УДК 512.54

D.I. Morozov, researcher working on habilitation.

Centralizers of spherical-transitive elements in the group of finite-state automorphisms of binary rooted tree

In this work the centralizer of spherical-transitive finite-state automorphisms investigated.

Key Words: rooted tree, automorphism group, state, centralizer.

Д.I. Морозов, докторант.

Централiзатори шарово-транзитивних елементiв в групi скiнченно-станових автоморфiзмiв бiнарного кореневого дерева

В роботi дослiджено централiзатори шарово-транзитивних скiнченно-станових автоморфiзмiв.

Ключовi слова: кореневе дерево, група автоморфiзмiв, стан, централiзатор.

E-mail: denis.morozov178@gmail.com
Статтю представив доктор фiз.-мат. наук Боднарчук Ю.В.

1 Вступ

У роботi будемо використовувати наступнi означення:

Означення 1.1. T_2 - бiнарне кореневе дерево,

$AutT_2$ - група автоморфiзмiв T_2,

$FAutT_2$ - група скiнченно-станових автоморфiзмiв T_2,

$x*a$ - дiя автоморфiзму a на кiнець x дерева T_2,

$a \circ b$ - суперпозицiю автоморфiзiв a та b дерева T_2,

Z_2 - кiльце цiлих 2-адичних чисел,

будемо казати, що автоморфiзм χ_0 є 0-розв'язком рiвняння $a^{\chi_0} = b$, якщо $0 * \chi_0 = 0$

Ототожнимо автоморфiзм a дерева T_2 з функцiєю $f_a : Z_2 \to Z_2$ наступним чином:

$$x * a = f_a(x)$$

.

В роботi [1] автором було доведено наступну теорему:

Теорема 1.1. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфiзм. Тодi*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослiдження централiзаторiв шарово-транзитивних елементiв в $FAutT_2$, оскiльки результату, аналогiчного теоремi 1.1 для $FAutT_2$ немає.

2 Централiзатори шарово-транзитивних елементiв в $FAutT_2$

Нехай ε - adding machine, тобто $x * \varepsilon = x + 1$. Тодi має мiсце наступна лема:

Лема 1. *Для $p \in Z_2$ має мiсце рiвнiсть:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

Доведення. *Оскiльки $t * \varepsilon^p = t + p$, то $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$.*

Теорема 2.1. *Нехай χ_x - 0-розв'язок рiвняння спряженостi $\varepsilon^t = x$ вiдносно автоморфiзма t. Тодi має мiсце рiвнiсть:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

Доведення. *Оскiльки $\varepsilon^{\chi_x} = x$, то має мiсце спiввiдношення:*

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

Отже за лемою 1 та рiвнiстю $0 * \chi_x = 0$ отримуємо:

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) =$$

$$= ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x) = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

щ.т.д.

Має мiсце наступна лема:

Лема 2. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

Доведення. *За теоремою* 1.1

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 2.1, *маємо:*

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t.

Оскільки χ_x - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

щ.т.д.

Означення 2.1. Означимо множину $F_p(p \in Z_2)$ наступним чином:

$p \in F_p$,

якщо $2t+1 \in F_p$, то $t \in F_p, t+1 \in F_p$,

якщо $2t \in F_p$, то $t \in F_p$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в F_p, якщо отримано з p за k кроків.

Означення 2.2. Означимо множину $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ наступним чином:

$m \in P_{m,n}$,

якщо $2t+1 \in P_{m,n}$, то $t-n \in P_{m,n}$, $t+n+1 \in P_{m,n}$,

якщо $2t \in P_{m,n}$, то $t \in P_{m,n}$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, якщо отримано з m за k кроків.

Лема 3. *Нехай 2-адичне квазіперіодичне число p дорівнює $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$. Тоді множини $P_{m,n}$ та F_p скінчені або нескінчені одночасно.*

Доведення. *Оскільки мають місце рівності:*

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2\frac{m}{2n+1}$$

то в F_p $\frac{2m+1}{2n+1}$ породжує $\frac{m-n}{2n+1}$ та $\frac{m+n+1}{2n+1}$, а $\frac{2m}{2n+1}$ породжує $\frac{m}{2n+1}$.

Отже, якщо t_k належить k-му рівню в F_p, то $t_k(2n+1)$ належить k-му рівню в $P_{m,n}$, і навпаки, якщо t'_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, то $\frac{t'_k}{2n+1}$ належить k-му рівню в F_p. Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

щ.т.д.

Лема 4. *Множина $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ є скінченною.*

Доведення. *Згідно з означенням, якщо $t \in P_{m,n}$, то або $\frac{t}{2}$ або $\frac{t-1}{2} - n$ та $\frac{t-1}{2} + n + 1$.Нехай t_k відноситься до k-го рівня в $P_{m,n}$, тоді має місце рівність:*

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a*(2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність k разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})$$

Оскільки $|a_i| \leqslant 1$, то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left|\frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{m}{2^k}\right| + |2n+1| \leqslant |m| + 2n + 1$$

Отже кількість елеметів в множині $P_{m,n}$ обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leqslant 2(|m| + 2n + 1)$$

тому множина $P_{m,n}$ є скінченною, щ.т.д.

Лема 5. *Множина F_p скінчена тоді, і тільки тоді, коли p - квазіперіодичне число.*

Доведення. $\Rightarrow$ *Для $2t+1$ та $2t$ число t отримується відкиданням останьої цифри у двійковому запису, отже F_p містить всі числа, що отримуються з p відкиданням декількох останніх цифр. Якщо p не квазіперіодичне, то маємо нескінчену кількість таких чисел, тому F_p не є скінченною.*

$\Leftarrow$ *p - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли $p = \frac{m}{2n+1}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$. Отже за лемами 3 та 4 множина F_p є скінченною.*

Теорема 2.2. *Нехай ε - adding machine. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Доведення. *Оскільки має місце рівність*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 1.1, *елементи централізатора* $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$ *мають вигляд* $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$. *Легко бачити, якщо* p *- не квазіперіодичне число, то* ε^p *- нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число* p. *Далі, нехай* $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$, *тобто квазіперіодичне. За лемою* 5 *множина* F_p *- скінчена. З іншої сторони, мають місце рівності:*

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$
$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму ε^p *вичерпуються автоморфізмами вигляду*

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки F_p *- скінчена, то* ε^p *- скінченно-становий автоморфізм, щ.т.д.*

Теорема 2.3. *Нехай* ε *- adding machine. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. *За теоремою* 2.2

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 1, *маємо:*

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

щ.т.д.

Теореми 2.2 та 2.3 можна застосувати для дослідження скінченно-становості спряженності з автоморфізмом ε - adding machine. Це показує наступна теорема:

Теорема 2.4. *Якщо 0-розв'язок* t_0 *рівняння спряженності відносно* t

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінченно-становим, то це рівняння не має скінченно-станових розв'язків.

Доведення. *Припустимо, що* t_0 *- нескінченно-становий, а рівняння* $\varepsilon^t = a$ *має скінченно-становий розв'язок* $t' : p \to 0$, *де* p *- квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді*

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та $p * \varepsilon^{-p} = 0$, *то за теоремою* 2.2 $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$. *Оскільки* t_0 *- нескінченно-становий, а* ε^{-p} *- скінченно-становий, то* t' *- нескінченно-становий. Отже маємо протиріччя.*

Теорема 2.5. *Нехай* a *- шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де χ_a *- 0-розв'язок рівняння спряженності* $\varepsilon^t = a$ *відносно* t.

Доведення. *Має місце наступна рівність:*

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 2.1 *отримаємо:*

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1} \circ \chi_a) = p$$

Отже $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ *може бути скінченно-становим тільки тоді, коли* $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$. *З іншої сторони за теоремою* 1.1 *усі елементи централізатора* $C_{AutT_2}(a)$ *мають вигляд* $a^{(p*\chi_a^{-1})}$, *оскільки* χ_a^{-1} *- автоморфізм* Z_2. *Приймаючи до уваги, що*

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

щ.т.д.

Теорема 2.6. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченно-становий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. *Згідно з теоремою* 2.5 *маємо включення:*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

References

1. *Морозов Д.І.* Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності р./ Д.І. Морозов// Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2007.– вип.№4 – С.52-54.

Надійшла до редколегії 13.10.2012