе дают канторовский спектр, а в третьем — предельная спектральная мера оказывается дискретной, сосредоточенной на счетном всюду плотном множестве.

Представление о фрактальном характере спектров, возникающих в связи с автоматами, дает гистограмма, изображенная на рис. 28, *а*. Она соответствует автомату с тремя состояниями, изображенному на рис. 28, *б*.

6.4. Действие циклических групп. Рассмотрим динамические системы на границе корневого дерева, индуцированные действием одного автоморфизма.

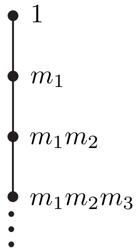


Рис. 29

Пусть $f \in \operatorname{Aut} T$ — автоморфизм корневого дерева T. Рассмотрим граф $T/\langle f\rangle$, вершинами и ребрами которого являются орбиты действия циклической группы $\langle f\rangle$ соответственно на множестве вершин и множестве ребер дерева T. Если $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ — две вершины графа $T/\langle f\rangle$, то они соединены ребром $\overline{e}$ тогда и только тогда, когда в орбите $\overline{e}$ существует ребро e, соединяющее некоторые две вершины v_1, v_2 такие, что $v_1 \in \overline{v}_1$ и $v_2 \in \overline{v}_2$.

Несложно доказать, что *граф орбит* $T/\langle f\rangle$ является деревом. Превратим его в корневое, выбрав корнем одноточечную орбиту корня дерева T. Пусть $\pi\colon T \to T/\langle f\rangle$ — каноническая проекция.

Проекция π переводит уровни дерева T в соответствующие уровни дерева $T/\langle f\rangle$ и является морфизмом деревьев.

Орбитальным типом T_f автоморфизма f называется дерево $T/\langle f\rangle$, в котором каждая вершина помечена натуральным числом, равным мощности соответствующей орбиты. Два помеченных корневых дерева называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм, сохраняющий метки.

Имеет место следующий критерий (см. [67, 66]).

Теорема 6.6. *Два автоморфизма корневого дерева T сопряжены в группе $\operatorname{Aut} T$ тогда и только тогда, когда их орбитальные типы изоморфны.*

Орбитальные типы (т.е. графы орбит) несут еще и информацию о действии автоморфизма f на границе дерева.

Предложение 6.7. *Пусть γ_1, γ_2 — два конца дерева T, $\pi\colon T \to T/\langle f\rangle$ — каноническая проекция. Если $\pi(\gamma_1) = \pi(\gamma_2)$, то замыкания f-орбит концов γ_1, γ_2 совпадают, в противном случае они не пересекаются.*

С точки зрения метрической динамики граница дерева орбит имеет следующую интерпретацию, вытекающую из предложений 6.7 и 6.5.

Предложение 6.8. *Эргодические инвариантные вероятностные меры динамической системы $(\partial T, f)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками границы дерева орбит $T/\langle f\rangle$.*

Таким образом, динамическая система $(\partial T, f)$ будет транзитивной (минимальной) тогда и только тогда, когда граница ∂T_f одноточечная. В этом случае орбитальный тип автоморфизма f, действующего на дереве со сферическим индексом $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеет вид, изображенный на рис. 29, поскольку транзитивность системы эквивалентна сферической транзитивности.

Мы называем автоморфизм $f \in \operatorname{Aut} T$ *сферически транзитивным*, если циклическая группа $\langle f\rangle$ является сферически транзитивной.

В силу предложения 6.7 (см. также [9]) имеет место

Предложение 6.9. *Произвольные два сферически транзитивных автоморфизма корневого дерева сопряжены.*

Примером сферически транзитивных автоморфизмов корневого дерева является счетная машина, т.е. автоморфизм, определенный автоматом, изображенным на рис. 7.

Для нерегулярных сферически однородных деревьев счетные машины определяются следующим образом.

Пусть T — сферически однородное дерево сферического индекса $\overline{m} = \{m_1, m_2, \ldots\}$. Рассмотрим обратный спектр конечных циклических групп

$$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/m_1 m_2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/m_1 m_2 m_3\mathbb{Z} \leftarrow \ldots, \tag{10}$$

где $\mathbb{Z}/m_1 m_2 \ldots m_k\mathbb{Z}$ — группы вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$, а морфизмы канонические (т.е. такие, что образом вычета $\overline{1}$ одной группы является вычет $\overline{1}$ другой). Рассмотрим обратный предел

$$\mathbb{Z}_{\overline{m}} = \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/m_1 m_2 \ldots m_k\mathbb{Z}.$$

В случае регулярного p-дерева (дерева со сферическим индексом $(p, p, \ldots)$, p — простое число) предел изоморфен группе целых p-адических чисел.

Рассмотрим совокупность всех элементов групп обратного спектра (10). Соединим два элемента $a \in \mathbb{Z}/m_1 m_2 \ldots m_k\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/m_1 m_2 \ldots m_{k+1}\mathbb{Z}$ ребром, если первый является образом второго под действием гомоморфизма из цепочки (10). Образованный граф с корнем $0 \in \mathbb{Z}_1$ будет сферически однородным корневым деревом T' со сферическим индексом $\overline{m}$, поэтому изоморфным дереву T. При этом граница полученного дерева T' отождествляется с группой $\mathbb{Z}_{\overline{m}}$.

Отображение $f\colon a \mapsto a + \overline{1}$ является автоморфизмом корневого дерева T'. Легко видеть, что автоморфизм f является сферически транзитивным. Его и называют счетной машиной. Счетные машины являются важными примерами динамических систем на множестве Кантора, возникающих в одномерной динамике, в теории устойчивых по Ляпунову множеств и в других областях (см. [43, 8, 12, 9]).

Пусть $\mathcal{X}$ — топологическое пространство, $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — непрерывная функция. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным числом для собственной функции* $\phi \in C(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $\phi \neq 0$, динамической системы $(\mathcal{X}, f)$, если $\phi(f(x)) = \lambda\phi(x)$ для всех $x \in \mathcal{X}$.

Динамическая система $(\mathcal{X}, f)$ называется системой *с топологически дискретным спектром*, если замкнутая линейная оболочка в $C(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ множества собственных функций системы $(\mathcal{X}, f)$ совпадает с $C(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.

Множество собственных значений счетной машины описывается следующим образом.

Предложение 6.10 [12]. *Пусть T — сферически однородное дерево, $\overline{m} = \{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ — его сферический индекс, $f \in \operatorname{Aut} T$ — сферически транзитивный автоморфизм дерева T.*

Тогда динамическая система $(\partial T, f)$ имеет топологически дискретный спектр и множество ее собственных значений равно

$$\left\{e^{2\pi i k/m_0 m_1 \ldots m_n}\colon\ 0 \leq k < m_0 m_1 \ldots m_n,\ n > 0\right\}.$$

С помощью критерия сопряженности минимальных динамических систем с топологически дискретным спектром в [12] доказан следующий критерий топологической сопряженности двух счетных машин.

Предложение 6.11. *Пусть T_1, T_2 — сферически однородные корневые деревья со сферическими индексами $(m_0, m_1, \ldots)$ и $(k_0, k_1, \ldots)$ соответственно. Если автоморфизмы $f_1 \in \in \operatorname{Aut} T_1$, $f_2 \in \operatorname{Aut} T_2$ сферически транзитивны, то динамические системы $(\partial T_1, f_1)$ и $(\partial T_2, f_2)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p сумма максимальных показателей, в которых p делит числа m_i (это число может быть равным бесконечности), равна аналогичной сумме для чисел k_i.*

6.5. Циклы синхронно автоматных преобразований. Напомним, что конечное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ множества A называется *циклом* преобразования $f\colon A \to A$, если

$$f(x_i) = x_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1, \qquad f(x_n) = x_1,$$

при этом число n называется *длиной цикла*, а элементы x_i называются *циклическими элементами порядка n* для преобразования f. Символом $\operatorname{Cycl}(f)$ обозначим множество порядков всех циклических элементов преобразования f.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс отображений множества A в себя. Основные задачи относительно структуры циклов отображений из $\mathfrak{F}$ могут быть сформулированы следующим образом.

1. Какие из натуральных чисел могут быть длинами циклов для преобразований из $\mathfrak{F}$?
2. Какие множества натуральных чисел могут выступать в качестве множеств всех длин циклов для преобразований из $\mathfrak{F}$?

Ответы на эти вопросы в некоторых случаях известны. Например, согласно теореме Шарковского [91] (см. также [3, теорема 2.1.1]) если $\mathfrak{F}$ — множество всех непрерывных преобразований действительного отрезка $[0,1]$, то

1) любое число может быть длиной цикла преобразования из $\mathfrak{F}$;
2) подмножество $M \subseteq \mathbb{N}$ имеет вид $\operatorname{Cycl}(f)$, $f \in \mathfrak{F}$, лишь в том случае, когда оно состоит из всех чисел, меньших некоторого данного, при упорядочении $\mathbb{N}$ с помощью порядка Шарковского

$$3 > 5 > 7 > \ldots > 2\cdot 3 > 2\cdot 5 > \ldots > 2^2\cdot 3 > 2^2\cdot 5 > \ldots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1.$$

Случай полиномиальных отображений различных полей и колец рассмотрен в монографии Наркевича [44]. Здесь предлагается решение этой задачи для синхронно автоматных преобразований над конечным алфавитом X, действующих на множестве X^ω.

Символом E_X обозначим множество всех натуральных чисел, в разложение которых входят только простые множители, не большие $|X|$. Если $|X| = 2$, то множество E_X состоит только из степеней двойки, если же $|X| = 3$ или $|X| = 4$, то $E_X = \{2^\alpha \cdot 3^\beta\colon\ \alpha, \beta = 0, 1, 2\ldots\}$.

Теорема 6.12. *Число n будет длиной цикла некоторого синхронно автоматного преобразования $f\colon X^\omega \to X^\omega$ в том и только том случае, когда оно содержится в E_X.*

Таким же будет и ответ для случая обратимых синхронно автоматных преобразований.

Ответ на вопрос о сосуществовании длин циклов дает следующая

Теорема 6.13. *Для любого подмножества $M \subseteq E_X$ существует синхронно автоматное биективное преобразование $f\colon X^\omega \to X^\omega$ такое, что* $\operatorname{Cycl} f = M$.

Приведем набросок доказательства (полное доказательство см. в [60]).

Если множества M_1, M_2 являются множествами длин циклов на X^ω некоторых синхронно автоматных преобразований, то и множество $M_1 \cup M_2$ тоже можно представить в виде $\operatorname{Cycl} f$,

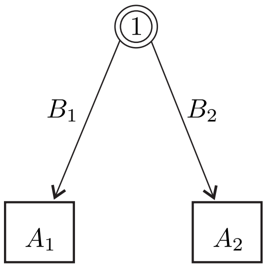


Рис. 30

где f — синхронно автоматное преобразование. Действительно, если A_1, A_2 — автоматы, задающие соответствующие преобразования для множеств M_1 и M_2, то множество длин циклов действия автомата, изображенного на рис. 30, на пространстве X^ω будет равно $M_1 \cup M_2$. На рисунке стрелки из начального состояния заканчиваются в начальных состояниях автоматов A_1 и A_2, а B_1, B_2 — разбиение алфавита на непустые множества.

Подмножество $M \subseteq E_X$ назовем D-подмножеством, если существует такое число $c \in M$, что все элементы M кратны c.

Лемма 6.14. *Для произвольного D-подмножества $M \subseteq E_X$ существует синхронно автоматное биективное преобразование $f\colon X^\omega \to X^\omega$ такое, что $\operatorname{Cycl} f = M$.*

Из леммы 6.14 следует, что объединение конечного числа D-множеств тоже можно представить в виде $\operatorname{Cycl} f$ для некоторого синхронно автоматного преобразования $f\colon X^\omega \to X^\omega$.

Теперь осталось доказать, что произвольное множество $M \subseteq E_X$ можно представить в виде объединения конечного числа D-множеств. Это эквивалентно тому, что в множестве E_X, частично упорядоченном отношением делимости, каждая антицепь (т.е. множество попарно несравнимых элементов) конечна. Но множество E_X, упорядоченное отношением делимости, порядково изоморфно декартову произведению $\mathbb{N}^k$ с порядком

$$(n_1, n_2, \dots, n_k) \le (m_1, m_2, \dots, m_k) \quad \Leftrightarrow \quad n_i \le m_i, \quad 1 \le i \le k,$$

где k — количество простых чисел, не больших $|X|$. Конечность антицепей в таком частично упорядоченном множестве легко доказывается индукцией по k.

Полученные результаты можно проинтерпретировать в терминах преобразований кольца целых p-адических чисел следующим образом.

Пусть $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел с естественной метрикой

$$\rho(u, v) = v_p(u - v),$$

где v_p — p-адическая норма. Иными словами, если $u = u_0 u_1 \dots$, $v = v_0 v_1 \dots$ — каноническая запись чисел u, v $(0 \le v_i \le p-1)$, то $\rho(u,v) = (\frac{1}{p})^k$, где k — длина общего начала последовательностей $u_0 u_1 \dots$, $v_0 v_1 \dots$ Отображение $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ называется *нерасширяющим*, если $\rho(f(u), f(v)) \le \rho(u, v)$ для всех $u, v \in \mathbb{Z}_p$. Отображение будет нерасширяющим в том и только том случае, когда оно определяет синхронно автоматное преобразование бесконечных последовательностей над алфавитом $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Обозначим символом E_p множество натуральных чисел, в каноническом разложении которых встречаются только простые множители не больше p. Из теорем 6.12 и 6.13 получаем

Следствие 6.15. *Число n будет длиной цикла некоторого нерасширяющего отображения метрического пространства $(\mathbb{Z}_p, \rho)$ тогда и только тогда, когда $n \in E_p$.*

Для любого подмножества $M \subseteq E_p$ существует нерасширяющее отображение $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ такое, что $\operatorname{Cycl} f = M$.

Таким образом, никакого порядка, аналогичного порядку Шарковского, даже в случае нерасширяющих отображений кольца целых p-адических чисел не существует.

6.6. Устойчивость по Ляпунову. Пусть $\mathcal{X}$ — локально компактное, локально связное метрическое пространство, $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — непрерывное отображение. Множество $A \subseteq \mathcal{X}$ *инвариантно* относительно f, если $f(A) \subseteq A$. Компактное инвариантное подмножество $A \subseteq \mathcal{X}$ называется *устойчивым по Ляпунову* относительно f, если для любой окрестности U множества A существует окрестность V множества A такая, что $V \subseteq U$ и $f^n(V) \subseteq U$ для любого $n \geq 0$.

Следующее определение естественно обобщает понятие устойчивости по Ляпунову на групповые действия.

Определение 6.4. Пусть G — группа, действующая на $\mathcal{X}$ гомеоморфизмами, $H \leq G$ — подполугруппа, порождающая G как группу. Компактное G-инвариантное множество $A \subseteq \mathcal{X}$ называется *H-устойчивым по Ляпунову*, если для любой открытой окрестности $U \supset A$ существует открытая окрестность $V \supset A$ такая, что $V \subseteq U$ и $h(V) \subseteq U$ для любого $h \in H$.

В работах [12, 11] доказывается, что действие динамической системы на компонентах связности устойчивого по Ляпунову транзитивного множества топологически сопряжено с действием счетной машины на границе дерева. Ниже мы обобщим этот результат на случай действия групп.

Пусть $A \subseteq \mathcal{X}$ — компактное G-инвариантное подмножество, $\mathcal{C}$ — множество его компонент связности. Множество $\mathcal{C}$ наделяем топологией фактор-пространства. Эта топология совпадает также с топологией, заданной метрикой Хаусдорфа на подмножествах пространства $\mathcal{X}$. Тогда $\mathcal{C}$ — вполне несвязное компактное метрическое пространство. Каждый гомеоморфизм g пространства $\mathcal{X}$, для которого A инвариантно, индуцирует на $\mathcal{C}$ гомеоморфизм $\tilde{f}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, согласованный с проекцией $\pi\colon A \to \mathcal{C}$. Если действие группы G на A топологически транзитивно или минимально, то индуцированное действие G на $\mathcal{C}$ тоже соответственно топологически транзитивно или минимально и в этих случаях множество $\mathcal{C}$ либо конечно, либо не имеет изолированных точек, поэтому гомеоморфно множеству Кантора.

Теорема 6.16. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связное, локально компактное метрическое пространство, G — группа, действующая на $\mathcal{X}$ гомеоморфизмами, $A \subseteq \mathcal{X}$ — компактное G-инвариантное множество с бесконечным числом компонент связности.*

Если $H \leq G$ — подполугруппа группы G, порождающая G как группу, а множество A H-устойчиво по Ляпунову, то существует действие группы G автоморфизмами на некотором бесконечном корневом дереве T такое, что индуцированное действие G на пространстве $\mathcal{C}$ компонент связности множества A топологически сопряжено с действием G на ∂T.

Мы используем без доказательства следующее вспомогательное утверждение из [12, предложение 5.3].

Лемма 6.17. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связное метрическое пространство, а $A \subset \mathcal{X}$ — компактное подмножество. Тогда произвольная открытая окрестность $U \supset A$ содержит открытую окрестность $V \supset A$, являющуюся дизъюнктным объединением конечного числа непустых связных открытых множеств.*

Доказательство теоремы 6.16. Без потери общности можно считать, что H содержит единицу группы G. Пусть $\pi\colon A \to \mathcal{C}$ — естественная проекция.

Для произвольного подмножества $B \subseteq \mathcal{X}$ мы будем обозначать $\widetilde{B} = \pi(A \cap B)$, а для каждого гомеоморфизма $h \in G$ обозначим через $\tilde{h}$ его индуцированное действие на $\mathcal{C}$.

В силу предложения 6.4 для доказательства сопряженности динамической системы $(G, \mathcal{C})$ динамической системе $(G, \partial T)$ для некоторого действия группы G на корневом дереве нам достаточно доказать, что орбита произвольного открыто-замкнутого подмножества K пространства $\mathcal{C}$ под действием G конечна.

Множества $\pi^{-1}(K)$ и $\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus K)$ замкнуты в относительной топологии множества $A \subset \mathcal{X}$, а поскольку A замкнуто, то и в топологии пространства $\mathcal{X}$. В силу нормальности метрических пространств в $\mathcal{X}$ существуют непересекающиеся открытые окрестности $U' \supset \pi^{-1}(K)$, $U'' \supset \pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus K)$. Пусть $U_0 = U' \cup U''$ — окрестность множества A. По лемме 6.17 существует окрестность $U \subseteq U_0$ множества A, которую можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых связных множеств $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Тогда, возможно после перенумерации, $U' \supseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r$ и $U'' \supseteq U_{r+1} \cup U_{r+2} \cup \ldots \cup U_n$ для некоторого r.

По определению устойчивости существует окрестность $V \supset A$ такая, что $h(V) \subseteq U$ для всех $h \in H$. При этом мы можем в силу леммы 6.17 тоже считать, что существует представление V в виде дизъюнктного объединения $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ открытых связных множеств. Тогда каждое множество $\widetilde{U}_i$ является объединением некоторых множеств $\widetilde{V}_j$.

Заметим, что $\{\widetilde{U}_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\widetilde{V}_j\}_{j=1}^{m}$ — открыто-замкнутые разбиения пространства $\mathcal{C}$ и $K = \bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{U}_i$.

Для каждого $h \in H$ множество $h(V_j)$ связное, поэтому принадлежит только одному из подмножеств U_i.

Пусть для некоторых V_j и $h \in H$ множество $h(V_j)$ имеет непустое пересечение с двумя множествами V_{j_1} и V_{j_2}. Тогда для любого $f \in H$ множество $f(h(V_j) \cup V_{j_1} \cup V_{j_2})$ целиком содержится в том множестве U_i, в котором находится $f(h(V_j))$, поскольку все U_i дизъюнктны. Заменим в объединении $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ пару V_{j_1}, V_{j_2} на открытое множество $W_{j_1,j_2} = V_{j_1} \cup V_{j_2}$. В новом наборе открытых множеств, как и в начальном, образ каждого элемента под действием произвольного гомеоморфизма $h \in H$ целиком содержится в единственном множестве U_i.

Продолжая действовать таким образом, мы будем уменьшать количество множеств исходного набора $\{V_i\}$ и в конце концов придем к набору дизъюнктных открытых множеств $\{W_i\}_{i=1}^{k}$ такому, что $V = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ и для произвольных $h \in H$ и W_i множество $h(W_i)$ может пересекаться не более чем с одним множеством W_j. Поэтому для любого $h \in H$ множество $\tilde{h}(\widetilde{W}_i)$ содержится ровно в одном множестве $\widetilde{W}_j$. Но поскольку множеств $\widetilde{W}_i$ конечное число, а $\tilde{h}$ — гомеоморфизм, то из этого следует, что $\tilde{h}$ переставляет множества $\widetilde{W}_i$, а так как H порождает группу G, то каждый гомеоморфизм $g \in G$ также переставляет множества $\widetilde{W}_i$, т.е. открыто-замкнутое разбиение $\{\widetilde{W}_i\}_{i=1}^{k}$ инвариантно относительно действия группы G.

Поскольку $K = \bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{U}_i$, то K является объединением некоторых множеств $\widetilde{W}_j$, поэтому орбита K под действием G конечна. $\square$

С помощью предложения 6.5 получаем

Следствие 6.18. *В условиях теоремы* 6.16 *свойства сферической транзитивности действия группы G на дереве T, а также свойства минимальности и транзитивности динамической системы $(G, \mathcal{C})$ равносильны.*

6.7. Графы Шрейера. Напомним, что *граф* Γ определяется *множеством вершин* $V(\Gamma)$, *множеством ребер* $E(\Gamma)$, функциями $\alpha, \omega \colon E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ (вершины $\alpha(e)$ и $\omega(e)$ называются соответственно *началом* и *концом* ребра e) и инволюцией $e \mapsto \overline{e}$, для которой $\alpha(\overline{e}) = \omega(e)$.

Помеченным (*реберно*) *графом* называют граф, в котором каждому ребру приписана *метка* — элемент некоторого *множества меток* S.

Морфизмом графов $f\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ называется пара отображений $f_{\mathrm{v}}\colon V(\Gamma_1) \to V(\Gamma_2)$, $f_{\mathrm{e}}\colon E(\Gamma_1) \to E(\Gamma_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha(f_{\mathrm{e}}(y)) = f_{\mathrm{v}}(\alpha(y)), \qquad \overline{f_{\mathrm{e}}(y)} = f_{\mathrm{e}}(\overline{y})$$

для всех $y \in E(\Gamma_1)$. *Морфизмом помеченных графов* называем морфизм графов, сохраняющий метки ребер.

Пусть G — конечно порожденная группа с системой образующих S такой, что $1 \notin S$ и $S = S^{-1}$, действующая точно на некотором множестве M. Тогда *графом действия* $\Gamma^*(G,S,M)$ группы G на M называется помеченный граф с множеством вершин M и множеством ребер $M \times S$. Каждое ребро (x,s), $x \in M$, $s \in S$, помечено образующим s, а функции α и ω и инволюция определены соотношениями

$$\alpha((x,s)) = x, \qquad \omega((x,s)) = x^s, \qquad \overline{(x,s)} = (x^s, s^{-1}),$$

где $x \in M$, $s \in S$.

Очевидно, что граф действия однозначно определяет действие образующих группы G на множестве M, а значит, и группу G в силу точности действия.

Графом Шрейера $\Gamma(G,S)$ группы G на множестве M называется граф, полученный из графа действия $\Gamma^*(G,S)$ удалением меток.

Пусть $T(\mathbf{X})$ — сферически однородное дерево, построенное по последовательности конечных множеств $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots\}$.

Пусть G — сферически транзитивная группа автоморфизмов дерева $T(\mathbf{X})$, порожденная конечным множеством S, удовлетворяющим наложенным выше условиям, и пусть $\Gamma^*(G,S)$ и $\Gamma(G,S)$ — граф ее действия на $\mathbf{X}^\omega$ и граф Шрейера соответственно. Графы $\Gamma^*(G,S)$ и $\Gamma(G,S)$ состоят из бесконечного числа счетных компонент связности. Множество вершин каждой компоненты связности является орбитой действия G на $\mathbf{X}^\omega$, а соответствующая компонента является графом действия (графом Шрейера) группы на этой орбите.

Обозначим $\Gamma^*_n(G,S)$ граф действия группы G на уровне $\mathbf{X}^n$, а $\Gamma_n(G,S)$ соответствующий граф Шрейера.

Непосредственно из определения и свойств действия групп автоматов на словах получаем, что отображение $\pi_n\colon \mathbf{X}^n \to \mathbf{X}^{n-1}$, состоящее в зачеркивании последней координаты, как отображение множеств вершин естественно продолжается до морфизма помеченных графов $\pi_n\colon \Gamma^*_n(G,S) \to \Gamma^*_{n-1}(G,S)$:

$$\pi_n(w,s) = (\pi_n(w), s).$$

Таким образом получаем обратный спектр графов

$$\Gamma^*_0(G,S) \leftarrow \Gamma^*_1(G,S) \leftarrow \Gamma^*_2(G,S) \leftarrow \ldots$$

Предложение 6.19. *Графы $\Gamma^*(G,S)$ и $\Gamma(G,S)$ действия группы G на границе $\mathbf{X}^\omega$ являются обратными пределами соответствующих обратных спектров конечных графов $\Gamma^*_n(G,S)$ и $\Gamma_n(G,S)$.*

Следовательно, граф действия на границе является проконечным (о проконечных графах см. в [57]).

Определение 6.5. Пусть G — сферически транзитивная счетная группа автоморфизмов дерева $T(\mathbf{X})$. Точка $w \in \mathbf{X}^\omega$ границы дерева называется *неособой точкой* относительно $g \in G$, если либо $w^g \neq w$, либо существует окрестность U точки w, целиком состоящая из неподвижных точек автоморфизма g.

Точка $w \in \mathbf{X}^\omega$ является *неособой точкой* относительно группы G, если она является неособой точкой относительно каждого элемента G.

Предложение 6.20. *Для любой счетной группы G автоморфизмов дерева $T(\mathbf{X})$ почти все точки границы $\mathbf{X}^\omega$ в смысле категории Бэра являются неособыми точками относительно G.*

Доказательство. Множество особых точек относительно автоморфизма дерева g является нигде не плотным множеством. Следовательно, множество всех особых точек относительно счетной группы является объединением счетного числа нигде не плотных множеств. □

Конечным путем в графе Γ называем последовательность его ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ для каждого $1 \leq i \leq n-1$. Вершина $\alpha(e_1)$ называется *началом пути*, а вершина $\omega(e_n)$ — его *концом*. Число n называется *длиной пути*. Аналогично определяется бесконечный путь.

Для графа Γ, вершины $v \in V(\Gamma)$ и $r \in \mathbb{N}$ *шар $B(v,r)$ радиуса r с центром в точке v* определяется как подграф с множеством ребер, принадлежащих всем путям с началом в v длины не более r, а множество вершин состоит из v и всех вершин, являющихся концами таких путей.

Два графа Γ_1, Γ_2 называются *локально изоморфными*, если для любой вершины v одного графа и $r \in \mathbb{N}$ существует вершина u другого такая, что графы $B(v,r)$ и $B(u,r)$ изоморфны.

Неособые точки относительно действия конечно порожденной группы автоморфизмов дерева имеют графы действия, обладающие типичными свойствами. Точнее, имеет место следующее

Предложение 6.21. *Пусть G — конечно порожденная сферически транзитивная группа автоморфизмов дерева $T(\mathbf{X})$. Если $w \in \mathbf{X}^\omega$ — неособая точка относительно G и $r \in \mathbb{N}$, то в каждой компоненте связности графа $\Gamma^*(G,S)$ (т.е. в каждой орбите) существует вершина v такая, что шар $B(w,r)$ изоморфен шару $B(v,r)$. Любые два графа действия на орбитах неособых точек локально изоморфны.*

Для любого помеченного графа Γ, локально изоморфного графу действия группы G на некоторой орбите неособой точки, существует орбита группы G с графом действия, изоморфным графу Γ.

Таким образом, почти все в смысле категории Бэра графы Шрейера орбит действия группы G на границе локально изоморфны.

Несложно показать, что аналогичное утверждение справедливо и в смысле меры. А именно имеет место следующее

Предложение 6.22. *Пусть G — конечно порожденная сферически транзитивная группа автоморфизмов дерева $T(\mathbf{X})$, а m — G-инвариантная вероятностная мера на границе. Почти все в смысле меры m точки границы $\mathbf{X}^\omega$ имеют локально изоморфные графы действия группы G на их орбитах.*

Интересно было бы построить пример группы, в которой графы Шрейера орбит, типичных в смысле категории Бэра (орбит неособых точек), были бы отличными от графов Шрейера орбит, типичных в смысле меры.

Когда группа автоморфизмов дерева определена конечным синхронным автоматом, графы Шрейера имеют особую самоподобную (фрактальную) структуру. Кроме того, часто графы Шрейера орбит являются индуктивными пределами графов Шрейера действия группы на уровнях.

Первыми примерами исследования графов Шрейера орбит действия групп, определенных конечным синхронным автоматом, являются работы [7, 30], в которых, в частности, исследуется спектр дискретного оператора Лапласа на таких графах.

Дискретным оператором Лапласа на графе Γ называется оператор $\Delta = 1-M$ на $\ell^2(V(\Gamma))$, где

$$(Mf)(v) = \frac{1}{\deg v} \sum_{e\in E(\Gamma),\ \alpha(e)=v} f(\omega(e)),$$

$f \in \ell^2(V(\Gamma))$, $v \in V(\Gamma)$, а $\deg v$ — валентность вершины v. Оператор M называется *марковским оператором* или *оператором случайного блуждания*.

В работе [7], в частности, доказано, что спектр оператора Лапласа для группы, определенной автоматом, изображенным на рис. 9, является объединением множества Кантора и некоторого счетного множества изолированных точек и может быть описан как замыкание множества

$$\left\{4,\ 1,\ 1\pm\sqrt{6},\ 1\pm\sqrt{6\pm\sqrt{6}},\ 1\pm\sqrt{6\pm\sqrt{6\pm\sqrt{6}}},\dots\right\}.$$

Кроме того, в [7] найдены также спектры некоторых других графов действий групп, определенных конечными автоматами.

Второй работой в указанном направлении, как отмечалось во введении, является [30]. В ней группа $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}_2$ "мигающих лампочек" реализована как группа, определенная автоматом, изображенным на рис. 6. Доказано, что в этом случае граф Шрейера почти каждой орбиты изоморфен графу Кэли группы, спектр оператора M является отрезком $[-1,1]$, а спектральная мера является дискретной мерой, сосредоточенной на счетном плотном подмножестве отрезка $[0,1]$. Это первый пример группы с таким необычным спектральным свойством.

Для вычисления спектра групп, определенных автоматами, используется метод аппроксимации конечными графами, в качестве которых выступают графы Шрейера действий на уровнях дерева. Этот метод изложен в работах [7, 30, 29]. Важную роль при этом играет свойство самоподобия группы и ее действия, а также подстановочный характер соответствующего графа.

Например, графы действия группы Григорчука (группы, определенной автоматом на рис. 14) на уровнях дерева можно получать следующим образом. Пусть Γ_1 — помеченный граф, изображенный на рис. 31, *а*. Легко видеть, что этот граф является графом действия группы Григорчука на первом уровне дерева. Граф Γ_n получается из графа Γ_{n-1} одновременной заменой всех меток b на метки d, меток c на b, d на c, а всех ребер, помеченных a, на граф, изображенный на рис. 31, *б*, при этом концам исходного ребра соответствуют выделенные вершины графа. Получаемые таким образом графы Γ_n и будут графами действия группы Григорчука на уровнях дерева.

Аналогичным образом строятся и графы действия на уровнях дерева группы, определенной автоматом, изображенным на рис. 9, и группы Гупты–Сидки [27].

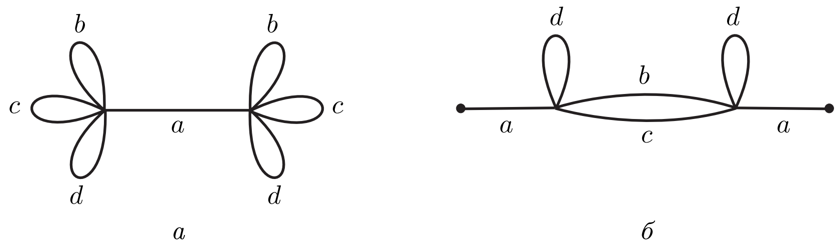


Рис. 31

6.8. Орбиты действий групп на границе дерева. Пусть G — счетная группа, действующая автоморфизмами на корневом дереве T. Обозначим через E_G отношение эквивалентности на границе ∂T, для которого две точки эквивалентны в том и только том случае, когда они находятся в одной G-орбите. Отношение E_G как подмножество множества $\partial T \times \partial T$ является борелевским. Более того, оно является F_σ-множеством, т.е. объединением счетного числа открытых множеств.

Наоборот, по теореме Фельдмана–Мура [20] для произвольного счетного (т.е. со счетными классами) борелевского отношения E на стандартном борелевском пространстве $\mathcal{X}$ существует счетная группа G борелевских автоморфизмов пространства $\mathcal{X}$ такая, что $E = E_G$, где E_G, как и выше, отношение "быть в одной G-орбите".

Напомним некоторые определения теории борелевских отношений эквивалентности и укажем на особенности, связанные с действиями групп на корневых деревьях.

Определение 6.6. Счетное борелевское отношение эквивалентности $E \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ на пространстве с мерой $(\mathcal{X}, m)$ *сохраняет меру* m, если для любого измеримого множества A и любого измеримого отображения $f\colon A \to \mathcal{X}$ такого, что $xEf(x)$ для каждого $x \in A$, имеет место равенство $m(f^{-1}(A)) = m(A)$.

Мера m *квазиинвариантна* относительно эквивалентности E, если для произвольного множества A такого, что $m(A) = 0$, объединение

$$[A]_E = \{x \in \mathcal{X}\colon\ xEa,\ a \in A\}$$

классов эквивалентности, пересекающихся с A, тоже имеет нулевую меру.

Легко видеть, что если мера m инвариантна (квазиинвариантна) относительно действия группы G, то мера m инвариантна (квазиинвариантна) относительно эквивалентности E_G. Поскольку равномерная мера m на ∂T инвариантна относительно действия любого автоморфизма дерева T, то эквивалентность E_G сохраняет меру m для произвольной счетной группы G автоморфизмов дерева T.

Определение 6.7. Счетная борелевская эквивалентность $E \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ на пространстве с мерой $(\mathcal{X}, m)$ называется *эргодической*, если для любого измеримого множества A множество $[A]_E$ имеет либо меру 1, либо меру 0.

Мера m называется *квазиинвариантной* относительно эквивалентности E, если для любого 0-множества $A \subset \mathcal{X}$ (т.е. множества с нулевой мерой) $[A]_E$ тоже является 0-множеством.

Эквивалентность E_G эргодична тогда и только тогда, когда группа G действует эргодично.

Важным примером отношения эквивалентности, заданного действием группы на корневом дереве, является отношение *конфинальности*.

Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ — последовательность конечных множеств, $T = T(\mathbf{X})$ — соответствующее корневое дерево.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим отношение эквивалентности E_n на границе ∂T правилом

$$(x_1x_2x_3\ldots)E_n(y_1y_2y_3\ldots) \quad \text{тогда и только тогда, когда } x_i = y_i \text{ для всех } i > n.$$

Отношение E_n имеет конечные классы эквивалентности.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество всех автоморфизмов g дерева T таких, что xE_nx^g для всех x, образует конечную группу, изоморфную группе $\operatorname{Aut} T_n$ автоморфизмов конечного корневого дерева T_n, состоящего из вершин дерева T, лежащих на уровнях с номерами, не превышающими n. Очевидно,

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$$

Обозначим $E_{\mathrm{c}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Две последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in \partial T(\mathbf{X})$ находятся в отношении E_{c} тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ для всех i, кроме конечного числа. Мы называем отношение E_{c} отношением *конфинальности*, а две последовательности называем *конфинальными*, если они находятся в отношении E_{c}. Классы эквивалентности E_{c} мы также называем *классами конфинальности*.

С отношениями конфинальности E_n и E_{c} связаны следующие группы и полугруппы автоморфизмов дерева T (см. [47]).

Определение 6.8. Автоморфизм g дерева T называется

a) *финитарным* или *корневым*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $x \in \partial T$ имеем x^gE_nx;

b) *слабо финитарным*, если для любого $x \in \partial T$ имеем $x^gE_{\mathrm{c}}x$;

c) *конфинальным*, если $E_{\mathrm{c}}^g \subseteq E_{\mathrm{c}}$, т.е. если для произвольных $x, y \in \partial T$ таких, что $xE_{\mathrm{c}}y$, имеем $x^gE_{\mathrm{c}}y^g$.

Легко видеть, что множество всех финитарных автоморфизмов дерева образует группу. Эта группа является индуктивным пределом групп $\operatorname{Aut} T_n$, следовательно, она локально конечна.

Множество всех слабо финитарных автоморфизмов также является группой, которую обозначим $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$. Если T — регулярное корневое дерево, то группа $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$ содержит изоморфную копию всей группы $\operatorname{Aut} T$ (см. [47]).

Группа $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$ является аналогом *полных групп* минимальных динамических систем на множестве Кантора, которые исследуются в [23].

Множество конфинальных автоморфизмов $\mathcal{AC}(\mathbf{X})$ является только полугруппой, а не группой, поскольку обратный к конфинальному автоморфизму не обязательно является конфинальным. В качестве примера можно взять регулярное дерево $T(\mathbf{X})$, построенное по последовательности $\mathbf{X} = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \ldots\}$ ($\mathbb{Z}_2$ — группа порядка 2), и автоморфизм

$$x_1x_2x_3\ldots \mapsto x_1(x_2 + x_1)(x_3 + x_2)(x_4 + x_3)\ldots,$$

который является конфинальным, но обратный к нему

$$x_1x_2x_3\ldots \mapsto x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\ldots$$

таковым не является.

Полугруппа $\mathcal{AC}(\mathbf{X})$ совпадает с полугруппой

$$\{g \in \operatorname{Aut} T\colon\ \mathcal{AWF}(\mathbf{X})^g \leq \mathcal{AWF}(\mathbf{X})\}.$$

В частности, $\mathcal{AWF}(\mathbf{X}) \leq \mathcal{AC}(\mathbf{X})$ и группа $\mathcal{AC}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{AC}(\mathbf{X})^{-1}$ (называемая группой *биконфинальных* автоморфизмов) совпадает с нормализатором группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$ в $\operatorname{Aut} T$.

Эквивалентность E_{c} является в некотором смысле минимальной эквивалентностью среди эргодических эквивалентностей, заданных действиями групп на границе дерева. Точнее, имеет место следующее

Предложение 6.23. *Пусть G — группа, действующая сферически транзитивно на корневом дереве $T(\mathbf{X})$, E_G — соответствующее отношение эквивалентности. Тогда существует такой автоморфизм $g \in \operatorname{Aut} T$, что $E_G^g \supseteq E_{\mathrm{c}}$.*

Доказательство. Заметим, что условие $E_G^g \supseteq E_{\mathrm{c}}$ эквивалентно тому, что орбиты группы G^g являются объединениями классов конфинальности.

Рассмотрим некоторый бесконечный путь $\{v_0, v_1, \ldots\}$ без повторений с началом в корне. Пусть G_n — стабилизатор вершины v_n в группе G. Заметим, что $G = G_0$ и для каждого $n \geq 1$ группа G_n является подгруппой индекса m_n группы G_{n-1}, где $\{m_1, m_2, \ldots\}$ — сферический индекс дерева $T(\mathbf{X})$ (т.е. $m_n = |X_n|$).

Построим *дерево классов смежности*, вершины которого соответствуют правым классам смежности группы G по подгруппам G_n, а две вершины инцидентны в том и только том случае, когда одной из вершин соответствует класс смежности $G_n \cdot g$, а второй $G_{n+1} \cdot h$ такие, что $G_i \cdot g \supset G_{i+1} \cdot h$. В качестве корня возьмем вершину, соответствующую классу $G_0 \cdot 1$. На классах смежности G по G_n группа G естественно действует умножением справа. Соответствующее действие на дереве классов смежности является действием автоморфизмами.

Несложно доказать, что описанное действие группы G на дереве классов смежности сопряжено с исходным действием G на $T(\mathbf{X})$.

Выберем для каждого $n \geq 1$ некоторую систему представителей H_n правых классов смежности группы G_{n-1} по подгруппе G_n. Поскольку $|H_n| = |X_n|$, существует некоторое взаимно однозначное соответствие $\psi_n\colon X_n \to H_n$.

Совокупность всевозможных произведений вида $h_n \ldots h_2 h_1$, где $h_i \in H_i$, является системой представителей правых классов смежности группы G по подгруппе G_n. Определим новое действие $\varphi\colon G \hookrightarrow \operatorname{Aut} T(\mathbf{X})$ группы G на $\mathbf{X}^*$ так, чтобы равенство

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\varphi(g)} = y_1 y_2 \ldots y_n$$

для любых $x_i \in X_i$ было эквивалентно равенству

$$G_n \psi_n(x_n) \ldots \psi_2(x_2) \psi_1(x_1) g = G_n \psi_n(y_n) \ldots \psi_2(y_2) \psi_1(y_1).$$

Этим однозначно определяется действие группы G автоморфизмами на корневом дереве $T(\mathbf{X})$, сопряженное с действием G на дереве классов смежности, а значит, и с исходным действием на дереве $T(\mathbf{X})$. Теперь нам достаточно доказать, что орбиты нового действия G на $\partial T(\mathbf{X})$ являются объединениями классов конфинальности.

Пусть $w_1 = a_1 a_2 \ldots a_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots$, $w_2 = b_1 b_2 \ldots b_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots$ — две произвольные конфинальные последовательности из $\mathbf{X}^\omega$. Тогда для

$$g = (\psi_n(a_n) \psi_{n-1}(a_{n-1}) \ldots \psi_1(a_1))^{-1} \psi_n(b_n) \psi_{n-1}(b_{n-1}) \ldots \psi_1(b_1)$$

имеем $w_1^{\varphi(g)} = w_2$, т.е. w_1 и w_2 лежат в одной орбите. $\square$

Не всякая счетная F_σ-эквивалентность, содержащая E_{c}, является эквивалентностью, индуцированной действием счетной группы автоморфизмов дерева. Примером может служить "tail"-отношение

$$(x_1, x_2, \dots)E_{\mathrm{t}}(y_1, y_2, \dots) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \forall i > n \colon \; x_i = y_{i+k}$$

на границе регулярного корневого дерева, построенного по постоянной последовательности $\mathbf{X} = \{X, X, X, \dots\}$. Две последовательности находятся в отношении E_{t} тогда и только тогда, когда они отличаются только в началах, но не обязательно синхронно, т.е. длины этих начал могут быть различными. Отношение E_{t} не сохраняет меру на границе, поэтому не может индуцироваться действием счетной группы автоморфизмов дерева.

Примером группы, действующей гомеоморфизмами на $\mathbf{X}^\omega$, орбиты которой совпадают с классами эквивалентности E_{t}, является группа Томпсона V. Действительно, любые две последовательности $w_1, w_2 \in \mathbf{X}^\omega$ такие, что $w_1 E_{\mathrm{t}} w_2$, можно представить в виде $w_1 = v_1 u$, $w_2 = v_2 u$ и тогда для любого элемента g группы V, заданного таблицей вида $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & \cdots \\ v_2 & \cdots \end{smallmatrix}\right)$, будет выполнено соотношение $w_1^g = w_2$.

Определение 6.9. Отношение эквивалентности называется *конечным*, если все его классы конечные.

Борелевское отношение эквивалентности называется *гиперконечным*, если оно является объединением возрастающей цепочки конечных борелевских эквивалентностей.

В случае эквивалентности на пространстве с квазиинвариантной мерой обычно эквивалентность называется (гипер)конечной, если условия предыдущего определения выполнены почти всюду.

Имеет место следующая характеризация гиперконечных эквивалентностей (см. [13, 15]).

Теорема 6.24. *Пусть $\mathcal{X}$ — борелевское пространство. Борелевское отношение эквивалентности $E \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ является гиперконечным тогда и только тогда, когда существует такое борелевское действие циклической группы $\mathbb{Z}$, что $E = E_{\mathbb{Z}}$.*

Поскольку конфинальность является объединением возрастающей цепочки конечных отношений E_n, то она является гиперконечной.

Другим примером гиперконечной эквивалентности является эквивалентность E_{t}, которая, как мы видели выше, совпадает с эквивалентностью, индуцированной действием группы Томпсона V.

Примером действия на дереве циклической группы с орбитами, совпадающими с классами конфинальности почти всюду (за исключением одной орбиты, которая является объединением двух классов конфинальности), является действие счетной машины, что легко следует из ее интерпретации в терминах 2-адических записей чисел.

Предложение 6.25 [85]. *Орбиты действия группы Григорчука G на границе дерева совпадают с классами конфинальности.*

Доказательство. Поскольку каждый образующий элемент группы Григорчука оставляет каждую точку границы в ее классе конфинальности, то все орбиты являются подмножествами классов конфинальности. Осталось доказать, что любые две конфинальные последовательности лежат в одной G-орбите.

Для этого докажем индукцией по n, что для произвольных $w_1, w_2 \in X^*$ вида

$$w_1 = a_1 a_2 \dots a_n x_{n+1} x_{n+2} \dots,$$
$$w_2 = b_1 b_2 \dots b_n x_{n+1} x_{n+2} \dots$$

существует элемент $g \in G$ такой, что $w_1^g = w_2$. Для $n = 1, 2$ утверждение проверяется непосредственно. Если это утверждение верно для $n-1$, то существуют $g_1, g_2 \in G$ такие, что

$$w_1^{g_1} = 11\ldots10a_nx_{n+1}x_{n+2}\ldots,$$
$$w_2^{g_2} = 11\ldots10b_nx_{n+1}x_{n+2}\ldots$$

Если $a_n = b_n$, то все доказано, если нет, то $w_1^{g_1b} = w_2^{g_2}$ либо $w_1^{g_1c} = w_2^{g_2}$. $\square$

Используя критерий сопряженности автоморфизмов корневого дерева из работы [67], можно доказать следующее (см. [47]).

Теорема 6.26. *Каждый элемент $g \in \operatorname{Aut} T$ сопряжен в группе $\operatorname{Aut} T$ с некоторым элементом $h \in \mathcal{AWF}(\mathbf{X})$. Более того, h можно всегда выбрать таким, что он будет менять в каждой последовательности $x_1x_2x_3\ldots$ не более двух букв.*

Следствие 6.27. *Каждый элемент группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} T$ дерева со сферическим индексом $(n, n, \ldots, n)$ можно представить в виде произведения двух элементов порядка не выше $n!$.*

В частности, в случае бинарного дерева каждый элемент группы $\operatorname{Aut} T$ является произведением двух инволюций.

Эквивалентность E называется *апериодической*, если у нее нет конечных классов.

Две эквивалентности R_1, R_2 на стандартных борелевских пространствах $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ называются *борелевски изоморфными*, если существует изоморфизм борелевских пространств $f\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ такой, что xR_1y тогда и только тогда, когда $f(x)R_2f(y)$.

Мера m на $\mathcal{X}_i$ называется *эргодической относительно эквивалентности R_i*, если эквивалентность R_i является эргодической на пространстве $(\mathcal{X}_i, m)$.

Пусть E_{t} — "tail"-эквивалентность на множестве $\mathbf{X}^\omega$ для $\mathbf{X} = \{X, X, X, \ldots\}$, $|X| = 2$, определенная выше.

Отношение $E_{\mathrm{c}} \times \Delta_n$ на прямом произведении $\mathbf{X}^\omega \times A$ пространства последовательностей $\mathbf{X}^\omega$ и множества из n элементов ($1 \le n \le \aleph_0$) определяем условием

$$(x, a)(E_{\mathrm{c}} \times \Delta_n)(y, b) \quad \Leftrightarrow \quad xE_{\mathrm{c}}y, \quad a = b,$$

где E_{c} — конфинальное отношение эквивалентности. Заметим, что $E_{\mathrm{c}} \times \Delta_1$ естественно отождествляется с E_{c}.

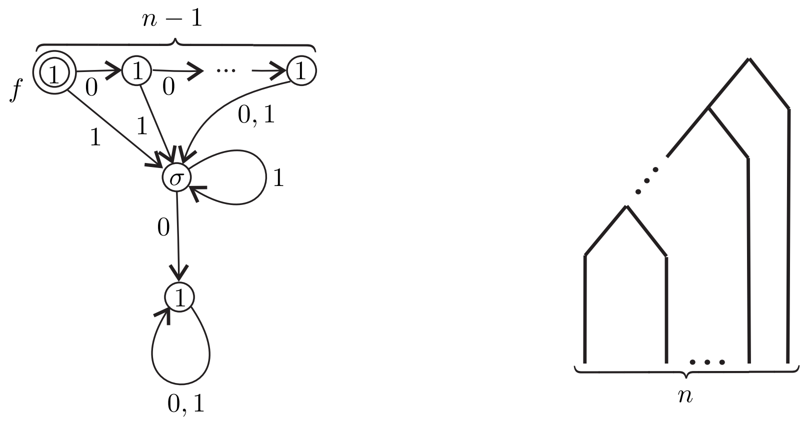
Несложно проверить, что E_{t} не имеет инвариантных вероятностных мер, а $E_{\mathrm{c}} \times \Delta_n$ имеет их ровно n.

Обозначим через E_{s} эквивалентность, индуцированную действием сдвига Бернулли над двухэлементным алфавитом, ограниченную на множество непериодических точек. Эквивалентность E_{s} имеет континуум инвариантных эргодических вероятностных мер, например мер Бернулли.

Доуерти, Джексон и Кекрис [15] классифицировали с точностью до борелевского изоморфизма гиперконечные апериодические эквивалентности.

Теорема 6.28. *Две гиперконечные апериодические эквивалентности борелевски изоморфны тогда и только тогда, когда их множества эргодических инвариантных вероятностных мер равномощны.*

Мощность множества эргодических инвариантных вероятностных мер гиперконечной эквивалентности либо не более чем счетна, либо континуальна.



а *б*

Рис. 32

Следствие 6.29. *Любая гиперконечная апериодическая эквивалентность борелевски изоморфна одной из эквивалентностей*

$$E_{\mathrm{t}}, \qquad E_{\mathrm{c}} \times \Delta_n, \quad 1 \leq n \leq \aleph_0, \qquad E_{\mathrm{s}}.$$

Следствие 6.30. *Любая гиперконечная апериодическая эквивалентность, обладающая хотя бы одной инвариантной вероятностной мерой, борелевски изоморфна некоторой эквивалентности, индуцированной действием конечно автоматного автоморфизма бинарного дерева на границе.*

Доказательство. Если эквивалентность обладает инвариантной вероятностной мерой, то она не изоморфна эквивалентности E_{t} и ее множество инвариантных эргодических вероятностных мер непусто.

В силу предложения 6.8 для любого автоморфизма дерева множество эргодических инвариантных вероятностных мер и граница дерева орбит равномощны. Эквивалентность E_G апериодична, если группа G не имеет конечных орбит на границе. Поэтому для доказательства следствия нам достаточно для любого $1 \leq n \leq \aleph_0$ и n, равного мощности континуума, построить автоморфизм бинарного дерева, имеющий ровно n различных замыканий орбит на границе, причем все они должны быть бесконечными.

Для $n = 1$ таким автоморфизмом будет счетная машина. С использованием счетной машины строятся и остальные автоматы.

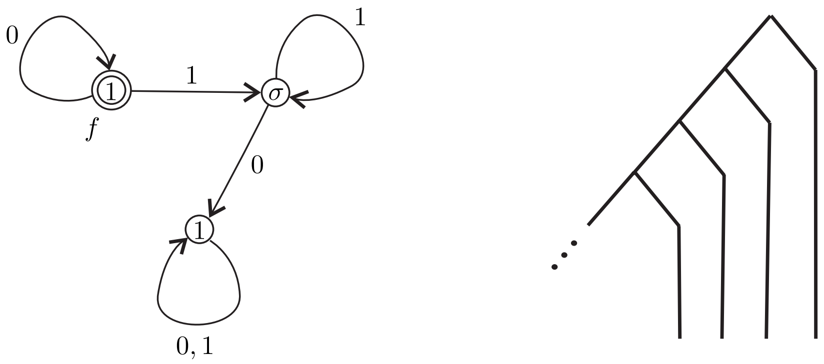
Для конечного $n > 1$ это будет автоморфизм, заданный автоматом, изображенным на рис. 32, *а*. На рис. 32, *б* изображено дерево орбит автоморфизма.

Для $n = \aleph_0$ можно взять автомат, изображенный на рис. 33, *а* (рис. 33, *б* — дерево орбит).

Для n, равного мощности континуума, примером будет автомат, изображенный на рис. 34, *а* (на рис. 34, *б* опять изображено соответствующее дерево орбит).

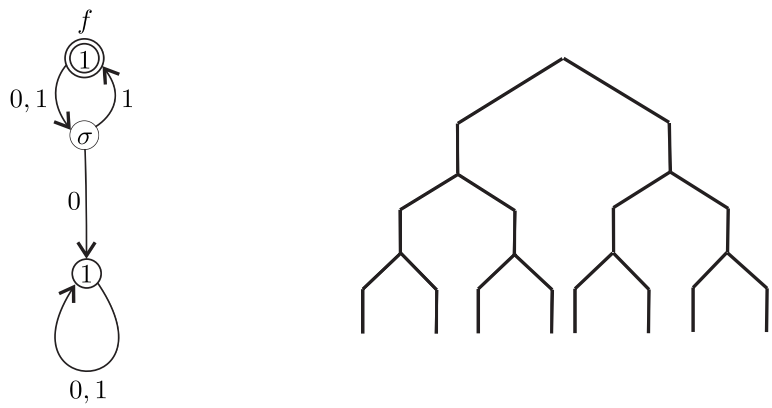
Образ последовательности $x_1x_2x_3\ldots \in \mathbf{X}^\omega$ под действием последнего автомата равен $x_1y_2x_3y_4x_5y_6\ldots$, где $y_2y_4y_6\ldots$ — образ последовательности $x_2x_4x_6\ldots$ под действием счетной машины. $\square$

С понятием гиперконечности тесно связано понятие аменабельности отношения эквивалентности. В частности, для любой аменабельной группы G отношение E_G гиперконечно



а *б*

Рис. 33



а *б*

Рис. 34

почти всюду [16, 50]. Кроме того, если группа G действует свободно сохраняющими меру преобразованиями и отношение E_G гиперконечно, то группа G аменабельна [20].

Как мы уже отмечали (теорема 6.26), любая циклическая группа сопряжена с подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$. Также несложно доказать, что любая конечная группа сопряжена с подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$ (см. [47, теорема 6]). Доказательство теоремы 6 из [47] практически без изменений переносится на следующее ее обобщение.

Теорема 6.31. *Если для группы $G \le \operatorname{Aut} T$ все орбиты на границе дерева T конечны, то она сопряжена в $\operatorname{Aut} T$ с некоторой подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$.*

Любая борелевская подэквивалентность гиперконечной эквивалентности является гиперконечной. Отсюда следует, что эквивалентность E_G, где $G \le \mathcal{AWF}(\mathbf{X})$, гиперконечна. Верно ли обратное? Точнее, представляет интерес

Вопрос. Верно ли, что *произвольная счетная группа $G \le \operatorname{Aut} T$ с гиперконечной эквивалентностью E_G сопряжена в $\operatorname{Aut} T$ с подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$*?

Последний вопрос может быть шагом к полной классификации гиперконечных (эргодических) эквивалентностей, индуцированных действиями на границе счетных групп автоморфизмов дерева, с точностью до сопряженности в группе $\operatorname{Aut} T$.

Существуют примеры конечно порожденных групп автоморфизмов дерева, для которых индуцированные эквивалентности на границе не гиперконечны, а значит, сами группы не могут быть сопряжены с подгруппами группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$.

Действительно, пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая неаменабельная группа (например, свободная). Пусть $G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$ — ряд ее нормальных подгрупп конечного индекса с тривиальным пересечением. Построим корневое дерево, вершинами которого являются правые классы смежности по подгруппам G_n, где две вершины смежны тогда и только тогда, когда они имеют вид $G_n a$, $G_{n+1} b$ и $G_n a > G_{n+1} b$. Группа G действует на этом дереве умножением справа автоморфизмами, при этом стабилизатор произвольной вершины уровня n равен G_n, следовательно, стабилизатор любого конца тривиален, поэтому действие на границе свободно. Индуцированная эквивалентность не будет гиперконечной, поскольку G — неаменабельная группа, действующая свободно сохраняющими меру преобразованиями.

Более широкий класс групп, индуцирующих неаменабельные эквивалентности, может быть получен с помощью понятия *подграфа эквивалентности.*

Граф с множеством вершин $\mathcal{X}$ называется борелевским, если множество пар смежных вершин $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ является борелевским.

Определение 6.10. Пусть E — борелевская эквивалентность на пространстве $\mathcal{X}$. *Подграфом эквивалентности* (“graphing”) E называют произвольный борелевский граф с множеством вершин $\mathcal{X}$, в котором две вершины могут быть соединены ребром только в случае, если они находятся в отношении E. Граф называется *графом ограниченной валентности*, если валентности его вершин ограничены в совокупности.

Подграф Γ эквивалентности E называется *порождающим*, если его компоненты связности совпадают с классами эквивалентности E.

В общем случае компоненты связности подграфа эквивалентности E являются подмножествами классов эквивалентности.

Если G — группа с конечной системой образующих $S = S^{-1}$, то ее граф Шрейера $\Gamma(G, S, \mathcal{X})$ (т.е. граф с множеством вершин $\mathcal{X}$, в котором две вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $x^s = y$ для некоторого $s \in S$) является порождающим подграфом эквивалентности E_G. Таким образом, понятие порождающего подграфа является обобщением понятия графа Шрейера для борелевских счетных эквивалентностей.

Определение 6.11. Граф Γ является *неаменабельным*, если существуют положительные постоянные R, C такие, что для произвольного конечного множества вершин A графа Γ выполняется неравенство

$$|\mathrm{Neib}(A, R)| \geq (1 + C)|A|,$$

где $\mathrm{Neib}(A, R)$ — множество всех вершин, находящихся на расстоянии $\leq R$ от некоторой вершины множества A (R-окрестность множества A).

Согласно критерию Фелнера конечно порожденная группа является аменабельной тогда и только тогда, когда ее граф Кэли аменабельный.

Справедлива следующая теорема (см. [1, 34]).

Теорема 6.32. *Пусть E — борелевская эквивалентность на пространстве с мерой $(\mathcal{X}, \mu)$. Если E гиперконечна и сохраняет меру μ, то μ-почти все компоненты связности любого подграфа ограниченной валентности эквивалентности E аменабельны.*

Подграф эквивалентности называется *лесом* (“treeing”), если все его компоненты связности являются деревьями.

Примером эквивалентности, для которой существует порождающий лес, является эквивалентность E_G, где G — свободная группа (в частности, циклическая), действующая свободно. Соответствующим лесом будет граф Шрейера действия группы. Таким образом, для гиперконечных апериодических эквивалентностей всегда существует порождающий лес.

С другой стороны, не всякая счетная борелевская эквивалентность имеет порождающий лес. Примерами эргодических групп, для которых орбитальная эквивалентность E_G не имеет порождающего леса, являются в силу результата [2] группы с Т-свойством Каждана (см. также [32]).

Полен в [51] доказал, что почти все в смысле меры компоненты порождающего подграфа измеримой счетной эквивалентности имеют 0, 1, 2 или бесконечное число концов.

Орбитальная инвариантность L^2-чисел Бетти измеримых разбиений доказана в [21].

7. СПИСОК ПРОБЛЕМ

7.1. Рост автоматов.

1. Дать классификацию порядков роста неинициальных автоматов.

2. Аналогичный вопрос для инициальных автоматов.

3. Вычислить асимптотику роста конкретных автоматов, имеющих промежуточный рост, например автоматов, изображенных на рис. 8, 9, 14, 15.

7.2. Группы и полугруппы автоматов.

1. Существует ли алгоритм, который

a) по данному конечному инициальному автомату определяет, является ли он периодическим, т.е. имеет ли место эквивалентность $A_q^{(m+n)} = A_q^{(n)}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{N}$?

b) по данному конечному неинициальному автомату A определяет, является ли полугруппа $S(A)$ (группа $G(A)$) конечной, абелевой, нильпотентной, разрешимой, свободной, периодической, промежуточного роста?

c) по данному конечному неинициальному автомату определяет, является ли он автоматом полиномиального, экспоненциального, промежуточного роста?

d) по двум автоматам A и B определяет, изоморфны ли полугруппы $S(A)$ и $S(B)$? То же самое для групп $G(A)$, $G(B)$ в случае обратимых автоматов.

e) определяет, является ли инициальный автомат A_q сферически транзитивным?

f) определяет, является ли неинициальный автомат A сферически транзитивным, т.е. сферически транзитивна ли полугруппа $S(A)$? Аналогичный вопрос для групп $G(A)$ в случае обратимого автомата.

g) определяет, является ли группа $G(A)$ фрактальной, ветвящейся, слабо ветвящейся, жесткой? Группа, действующая на дереве, называется *жесткой*, если жесткие стабилизаторы всех вершин конечны.

2. Разрешима ли проблема сопряженности в группах конечных автоматов?

3. Существует ли неаменабельная группа конечных синхронных автоматов без свободной подгруппы с двумя образующими? Аналогичный вопрос в асинхронном случае: кандидат на такую группу — группа Томпсона F.

4. Дать классификацию конечно автоматных групп с точностью до соизмеримости или более грубой эквивалентности, определенной в работе [53] (под соизмеримостью двух групп понимается наличие у них изоморфных подгрупп конечного индекса).

5. При каких условиях на группу автоморфизмов однородного дерева стабилизатор вершины действует конечно автоматными преобразованиями? В частности, верно ли это для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, где p — простое число?

Некоторые другие вопросы теории (синхронно) автоматных групп преобразований приведены в [46].

7.3. Вопросы о графах Шрейера $\Gamma(G,S)$.

1. Существует ли алгоритм, который

a) по заданному обратимому конечному автомату A и рекурсивно заданному пути $w \in \partial T$ определяет, тривиальна ли параболическая подгруппа $P_w = \mathrm{St}_G\, w$?

a′) устанавливает, есть ли путь w, для которого $P_w = 1$?

b) устанавливает, имеет ли граф Шрейера $G(A)/P_w$, где w — рекурсивно заданная последовательность, полиномиальный рост?

2. Описать возможные типы роста графов $G(A)/P_w$, где A — конечный обратимый автомат, а P_w — параболическая подгруппа.

3. Существует ли сферически транзитивная группа автоморфизмов корневого дерева, для которой графы Шрейера орбит на границе, типичных в смысле категории Бэра (орбит неособых точек), были бы отличными (не локально изоморфными) от графов Шрейера орбит, типичных в смысле меры.

7.4. Вопросы спектральной теории автоматов.

1. Каждому автомату соответствуют два спектра: спектр определяемой им динамической системы на границе и спектр графа Шрейера. Построить пример автомата, для которого эти спектры не совпадают.

2. Дать классификацию топологических типов спектров конечных автоматов.

3. Найти новые (по сравнению с изложенными в [7] и [30]) методы вычисления спектров конечных автоматов.

7.5. Динамические системы.

1. Дать топологическую и метрическую классификацию рациональных гомеоморфизмов.

2. Для фиксированной сферически транзитивной группы $G < \mathrm{Aut}\, T$ классифицировать ее действия на границах, индуцированные сферически транзитивными действиями этой группы на корневых деревьях.

3. Существует ли обратимый автомат A такой, что группа $G(A)$ обладает свойством Каждана? Существует ли обратимый автомат A такой, что группа $G(A)$ обладает свойством Каждана и действует эргодически на границе дерева?

4. Построить обратимый автомат A такой, что группа $G(A)$ сферически транзитивна и ее действие на границе определяет неаменабельное разбиение на орбиты.

5. Дать классификацию орбитальных эквивалентностей E_G действия на границе групп автоморфизмов дерева с точностью до

a) борелевских изоморфизмов границы дерева,

b) гомеоморфизмов границы дерева,

c) изометрий границы дерева.

6. Дать классификацию гиперконечных орбитальных эквивалентностей E_G действия на границе групп автоморфизмов дерева с точностью до изометрий границы дерева.

7. Верно ли, что произвольная счетная группа $G \leq \operatorname{Aut} T$ с гиперконечной эквивалентностью E_G сопряжена в $\operatorname{Aut} T$ с подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$?

8. Существует ли счетная (конечно порожденная?) аменабельная подгруппа $\operatorname{Aut} T$, не сопряженная с подгруппой группы $\mathcal{AWF}(\mathbf{X})$?

9. Существует ли циклическая группа автоморфизмов корневого дерева, орбиты которой на границе совпадают с классами конфинальности?

10. Разработать метод вычисления L^2-чисел Бетти разбиений границы для действий групп вида $G(A)$, где A — конечный автомат.

Благодарности. Первый и второй авторы благодарят Швейцарский фонд научных исследований за финансовую поддержку и Пьера де ля Арпа за приглашение в Университет Женевы, во время пребывания в котором была начата и продолжена работа по написанию этой статьи. Первый автор выражает благодарность А. Шалеву, А. Манну и А. Любоцкому за приглашение посетить с визитом Институт продвинутых исследований при Еврейском университете Иерусалима, в течение которого шла завершающая работа над текстом статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams S.* Trees and amenable equivalence relations // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1990. V. 10. P. 1–14.
2. *Adams S., Spacier R.* Kazhdan groups, cocycles and trees // Amer. J. Math. 1990. V. 112. P. 271–287.
3. *Alseda L., Misiurewicz M., Llibre J.* Combinatorial dynamics and entropy in dimension one. Singapore: World Sci., 1993. (Adv. Ser. Nonlin. Dyn.; V. 5).
4. *Bartholdi L.* Lower bounds of the growth of Grigorchuk's torsion group: Preprint Univ. Genève, 1999.
5. *Bartholdi L.* Croissance de groupes agissant sur des arbres: PhD Diss. Univ. Genève, 2000.
6. *Bartholdi L., Grigorchuk R.* On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups: Preprint Forschungsinst. Math. ETH-Zürich, 1999.
7. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I.* On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups // Наст. изд. С. 5–45.
8. *Bruin H., Keller G., Pierre M.St.* Adding machines and wild attractors // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1997. V. 17. P. 1267–1287.
9. *Bass H., Otero-Espinar M., Rockmore D.N., Tresser C.P.L.* Cyclic renormalization and the automorphism groups of rooted trees. Berlin etc.: Springer, 1995. (Lect. Notes Math.; V. 1621).
10. *Brunner A.M., Sidki S.* The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite state automata // Intern. J. Alg. and Comput. 1998. V. 8, N 1. P. 127–139.
11. *Buescu J.* Exotic attractors (from Liapunov stability to riddled basins). Basel etc.: Birkhäuser, 1997.
12. *Buescu J., Stewart I.* Liapunov stability and adding machines // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1995. V. 15. P. 1–20.
13. *Connes A., Feldman J., Weiss B.* An amenable equivalence relation is generated by a single transformation // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1981. V. 1. P. 431–450.

14. *Cannon J.W., Floyd W.I., Parry W.R.* Introductory notes on Richard Thompson groups // Enseign. math. 1996. V. 42, N 2. P. 215–256.
15. *Dougherty R., Jackson S., Kechris A.S.* The structure of hyperfinite Borel equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341, N 1. P. 193–225.
16. *Dye H.* On groups of measure preserving transformations. I // Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 119–159.
17. *Epstein D.B.A., Cannon J.W., Holt D.F., Levy S.V.F., Paterson M.S., Thurston W.P.* Word processing and group theory. Boston: Jones and Bartlett, 1992.
18. *Eilenberg S.* Automata, languages, and machines. New York; London: Acad. Press, 1974. V. A.
19. *Fabrykowski J., Gupta N.* On groups with sub-exponential growth functions. II // J. Indian Math. Soc. 1991. V. 56, N 1–4. P. 217–228.
20. *Feldman J., Moore C.* Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 234. P. 289–324.
21. *Gaboriau D.* Sur la (co)homologie L_2 des actions préservant une mesure // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1: Math. 2000. V. 330, N 5m. P. 365–370.
22. *Giordano T., Putnam I.F., Skau C.F.* Topological orbit equivalence and C^*-crossed products // J. reine und angew. Math. 1995. Bd. 469. S. 51–111.
23. *Giordano T., Putnam I.F., Skau C.F.* Full groups of Cantor minimal systems // Israel J. Math. To appear.
24. *Grigorchuk R.* Just infinite branch groups // New horizons in pro-p groups / Eds. M. du Sautoy, D. Segal, A. Shalev. Boston etc.: Birkhäuser, 2000. P. 121–179. (Progr. Math.; V. 184).
25. *Grigorchuk R.I., Linnel P., Schick T., Żuk A.* On a conjecture of Atiyah // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1. To appear.
26. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. 1981. V. 53. P. 53–73.
27. *Gupta N., Sidki S.* On the Burnside problem for periodic groups // Math. Ztschr. 1983. Bd. 182. S. 385–388.
28. *Gupta N., Sidki S.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, №5. С. 584–589.
29. *Grigorchuk R., Żuk A.* On the asymptotic spectrum of random walks on infinite families of graphs // Random walks and discrete potential theory: Proc. Conf. Cortona, 22–28 June 1997 / Eds. M. Picardello, W. Woess. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. P. 134–150. (Sympos. math.; V 22).
30. *Grigorchuk R., Żuk A.* The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton and its spectrum: Preprint FIM ETH-Zürich, 1999. To appear: Geom. dedicata.
31. *de la Harpe P.* Topics in geometric group theory. Chicago: Univ. Chicago Press, 2000.
32. *Hjorth G., Kechris A.S.* Borel equivalence relations and classifications of countable models // Ann. Pure and Appl. Logic. 1996. V. 82. P. 221–272.
33. *Hořejš J.* Преобразования, определенные конечными автоматами // Проблемы кибернетики. 1963. Т. 9. С. 23–26.
34. *Kaimanovich V.A.* Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1: Math. 1997. V. 325. P. 999–1004.
35. *Kitchens B.P.* Symbolic dynamics. Berlin etc.: Springer, 1998.
36. *Kharlampovich O.G., Sapir M.V.* Algorithmic problems in varieties // Intern. J. Alg. and Comput. 1995. V. 5, N 4. P. 379–602.
37. *Levitt G.* Homéomorphisme dynamiquement simples de l'ensemble de Cantor // Enseign. math. 1998. V. 44, N 3–4. P. 279–289.
38. *Liardet P., Stambul P.* Algebraic computations with continued fractions // J. Number Theory. 1998. V. 73, N 1. P. 92–121.
39. *Lind D., Marcus B.* Symbolic dynamics and coding. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
40. *Lubotzky A., Mozes S., Zimmer R.J.* Superrigidity for the commensurability group of tree lattices // Comment. math. helv. 1994. V. 69. P. 523–548.
41. *Lubotzky A.* Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. Boston etc.: Birkhäuser, 1994. (Progr. Math.; V. 125).
42. *Macedońska O., Nekrashevych V., Sushchansky V.* Commensurators of groups and reversible automata // Dop. NAN Ukr. 2000. To appear.
43. *de Melo W., van Strien S.* One-dimensional dynamics. Berlin etc.: Springer, 1993. (Mod. Surv. Math.).
44. *Narkiewicz W.* Polynomial mappings. Berlin etc.: Springer, 1995. (Lect. Notes Math.; V. 1600).
45. *Nekrashevych V., Sidki S.* Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms // Proc. Conf. on Group Theory. Bielefeld, 1999. Cambridge: Cambridge Univ. Press. (LMS Lect. Note Ser.) To appear.

46. *Nekrashevych V.V., Sushchansky V.I.* Some problems on groups of finitely automatic permutations // Mat. stud. 2000. V. 13, N 1. P. 93–96.
47. *Nekrashevych V., Sushchansky V.* On confinal dynamics of rooted tree automorphisms // Computational and geometric aspects of modern algebra / Eds. M. Atkinson, N. Gilbert, H. Howie. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 229–246. (LMS Lect. Note Ser.; V. 275).
48. *Nekrashevych V.V., Sushchansky V.I.* Automata with restricted memory and endomorphisms of a shift // Dop. NAN Ukr. 2000. To appear.
49. *Olijnyk A.* Free products of C_2 as groups of finitely automatic permutations // Вопр. алгебры. 1999. Т. 14. С. 158–165.
50. *Ornstein D., Weiss B.* Ergodic theory of amenable group actions. I: The Rohlin lemma // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. V. 2. P. 161.
51. *Paulin F.* Analyse harmonique des relations d'équivalence mesurées discrètes // Markov Processes and Related Fields. 1999. V. 5. P. 163–200.
52. *Plotkin B.I., Greenglaz L.Ja., Gvaramija A.A.* Algebraic structures in automata and databases theory. Singapore; New Gercey; London; Hong Kong: World Sci., 1992.
53. *Pride S.J.* The concept of "largness" in group theory // Word problems II / Eds. S.I. Adian, W.W. Boone, G. Higman. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 299–335. (Stud. Logic and Found. Math.; V. 95).
54. *Rhodes J.* Monoids acting on trees // Intern. J. Alg. and Comput. 1991. V. 1. P. 253–279.
55. *Rhodes J.* Undecidability, automata, and pseudovarities of finite semigroups // Intern. J. Alg. and Comput. 1999. V. 9, N 4. P. 455–473.
56. *Röver C.E.* Constructing finitely presented simple groups that contain Grigorchuk groups // J. Algebra. 1999. V. 220. P. 284–313.
57. *Ribes L., Zalesskiĭ P.* Pro-p trees and applications // New horizons in pro-p groups / Eds. M. du Sautoy, D. Segal, A. Shalev. Boston etc.: Birkhäuser, 2000. P. 75–119. (Progr. Math.; V. 184).
58. *Sidki S.* Regular trees and their automorphisms. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. (Monogr. mat.; V. 56).
59. *Sidki S.* Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure and acyclicity // J. Math. Sci. 2000. V. 100, N 1. P. 1925–1943.
60. *Sushchansky V.I., Moćko E.* Cycles of distance decreasing mappings in certain local domains // Colloq. Math. To appear.
61. *Streich W.J., Rösner Th.* Theorie linearer Automaten: Studienbücherei. Berlin: VEB Dtsch. Verl. Wissensch., 1978.
62. *Thompson R.J.* Embeddings into finitely generated simple groups which preserve the word problem // Word problems II / Eds. S.I. Adian, W.W. Boone, G. Higman. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 401–441. (Stud. Logic and Found. Math.; V. 95).
63. *Алешин С.В.* Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, №3. С. 319–328.
64. *Алешин С.В.* Свободная группа конечных автоматов // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1983. №4. С. 12–16.
65. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Ред. М.А. Арбиб. М.: Статистика, 1975.
66. *Безущак О.О., Сущанский В.И.* Сопряженность в группах изометрий бэровских метрик // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, №9. С. 1148–1155.
67. *Гаврон П., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Классы сопряженности группы автоморфизмов дерева // Мат. заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 938–941.
68. *Глебский Ю.В.* Кодирование с помощью конечных автоматов // ДАН СССР. 1961. Т. 141, №5. С. 1054–1057.
69. *Глушков В.М.* Абстрактная теория автоматов // УМН. 1961. Т. 16, №5. С. 3–62.
70. *Голод Е.С.* О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, №2. С. 273–276.
71. *Григорчук Р.И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, №1. С. 53–54.
72. *Григорчук Р.И.* Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, №5. С. 939–985.
73. *Григорчук Р.И.* О периодических группах, порожденных конечными автоматами // 18-я Всесоюзная алгебраическая конференция. Кишинев, 1985: Тез. докл. и сообщ.

74. *Григорчук Р.И.* О полугруппах с сокращениями степенного роста // Мат. заметки 1988. Т. 43, №3. С. 305–319.

75. *Григорчук Р.И.* О ряде Гильберта–Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Мат. сб. 1989. Т. 180, №2. С. 207–225.

76. *Кудрявцев В.М., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

77. *Левенштейн В.И.* Об обращении конечных автоматов // ДАН СССР. 1962. Т. 147, №6. С. 1300–1303.

78. *Левенштейн В.И.* О некоторых свойствах кодирования и самонастраивающихся автоматах для декодирования сообщений // Проблемы кибернетики. 1964. Т. 11. С. 63–121.

79. *Леонов Ю.Г.* Нижняя оценка роста группы Григорчука: Препринт. Одесса, 1999.

80. *Мальцев А.И.* Нильпотентные полугруппы // Учен. зап. Иванов. пед. ин-та. 1953. Т. 4. С. 107–111.

81. *Мерзляков Ю.И.* О бесконечных конечно порожденных периодических группах // ДАН СССР. 1983. Т. 268, №4. С. 803–805.

82. *Олийнык А.* Свободные группы автоматных подстановок // Доп. НАН Укр. 1998. №7. С. 40–44.

83. *Олійник А.* Вільні абелеві групи скінченних автоматів // Вісн. Київ. унив. Фіз.-мат. науки. 1999. №1. С. 74–77.

84. *Олийнык А.С., Сущанский В.И.* Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Мат. заметки. 2000. Т. 67, №3. С. 386–391.

85. *Рожков А.В.* Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев: Докт. дис. Челябинск, 1996.

86. *Сущанский В.И.* Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. 1979. Т. 247, №3. С. 557–561.

87. *Сущанский В.И.* Сплетения и периодические факторизируемые группы // Мат. сб. 1989. Т. 108, №8. С. 1073–1091.

88. *Сущанский В.И.* Сплетения и факторизируемые группы // Алгебра и анализ. 1994. №1. С. 199–232.

89. *Сущанський В.І.* Групи автоматних підстановок // Доп. НАН Укр. 1998. №6. С. 47–51.

90. *Сущанський В.І.* Групи скінченно автоматних підстановок // Доп. НАН Укр. 1999. №2. С. 29–32.

91. *Шарковский А.* Сосуществование циклов непрерывных отображений прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16. С. 61–71.