СПРЯЖЕН"СТЬ КУСКОВО-Л"Н"ЙНИХ СФЕРИЧНО-ТРАНЗИТИВНИХ АВТОМОРФ"ЗМ"В КОРЕНЕВОГО Б"НАРНОГО ДЕРЕВА.

к.ф.-м.н. Морозов Денис Иванович

Анотація. Дана стаття дає відповідь на питання скінченно-станової спряженості лінійних сферично-транзитивних автоморфізмів бінарного дерева.

1

Дослідження групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева за допомогою ізометрій кільця цілих p-адичних чисел надає зручну техніку для вирішення низки проблем, пов'язанних з цією групою. Розглянемо вирішення проблеми скінченно-станової спряженності для сферично-транзитивних автоморфізмів, що задаються кусочно-лінійними ізометріями кільця Z_2.

Далі під ізометріями розуміються ізометрії кільця цілих 2-адичних чисел.

Definition 1. Множину автоморфізмів кореневого бінарного дерева позначимо як $AutZ_2$.

Множину скінченно-станових автоморфізмів кореневого бінарного дерева позначимо як $FAutZ_2$.

Definition 2. Назвемо автоморфізм кореневого бінарного дерева сферично-транзитивним, якщо його дерево типу є ланцюгом.

Множину сферично-транзитивних автоморфізмів позначимо як $STAutZ_2$

Definition 3. Означимо функцію $\varphi : STAutZ_2 \to STAutZ_2$ наступним чином $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$, де x_1, x_2 визначаються співвідношенями $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ (запис $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ означає, що автоморфізм x діє на лівому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_1, на правому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_2 та міняє місцями вершини першого рівня.)

Функція визначена корректно, оскільки, якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ є сферично-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2, то і $x_1 \circ x_2$ є сферично-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2.

Definition 4. Означимо функцію $\pi_L : AutZ_2 \to AutZ_2$ наступним чином $\pi_L(x) = x_1$, де x_1 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$

Definition 5. Означимо функцію $\pi_R : AutZ_2 \to AutZ_2$ наступним чином $\pi_R(x) = x_2$, де x_2 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$

Definition 6. Назвемо 0-розв'язком рівняння спряженності $a^{\chi} = b$ автоморфізм χ_0 такий, що

$$0 * \chi_0 = 0, \quad a^{\chi_0} = b$$

Очевидно, що для сферично-транзитивного автоморфізма a має місце рівність $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$ і значення $\pi_L(a), \pi_R(a)$ та $\varphi(a)$ зв'язані наступним співвідношенням:

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a)$$

Крім того, для автоморфізмів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1},\ \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1}$$
$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1},\ \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1}$$
$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b),\ \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b)$$
$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a),\ \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a)$$

Theorem 1. *Нехай a, b - сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2, а χ_0 - 0-розв'язок рівняння спряжености $a^{\chi_0} = b$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b)$$

Доведення. Дійсно, оскільки $a^{\chi_0} = b$, то $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0)$$
$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0)$$

Скористаємось методом математичної індукції:

1) Для n=0 маємо рівність $a^{\chi_0} = b$ і твердження виконується. 2) Нехай для $n = k$ твердження теореми виконується, тобто $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$. Покажемо, що воно також має місце для $n = k + 1$.

Оскільки $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$, то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і

$$\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) =$$
$$= ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) =$$
$$= (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) =$$
$$= \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)}$$

тому має місце рівність $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$ і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми. □

Theorem 2. *Нехай a, b - сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2. Тоді χ_0 - 0-розв'язок рівняння спряжености $a^{\chi_0} = b$ є скінченностановим тоді, і тільки тоді, коли $\pi_L^n(\chi_0)$ є скінченностановим для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$.

0-розв'язок χ_0 має вигляд

$$\chi_0 = (\pi_L(\chi_0), \pi_R(\chi_0))$$

Очевидно, має місце рівність:

$$a^{\chi_0} = (\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0), \pi_R(\chi_0)^{-1} \circ a_2 \circ \pi_L(\chi_0)) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

Звідси маємо

$$(\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0) = b_1 \Rightarrow \pi_R(\chi_0) = a_1^{-1} \circ \pi_L(\chi_0) \circ b_1$$

Оскільки a_1, b_1 - скінченностанові, то з того, що $\pi_L(\chi_0)$ - скінченностанова ізометрія, випливає, що $\pi_R(\chi_0)$ - скінченностанова, а тому і χ_0 є скінченно-становою ізометрією.

Отже 0-розв'язок рівняння спряжености $a^{\chi_0} = b$ є скінченностановим тоді, і тільки тоді, коли $\pi_L(\chi_0)$ є скінченностановим. (1)

За теоремою 1 $\pi_L(\chi_0)$ є 0-розв'язком рівняння спряженності

$$(a_1 \circ a_2)^{\chi} = b_1 \circ b_2$$

Застосувавши твердження 1 n разів, отримаємо твердження теореми. □

Definition 7. Назвемо скінченно-станову ізометрію f 0-повною, якщо образ 0 при дії на нього централізатором цього елементу співпадає з множиною квазіперіодичних елементів кільця Z_2

$$0 * C_{FAutT_2}(f) = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

Theorem 3. *Нехай b - скінченно-станова 0-повна сферично-транзитивна ізометрія. Скінченно-станові ізометрії a та b спряженні в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли існує скінченностановий 0-розв'язок рівняння спряженності $a^{\chi} = b$.*

Доведення. □

Corollary 1. *Нехай a, b - сферично-транзитивні скінченно-станові 0-повні ізометрії кільця Z_2. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряжені в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

В статті [1] було доведено наступні твердження:

Lemma 1. $f(x) = p_1 x + p_2 \in FAutT_2 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$

Theorem 4. *Автоморфізми $f(x) = (4k+1)x + (2t+1)(k, t \in Z_2)$ є сферично-транзитивними.*

Theorem 5. *Ізометрії $f_1(x) = (4k_1+1)x + 1$ та $f_2(x) = (4k_2+1)x + 1$ $(k_1, k_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}})$ спряжені в $FAutT_2 \Leftrightarrow 4k_1 + 1 = 4k_2 + 1$.*

Скористаємося ними далі.

Lemma 2. *Скінченно-станова лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні рівності:

$$(((a-1)t+1)x+bt)\circ(ax+b) = a(((a-1)t+1)x+bt)+b =$$
$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

та

$$(ax+b)\circ(((a-1)t+1)x+bt) = ((a-1)t+1)(ax+b)+bt =$$
$$= a((a-1)t+1)x+b(a-1)t+b+bt =$$
$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

Отже автоморфізм $((a-1)t+1)x+bt$ комутує з автоморфізмом $ax+b(a,b,t\in Z_2)$.

Згідно з лемою 1, при $a,b,t\in Z_2\cap\mathbb{Q}$ автоморфізм $((a-1)t+1)x+bt$ є скінченно-становим, а отже належить централізатору $C_{FAutT_2}(ax+b)$.

За теоремою 4 якщо автоморфізм $ax+b$ є сферично-транзитивним, то $a=4a'+1, b=2b'+1, a',b'\in Z_2$. Оскільки b є обертовним елементом кільця Z_2 та

$$0*((4a't+1)x+(2b'+1)t) = (2b'+1)t$$

а $4a't+1$ є обертовним для довільного $t\in Z_2$ (умова автоморфності $(4a't+1)x+(2b'+1)t$), то

$$0*C_{FAutT_2}(ax+b) = Z_2\cap\mathbb{Q}$$

□

Lemma 3. *Скінченно-станова ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi^n(a)$ є 0-повною для деякого $n\in\mathbb{N}$.*

Доведення. Для ізометрії $a=(b,c)\circ\sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$0*a^{2t} = 2(0*\varphi(a)^t)$$
$$0*a^{2t+1} = 2(0*\varphi(a)^t b)+1$$

Отже, ізометрія a є 0-повною, тоді, і лише тоді, коли $\varphi(a)$ є 0-повною. Застосувавши отримане твердження n разів отримаємо аналогічне твердження для $\varphi^n(a)$. □

Theorem 6. *Скінченно-станова кусково-лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Для кусково-лінійної сферично-транзитивної ізометрії a існує $n\in\mathbb{N}$, такий, що ізометрія $\varphi^n(a)$ є лінійною. Отже за лемами 2 та 3 маємо твердження теореми. □

Theorem 7. *Два скінченно-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Доведення. За теоремою 5 автоморфізми $ax+b$ та $cx+d$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $a=c$. Отже, за наслідком 1 та теоремою 6 маємо твердження теореми. □

Розглянемо наступний приклад застосування теореми 7.

Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми

$$f(x) = (3x + 1, 3x) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (9x + 2, x + 7) \circ \sigma$$

за теоремою 7 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$$

Література

[1] *Морозов Д.І.* Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева . Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2008.– вип.№1 –С.40- 43.