Національний Університет "Києво-Могилянська Академія"

На правах рукопису

Морозов Денис Іванович

УДК 512.54

Скінченностанова спряженість ізометрій простору 2-адичних чисел

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико–математичних наук

Київ–2008

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}^+$	- напівгрупа натуральних чисел по додаванню ;
$\bar{\mathbb{N}}^+ = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$	- напівгрупа натуральних чисел з нулем;
Z_p	-кільце цілих р-адичних чисел;
Z_T	-кільце розширених по дереву T цілих 2-адичних чисел ;
$C_n^{(r)}$	-декартів добуток r копій циклічної групи C_n;
$G \ltimes H$	- напівпрямий добуток груп , де $H-$ нормальний дільник ;
$(G, X) \wr H$	-вінцевий добуток групи перетворень (G, X) (активний співмножник) та абстрактної групи H;
$< M, g, \dots >$	- підгрупа породжена множиною M та елементами $g, \dots$;
K^+, K^*	- адитивна та мультиплікативна групи поля ;
$\circ$	-суперпозиція автоморфізмів, функцій.
T_n	- кореневе однорідне дерево валентності n ;
$AutT_n$	- група автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності n ;
$FAutT_n$	- підгрупа скінченностанових автоморфізмів групи $AutT_n$;
$STAutT_n$	- Множина шарово-транзитивних автоморфізмів групи $AutT_n$;
$\zeta(a)$	- кількість різних станів автоморфізму а ;
$C_G(a)$	- централізатор елемента a в групі G;

Вступ

Наприкінці двадцятого сторіччя на стику алгебри, дискретної математики та топології виник новий напрямок досліджень, який можна охарактеризувати як динаміку алгебраїчних структур. Він акумулював в собі дослідження самоподібності таких структур, їх функцій росту, автоматні перетворення, дії на графах, зокрема на деревах, наявність інваріантних мір, ймовірносні розподіли та випадкові блукання на таких структурах. Серед засновників цього напрямку такі відомі математики як М. Громов, Ж.-П. Серр, Ж. Тітс, Р. Григорчук, С. Сідки, Н. Гупта, В. Сущанський.

Вивчення групових дій на нескінченних деревах займає тут чільне місце . Базовим є приклад бінарного однокореневого нескінченного дерева T_2, група автоморфізмів якого $AutT_2$ збігається з проективною границею ітерованих вінцевих добутків циклічних груп другого порядку. Ця група є топологічною, як про-2-група. Нескінченні шляхи, що виходять з кореневої вершини можна ототожнити з нескінченними двійковими послідовностями, як елементами метричного простору Бера над двоелементним алфавітом. При цьому вказана група буде також групою ізометрій цього простору. Кожній вершині цього дерева відповідає скінченна послідовність нулів та одиниць w- шлях від кореневої вершини до даної. Автоморфізм дерева σ переводить всі кінці з початком w переведе в кінці зі спільним початком w', тобто для довільної нескінченної двійкової послідовності кінець wx, буде перетворений автоморфізмом в кінець $w'y$, причому відображення $x \to y = y(x)$ є також автоморфізмом нескінченного бінарного дерева. Всі автоморфізми дерева отримані з σ у вказаний спосіб називаються **станами** автоморфізму σ. Особливо цікавими є скінченностанові автоморфізми, які утворюють групу, про будову якої відомо дуже мало.[**?**]

Дисертація присвячена дослідженню проблеми спряженості елементів в цій групі. Слід зауважити, що в усій групі автоморфізмів дерева ця проблема легко розв'язується за допомогою циклового дерева - аналога циклового типу підстановки. Як відмічають фахівці в загальній постановці проблема спряженості в групі скінченностанових автоморфізмів є дуже важкою.

Якщо ототожнити кінці дерева з цілими 2-адичними числами, то будь-який автоморфізм дерева визначає ізометрію кільця цілих 2-адичних чисел Z_2 з 2-адичною метрикою. При цьому структура кільця дозволяє розглядати лінійні перетворення $x \to ax+b, x, b \in Z_2, a \in Z_2^*$. Такі перетворення ми і називаємо лінійними ізометріями.

Встановлено, що вони є скінченностановими тоді і лише тоді, коли a, b є раціональними числами (лема 4.2.4).

Для розв'язання проблеми скінченностанової спряженості даних автоморфізмів α, β слід з'ясувати існування скінченностанових розв'язків θ рівняння $\theta^{-1}\alpha\theta = \beta$. Оскільки розв'язки відрізняються на елементи з централізатора α, то дослідження розпочинається з дослідження будови централізаторів автоморфізмів. Ці централізатори очевидно є замкненими підгрупами в топології проективної границі на групі $AutT_2$. Особливо прозорою вона стає для елементів максимального пропорядку, для яких вказана вище підстановка $w \to w'$ є повним циклом на кінцях всіх "зрізаних"дерев і дерево циклового типу є ланцюгом. Для таких елементів має місце

Теорема 3.3.3 *Нехай w- довільний елемент максимального про-порядку і $D(w) = \{w^k \mid k \in \mathbb{Z}\}-$ циклічна група породжена цим елементом, тоді $C_{\overline{W}_\infty}(w) = \overline{D(w)}$, де риска означає замикання у топології про-2-групи.*

Для інших елементів у яких дерево циклового типу не є ланцюгом, опис централізатору є складнішим. Природним чином вводиться структура кільця на деревах циклового типу розмічених нулями та одиницями. Такі дерева ми будемо називати розширеними 2-адичними числами. Тоді має місце

Теорема 3.4.4 $C_{AutT_2}(a) \cong H_a \leftthreetimes K_a$,

де H_a ізоморфна адитивній групі кільця розширених 2-адичних чисел по дереву циклового типу елемента а , а K_a ізоморфно групі автоморфізмів дерева циклового типу елемента а.

Використовуючи наведений опис централізаторів скінченностанових автоморфізмів максимального про-порядку T_2, які задаються лінійними ізометріями на Z_2 отримаємо наступні результати

Лема 4.2.4

Всі функції $f(x) = ax + p, (a, p \in (Z_2 \cap \mathbb{Q})^*)$ спряжені з функцією $f(x) = ax + 1$ в $FAutT_2$

Теорема 4.2.5 *Функції $f_1(x) = (4k_1 + 1)x + 1$ та $f_2(x) = (4k_2 + 1)x + 1$ $(k_1, k_2 \in Z_2 \cap\ \mathbb{Q})$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли $4k_1 + 1 = 4k_2 + 1$.*

тобто скінченностанові автоморфізми максимального про-порядку, що задаються лінійними функціями $ax + c,\ bx + d$ $(a, b, c, d \in Z_2)$ спряжені в $FAutT_2$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Приклад 0.0.1. *Функції $f(x) = x + 1$ та $f(x) = 5x + 1$ спряжені в групі автоморфізмів бінарного дерева, оскільки мають ізоморфні дерева циклового типу, але не спряжені в скінченностановій підгруппі цієї групи.*

Дійсно, єдиний розв"язок

$$\theta_0(x) = \frac{5^x - 1}{4}$$

рівняння

$$\theta^{-1} \circ (x + 1) \circ \theta = 5x + 1)$$

що залишає 0 на місці, переводить квазіперіодичне(раціональне) 2-адичне число $\frac{1}{3}$ в неперіодичне(іраціональне) 2-адичне число $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{4}$, а отже є нескінченно становим. Звідси випливає, що скінченностанових розв"язків немає взагалі. Припустимо, що є скінченностановий розв"язок θ_p, що переводить квазіперіодичне(раціональне) 2-адичне число p в 0. Функцію θ_p представимо, як добуток елементу централізатору $C_{FautT_2}(f(x) = x + 1)$ на θ_0:

$$\theta_p = (x - p) \circ \theta_0.$$

Оскільки p - раціональне, то $f(x) = x - p$- скінченностановий автоморфізм, отже θ_p- нескінченностановий.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані для подальших досліджень з проблеми скінченностанової спряженості.

Вони опубліковані в наступних статтях:

Скінченно-станова спряженість сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки // Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. - 2013, № 12, С. 5-12

Спряженість транзитивно-стабільних автоморфізмів в $FAutT_2$. Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. - 2012. Том 126. С. 7-9.

Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів бінарного кореневого дерева. Вісник Київського університету//Серія: фізико-математичні науки.-2012

Морозов Д.І. Ізометричність поліномів над кільцем цілих 2-адичних чисел //Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. - 2011. Том 113. С. 13-15.

Морозов Д.І. Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева //Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2008.- вип.№1 - С. 40-43.

Морозов Д.І. Скінченностанова спряженість лінійних функцій на кільці цілих 2-адичних чисел /Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І.// Доповіді НАН України . Фізико-математичні науки. - 2008. №9 -С. 7-11.

Отримані результати доповідались:

Семінар кафедри алгебри КНУ Шевченка.

Семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

II Всеукраїнський науковий семінар "Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини м.Полтава(тези, Обчислення функції росту диференційовних ізометрій бінарного кореневого дерева.)

9th Int. Algebraic Conf. in Ukraine: Abstr. Lviv, July 8-13, 2013.(Abstracts, P. 132, Recursive criterion of conjugation of finite-state binary tree's automorphisms.)

International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M.Chernikov, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine, August 20-26, 2012.(Abstr. P. 96, Conjugacy of piecewise-linear spherical-transitive automorphisms.)

PDMU-2012, XX International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES, Brno, Czech Republic, September 17-21, 2012. (Abstr. Functional representation of automorphisms of rooted spherical homogeneous tree.)

8th Int. Algebraic Conf. in Ukraine. Lugansk, July 5-12, 2011.(Abstr. P. 116 Differentiable finite-state izometries and izometric polynomials of the ring of integer 2-adic numbers.)

2nd Inter-University Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics. Kiev, April 28-29, 2011.(Hausdorff s dimension of limit s set of compressive mappings semigroup.)

Ukrainian Mathematical Congress, 7th Int. Algebraic Conf. in Ukraine: Abstr. Kiev, August 18-23, 2009. (Abstr. P. 97. Finite state conjugation of linear functions on the ring of n-adic integer numbers.)

7th Int. Algebraic Conf. in Ukraine: Abstr. Kharkiv, August 13-17, 2009. (Abstr. P. 110. Morozov Denis, Linear function which are conjugated in the group FAutT2 of finite state automatous.)

1 Попередні відомості

1.1 Ізометрії простору Бера як автомофізми дерев.

Нагадаємо, що однокореневим деревом називаєься зв'язний граф без циклів з відміченою вершиною. Зауважимо, що автоморфізм кореневого дерева переводить відмічену вершину в себе.

Нехай X скінченний алфавіт. Простором Бера над алфавітом називається множина нескінчених послідовностей $x_1x_2x_3..., x_i \in X$ з наступною метрикою:

$$(x_1x_2x_3..., y_1y_2y_3...) = (\frac{1}{2})^k,$$

де k - довжина спільного початку $x_1x_2x_3...$ та $y_1y_2y_3...$.

Приклад 1.1.1. *Розглянемо множину формальних сум вигляду:*

$$Z_p = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot p^k \,| a_k \in, 0 \le a_k < p\}$$

Відстань між елементами

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot p^k$$

та

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot p^k$$

цієї множини покладемо

$$\rho(a, b) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

де k визначаєтьса, як

$$k = \min_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (a_t \neq b_t)$$

Таким чином визначена метрика перетворює Z_p на простір Бера над p-літерним алфавітом.

Співставимо простору Бера над p-літерним алфавітом регулярне однокореневе дерево T_p за наступним правилом: кожній вершині відповідає скінчене слово в алфавіті X. Назвемо вершинами 1-го рівня вершини, що з'єднані з коренем одним ребром. Вершинами і-го рівня назвемо вершини, що з'єднані одним ребром з вершинами (і-1)-го рівня.

Вершині і-го рівня відповідає слово довжини і.

Легко зрозуміти , що група ізометрій такого простору ізоморфна групі автоморфізмів побудованого дерева.

Охарактерізуємо її як абстрактну групу.

Нехай $W_1 = S_X$ - група підстановок на X, тоді можна індуктивно визначити групи $W_{n+1} = (W_n, X^n) \wr S_X$, як вінцевий добуток групи підстановок W_n, що діє на $X^n = X \times ... \times X$(активний співмножник) та групи підстановок на X. База вінцевого добутку складається з функцій $X^n \to X$ від n змінних і є ядром природного епіморфізму $\pi_n : W_{n+1} \to W_n$. Ці гомоморфізми визначають $\overline{W}_\infty(X)$ як проективну границю $\overline{W}_\infty(X) = \varprojlim W_n$, а також гомоморфізми $\hat{\pi}_n : \overline{W} \to W_n$. При цьому група $\overline{W}_\infty$ діє природним чином на просторі Бера. Має місце наступна теорема:

Теорема 1.1.1. *[4],[5] Група ізометрій простору Бера ізоморфна $\overline{W}_\infty(X)$.*

Елементи групи $\overline{W}_\infty$ можна зображати нескінченними послідовностями функцій:

$$g = < \sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \ldots, \sigma_k(x_1, x_2, ..., x_{k-1}), \ldots >, \tag{1.1.1}$$

де $x_1, x_2, ..., x_{k-1}-$ координати вершини $k-1-$ го рівня, а значенням функції σ_k є одиниця, якщо відповідний автоморфізм дерева переставляє дві суміжні вершини $k-$ го рівня (див. вище п. в)) і є нуль якщо автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Аналогом циклового типу на групі підстановок є дерево циклового типу на $\overline{W}_\infty(X)$.

Означення 1.1.1. *Елемент a групи $\overline{W}_\infty$ задає розбиття множини вершин кожного рівня дерева T_p на множину орбіт дії цього елементу на T_p. Побудуємо по a дерево циклового типу D_a цього елементу. Вершинами цього дерева будуть класи еквівалентності по орбітах, причому дві вершини дерева D_a з'єднані ребром, якщо існують суміжні вершини дерева T_p з відповідних орбіт.*

Аналогом крітерія спряженості в групі підстановок є наступний крітерій в групі $\overline{W}_\infty(X)$.

Теорема 1.1.2. *[5]*

Елементи групи $\overline{W}_\infty(X)$ є спряженими, якщо їх дерева циклового типу ізоморфні.

$\overline{W}_\infty(X)$ є проскінченною групою і топологічною групою з топологією проективної границі.

Теорема 1.1.3. $\overline{W}_\infty$- *є повною топологічною групою.*

Доведення. Покажемо, що відображення

$$\overline{W}_\infty \times \overline{W}_\infty \to \overline{W}_\infty \quad (g_1, g_2) \to g_1 \cdot g_2^{-1}$$

є неперервним в цій топології. Нехай $q_0 = g_1 \cdot g_2^{-1}$ і $B_m(q_0) = \{g|\rho(g, q_0) < 2^{-(m+1)}\}$– відкрита куля з центром в q_0. Легко бачити, що $\forall g_1, g_2 \in B_m(q_0)$ має місце $\hat{\pi}_m(g_1), \quad \hat{\pi}_m(g_2)$. Розглянемо довільні елементи куль $b_1 \in B_m(g_1), b_2 \in B_m(g_2)$. Для цих елементів буде мати місце $\hat{\pi}_m(b_1) = \hat{\pi}_m(g_1), \quad \hat{\pi}_m(b_2) = \hat{\pi}_m(g_2)$, звідки

$$\hat{\pi}_m(b_1 \cdot b_2^{-1}) = \hat{\pi}_m(b_1) \cdot \hat{\pi}_m(b_2)^{-1} = \hat{\pi}_m(g_1) \cdot \hat{\pi}_m(g_2)^{-1} = \hat{\pi}_m(g_1 \cdot g_2^{-1}),$$

отже, $b_1 \cdot b_2^{-1} \in B_m(q_0)$. Це доводить, що $\overline{W}_\infty$ є топологічною групою. Для доведення повноти, слід зауважити, що $\overline{W}_\infty$ є компактом у вищезгаданій топології, оскільки є замкненим у добутку дискретних просторів $\hat{\pi}_m(\overline{W}_\infty), m \in \mathbb{N}$. □

Група $\overline{W}_\infty(X)$ є самоподібною, в тому сенсі, шо мають місце факторізації $\overline{W}_\infty(X) = W_k \wr \overline{W}_\infty(X), k = 1, 2, 3....$

Означення 1.1.2. *Елемент групи називаеться скінченностановим, якщо для всіх факторізацій елемента g*

$$g = w_k \cdot f_k(x_1...x_k)$$

множина значень функцій, яку будемо називати множиною станів

$$\{f_k(x_1...x_k) \mid x_1...x_k \in \overline{W}_\infty(X), k \in \mathbb{N}\} \subset \overline{W}_\infty(X)$$

є скінченною.

Приклад 1.1.2. *Очевидно, тотожній автоморфізм є одностановим.*

Приклад 1.1.3. *Зафіксуємо нескінченну послідовність $x_1^* x_2^*...$ і автоморфізм $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$. Автоморфізм, для якого для всіх k $f_k(x_1^* x_2^* ... x_k^*) = \sigma$ та дорівнює id на інших векторах є двостановим.*

Означення 1.1.3. *Позначимо кількість **різних** станів автоморфізма a як $\zeta(a)$. Функцією зросту автоморфізму a називаеться функція φ_a, визначена наступним чином:*

$$\varphi_a(n) = \zeta(a^n)$$

Приклад 1.1.4. *Для тотожнього автоморфізму, оскільки* $id^n = id$ *та* $id = (id, id)$, *то* $\zeta(id^n) = \zeta(id)$. *Тобто функція зросту для* id *має вигляд* $\varphi_{id}(n) = 1$.

Означимо на множині функцій $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бінарне відношення $\preccurlyeq$.

Означення 1.1.4. *[?] Для функцій* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *та* $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *будемо казати, що*

$$\alpha \preccurlyeq \beta$$

якщо знайдеться таке натуральне C, *що для всіх натуральних* n *справджується нерівність:*

$$\alpha(n) \leqslant \beta(Cn).$$

Означення 1.1.5. *Кажуть, що автоморфізми* a *та* b *мають однаковий зріст, якщо для функцій зросту* φ_a *та* φ_b *має місце:*

$$\varphi_a \preccurlyeq \varphi_b$$

$$\varphi_b \preccurlyeq \varphi_a$$

Лема 1.1.1. *Якщо існує скінчене ненульове* C, *таке, що для автоморфізмів* a *та* b *при всіх натуральних* n *має місце нерівність:*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\varphi_a(n)}{\varphi_b(n)} \leq C$$

то автоморфізми a *та* b *мають однаковий зріст.*

З означення суперпозиції автоморфізмів випливає:

Лема 1.1.2. *Для функції* ζ *має місце нерівність:*

$$\zeta(a \circ b) \leqslant \zeta(a) * \zeta(b)$$

Теорема 1.1.4. *Якщо для автоморфізмів* a *та* b *існує скінченностановий автоморфізм* c *такий, що виконується рівність:*

$$c^{-1} \circ a \circ c = b$$

то a *та* b *мають однаковий зріст.*

Доведення. Оскільки з того, що

$$c^{-1} \circ a \circ c = b$$

випливає рівність

$$c^{-1} \circ a^n \circ c = b^n$$

то згідно з лемою

$$\zeta(b^n) = \zeta(c^{-1} \circ a^n \circ c) \leqslant \zeta(c^{-1}) * \zeta(a^n) * \zeta(c) = \zeta(a^n) * \zeta(c)^2$$

$$\zeta(a^n) = \zeta(c \circ b^n \circ c^{-1}) \leqslant \zeta(c) * \zeta(b^n) * \zeta(c^{-1}) = \zeta(b^n) * \zeta(c)^2$$

тобто

$$\frac{1}{\zeta(c)^2} \leq \frac{\varphi_a(n)}{\varphi_b(n)} \leq \zeta(c)^2$$

□

Приклад 1.1.5. *Автоморфізми $f(x) = x+1$ та $f(x) = x+3$ мають однаковий зріст, оскільки спряжені за допомогою скінченностанового автоморфізму $f(x) = 3x$:*

$$3x^{-1} \circ (x+1) \circ 3x = \frac{1}{3}x \circ (x+1) \circ 3x = (\frac{1}{3}x + 1) \circ 3x = x + 3$$

Для роботи з автоморфізмами з $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$ зручно використовувати алгебраїчний запис.

В алгебраїчному запису автоморфізм з $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$ над двоелементним алфавітом буде виглядати, як (a, b) або як $(a, b) \circ \sigma$.

Автоморфізм вигляду (a, b) діє на праве для кореня піддерево автоморфізмом a, на ліве - автоморфізмом b, залишаючи суміжні з коренем вершини на місці. Автоморфізм вигляду $(a, b) \circ \sigma$ діє на праве для кореня піддерево автоморфізмом a, на ліве - автоморфізмом b,та переставляє суміжні з коренем вершини.

Множення автоморфізмів відбувається наступним чином:

$$(a, b) \circ (c, d) = (a \circ c, b \circ d)$$

$$(a, b) \circ ((c, d) \circ \sigma) = (a \circ c, b \circ d) \circ \sigma$$

$$((a, b) \circ \sigma) \circ (c, d) = (a \circ d, b \circ c) \circ \sigma$$

$$((a, b) \circ \sigma) \circ ((c, d) \circ \sigma) = (a \circ d, b \circ c)$$

Також зручно записувати обернений до автоморфізму дерева:

$$(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$$

$$((a,b)\circ\sigma)^{-1} = \sigma\circ(a^{-1}, b^{-1}) = (b^{-1}, a^{-1})\circ\sigma$$

Крім цього за допомогою алгебраїчного запису скінченною кількістю співвідношень визначаються скінченостанові автоморфізми. Наприклад *adding machine* задається наступним співвідношенням:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon)\circ\sigma$$

$$id = (id, id)$$

Квадрат *adding machine* має 3 стани ε , ε^2 та id:

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\varepsilon = (id, \varepsilon)\circ\sigma$$

$$id = (id, id)$$

За допомогою цієї техніки опишемо ε^k:

$$\varepsilon^{-1} = (\varepsilon^{-1}, id)\circ\sigma$$

$$\varepsilon^3 = \varepsilon^2\circ\varepsilon = (\varepsilon,\varepsilon)\circ(id,\varepsilon)\circ\sigma = (\varepsilon, \varepsilon^2)\circ\sigma$$

$$\varepsilon^{2k} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)$$

$$\varepsilon^{2k+1} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)\circ\varepsilon = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)\circ(id,\varepsilon)\circ\sigma = (\varepsilon^k, \varepsilon^{k+1})\circ\sigma$$

Побудуємо алгебраЇчний запис для автоморфізма, що задається функцією $f(x) = ax + b$. Функція $f(x) = ax$ переводить кінець $...t0$ в кінець $...(t*a)0$, оскільки

$$...t0*a = ...t*2*a = ...t*a*2 = ...(t*a)0.$$

Кінець $...t1$ функція $f(x) = ax$ переводить в кінець $...(t*a+(a-1)/2)1$, оскільки

$$...t1*a = (...t0+1)*a = ...t*2*a+a =$$

$$= ...t*a*2+\frac{a-1}{2}*2+1 = ...(t*a+\frac{a-1}{2})1$$

тобто для автоморфізма $f(x) = ax$ маємо:

$$ax = (ax, ax+\frac{a-1}{2}).$$

Далі

$$ax + b = ax \circ (x + b),$$

а ,оскільки функція $f(x) = x + b$ відповідає автоморфізму ε^b, то для $b = 2k$ маємо:

$$ax + b = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2}) =$$

$$= (ax + \frac{b}{2}, ax + \frac{a-1}{2} + \frac{b}{2}).$$

Для $b = 2k + 1$:

$$ax + b = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + \frac{b-1}{2}, x + \frac{b-1}{2} + 1) \circ \sigma =$$

$$= (ax + \frac{b-1}{2}, ax + \frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} + 1) \circ \sigma.$$

Приклад 1.1.6. *Автоморфізм, що задається функцією $f(x) = 5x + 1$ є скінченностановим, і визначається наступними співвідношеннями:*

$$(5x + 1) = (5x, 5x + 3) \circ \sigma$$

$$(5x) = (5x, 5x + 2)$$

$$(5x + 3) = (5x + 1, 5x + 4) \circ \sigma$$

$$(5x + 2) = (5x + 1, 5x + 3)$$

$$(5x + 4) = (5x + 2, 5x + 4)$$

тобто містить 5 станів.

Означимо підгрупу $FAutT_p$ групи $AutT_p$.

Розглянемо піддерево кореневого однорідного дерева T_p з коренем в деякій вершині, що ізоморфно T_p . Автоморфізм $a \in AutT_p$ природнім чином задає автоморфізми на всіх таких піддеревах.

Якщо маємо скінченну кількість отриманних таким чином автоморфізмів, то назвемо а скінченностановим. Множина всіх скінченностанових автоморфізмів утворює групу $FAutT_p$.

Кінцем назвемо нескінчену послідовність вершин, яка починається з кореня, кожна вершина з'єднана ребром з наступною вершиною послідовності і жодна вершина не входить в послідовність більше одного разу. Легко бачити, що метричний простір на кінцях T_p з метрикою $\rho(x,y)=\frac{1}{2}^n$, де x, y - кінці T_p , n - довжина спільного початку ізоморфне простору Бера. Цей ізоморфізм породжує ізоморфізм групи ізометрій простору Бера на $AutT_p$. З іншого боку $AutT_p$ ізоморфна вінцевому добутку груп $S_p \wr S_p \wr S_p \wr ...$. Дійсно, $AutT_p$ переставляє вершини першого рівня. Групою цих підстановок є S_p. Для другого рівня $AutT_p$ переставляє вершини, які виходять зі спільної вершини першого рівня і т.д.

Для автоморфізму $\in AutT_p$ циклами n-того рівня назвемо орбіти дії a на n-тий рівень T_p .

Шарово-однорідними автоморфізмами в $FAutT_p$ назвемо автоморфізми, для яких циклом n-того рівня є в точності n-тий рівень. Множину таких елементів позначимо як M. M не є підгрупою в $FAutT_p$.

Для автоморфізму $a \in M$, x, y - кінці з T_p , x_n, y_n - вершини n-го рівня, такі, що $x_n \in x, y_n \in y$.

Означимо $\rho_{a,n}(x,y)=k$, де k - найменше натуральне число, для якого

$$x_n * a^k = y_n.$$

Так як для $a \in M$ цикл n-го рівня складається з p^n вершин, то

$$0 \le \rho_{a,n}(x,y) < p^n.$$

Нехай x_{n1} та x_{n2} вершини (n+1)-го рівня з'єднані ребром з вершиною x_n n-го рівня, y_{n1} та y_{n2} вершини (n+1)-го рівня з'єднані ребром з вершиною y_n n-го рівня.

Означення 1.1.6. *Означимо* $\rho_a(x,y)$ *як нескінчену послідовність* $(\rho_{a,1}(x,y), \rho_{a,2}(x,y)...)$.

Для цілого p-адичного числа

$$z = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^k + ... + a_k \cdot 2^k + ...$$

послідовністю часткових сум назвемо послідовність:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 2^k$$

Лема 1.1.3. *Для всіх* $a \in M$ *послідовність* $\rho_a(x,y)$ *є послідовністю часткових сум деякого цілого p-адичного числа.*

Доведення. Дійсно $\rho_{a,n}(x,y) = p^n$, так як цикл n-го рівня складається з p^n вершин. Так як $(x_n) * a^{p^n} = x_n$, то $(x_n 1) * a^{p^n}$ дорівнює або x_{n1} або x_{n2}. Але $\rho_{a,n+1}(x_{n1}, x_{n1}) = p^{n+1}$, звідси $(x_n 1) * a^{p^n} = x_{n2}$, тобто $\rho_{,n+1}(x_{n1}, x_{n2}) = p^n$. З цього випливає, що $\rho_{a,n+1}(x_{ni}, y_{nj}) = \rho_{a,n}(x_n, y_n) mod(p^n)$. □

Для того, щоб визначити автоморфізм $a \in AutT_p$,достатньо для кожного $x \in T_p$ вказати такий $y \in T_p$, що $\rho_a(x,y) = 1$. Означимо автоморфізм a^k, де k деякий елемент кільця цілих p-адичних чисел, як $b \in AutT_p$, для якого $\rho_b(x,y) = 1$, якщо $\rho_a(x,y) = k$.

Якщо s, q - p-адични числа, $a \in AutT_p$, то

$$a^s \circ a^q = a^{s+q}$$

$$(a^s)^q = a^{sq}$$

Звуження дії піднесення у степінь a^k до кільця цілих чисел відповідає звичайному означенню степеня. Наприклад,

$$a^{(1,3,3...,3...)} = a^3$$

$$a^{(1,3,7,15,...,2-1...)} = a^{-1}$$

для $a \in AutT_2$.

1.2 Ізометрії простору цілих p-адичних чисел.

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на Z_2. Кожен автоморфізм дерева α задає функцію f_α за правилом: якщо автоморфізм α переводить кінець x в кінець y, то $f_\alpha(x) = y$. Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією $f(x) = x + 1$.

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм необхідно, що б ця функція пару кінців з однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

Приклад 1.2.1. *Функція $f(x) = 2x$ переводить пару ...1111 та ...0000 в пару ...1110 та ...0000 відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція $f(x) = 2x$ не є автоморфізмом дерева.*

Приклад 1.2.2. *Функція $f(x) = x^2$ не є автоморфізмом дерева.*

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$(2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 =$$

$$= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) =$$

$$= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1)$$

то для пари 2-адичних чисел x_1, x_2, що мають спільний початок ненульової довжини n, пара x_1^2, x_2^2 має спільний початок довжини як найменше довжини n+1 отже відображення $f(x) = x^2$ є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Мають місце наступні твердження:

Теорема 1.2.1. *Функції вигляду $f(x) = \frac{a^x - 1}{a-1}, a = 4k + 1, k \in Z_2$ є автоморфізмами дерева.*

Доведення. Функція $f(x) = \frac{a^x - 1}{a-1}, a = 4k + 1, k \in Z_2$ є єдиним розв'язком рівняння

$$\chi^{-1} \circ (x + 1) \circ \chi = ax + 1$$

для якого

$$\chi : ...000 \to ...000$$

. □

Теорема 1.2.2. *Лінійні функції вигляду $f(x) = ax + b, a = 2k + 1, a, b, k \in Z_2$ є автоморфізмами дерева.*

Доведення. Те, що 2-адичні послідовності x та y мають спільний початок довжини k, рівносильно тому, що послідовність $x - y$ має наступний вигляд: ...t10...00, де на початку послідовності маємо k нулів. Але для послідовностей $ax + b$ та $ay + b$ різниця має вигляд $a(x - y)$, а оскільки a - непарне 2-адичне число, то $a(x - y) = ...t'10...00$, де на початку послідовності маємо k нулів , тобто послідовності $ax + b$ та $ay + b$ також мають спільний початок довжини k. □

Добутку автоморфізмів дерева відповідає суперпозиція відповідних функцій. І для автоморфізмів, і для функцій оберемо ліву дію.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \circ \varepsilon = (x+1) \circ (x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$$

$$(3x+1) \circ (x+2) = (3x+1) + 2 = 3x + 3$$

$$(x+2) \circ (3x+1) = 3(x+2) + 1 = 3x + 7$$

Лема 1.2.1. *Для функції* $f(x) = ax+b, a = 2k+1, a, b, k \in Z_2$ *маємо* $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x-b)$.

Доведення.

$$(ax+b) \circ (\frac{1}{a}(x-b)) = \frac{1}{a}((ax+b) - b) = x$$

□

Як відомо, операція суперпозиції функцій, взагалі кажучи, не є комутативною. Але для деяких, спеціальним способом відібраних функцій комутативність має місце.

Лема 1.2.2. *Множина функцій* $f(x) = x + p$ $(p \in Z_2)$ *є абелевою групою.*

Доведення.

$$(x+p)^{-1} = x - p$$

$$(x+p_1) \circ (x+p_2) = (x+p_2) \circ (x+p_1) = x + p_1 + p_2$$

□

Теорема 1.2.3. *Множина лінійних ізометрій кільця* Z_2 *є станово-замкненою самоподібною групою.*

Доведення. Дійсно, множина станів лінійної функції складається з лінійних функцій:

$$ax = (ax, ax + \frac{a-1}{2}),$$

$$x + 2k = (x+k, x+k),$$

$$x + 2k + 1 = (x+k, x+k+1) \circ \sigma,$$

$$ax + 2k = ax \circ (x+2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x+k, x+k) =$$

$$= (ax+k, ax + \frac{a-1}{2} + k),$$

$$ax + 2k + 1 = ax \circ (x+2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x+k, x+k+1) \circ \sigma =$$

$$= (ax+k, ax + \frac{a-1}{2} + k + 1) \circ \sigma,$$

□

добуток лінійних функцій є лінійною функцією:

$$(ax+b)\circ(cx+d)=c(ax+b)+d=cax+(cb+d),$$

та обернена до лінійної функції є лінійною функцією:

$$(ax+b)^{-1}=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}.$$

Нейтральним елементом групи є лінійна функція:

$$f(x)=x.$$

2 Представлення автоморфізмів регулярного дерева

2.1 Портрети автоморфізмів

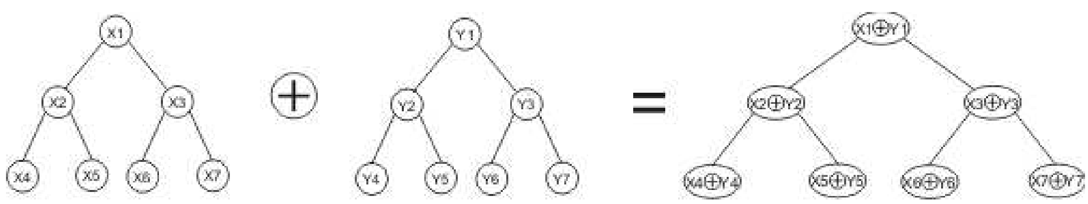
Автоморфізми зручно задавати портретами. Портретом автоморфізма дерева T_2 є дерево T_2, вершини якого розмічені 0-ми та 1-ми.

Автоморфізм задається розміченним деревом в такий спосіб. Якщо автоморфізм переставляє вершини наступного рівня, що суміжні з даною вершиною, то відмітимо цю вершину 1-цею, якщо ні, то 0-лем. Таке представлення автоморфізма назвемо портретом цього автоморфізма.

При такому представленні автоморфізму a кожному кінцю x відповідає послідовність цифр x_a розмічених вершин цього кінця, причому кінець x під дією автоморфізма a переходить в кінець $x\oplus x_a$ (під операцією $\oplus$ розуміється покоординатне додавання по модулю 2).

Для опису множення на представленні автоморфізмів дерева портретами знадобляться дві конструкції: додавання портретів за модулем 2 та дія на портрет автоморфізмом дерева.

Множина портретів з операцією додавання за модулем 2 відповідних вершин утворює абелеву групу. Нейтральним елементом цієї групи буде портрет з 0 на всіх вершинах, обернений до елементу групи співпадає з самим елементом.



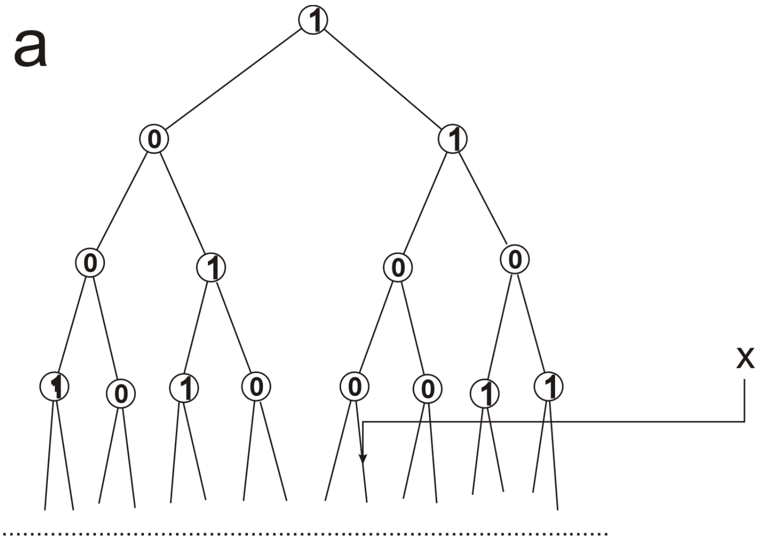
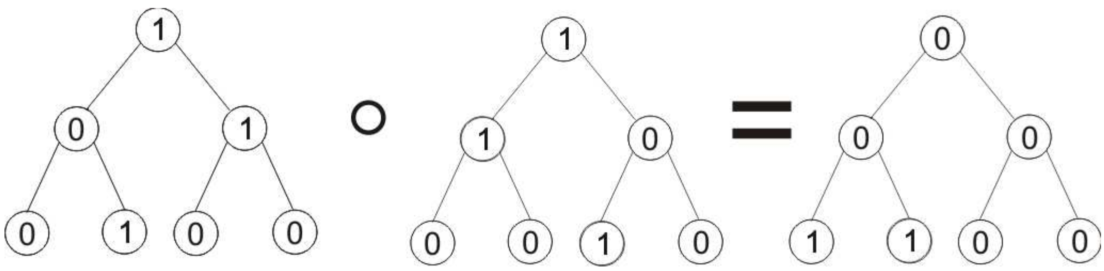


Рис. 1:

Портрет добутку автоморфізмів $a \circ b$ будується наступним чином. Дієм на портрет b автоморфізмом, оберненим до a. Отриманий таким чином новий портрет додаємо по модулю 2 до портрету автоморфізму a.



При множенні портретів розмітка кінців дерева змінюється наступним чином:

$$x_{a \circ b} = x_a \oplus (x \oplus x_a)_b$$

Для оберненого до a автоморфізма a^{-1} маємо:

$$(x \oplus x_a)_{a^{-1}} = x_a$$

Наприклад, нехай автоморфізм a задається наступним портретом на дереві T_2, на якому виділимо кінець x:

Згідно з малюнком

$$x = ...1001$$

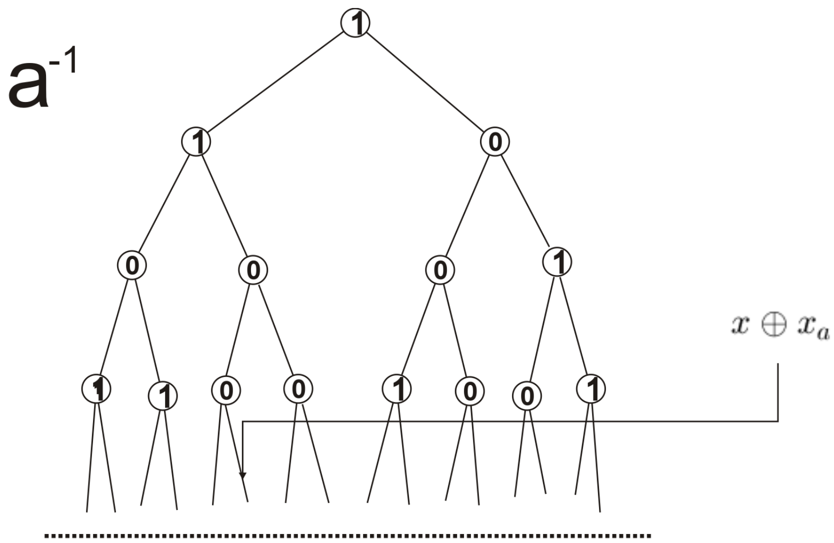
$$x_a = ...0011$$

тобто

$$x \oplus x_a = ...1001 \oplus ...0011 = ...1010$$

і для автоморфізму a^{-1} маємо:

$$(x \oplus x_a)_{a^{-1}} = ...1010_{a^{-1}} = x_a = ...0011.$$



Означимо дію $[a]b$ для автоморфізмів a та b з $AutT_2$.

Означення 2.1.1. *Подіємо на розмічене дерево, що задає портрет автоморфізму a автоморфізмом b. Отриманий портрет означимо, як $[a]b$.*

Для автоморфізмів $a, b, c, d...$ з $AutT_2$ мають місце наступні співвідношення:

$$a \circ b = a \oplus [b]a^{-1}$$

$$[a](b \circ c) = [[a]b]c$$

$$[a \oplus b \oplus c \oplus ...]d = [a]d \oplus [b]d \oplus [c]d \oplus ...$$

Наприклад, має місце рівність:

$$a^{-1} = [a]a.$$

Дійсно:

$$a^{-1} \circ a = a^{-1} \oplus [a](a^{-1})^{-1} = a^{-1} \oplus [a]a.$$

З іншого боку

$$a^{-1} \circ a = id$$

тобто

$$a^{-1} \oplus [a]a = id$$

$$a^{-1} \oplus [a]a \oplus a^{-1} = id \oplus a^{-1}$$

$$[a]a = a^{-1}.$$

Аналогічно:

$$a_n = \oplus \sum_{k=0}^{n-1} [a]a^{-k}$$

Дійсно:

$$a^n = a \oplus [a^{n-1}]a^{-1} = a \oplus [a \oplus [a^{n-2}]a^{-1}]a^{-1} =$$

$$= a \oplus [a]a^{-1} \oplus [[a^{n-2}]a^{-1}]a^{-1} = a \oplus [a]a^{-1} \oplus [a^{n-2}]a^{-2} =$$

$$= a \oplus [a]a^{-1} \oplus ... \oplus [a]a^{-k+1} \oplus [a^{n-k}]a^{-k} = a \oplus [a]a^{-1} \oplus ... \oplus [a]a^{-n+2} \oplus [a]a^{-n+1}.$$

Опишемо групу скінченностанових автоматних підстановок на мові портретів.

Означення 2.1.2. *Якщо стан автоморфізму діє на піддереві дерева T_2, то портрет цього стану є аналогічним піддеревом портрету цього автоморфізму.*

Згідно з цім означенням автоморфізм є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли множина різних портретів двійкових піддерев дерева T_2 є скінченною.

2.2 Автоматні перетворення

Опишемо автомати над алфавітом X. Автомат складається з алфавіту X, множини станів S, функції переходів $\lambda : S \times X \to S$ та функції виходів $\gamma : S \times X \to X$. Якщо в стан $s \in S$ попадає елемент $x \in X$, то автомат переходить в стан $\lambda(s, x)$ та повертає елемент $\gamma(s, x)$.

Природнім чином автомат діє на множині послідовностей, що складаються з елементів алфавіту X.

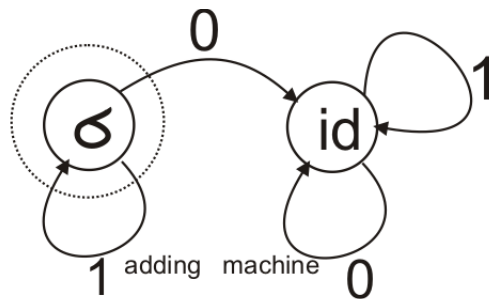
Приклад 2.2.1. *Означимо автомат з двома станами над алфавітом* $\{0, 1\}$.

Автомат, що задає автоморфізм дерева зручно записувати у вигляді орієнтованого розміченого графа, якій складається з вершин двох типів σ та id, та множини орієнтованих ребер двох типів, помічених 0 та 1, причому з кожної вершини виходить рівно по одному ребру кожного типу.

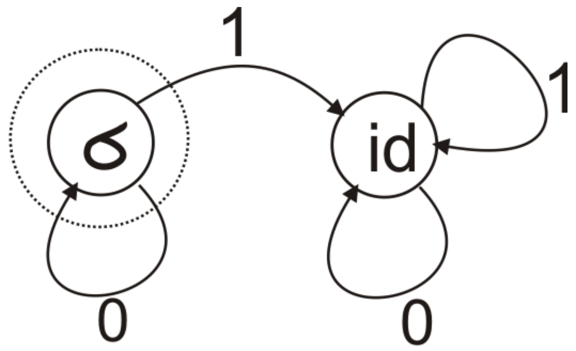
Вершини в представленні автомата графом називаються станами автомату. Одна вершина відмічена, як ініціальний стан.

На малюнках наведені автомати:

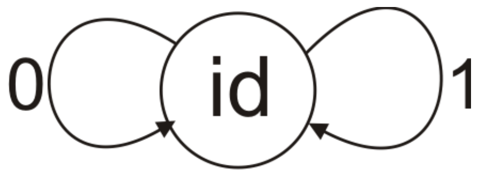
для автоморфізму дерева ε(*adding machine*)



для автоморфізму ε^{-1}

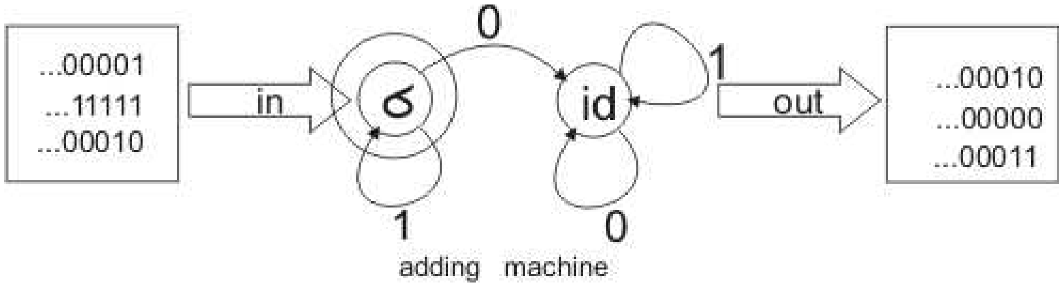


та тотожнього автоморфізму id



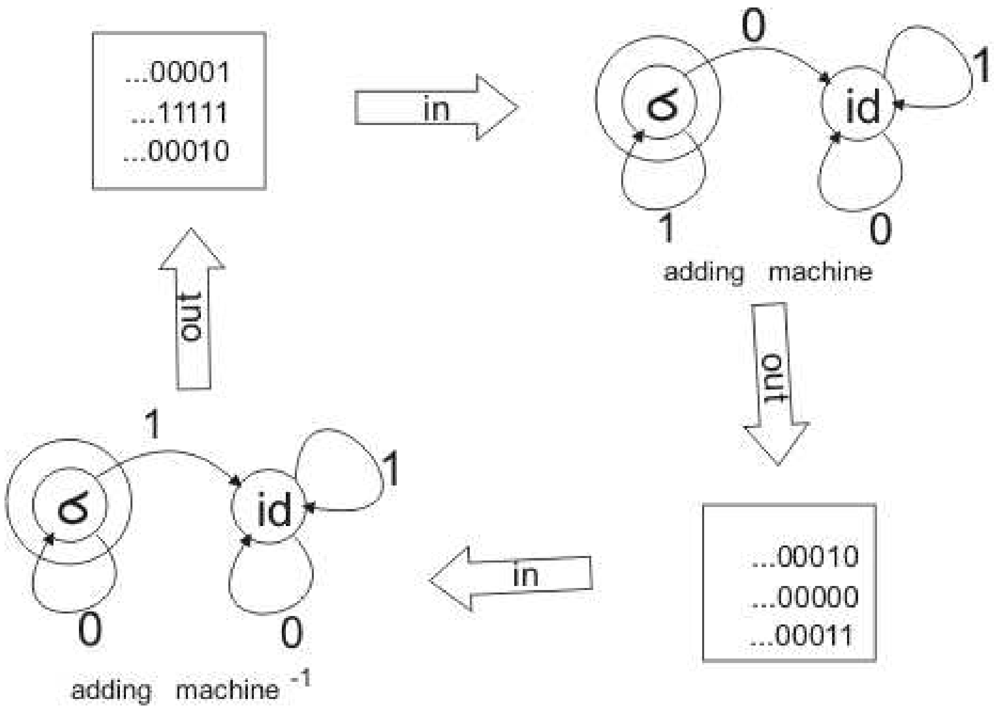
Автомат діє на кінцях двійкого дерева у такий спосіб.

Помістимо першу цифру двійкового розкладу кінця в ініціальний стан автомату. Якщо цей стан має тип id, то автомат повертає цифру, не змінюючи її, якщо стан має тип σ, то автомат повертає протилежну цифру(0 та 1- протилежні).



Добутком $a \circ b$ автоматів a та b називається послідовна дія ціх автоматів. Спочатку діємо на послідовність автоматом a, потім автоматом b.

Приклад 2.2.2. *Добутком автоматів ε та ε^{-1} є тотожний автомат id:*

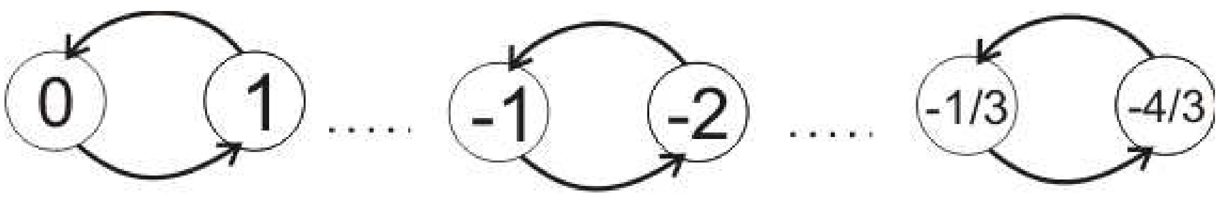


2.3 Орієнтовані графи

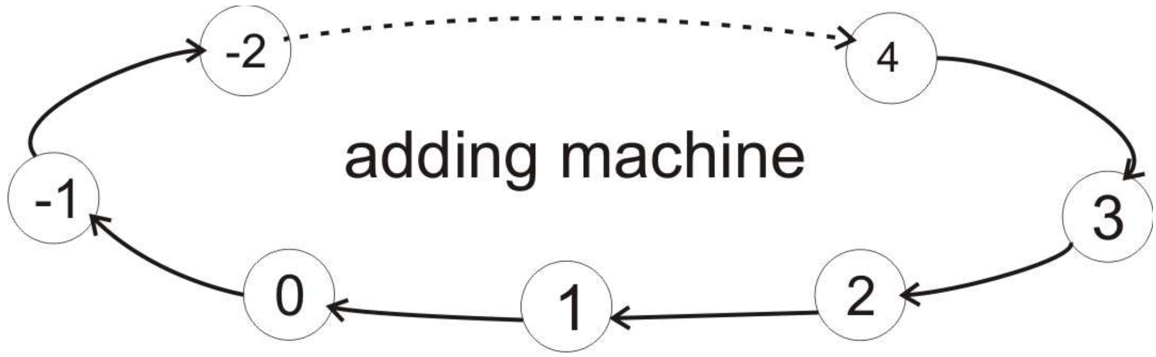
Розглянемо орієнтований граф, вершинами якого є елементи Z_2, побудований по автоморфізму а двійкового дерева T_2.

Граф будується за наступним правилом: числа x та y з Z_2 з'єднані стрілкою, якщо автоморфізм а відповідний кінець x дерева T_2 переводить в кінець y.

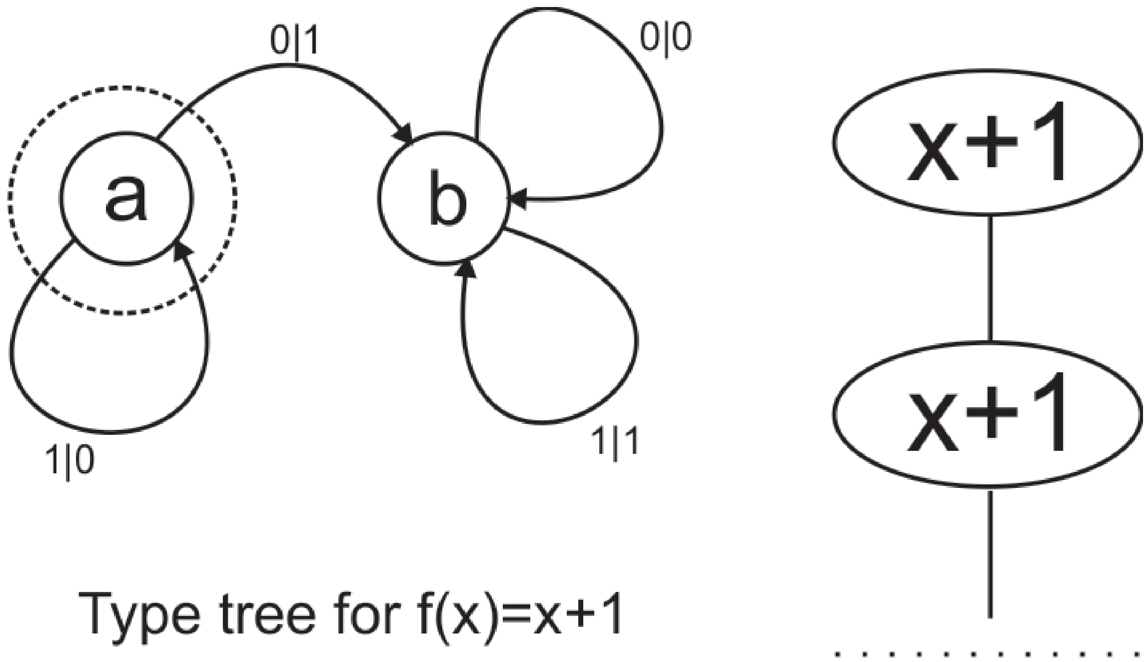
Для автоморфізма σ,що переставляє вершини 1-го рівня, а на піддеревах, що виходять з цих вершин, діє тотожньо, орієнтовний граф виглядає наступним чином:



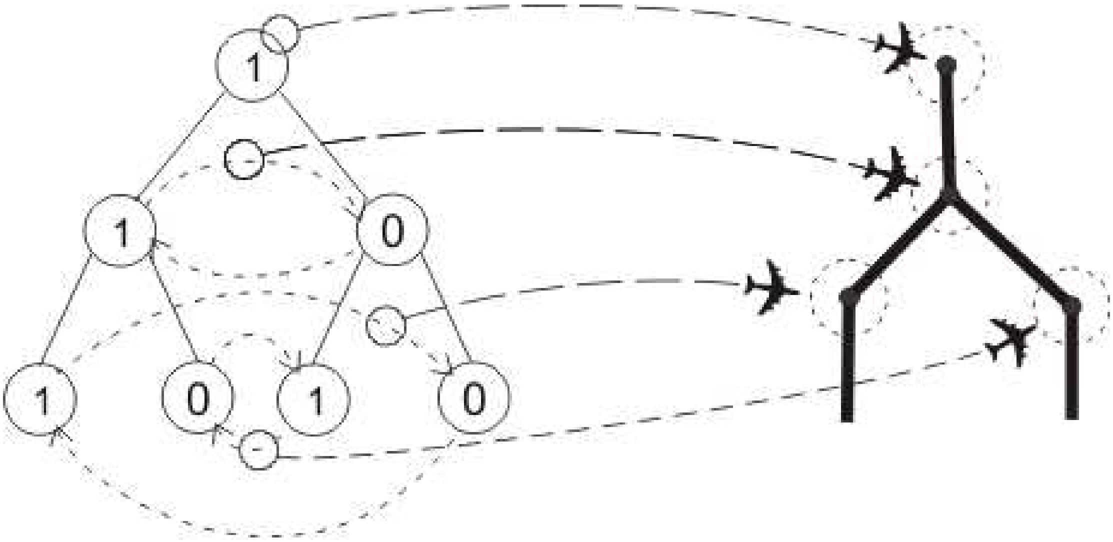
Для *adding machine* маємо орієнтований граф вигляду:



Для тотожнього автоморфізму *id* маємо орієнтований граф вигляду:

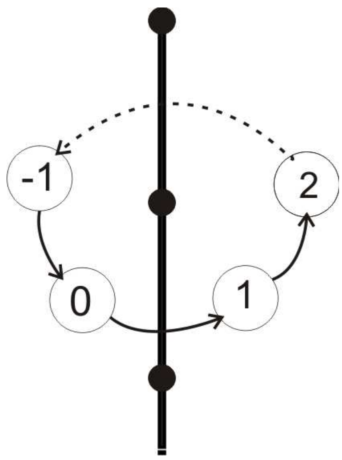


Орієнтований граф автоморфізму природнім чином породжує орієнтовані графи на вершинах, що належать одному рівню. По орієнтованому графу автоморфізма дерева легко побудувати дерево цикельного типу автоморфізму, яке означається наступним чином: вершинами n-го рівня цього дерева є цикли відповідного орієнтованого графа. Пара вершин дерева типу автоморфізма з'єднана ребром, якщо існує пара суміжних вершин з відповідних ціклів.



Тип автоморфізму відповідає цикловому типу елемента в групі підстановок S_n. Побудуємо дерева типу для деяких автоморфізмів.

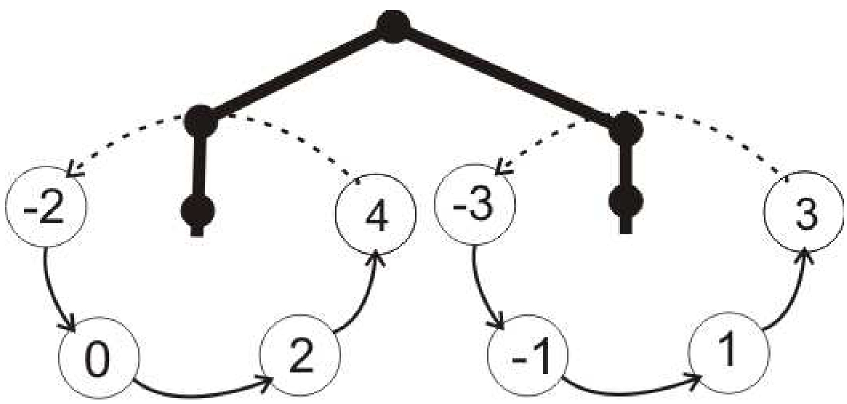
Для *adding machine* ε. Оскільки на кожному рівні маємо тільки один цикл, то дерево типу є ланцюгом:



Для квадрату *adding machine* ε^2 маємо два цикли, оскільки

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon, \varepsilon)$$

тобто дерево типу для ε^2 містить два ланцюги:



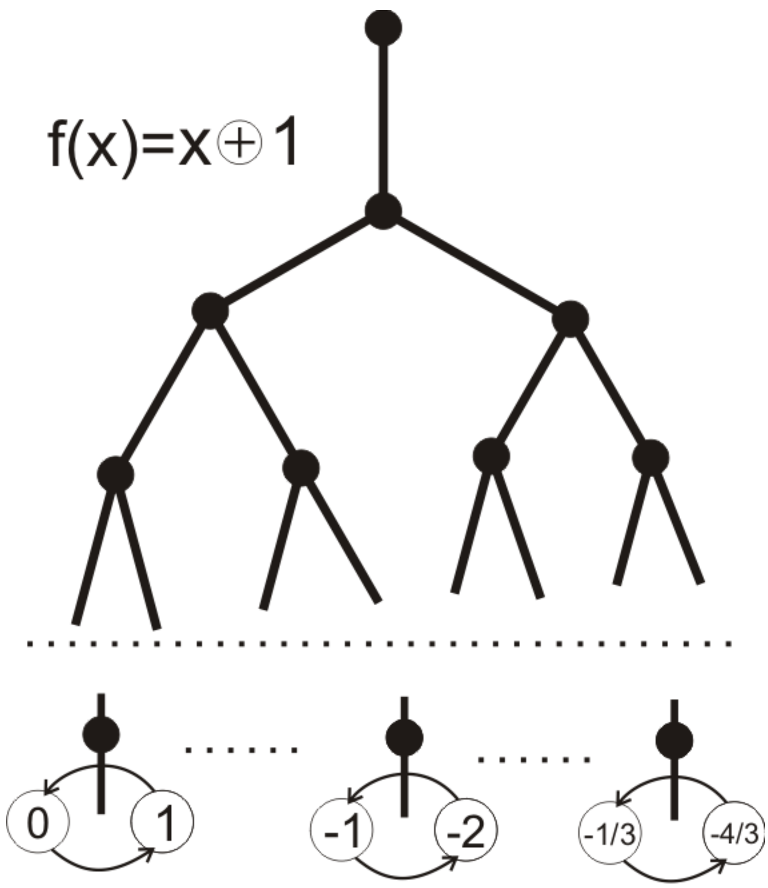
Для $f(x) = x \oplus 1$ всі цикли мають довжину 2.

Дійсно, послідовність вигляду $...x_3x_2x_10$ переходить в послідовність вигляду $...x_3x_2x_11$, і навпаки, послідовність вигляду $...x_3x_2x_11$ переходить в послідовність вигляду $...x_3x_2x_10$:

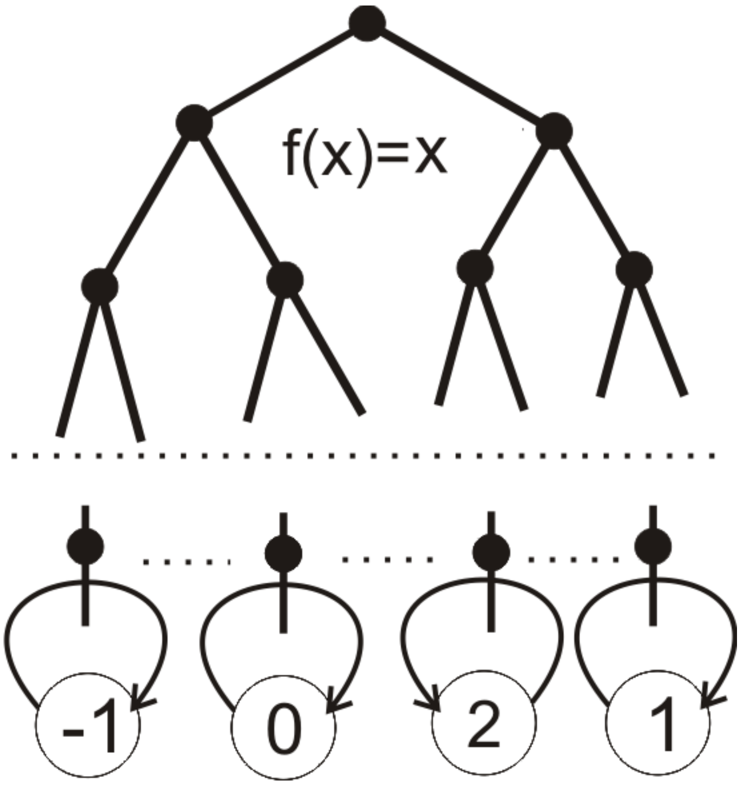
$$...x_3x_2x_10 \oplus 1 = ...x_3x_2x_11$$

$$...x_3x_2x_11 \oplus 1 = ...x_3x_2x_10.$$

Дерево типу для автоморфізму $f(x) = x \oplus 1$ має вигляд:



Для тотожнього автоморфізму id,очевидно, всі цикли мають довжину 1, отже дерево типу співпадає з T_2:


f(x)=x
-1
0
2
1

2.4 Матричне представлення

В деяких класах задач буває зручно представляти автоморфізми скінченого двійкового n-рівневого дерева матрицями розміру $2^n \times 2^n$. Матриця A, що відповідає автоморфізму a будується наступним чином: для автоморфізму $a = (b, c)$ матриця A виглядає, як

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

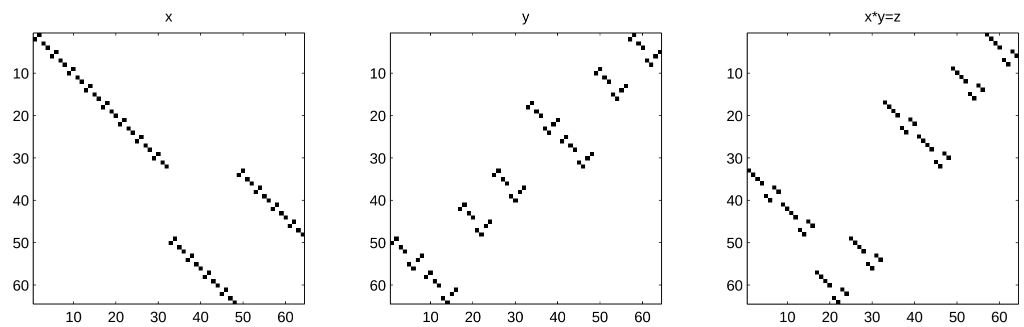
для автоморфізму $a = (b, c) \circ \sigma$ матриця A виглядає, як

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

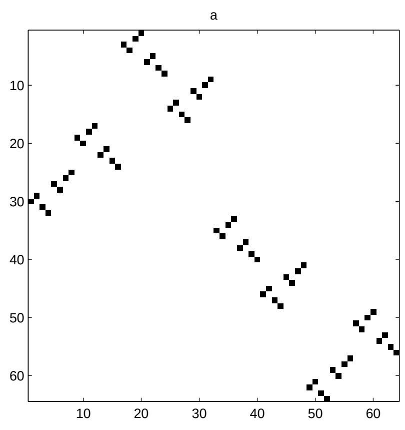
де 0- нульова матриця того ж розміру, що матриці B та C. Ненульова матриця автоморфізма дерева 0-го рівня(ізольована вершина) записується, як 1-ця.

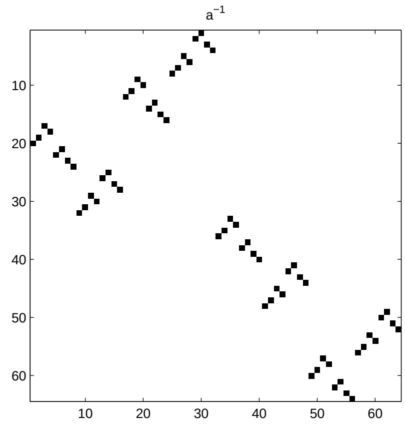
За допомогою зворотньої операції по матриці автоморфізма дерева будується портрет цього автоморфізма.

При такому представленні добутку автоморфізмів відповідає добуток матриць:



оберненому автоморфізму відповідає обернена матриця:

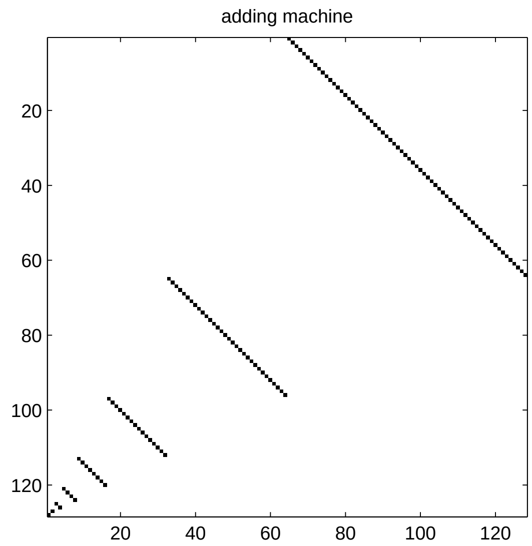




де під крапками розуміються 1-ці.

Причому для матриці автоморфізма дерева обернена до неї матриця співпадає з транспонованою.

Наприклад епіморфний образ adding machine $\varepsilon_{(7)}$ на дерево з 7-ма рівнями у матричному представленні задається наступною матрицею:

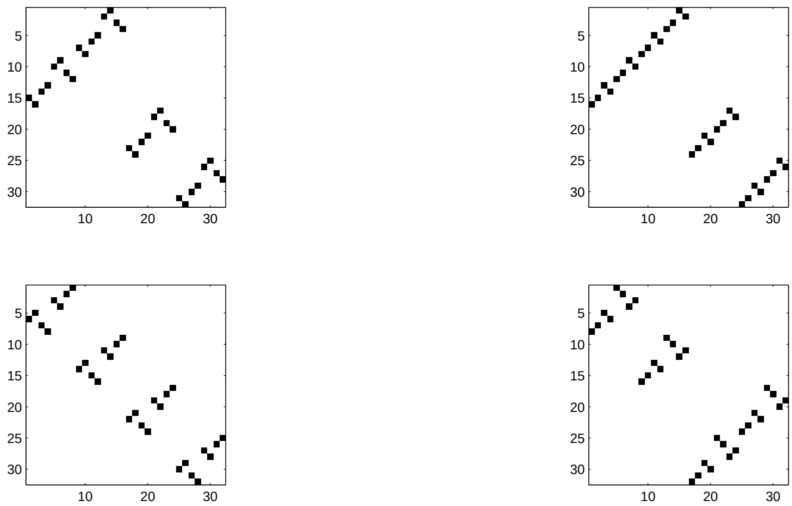


Дійсно, оскільки епіморфний образ adding machine на дерево з 7-ма рівнями задається співвідношенням $\varepsilon_{(7)} = (id_{(6)}), \varepsilon_{(6)}) \circ \sigma$ (де $\varepsilon_{(7)}$- епіморфний образ adding machine на дерево з 7-ма рівнями, $\varepsilon_{(6)}$- епіморфний образ adding machine на дерево з 6-ма рівнями та $id_{(6)}$- епіморфний образ тотожнього автоморфізму на дерево з 6-ма рівнями), то матриця для $\varepsilon_{(7)}$ має вигляд:

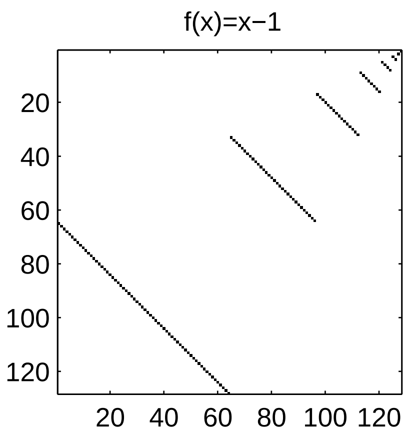
$$\varepsilon_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & id_{(6)} \\ \varepsilon_{(6)} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогічно для $\varepsilon_{(6)}$, $\varepsilon_{(5)}$ і т.д.

Приклад чотирьох автоморфізмів дерева $(T_2)_5$:

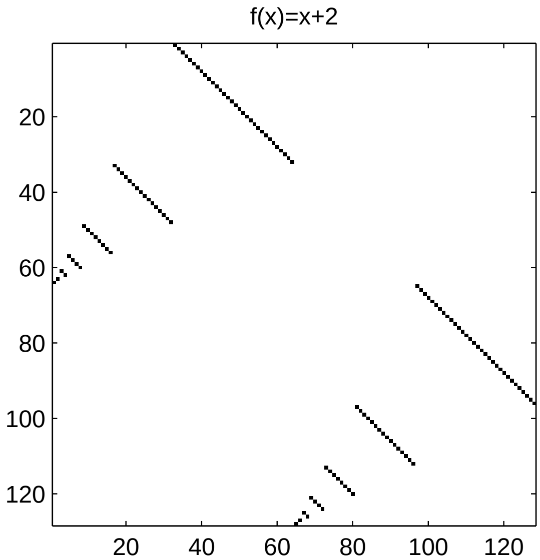


Обчислення матриці автоморфізма $f(x) = x - 1$, як оберненого до автоморфізму $f(x) = x + 1$:

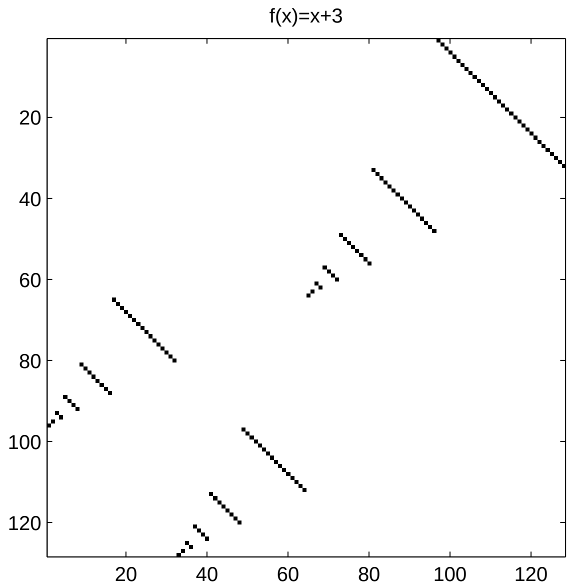


Обчислення матриці автоморфізма $f(x) = x + k$, як k-го степеня автоморфізма $f(x) = x + 1$:

$k = 2$

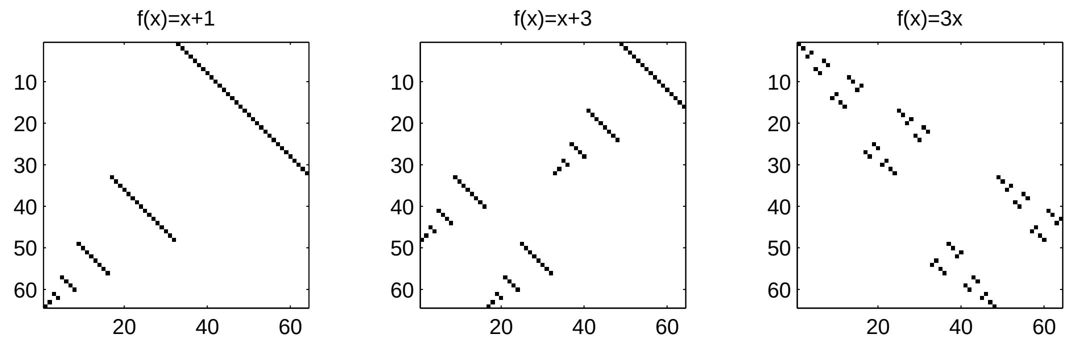


$k = 3$



Обчислення матриці автоморфізму $f(x) = ax$, як розв'язку рівняння $X^{-1}AX = B$, де A - матриця автоморфізму $f(x) = x + 1$, B - матриця автоморфізму $f(x) = x + a$:

$a = 3$



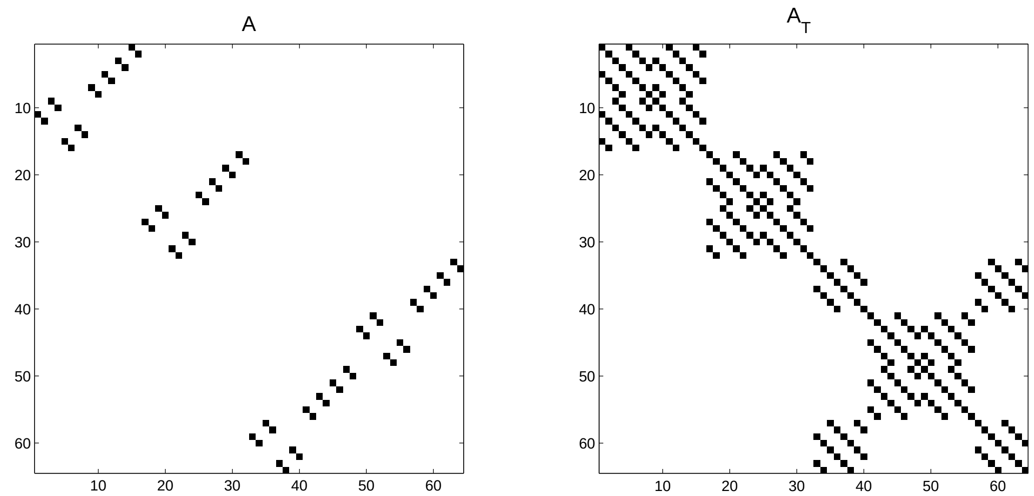
Для автоморфізма дерева n-го рівня, що задається матрицею A, будується матриця типу $A_T = sign(\sum_{k=1}^{2^n} A^k)$, за допомогою якої можна побудувати дерево типу для автоморфізму A, де

$$(sign(A))_{ij} = sign(A_{ij})$$

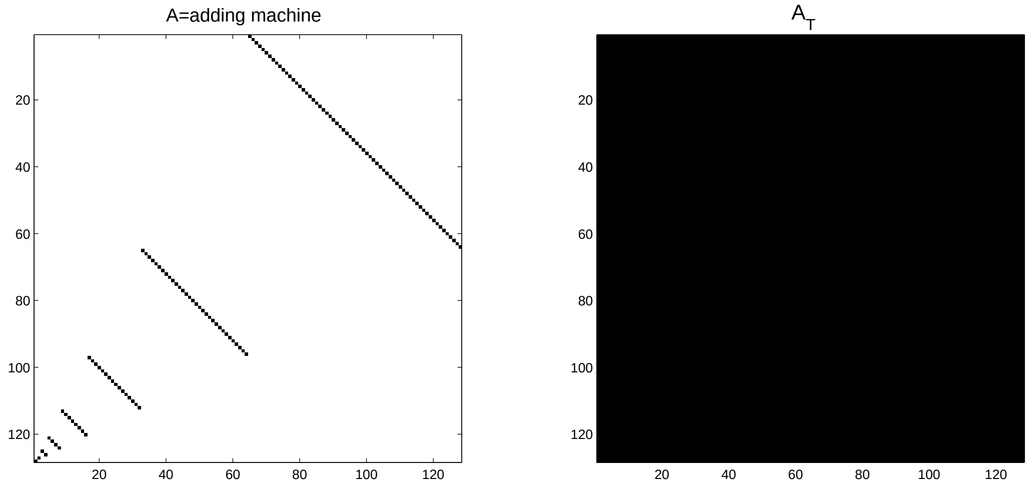
$$sign(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

Обчислимо матриці типу для деяких автоморфізмів.

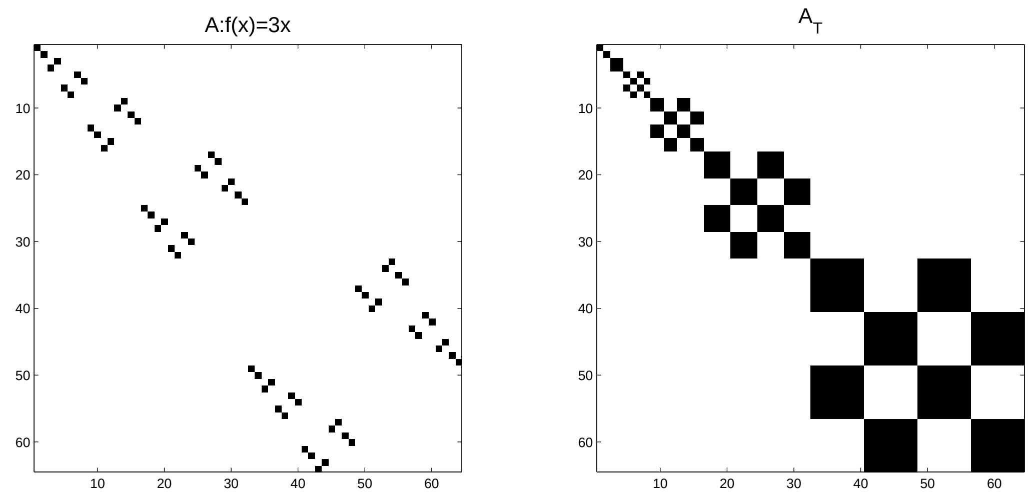
Для випадкового автоморфізму A дерева $(T_2)_6$:



Для adding machine:



Для $f(x) = 3x$:



Покажемо, як по матриці типу автоморфізму будується дерево типу автоморфізму.

Очевидно, що якщо

$$(A_T)_{kj} = (A_T)_{lj} = 1$$

або

$$(A_T)_{jk} = (A_T)_{jl} = 1$$

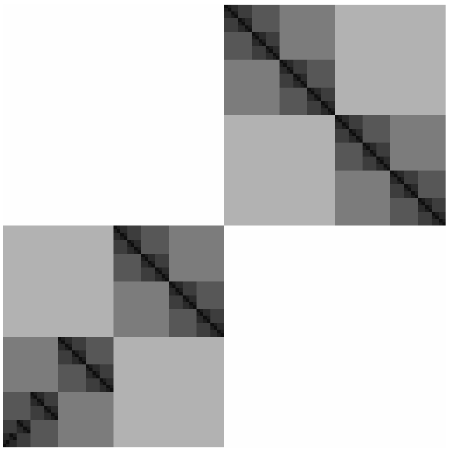
для автоморфізму A з $Aut(T_2)_n$, то кінці k та l належать до однієї орбіти дії A на дереві $(T_2)_n$.

Далі, для автоморфізма $(A)_n$ дерева $(T_2)_n$, по матриці $(A_T)_n$ побудуємо матрицю $(A_T)_{n-1}$ для автоморфізма $(A)_{n-1}$ дерева $(T_2)_{n-1}$(нагадаємо, що $(A)_n$ - це епіморфний образ автоморфізма A дерева T_2 на групу автоморфізмів дерева $(T_2)_n$).

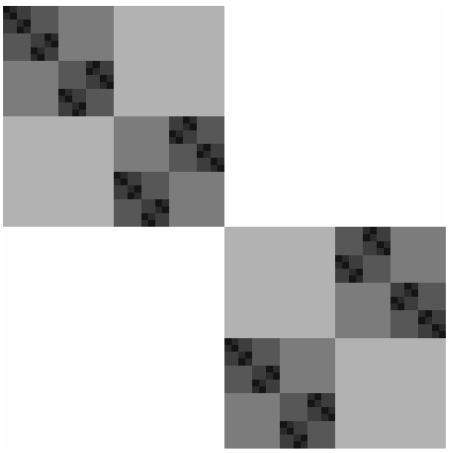
Означимо функцію $lup(A)$ що діє з множини матриць розміру $2^n \times 2^n$ на множину матриць розміру $2^{n-1} \times 2^{n-1}$:

$$(lup(A))_{ij} = \begin{cases} 0, \begin{pmatrix} A_{ij} & A_{ij+1} \\ A_{i+1j} & A_{i+1j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 1, \begin{pmatrix} A_{ij} & A_{ij+1} \\ A_{i+1j} & A_{i+1j+1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Приклад послідовної дії функції lup на автоморфізмі adding machine:



Послідовна дія функції lup на автоморфізмі $f(x) = 3x$:



Лема 2.4.1. *Мають місце рівності*

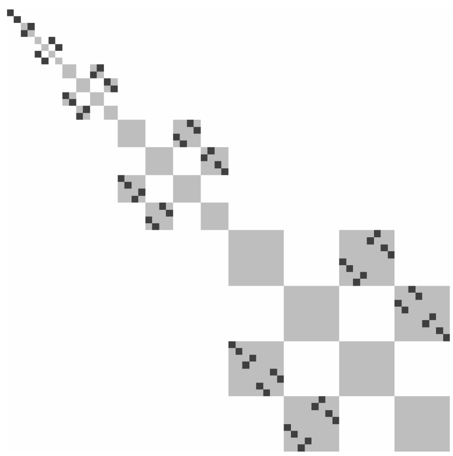
$$(A)_{n-1} = lup((A)_n)$$

$$(A_T)_{n-1} = lup((A_T)_n)$$

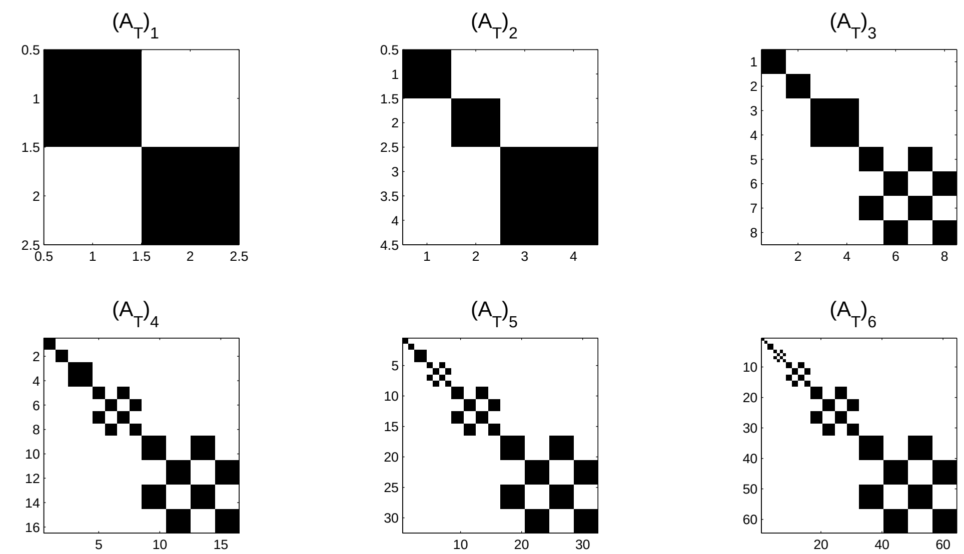
$$lup((A_T)_n) = (lup((A)_n))_T$$

Доведення. Дійсно, якщо кінці мають спільну вершину $n-1$-го рівня, то їх епіморфні образи на $(T_2)_{n-1}$ співпадають. □

Наприклад, для A, що задає автоморфізм дерева T_2 $f(x) = 3x$, маємо наступну матрицю типу A_T(A_T вказана разом з A):

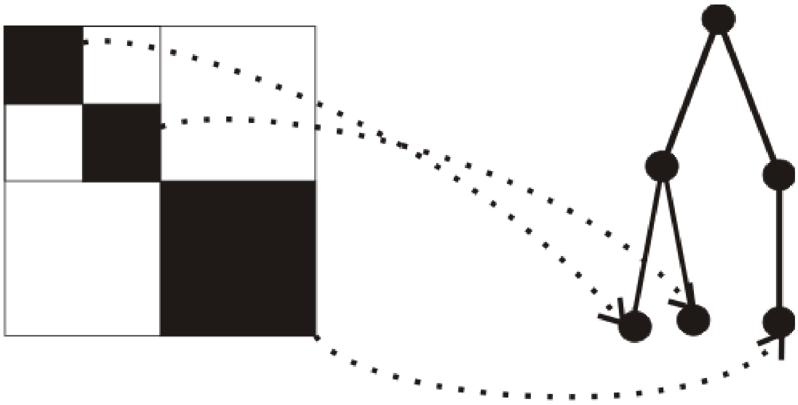


Послідовно застосовуючи до неї функцію lup отримуємо матриці типу для епіморфних образів автоморфізму $f(x) = 3x$ на $Aut(T_2)_n$ $(1 \leq n \leq 6)$:

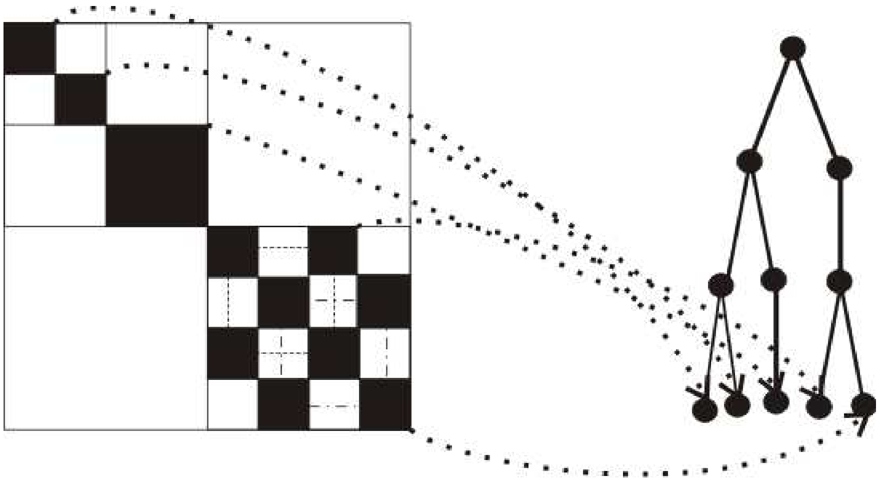


Згідно з $(A_T)_1$ дія A на $(T_2)_1$ має дві орбіти, тобто дерево типу автоморфізму A має дві вершини на 1-му рівні.

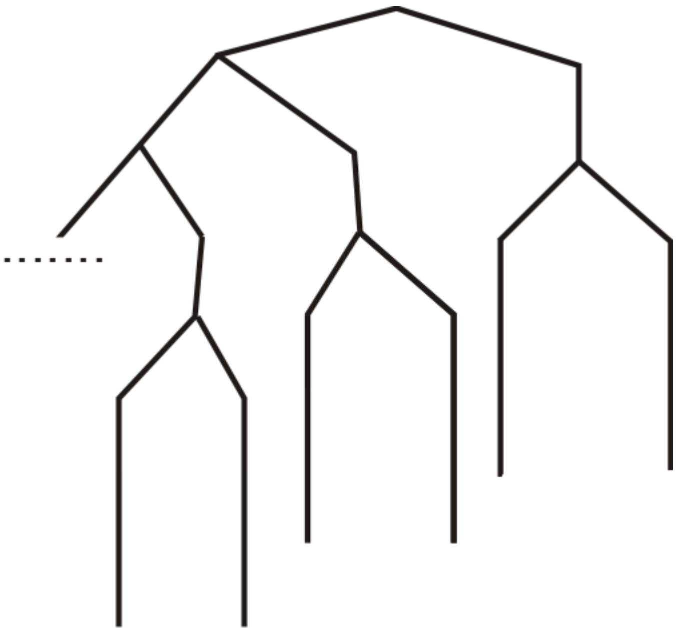
Далі, згідно з $(A_T)_2$ для дії A на $(T_2)_2$ одна з орбіт ділиться на дві орбіти 2-го рівня, тобто маємо три орбіти 2-го рівня:



Аналогічно отримаємо 3-тій рівень дерева типу:

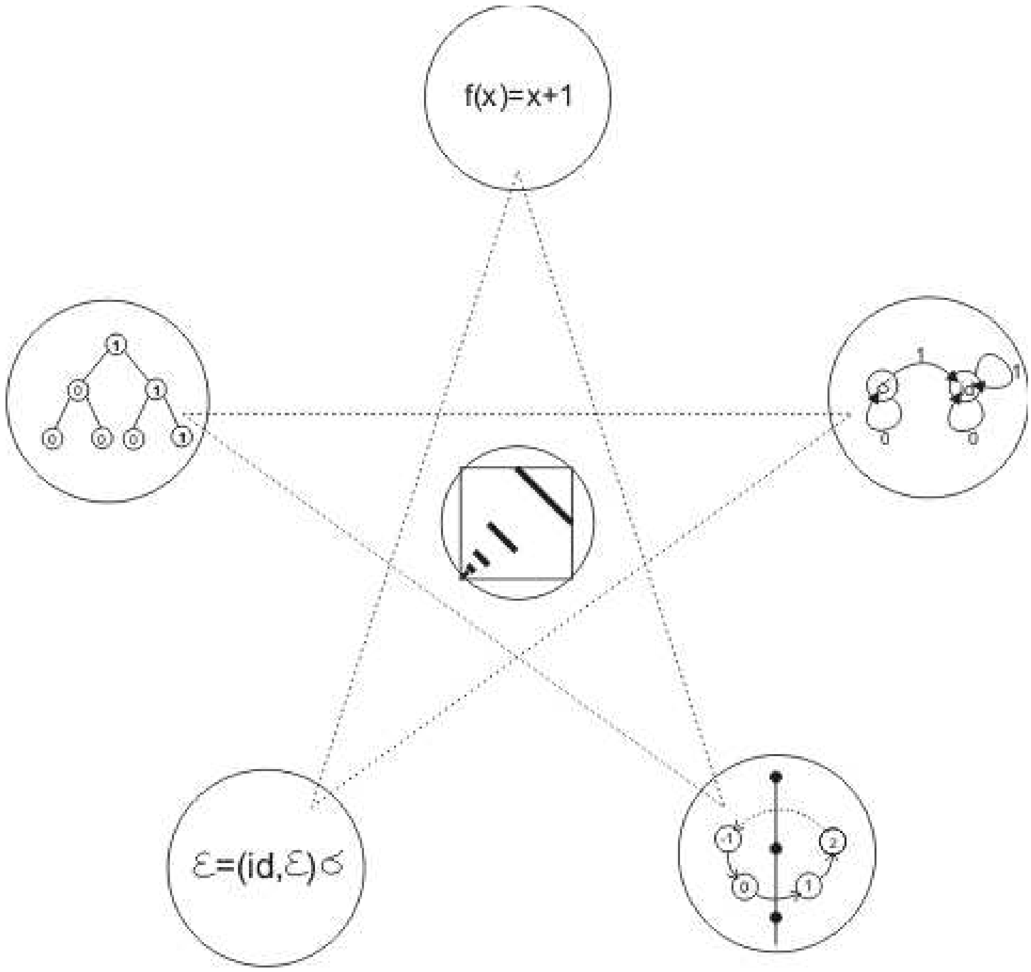


Продовжуючи побудову отримаємо самоподібне дерево типу для автоморфізму A:



2.5 Зв'язок між представленнями

Опишемо зв'язок між представленнями, побудованими в попередніх розділах. На малюнку маємо представлення adding machine у п'яти вищезгаданих мовах:



Побудуємо по функції $f(x) = 3x$ її алгебраїчний запис.

Подіємо на 2-адичні послідовністі $x0$ та $x1$ функцією f(де x - це 2-адичний розклад числа x).

$$x0 = 2x$$

$$3(x0) = 3(2x) = 2(3x) = (3x)0$$

$$x1 = 2x + 1$$

$$3(x1) = 3(2x + 1) = 2(3x + 1) + 1 = (3x + 1)1$$

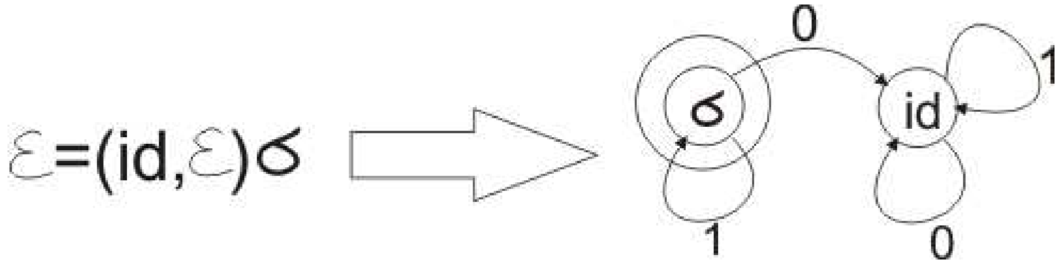
Тобто

$$3x = (3x, 3x + 1).$$

За допомогою алгебраїчного запису представимо автоморфізми у автоматному вигляді. Для *adding machine*

$$x + 1 = (id, x + 1) \circ \sigma$$

тобто маємо 2-становий автомат:



Для функції $f(x) = 3x$

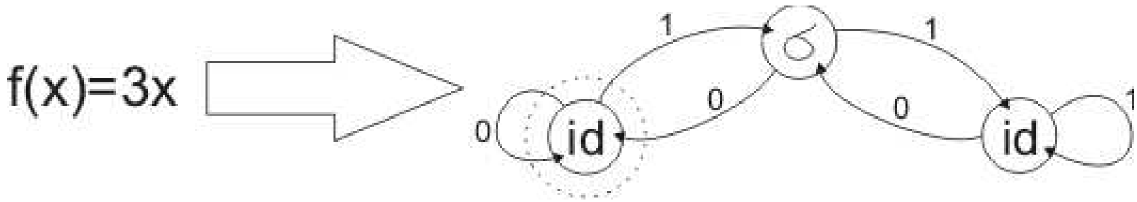
$$3x = (3x, 3x + 1)$$

$$3x + 1 = 3x \circ (x + 1) = (3x, 3x + 1) \circ (id, x + 1) \circ \sigma = (3x, 3x + 2) \circ \sigma$$

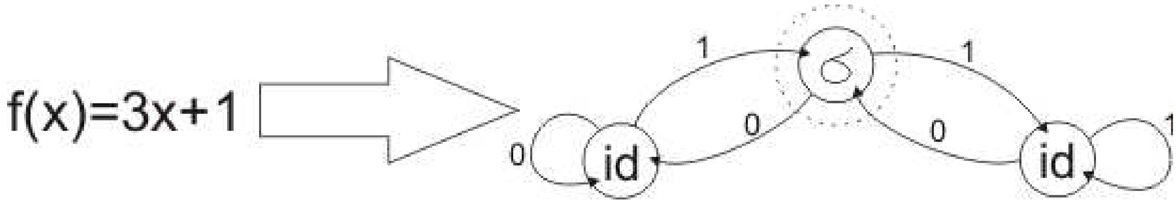
$$3x + 2 = 3x \circ (x + 2) = (3x, 3x + 1) \circ (x + 1, x + 1) = (3x + 1, 3x + 2) \circ \sigma$$

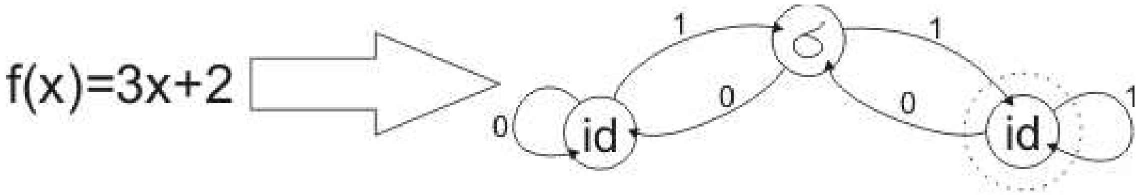
Маємо 3 стани $3x, 3x + 1$ та $3x + 2$.

Стани $3x$ та $3x + 2$ мають тип id, стан $3x + 1$ має тип σ:



Змінюючи ініціальний стан отримуємо автомати для функцій $f(x) = 3x + 1$ та $f(x) = 3x + 2$:





5-становий автоморфізм, що задається функцією $f(x) = 5x$ визначається наступними співвідношеннями:

$$a_0 = (a_0, a_2)$$

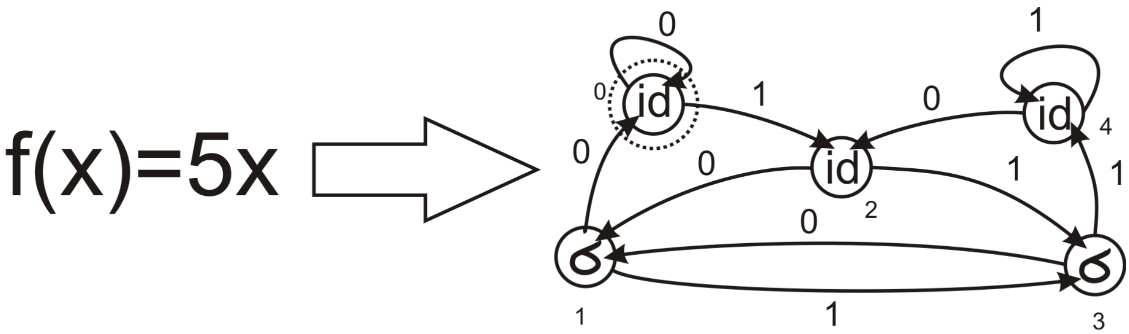
$$a_1 = (a_0, a_3) \circ \sigma$$

$$a_3 = (a_1, a_4) \circ \sigma$$

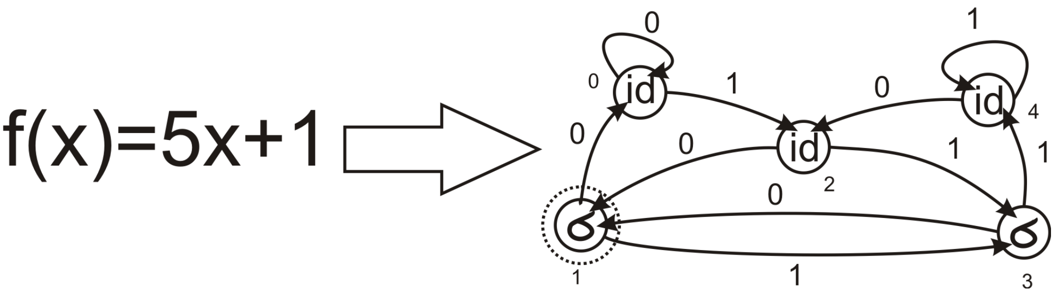
$$a_2 = (a_1, a_3)$$

$$a_4 = (a_2, a_4)$$

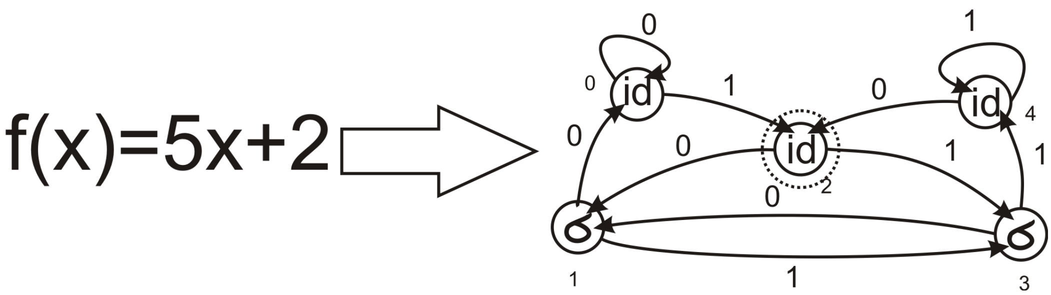
з ініціальним станом a_0.



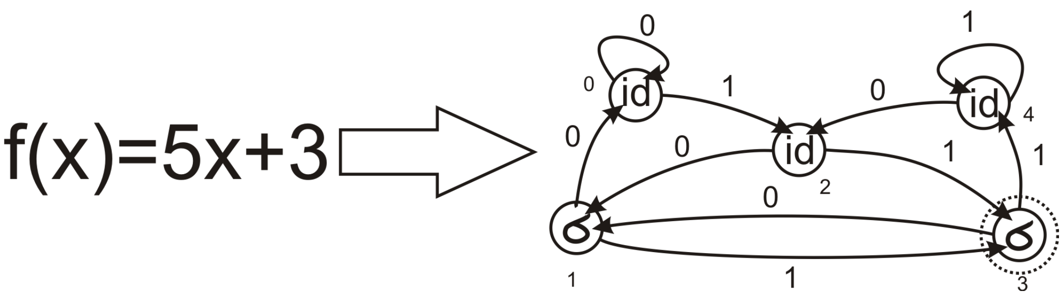
Змінюючи ініціальний стан отримуємо автомати для функцій $f(x) = 5x + 1$



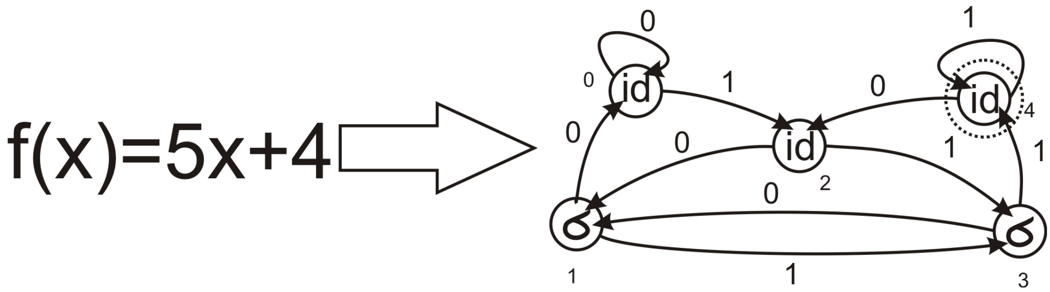
$f(x) = 5x + 2$



$f(x) = 5x + 3$



та $f(x) = 5x+$



Покажемо, як по автомату будується портрет автоморфізму.

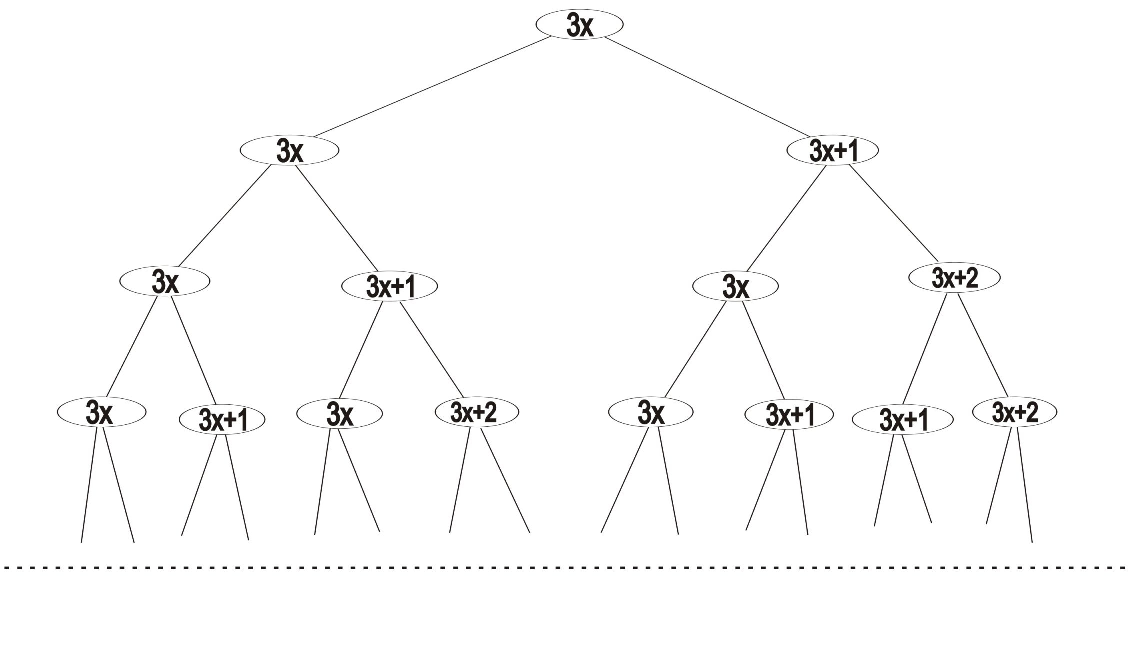
Автомат з початковим ініціальним станом задає автоморфізм двійкового дерева. З початкового ініціального стану виходять дві стрілки, помічені 0 та 1, кінцями яких є стани a_0 та a_1 відповідно.

Автомат з початковим станом a_0 задає дію на ліве піддерево, автомат з початковим станом a_1 задає дію на праве піддерево, і т.д. Наприклад, для автоморфізму $f(x) = 3x$ маємо:

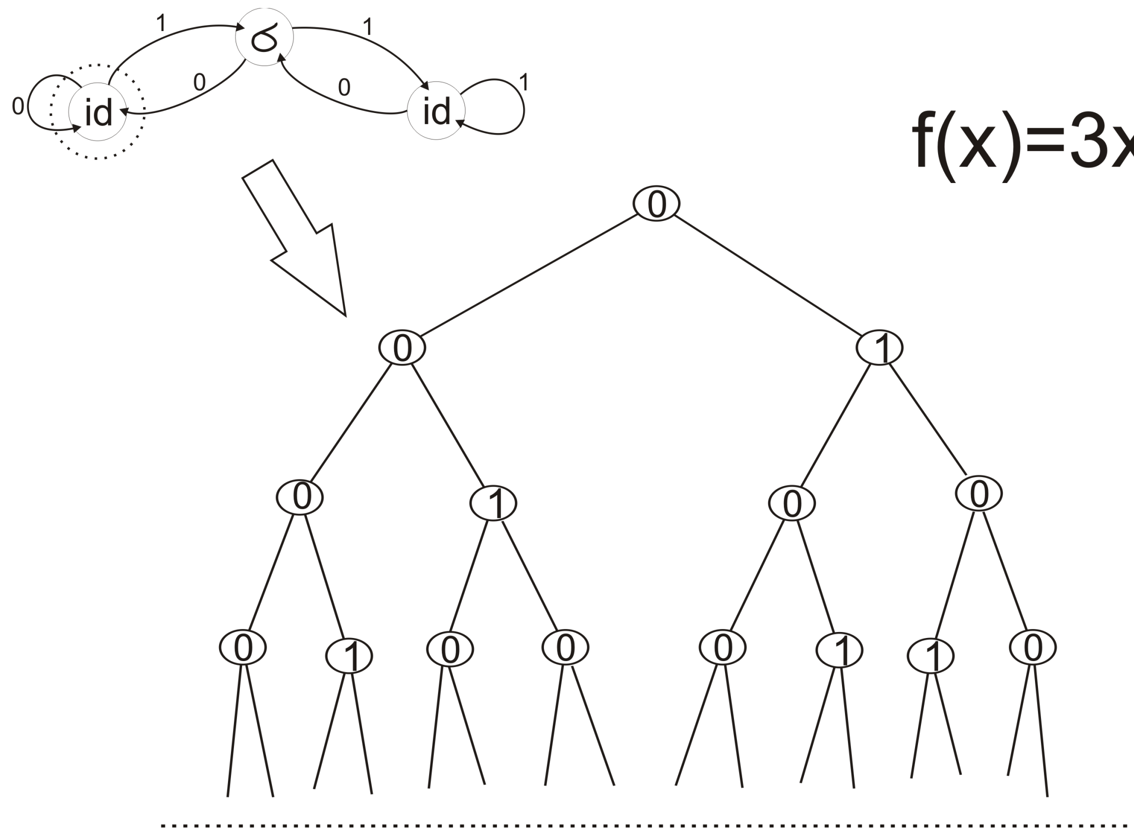
$$3x = (3x, 3x+1)$$

$$3x+1 = (3x, 3x+2) \circ \sigma$$

$$3x+2 = (3x+1, 3x+2)$$



Приймаючи до уваги, що автоморфізм $f(x) = 3x + 1$ переставляє вершини першого рівня дерева T_2 , а автоморфізми $f(x) = 3x$ та $f(x) = 3x + 2$ залишають на місці вершини першого рівня, отримуємо портрет для автоморфізму $f(x) = 3x$:



По функціональному представленню автоморфізму a

$$a : x \to f(x)$$

побудуємо орієнтований граф. Кожен цикл цього графа буде мати вигляд

$$... \to f^{-1}(x_0^{(1)}) \to f^0(x_0^{(1)}) \to f^1(x_0^{(1)}) \to f^2(x_0^{(1)})...$$

$$... \to f^{-1}(x_0^{(2)}) \to f^0(x_0^{(2)}) \to f^1(x_0^{(2)}) \to f^2(x_0^{(2)})...$$

....

$$... \to f^{-1}(x_0^{(k)}) \to f^0(x_0^{(k)}) \to f^1(x_0^{(k)}) \to f^2(x_0^{(k)})...$$

....

де кінці $x_0^{(k_1)}$ та $x_0^{(k_2)}$ для $k_1 \neq k_2$ належать різним циклам, тобто не існує $p \in Z_2$, такого, що

$$f^p(x_0^{(k_1)}) = x_0^{(k_2)}$$

Наприклад, для автоморфізма вигляду $f(x) = 5x + 1$ маємо єдиний цикл вигляду:

$$... \to -\frac{1}{5} \to 0 \to 1 \to 6 \to 31 \to 0...$$

Це представлення зручно використовувати для знаходження χ в рівнянні спряженості

$$\chi^{-1} \circ a \circ \chi = b.$$

Наприклад, якщо автоморфізми a та b в представленні орієнтованими графами мають єдиний цикл:

$$a = ... \to f^{-1}(x_0^{(a)}) \to f^0(x_0^{(a)}) \to f^1(x_0^{(a)}) \to f^2(x_0^{(a)})...,$$

$$b = ... \to f^{-1}(x_0^{(b)}) \to f^0(x_0^{(b)}) \to f^1(x_0^{(b)}) \to f^2(x_0^{(b)})...,$$

то автоморфізм χ задається наступним чином:

$$f^{-1}(x_0^{(a)}) \to f^{-1}(x_0^{(b)})$$

$$x_0^{(a)} \to x_0^{(b)}$$

$$f(x_0^{(a)}) \to f(x_0^{(b)})$$

$$................$$

$$f^k(x_0^{(a)}) \to f^k(x_0^{(b)}), \forall k \in Z_2.$$

Покладемо $a(x) = x + 1, b(x) = x + 3$. Для автоморфізмів a та b в представленні орієнтованими графами маємо по одному циклу наступного вигляду:

$$a = ... \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3...,$$

$$b = ... \to -3 \to 0 \to 3 \to 6 \to 9....$$

Тобто автоморфізм χ задається наступним чином:

$$-1 \to -3$$

$$0 \to 0$$

$$1 \to 3$$

$$................$$

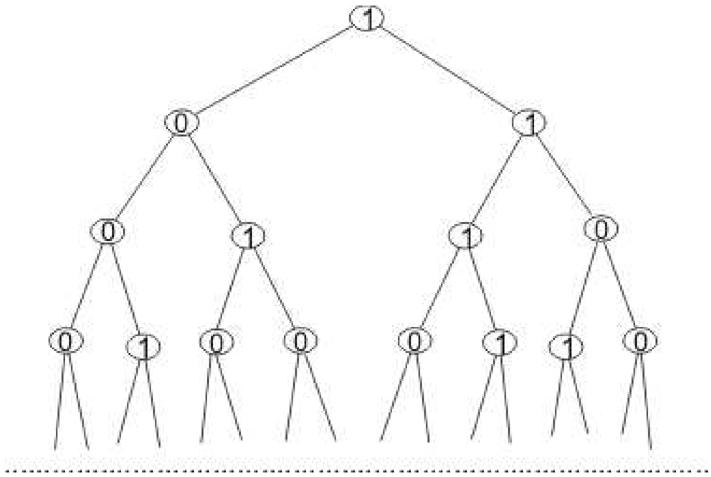
$$k \to 3k, \forall k \in Z_2.$$

З цього отримуємо, що у представленні автоморфізмів 2-адичними функціями $\chi(x) = 3x$. Дійсно:

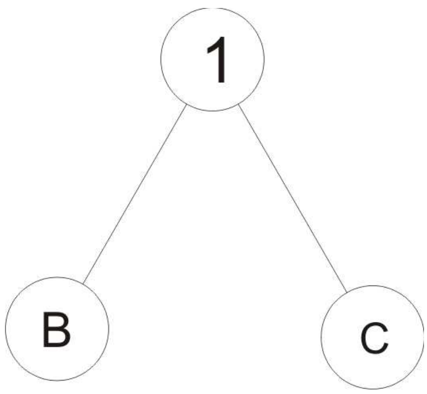
$$(3x)^{-1} \circ (x+1) \circ 3x = \frac{1}{3}x \circ (x+1) \circ 3x =$$
$$= (\frac{1}{3}x + 1) \circ 3x = 3(\frac{1}{3}x + 1) = x + 3.$$

Побудова по портрету матриці.

Нехай автоморфізм $a \in AutT_2$ задано портретом:



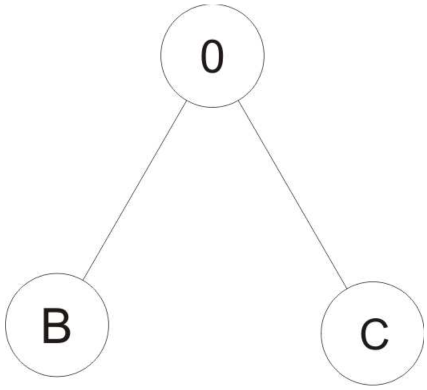
Користуючись правилом, що автоморфізму a, що задається співвідношенням $a = (b, c) \circ \sigma$ відповідаєbпортрет



та матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

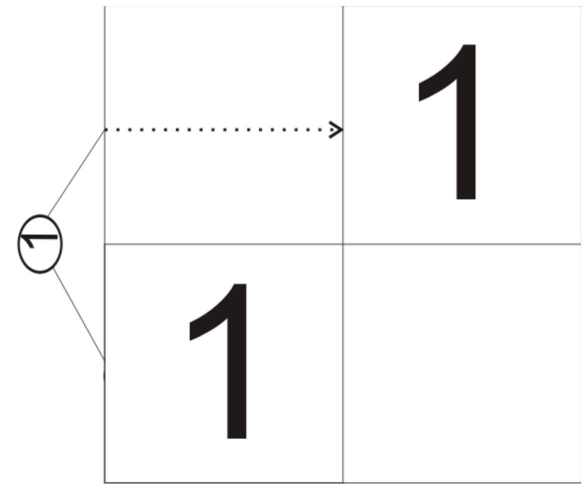
а автоморфізму, що задається співвідношенням $a = (b, c)$ відповідає портрет



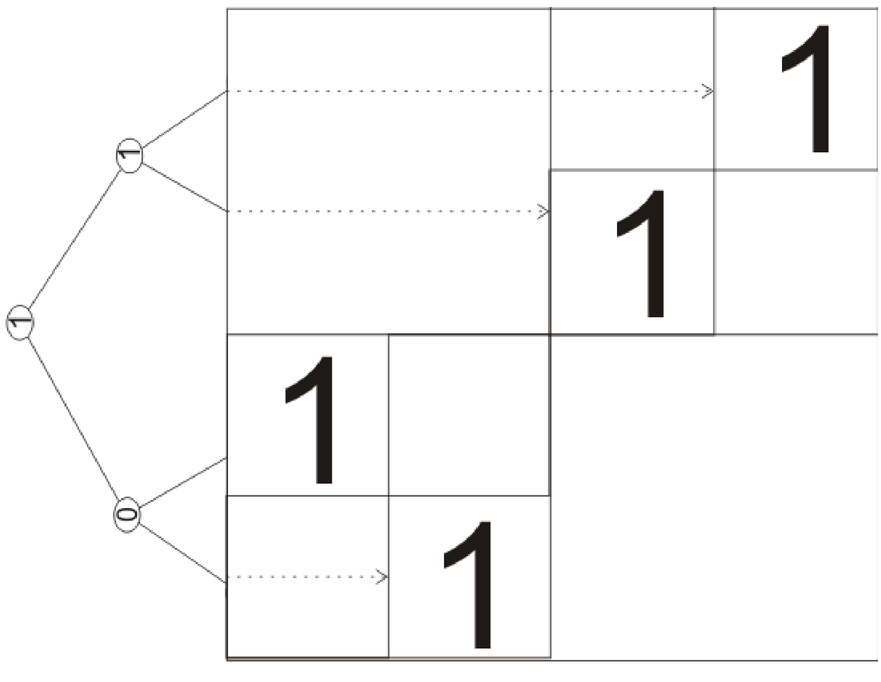
та матриця

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

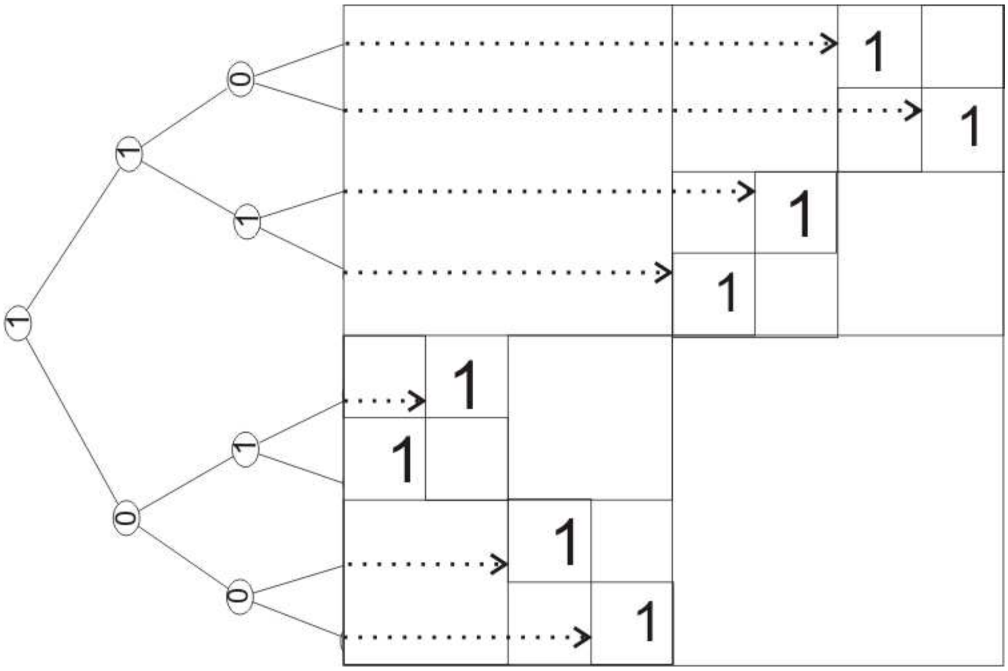
отримаємо наступну послідовність кроків побудови матриці автоморфізму: 1-й крок



2-й крок



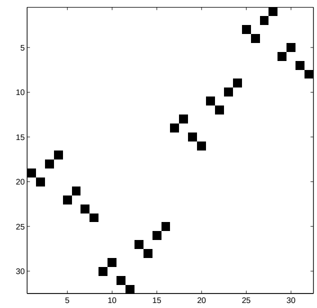
3-й крок



Продовжуючи цю процедуру до n-го кроку отримаємо матричне представлення для епіморфного образу автоморфізма на $(AutT_2)_n$.

Побудова по матриці портрету.

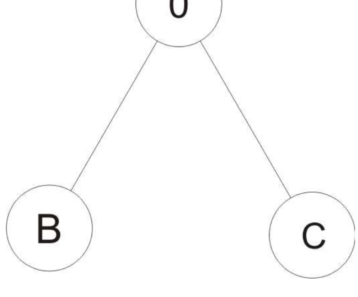
Побудуємо портрет автоморфізму a по його матриці A:



Оскільки матриці

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

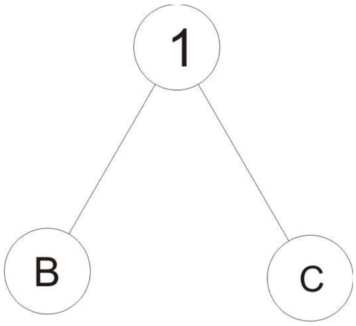
відповідає портрет



а матриці

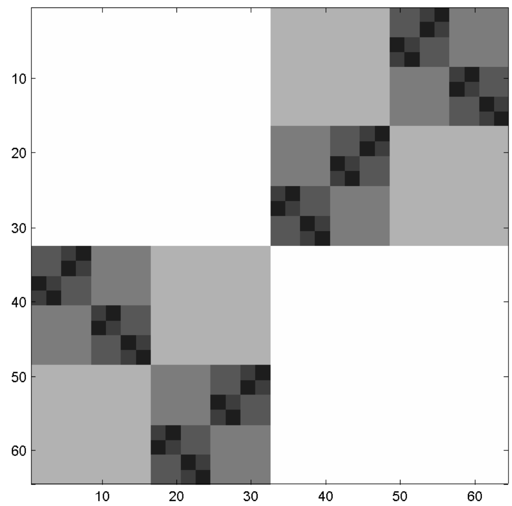
$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

портрет

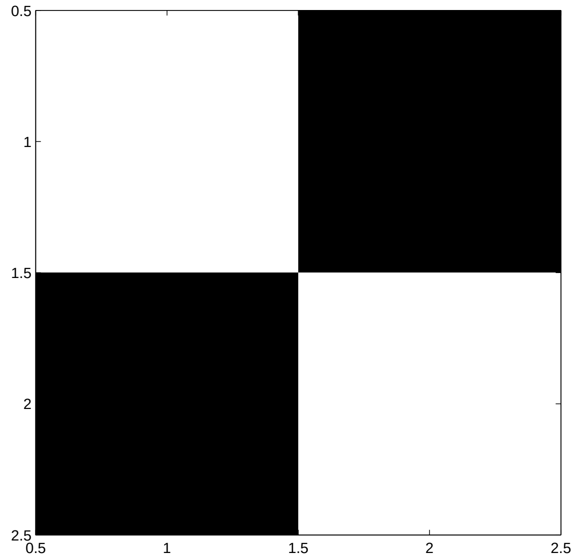


то побудова портрету зводиться до послідовного використання функції, оберненої до lup.

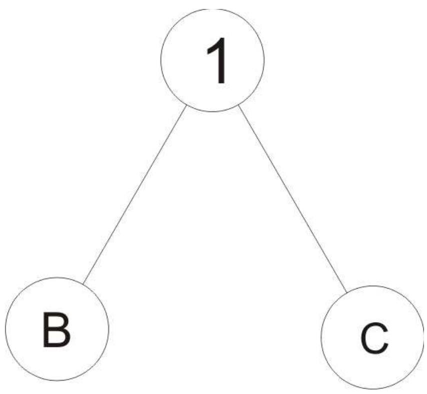
Застосувавши функцію lup до матриці автомрфізму A чотири рази отримаємо:



$lup^{(4)}(A)$ повертає матрицю

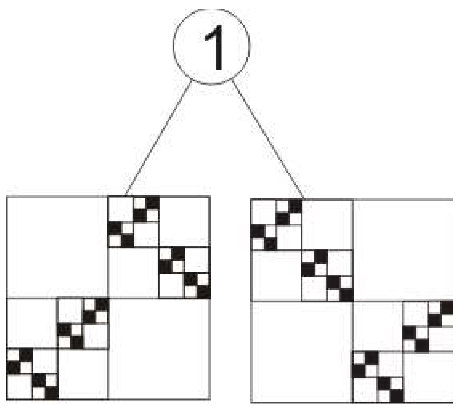


портрет для якої має вигляд

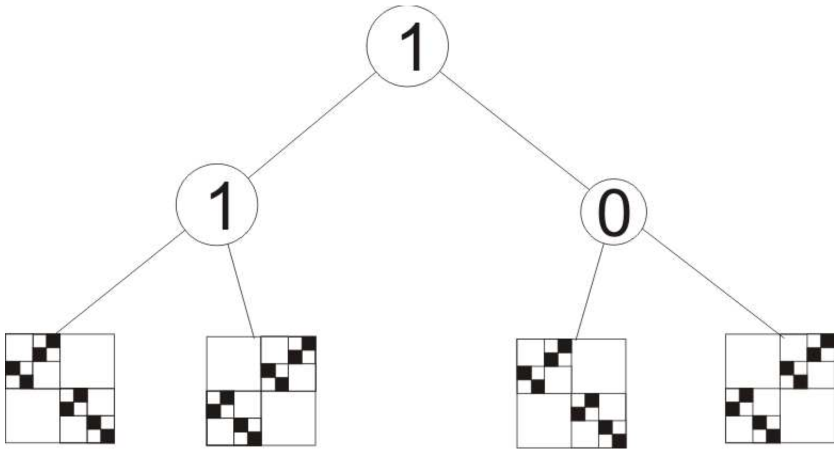


Застосуємо цю операцію послідовно для:

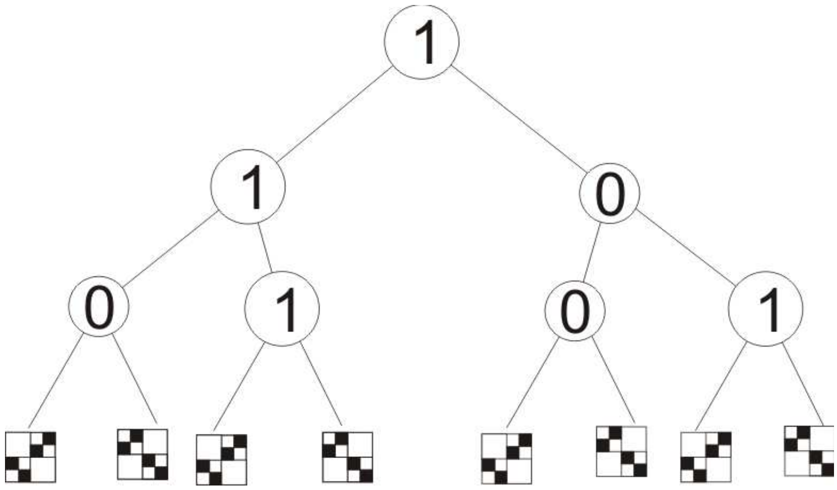
$lup^{(4)}(A)$



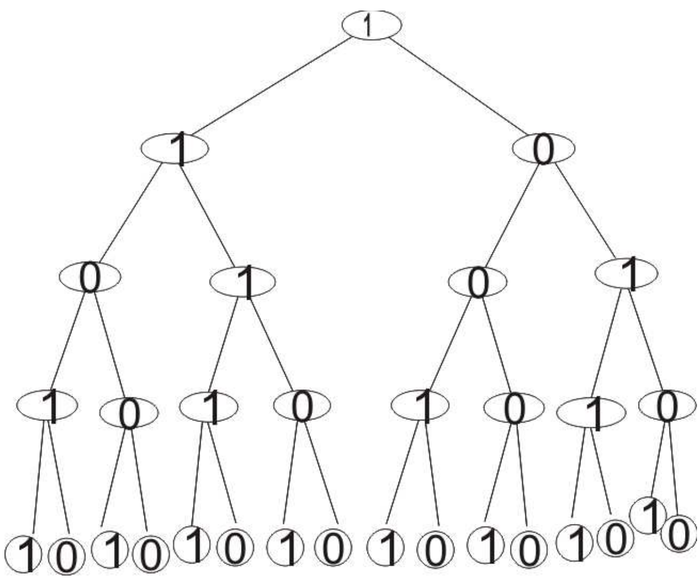
$lup^{(3)}(A)$



$lup^{(2)}(A)$



і остаточно маємо портрет для автоморфізму a, побудований по матриці A:



3 Централізатори

3.1 Спряженість в $AutT_2$

Два елемента a та b групи G називають спряженими в цій групі, якщо існує розв'язок χ рівняння

$$\chi^{-1} \circ a \circ \chi = b$$

такий, що $\chi \in G$.

Рядок $\chi^{-1} \circ a \circ \chi$ часто записують, як a^χ.

Розв'язки рівняння $a^\chi = a$ утворюють підгруппу групи G, яка називається централізатором елемента в цій групі і позначається, як $C_G(a)$.

Опис централізаторів є важливим при дослідженні питання спряженості, оскільки усі розв'язки рівняння $a^\chi = b$ мають вигляд $\chi = C_G(a) \circ \chi_0$, де χ_0- частковий розв'язок цього рівняння.

Означення 3.1.1. *Шарово-однорідним назвемо автоморфізм, для якого дерево типу є ланцюгом.*

Для шарово-однорідного автоморфізму a означимо $a^k, k \in Z_2$.

Для *adding machine* ε означимо ε^k, як елемент централізатора $C_{AutT_2}(\varepsilon)$, який ...000 переводить в k.

$$\varepsilon^k := \chi_k$$

де

$$\varepsilon^{\chi_k} = \varepsilon$$

$$\chi_k : ...000 \to k$$

Нехай χ_a частковий розв'язок рівняння $\varepsilon^\chi = a$. Означимо a^k для $k \in Z_2$:

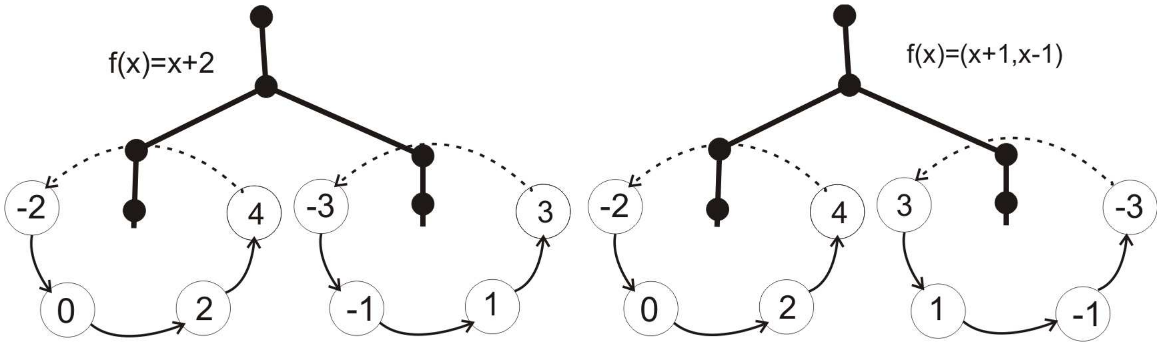
$$a^k := (\varepsilon^k)^{\chi_a}.$$

Для цілих k означення співпадає зі звичайним піднесенням у степінь.

Питання про те, чи спряжені два автоморфізми дерева в $AutT_n$ є повністю розв'язанним(роботи). Має місце наступне твердження.

Теорема 3.1.1. *Автоморфізми дерева спряжені в $AutT_n$, тоді і тільки тоді, коли їх дерева типу ізоморфні.*

Наприклад, автоморфізми $f(x) = x+2$ та $f(x) = (x+1, x-1)$ спряжені в $AutT_2$, так як мають ізоморфні дерева типу.

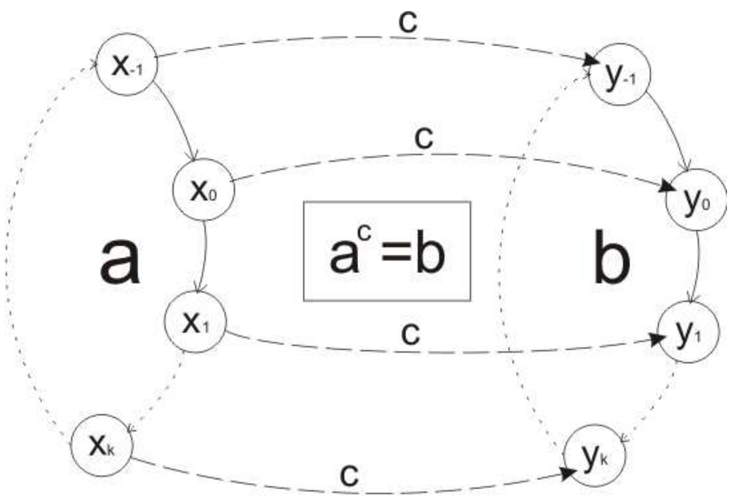


Розв'язок χ_0 рівняння $a^\chi = b$, що переводить кінець x_0 в кінець y_0, для шарово-однорідних автоморфізмів a та b описується наступним чином:

$$\chi_0 : x_k \to y_k$$

де

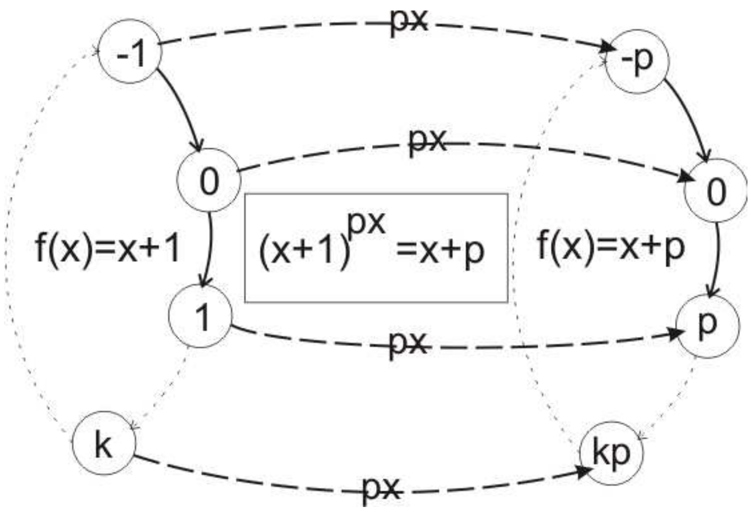
$$x_k = (x_0)a^k,\ y_k = (y_0)a^k\ (k \in Z_2)$$



Як приклад побудуємо розв'язок χ_0 рівняння

$$(x+1)^\chi = x + p$$

такий, що χ_0 : ...000 $\to$ ...000:



Дійсно

$$px : ...000 \to ...000$$

$$(x+1)^{px} = \frac{1}{p}x \circ (x+1) \circ px = p(\frac{1}{p}x+1) = x+p$$

Побудуємо розв'язок χ_0 рівняння

$$(5x+1)^{\chi} = 25x+1$$

такий, що $\chi_0 : ...000 \to ...000$. Автоморфізми $f(x) = 5x+1$ та $f(x) = 25x+1$ - шарово-однорідні, отже спряжені, і маємо по одному циклу. Для шарово-однорідного автоморфізму пронумеруємо елементи циклу: елементом номеру p назвемо кінець x дерева T_2, для якого

$$x = ...000 * a^p.$$

Елементом номеру p для автоморфізму $f(x) = 5x+1$ є $\frac{5^p-1}{4}$.

Елементом номеру p для автоморфізму $f(x) = 25x+1$ є $\frac{25^p-1}{24}$.

Тобто автоморфізм χ_0 переводить $\frac{5^p-1}{4}$ в $\frac{25^p-1}{24}$, або:

$$\chi_0 : x \to \frac{25^{log_5(4x+1)}-1}{24}$$

Оскільки

$$\frac{25^{log_5(4x+1)}-1}{24} = \frac{(4x+1)^2-1}{24} =$$
$$= \frac{16x^2+8x+1-1}{24} = \frac{2x^2+x}{3}$$

тобто χ_0 задається функцією $f(x) = \frac{2x^2+x}{3}$.

3.2 Будова централізаторів елементів максимального порядку

Проективна границя ітерованих вінцевих добутків циклічних груп другого порядку є повною топологічною групою, якщо її розглядати як метричний простір Бера. Показано, що централізатор довільного елемента w, канонічні епіморфні образи якого на скінченні ітеровані вінцеві добутки мають максимально можливі порядки, є континуальною групою $\overline{(w)}$, яка є замиканням відповідної циклічної групи.

Об'єктом дослідження є група $\overline{W}_\infty(F_2)$, яка є проективною границею вінцевих добутків циклічних груп другого порядку.

Нехай $W_1 = F_2^+$ - циклічна група другого порядку, тоді можна індуктивно визначити групи $W_{n+1} = (W_n, F_2^{(n)}) \wr F_2^+$, як вінцевий добуток групи підстановок W_n, що діє на $F_2^{(n)} = F_2 \times ... \times F_2$(активний співмножник) та циклічної групи другого порядку. База вінцевого добутку складається з усіх бульових функцій $F_2^{(n)} \to F_2$ від n змінних і є ядром природного епіморфізму $\pi_n : W_{n+1} \to W_n$. Ці гомоморфізми визначають $\overline{W}_\infty(F_2)$ як проективну границю $\overline{W}_\infty(F_2) = \varprojlim W_n$, а також гомоморфізми $\hat{\pi}_n : \overline{W} \to W_n$. При цьому група $\overline{W}_\infty$ діє природним чином на множині 2^N двійкових послідовностей, яка є прикладом метричного простору Бера. Для довільного числа $0 < \eta < 1$ і двох послідовностей $\bar{x} = (x_n), \bar{y} = (y_n) \in 2^N$ відстань між ними визначається наступним чином $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \eta^t$, де t довжина спільного початку для $\bar{x}, \bar{y}$ (в даній ситуації зручно користуватись $\eta = 1/2$). Групу ізометрій цього простору позначимо через $Is(2^N)$.

З іншого боку можна розглянути нескінченне дерево T_2, яке визначається наступним чином:

a) v_0- корінь або вершина нульового рівня;

b) для кожного $i = 0, 1, 2, ...$ -дерево містить 2^i вершин та ребер i-го рівня;

в) кожна вершина i-го рівня суміжна з двома вершинами (лівою та правою) $i+1$-го рівня.

Зауважимо, що вказані пари не містять спільних вершин, бо інакше існував би цикл. Координатизуємо вершини дерева за допомогою бульових векторів

i)ребра, інцидентні вершині отримають мітки 0- ліве, і 1- праве.

$ii)$для отримання бульового вектора, який є набором координат вершини v випишемо зліва направо мітки ребер, які треба пройти на шляху від v_0 до v. Тепер елементи групи $\overline{W}_\infty$ можна зображати нескінченними послідовностями бульових функцій:

$$g =< \sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \ldots, \sigma_k(x_1, x_2, ..., x_{k-1}), \ldots >, \tag{3.2.1}$$

де $x_1, x_2, ..., x_{k-1}-$ координати вершини $k-1-$ го рівня, а значенням функції σ_k є одиниця, якщо відповідний автоморфізм дерева переставляє дві суміжні вершини $k-$ го рівня (див. вище п. в)) і є ноль якщо автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Добре відомим фактом (див. [4],[5]) є наступна теорема

Теорема 3.2.1. $\overline{W}_\infty \cong Is(2^N) \cong AutT_2$

Враховуючи зображення (3.2.1), саму групу $\overline{W}_\infty$ також можна розглядати як простір Бера:

$$\rho(g_1, g_2) = 2^{-k}, \quad \text{де} \quad k = \max\{m \mid \hat{\pi}_m(g_1) = \hat{\pi}_m(g_2)\}.$$

Метрика ρ визначає топологію і має місце

Теорема 3.2.2. $\overline{W}_\infty$- *є повною топологічною групою.*

З використанням цієї топології зручно давати опис централізаторів та нормалізаторів підгруп $\overline{W}_\infty$. В цьому розділі ми розглянемо будову централізаторів елементів максимального про-порядку.

Означення 3.2.1. *Елемент $w \in \overline{W}_\infty$ називаетьcя елементом максимального про-порядку, якщо для довільного n має місце $\mid \hat{\pi}_n(w) \mid= 2^n$.*

Тобто для довільного n, проекція $\hat{\pi}_n$ такого елемента на W_n повинна мати максимально можливий порядок в цій групі - 2^n.

Зауваження. Якщо $g-$ довільний елемент максимального порядку з W_n, то

$$g^{2^{n-1}} = z =< 0, 0, \ldots, 0, 1 > .$$

Дійсно, якщо $g = \bar{g} \cdot f, \quad \bar{g} \in W_{n-1}, f \in F_2^{(n)}$, то

$$g^{2^{n-1}} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} f(g^j(x)).$$

Оскільки для довільного x при $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ значення $g^j(x)$ пробігають множину координат всіх вершин $n-$ го рівня, то права частина рівності є константа, яка є сумою всіх значень функції f, причому оскільки $g-$ максимального порядку, то вона не дорівнює 0, тобто $g^{2^{n-1}} = z$.

В якості прикладу такого елемента можна навести такий автоморфізм дерева

$$< 1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots > .$$

Неважко переконатися, що всі елементи максимального про-порядку спряжені між собою, тобто спряжені з вищенаведеним елементом. Виявляється, що циклічна група породжена елементом максимального порядку в W_n збігається з централізатором цього елемента.

Лема 3.2.1. *Нехай* $g \in W_n$ *і* $\mid g \mid = 2^n$ *тоді* $C_{W_n}(g) = (g)$

Доведення. Включення $(g) \subseteq C_{W_n}(g)$, очевидне. Доведемо зворотне включення $C_{W_n}(g) \subseteq (g)$ індукцією по n. База індукції $n = 1$,коли W_1- скінчена група другого порядку є очевидною. Припустимо, що твердження доведено для груп $W_k, k < n$. Нехай $q \in C_{W_n}(g)$. Оскільки маємо напівпрямий добуток $W_n = W_{n-1} \ltimes F_2^{(n)}$, то $g = g_1 \cdot f, \ q = q_1 \cdot \phi, \quad g_1, q_1 \in W_{n-1}, f, \phi \in F_2^{(n)}$. За припущенням індукції існує $m : \quad q_1 = g_1^m$. Тоді умова $q \cdot g = g \cdot q$ в проекції на базу $F_2^{(n)}$ дасть нам рівність

$$\phi^{g_1} + f == f^{g_1^{m+1}} + \phi,$$

звідки,

$$\phi^{g_1} + \phi = f^{g_1^{m+1}} + f. \tag{3.2.2}$$

Розглянемо цю рівність як рівняння відносно невідомої булевої функції ϕ. Оскільки $|g| = 2^n$, то для довільного значення $\phi(0, \ldots, 0)$ рекурентна рівність

$$\phi(g_1^{k+1}(0)) = \phi(g_1^k(0)) + f^{g_1^{m+1}}(g_1^k(0)) + f(g_1^k(0)), \tag{3.2.3}$$

визначає функцію ϕ однозначно. Коректність означення, тобто рівність $\phi(g_1^{2^{n-1}}(0)) = \phi(0)$, випливає з тотожності

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f^{g_1^{m+1}}(g_1^k(0)) + f(g_1^k(0)) = 0,$$

яка буде мати місце, бо в цій сумі значення функції в кожній точці входить двічі. Отже, маємо точно два розв'язки рівняння (3.2.2), які відповідають двом можливим значенням $\phi(0)$. З іншого боку, оскільки

$$g^m = (g_1 f)^m \in C_{W_n}(g),$$

то проекція на базу цього елемента, яка має вигляд

$$\sum_{j=0}^{m-1} f^{g_1^j}(x)$$

буде розв'язком цього рівняння. Інший розв'язок ми отримаємо, якщо розглянемо проекцію на базу елемента $g^{m+2^{n-1}}$. Згідно вищенаведеного зауваження,

$$g^{m+2^{n-1}} = g^m \cdot z.$$

Оскільки в обох випадках маємо елементи, що є степенями g, то лему доведено. $\square$

Тепер перейдемо до централізаторів елементів максимально про-порядку в групі $\overline{W}_\infty$.

Теорема 3.2.3. *Нехай w- довільний елемент максимального про-порядку і $D(w) = \{w^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$– циклічна група породжена цим елементом, тоді $C_{\overline{W}_\infty}(w) = \overline{D(w)}$, де риска означає замикання у вищезгаданій топології.*

Доведення. Очевидно, що $D(w) \subseteq C_{\overline{W}_\infty}(w)$. Оскільки централізатор елемента в топологічній групі є замкненою підгрупою, то $\overline{D(w)} \subseteq C_{\overline{W}_\infty}(w)$ Протилежне включення також має місце. Нехай $q \in C_{\overline{W}_\infty}(w)$, тоді за лемою 3.2.1, для довільного s існує m таке, що $\hat{\pi_s}(q) = w^m$ або $\hat{\pi_s}(q) = w^{m+\alpha_{s-1}2^{s-1}}$, де α_{s-1} приймає значення або 0 або 1. Таким чином, використавши двійковий розклад, будемо мати такий вигляд проекції

$$\hat{\pi_s}(q) = w^{\sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i 2^i}$$

і таку послідовність елементів групи $\overline{W}_\infty$:

$$w^{\alpha_0}, w^{\alpha_0+\alpha_1 2}, w^{\alpha_0+\alpha_1 2+\alpha_2 2^2}, \dots,$$

яка очевидно збігається до елемента q. Оскільки елементи послідовності належать до $D(w)$, то $q \in \overline{D(w)}$, що і доводить твердження. $\square$

Для довільних $g \in \overline{W}_\infty$ і 2-адичного числа $x \in Z_2$ визначимо функцію $g^x : \overline{W}_\infty \times Z_2 \to \overline{W}_\infty$ наступним чином:

$$g^x = \lim_{s\to+\infty} \pi_s(g)^{\lambda_s(x)}, \tag{3.2.4}$$

де $\lambda_s : Z_2 \to \mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z}$– канонічний епіморфізм на кільце лишків. Коректність означення випливає з того, що послідовність $\pi_s(g)^{\lambda_s(x)},\ s = 1, 2, \dots$ є фундаментальною і, згідно теореми 3.2.2, збігається в $\overline{W}_\infty$.

Теорема 3.2.4. *Функція* $g^x : \overline{W}_\infty \times Z_p \to \overline{W}_\infty$ *є неперервною по обом аргументам.*

Доведення. Візьмемо автоморфізм v з околу $B_k(g^x)$, тобто $\pi_k(g^x) = \pi_k(v)$ Оскільки $\pi_k(g^x) = \pi_k(g)^{\lambda_k(x)} = \pi_k(v)$,то для 2-адичного числа z з околу $U_k(x)$ в топології, індукованій 2-адичною метрикою, та для автоморфізму h з околу $B(g, 2^k)$ виконуються рівності $\lambda_k(z) = \lambda_k(x), \pi_k(h) = \pi_k(g)$.

$$\pi_k(h^z) = \pi_k(h)^{\lambda_k(z)} = \pi_k(g)^{\lambda_k(x)} = \pi_k(g^x)$$

. Звідси $h^z \in B_k(g^x)$, тобто відображення $g^x : \overline{W}_\infty \times \mathbb{Z}_2 \to \overline{W}_\infty$ є неперервним. □

Наслідок 3.2.1. *Нехай* g- *довільний елемент максимального про-порядку,* x_1, x_2- *2-адичні числа.*

$$(g^{x_1})^{x_2} = g^{x_1 \cdot x_2},$$

$$g^{x_1} \cdot g^{x_2} = g^{x_1 + x_2},$$

Зокрема маємо, $g^0 = e$ $g^{\dots 111} = g^{-1}$, де $e-$ нейтральний елемнт групи, 0- це нуль кільця 2-адичних чисел, ...111$-$ цифровий запис 2-адичного числа $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^i$, яке є протилежним до числа 1, тобто його можна ототожнити з -1. Опишемо централізатори лінійних функцій, що відповідають автоморфізмам максимального про-порядку.

Лема 3.2.2. *Якщо автоморфізм* α *дерева* T_2, *що задається функцією* $f(x) = ax + b$ *є автоморфізмом максимального про-порядку , то його централізатор в групі автоморфізмів* $AutT_2$ *має вигляд:*

$$C_{AutT_2}(\alpha) = \langle \alpha^p | p \in Z_2 \rangle = \langle a^p x + b\frac{a^p - 1}{a - 1} | p \in Z_2 \rangle =$$

$$= \langle ((a-1)t + 1)x + bt | t \in Z_2 \rangle$$

Згідно з теоремою 3.2.3 має місце рівність:

$$C_{AutT_2}(\alpha) = \langle \alpha^p | p \in Z_2 \rangle.$$

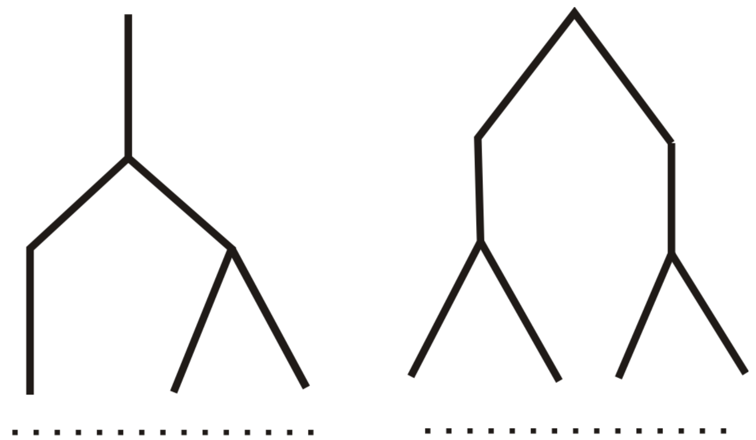
Остання рівність

$$\langle a^p x + b\frac{a^p - 1}{a - 1} | p \in Z_2 \rangle = \langle ((a-1)t + 1)x + bt | t \in Z_2 \rangle$$

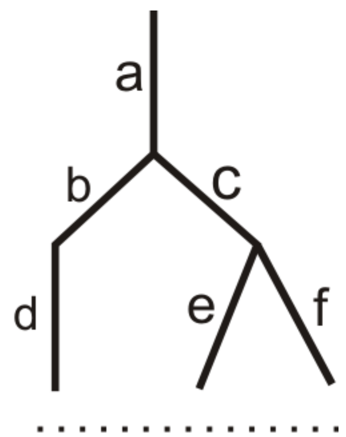
має місце, оскільки функція $f(x) = \frac{a^x - 1}{a - 1}$ є автоморфізмом простору Бера.

3.3 Кільце розширенних по дереву 2-адичних чисел

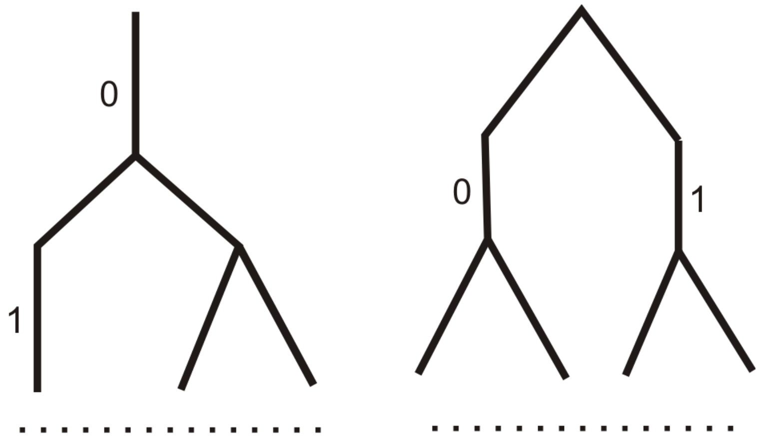
Розглянемо сукупність дерев, у яких кожна вершина суміжна тільки з однією або з двома вершинами наступного рівня.



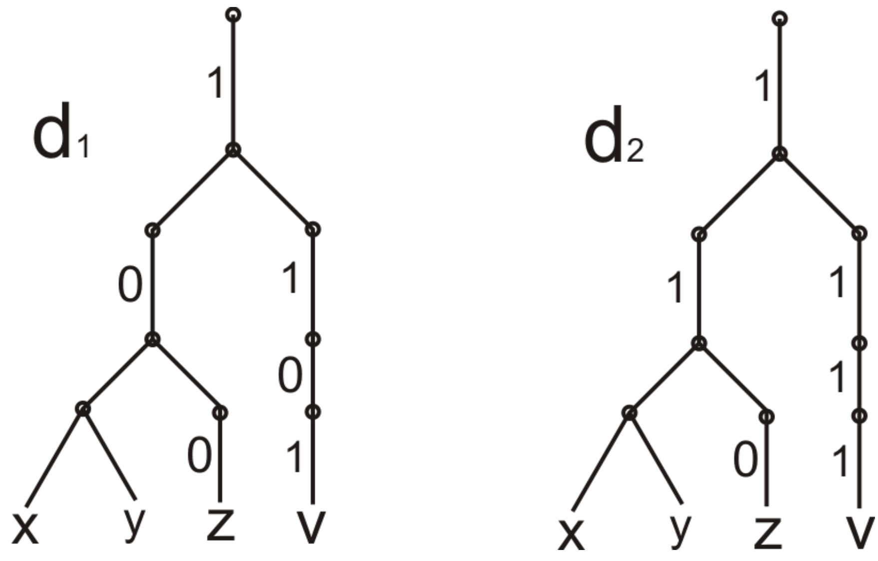
Назвемо ребро, що з'єднує вершину k-го рівня з вершиною k+1-го рівня вертикальним, якщо цю вершину k-го рівня з k+1-м рівнем з"єднує тільки одне ребро. На малюнку ребра a,d - вертикальні.



Розмітимо довільним чином вертикальні ребра цифрами 0 та 1.



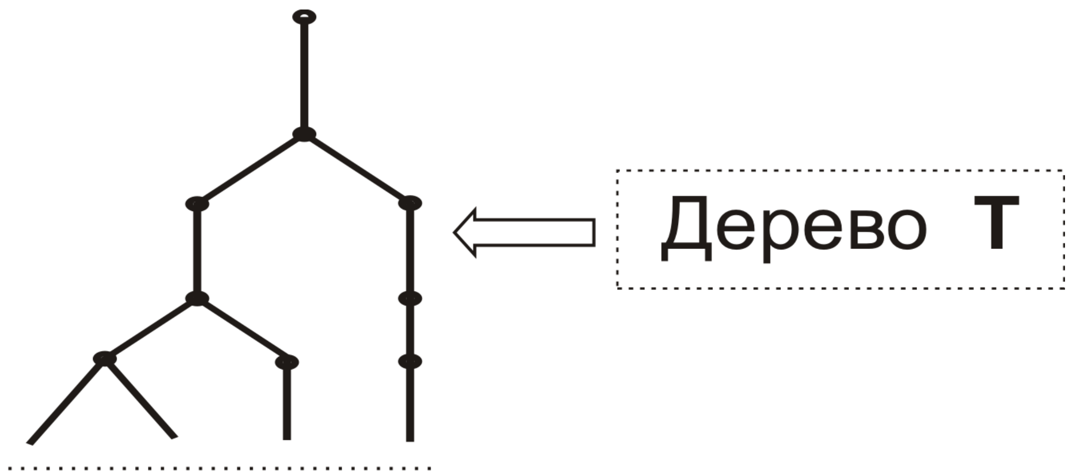
Кожному кінцю x розміченного дерева d відповідає двійкова послідовність x_d складена з цифр, якими відмічені вертикальні ребра цього кінця.



$$x_{d_1} = ...01, y_{d_1} = ...01, z_{d_1} = ...001, v_{d_1} = ...1011$$

$$x_{d_2} = ...11, y_{d_2} = ...11, z_{d_2} = ...011, v_{d_2} = ...1111$$

Опишемо кільце Z_T побудоване по дереву T. На множині D розмічених вищезазначеним чином дерев означимо множення та додавання.



При додаванні розмічених дерев з D двійкові послідовності відповідних кінців додаються, як елементи кільця цілих 2-адичних чисел.

$$x_{d_1+d_2} = x_{d_1} + x_{d_2}$$

$$y_{d_1+d_2} = y_{d_1} + y_{d_2}$$

$$z_{d_1+d_2} = z_{d_1} + z_{d_2}$$

$$v_{d_1+d_2} = v_{d_1} + v_{d_2}$$

При множенні розмічених дерев з D двійкові послідовності відповідних кінців перемножуються, як елементи кільця цілих 2-адичних чисел.

$$x_{d_1 \circ d_2} = x_{d_1} \cdot x_{d_2}$$

$$y_{d_1 \circ d_2} = y_{d_1} \cdot y_{d_2}$$

$$z_{d_1 \circ d_2} = z_{d_1} \cdot z_{d_2}$$

$$v_{d_1 \circ d_2} = v_{d_1} \cdot v_{d_2}$$

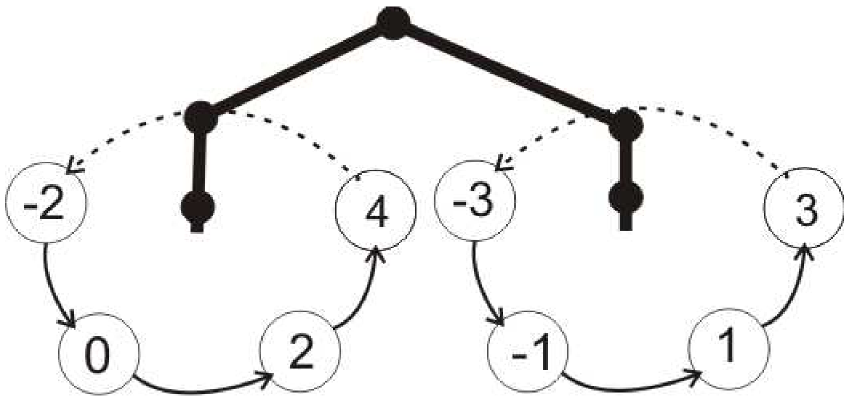
Якщо T- простий ланцюг, то Z_T ізоморфно Z_2.

Для автоморфізма adding machine піднесення у розширений 2-адичний степінь рівносильно піднесенню у звичайний 2-адичний степінь, оскільки дерево типу для цього автоморфізму є ланцюгом.

Піднесемо у розширений 2-адичний степінь автоморфізм ε^2, що задається функцією

$$f(x) = x + 2.$$

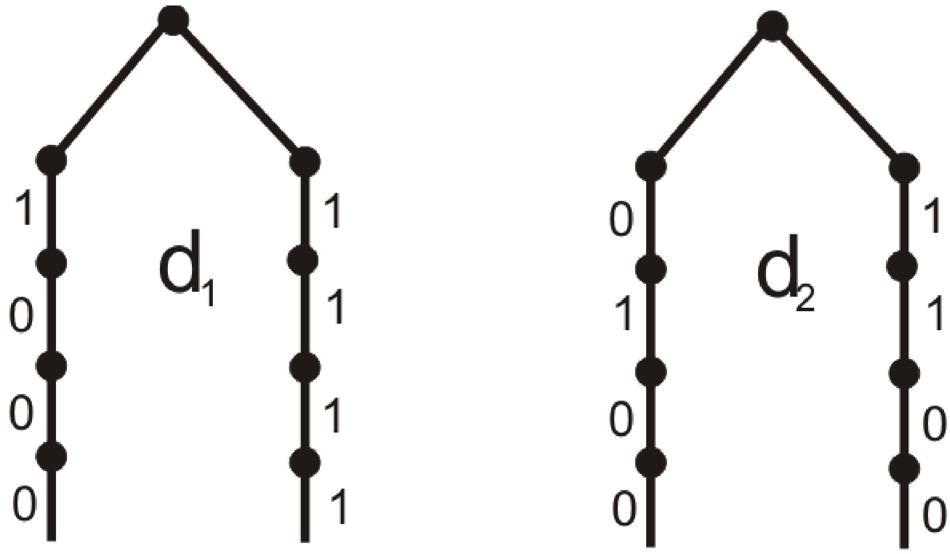
Дерево типу для цього автоморфізму складається з двох ланцюгів:



Дія на правому та на лівому ланцюзі відповідає функції

$$f(x) = x + 1.$$

Піднесемо ε^2 в степені d_1 та d_2



Для d_1 послідовність на лівому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 1, на правому ланцюзі відповідає 2-адичному числу -1.

Для d_2 послідовність на лівому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 2, на правому ланцюзі відповідає 2-адичному числу 3.

Результати піднесення у розширенний 2-адичний степінь мають вигляд:

$$(x+2)^{d_1} = (x+1, x-1)$$

$$(x+2)^{d_2} = (x+2, x+3).$$

3.4 Розширені 2-адичні числа, як централізатори автоморфізмів регулярного кореневого бінарного дерева

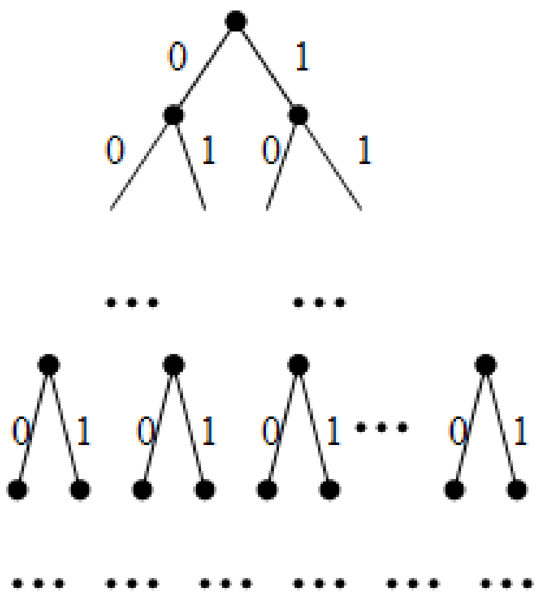
Нагадаємо означення регулярного кореневого бінарного дерева.

Множина вершин дерева розбивається на підмножини вершин однакового рівня.

а) v_0- корінь або вершина нульового рівня b) для кожного $i = 0, 1, 2...$ - дерево містить 2^i вершин та ребер і-го рівня.

Відношення суміжності вводиться в такий спосіб: кожна вершина і-го рівня з двома вершинами (лівою та правою) (i+1) -го рівня.

Координація ребер цього дерева відбувається наступним чином: два суміжні ребра, що з'єднують вершину і-го з двома вершинами (i+1) -го рівня, отримують мітки 0 (ліве) та 1 (праве):



Будь-який нескінченний шлях по дереву, що починається у кореневій вершині v_0, будемо називати кінцем дерева. Розглядаємо нескінченну двійкову послідовність як 2-адичне число із відповідного кільця . Маючи це на увазі, вказане дерево часто називають 2-адичним і позначають . Як абстрактну групу , її можна описати як проективну межу ітерованих вінцевих добутків циклічних груп 2-го порядку. (див. [1]). Якщо розглядати як простір Бера, то група його ізометрій збігається з групою автоморфізмів дерева T_2.

При цьому номера рівнів для вершин є інваріантними відносно дії групи автоморфізмів дерева T_2 . Тоді для автоморфізму , що належить $AutT_2$, множина вершин n -го рівня розбивається на об'єднання циклів $(c_a)_n$.

Сама група $AutT_2$ може бути розглянута, як метричний простір Бера з відповідною топологією. Ця топологія збігається з топологією проективної границі, а сама група є повною топологічною групою. Вже було дано опис централізаторів автоморфізмів максимального пропорядку. Розглянемо узагальнення цього результату на довільні елементи.

Нагадаємо, що деревом циклового типу D_a автоморфізму a будемо називати дерево, вершинами якого є цикли $(c_a)_n$,причому дві вершини D_a з'єднані ребром лише тоді, коли знаходяться по одній вершині з відповідних циклів, які з'єднані ребром в T_2.Кінці D_a позначимо, як c_a.

Добре відомою є наступна теорема.

Теорема 3.4.1. *Автоморфізми $a, b \in T_2$ спряжені в $AutT_2$ тоді й тільки тоді, коли*

коли їх дерева типу ізоморфні.

Будемо казати, що кінець $t \in T_2$ належить кінцю $c_a \in D_a$, якщо кожна вершина n-го рівня кінця t належить належить циклу n-го рівня кінця c_a.

Нехай $\delta(a)$ піддерево T_2 , жодні два кінця якого не належать одному кінцю $c_a \in D_a$, і для кожного кінця $c_a \in D_a$ існує кінець $x \in T_2, x \in c_a$. Таке дерево $\delta(a)$ назвемо характеристичним деревом типу автоморфізму . Очевидно, $\delta(a)$ ізоморфне D_a. Нехай δ_1, δ_2 - піддерева T_2 , a - автоморфізм T_2. Якщо $\delta_1 * a = \delta_2$, то пару (δ_1, δ_2) назвемо транзитивною відносно a. Дію a на δ_1 будемо називати звуженням a на δ_1 (позначення - $a[\delta_1]$) .

Довільне продовження дії $a[\delta_1]$ на T_2 назвемо розширенням дії до автоморфізму.

Теорема 3.4.2. *Нехай $a, b \in AutT_2$- однотипні автоморфізми , пара $(\delta_1(a), \delta_2(b))$ є транзитивною відносно деякого автоморфізму $\alpha \in AutT_2$. Тоді існує єдине розширення дії $\alpha[\delta_1(a)]$ до $\alpha' \in AutT_2$, такого, що $a^{\alpha'} = b$.*

Доведення. Дійсно, якщо автоморфізм $\alpha \in AutT_2$ переводить $x \in c_a$ в $y \in c_b$, то дія $\alpha : c_a \to c_b$ визначена однозначно . □

Серед усіх характеристичних піддерев $\delta(a)$ виберемо одне $\delta_0(a)$.

Розглянемо рівняння

$$a^{\chi} = a$$

Для автоморфізму $a \in AutT_2$ назвемо автоморфізмами 1-го типу автоморфізми χ, для яких

$$\delta_0(a) * \chi = \delta_0(a)$$

Автоморфізми 1-го типу утворюють групу. Позначимо її, як K_a.

Автоморфізмами 2-го типу назвемо автоморфізми χ, для яких кінець $x * \chi \in T_2$ належить тому ж кінцю $c_a \in D_a$, що і кінець x, для всіх $x \in T_2$.

Автоморфізми 2-го типу утворюють групу. Позначимо її, як H_a .

Лема 3.4.1. $K_a \cong Aut(\delta_0(a))$

Доведення. За теоремою (3.4.2), $\chi[\delta_0(a)]$ єдиним чином продовжується до $\chi \in AutT_2$, такого, що $a^{\chi} = a$. Навпаки, кожен $\chi \in K_a$ породжуєєдину дію $\chi[\delta_0(a)] : \delta_0(a) \to \delta_0(a)$. □

Означимо піднесення автоморфізму $a \in AutT_2$ у розширений 2-адичний степінь за деревом D_a. Розглянемо рівняння $a^{\chi} = a$, де χ - автоморфізм 2-го типу.

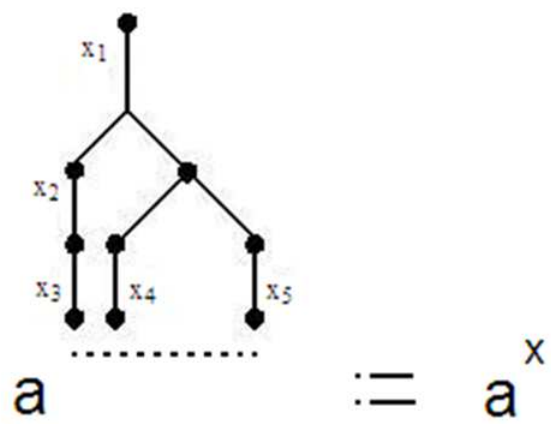
Для кожного $c_a \in D_a$ обмеження $a[c_a] : c_a \to c_a$ можна розглядати, як автоморфізм максимального про-порядку, оскільки маємо дію на одному циклі. Для автоморфізмів χ 2-го типу маємо

$$a[c_a]^{\chi[c_a]} = a[c_a].$$

Оскільки $a[c_a]$ - автоморфізм максимального про-порядку на c_a, то існує єдиний $p \in Z_2$, такий, що

$$\chi[c_a] = (a[c_a])^p.$$

Поставимо це p у відповідність до обраного c_a.



Де кожне $p \in Z_2$ що відповідає кінцю $c_a \in D_a$ визначає дію $\chi[c_a]$ автоморфізму χ 2-го типу на кінці c_a.

Лема 3.4.2. *H_a ізоморфна адитивній групі кільця розширених 2-адичних чисел по дереву $\delta_0(a)$.*

Доведення. Ізоморфізм встановлюється за наступним правилом:

$$p_1 + p_2 \leftrightarrow a^{p_1} \circ a^{p_2}$$

$$p_1, p_2 \in Z_{D_a}$$

$$a^{p_1}, a^{p_2} \in H_a$$

□

Означимо підкільце $Z_T^f \subset Z_T$ в якому на кінцях $x \in T$ записують вищезазначеним чином двійковий 2-адичний розклад тільки для $x \in \mathbb{Z}$. Оскільки для кожного автоморфізма $a \in AutT_2$ обмеження $a[c_a]$ можна розглядати, як автоморфізм максимального про-порядку,то маємо наступне твердження:

Теорема 3.4.3. *Замикання групи* $\overline{Z_T^{f+}}$ *у вищезгаданій топології ізоморфно* H_a .

Теорема 3.4.4. $C_{AutT_2}(a) \cong H_a \leftthreetimes K_a$.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$a^\chi = a.$$

Нехай автоморфізм χ переводить характеристичне дерево $\delta_1(a)$ в $\delta_2(a)$. Дія

$$\chi[\delta_1(a)] : \delta_1(a) \to \delta_2(a)$$

розкладається єдиним чином в суперпозицію двох дій

$$\alpha_2 : \delta_1(a) \to \delta_2(a)$$

та

$$\alpha_1 : \delta_2(a) \to \delta_2(a)$$

$$\chi[\delta_1(a)] : \alpha_2[\delta_1(a)] \circ \alpha_1[\delta_2(a)],$$

де $\alpha_2[\delta_1(a)]$ залишає кожен кінець $y \in \delta_1(a)$ у тому ж самому кінці $c_a \in D_a$, що і кінець $y = y * \alpha_2$, а $\alpha_1[\delta_2(a)]$ є автоморфізмом дерева $\delta_2(a)$.

За теоремою (3.4.2) автоморфізм $\alpha_2[\delta_1(a)]$ єдиним чином продовжується до автоморфізму $\alpha_2 \in AutT_2$ 2-го типу, $\alpha_1[\delta_2(a)]$ єдиним чином продовжується до автоморфізму $\alpha_1 \in AutT_2$ 1-го типу , тобто $\chi = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Звідси множина $C_{AutT_2}(a)$ складається з елементів добутку $H_a \circ K_a$.

Далі, оскільки група K_a природнім чином вкладається в групу автоморфізмів групи H_a, то централізатор елемента можна розглядати як напівпрямий добуток цих двох груп.

$\square$

4 Спряженість в $FAutT_2$

4.1 Група скінченностанових автоматних підстановок.

Детальніше опишемо групу скінченностанових автоматних підстановок $FAutT_2$.

Дію автоморфізму $\alpha \in AutT_2$ на дереві T_2 можна закодувати наступним чином. Помітимо вершину n-того рівня 1-ю, якщо автоморфізм α переставляє вершини $(n+1)$-го рівня, суміжні з нею, і 0-м, якщо залишає ці вершини на місці (вершиною n-того рівня називається вершина, що з'єднана з коренем n ребрами). Таке представлення автоморфізму назвемо портретом.

Далі розглядаються тільки піддерева, які ізоморфні T_2 з коренем в певній вершині, що не містять вершин попереднього для кореня рівня. Портрет автоморфізму породжує портрети на всіх таких піддеревах. Далі таки портрети будемо називати станами автоморфізму.

Якщо для автоморфізму α маємо скінчену кількість станів, то назвемо α скінченностановим.

Множина скінченностанових автоморфізмів утворює групу $FAutT_2$.

Автоморфізми, що переводять квазіперіодичні кінці в квазіперіодичні утворюють множину $QAutT_2$. Очевидно, $QAutT_2$ є напівгрупою.

Має місце наступне твердження

Теорема 4.1.1. *$FAutT_2$ є власною підмножиною $QAutT_2$.*

Доведення. Дійсно, якщо автоморфізм α переводить квазіперіодичний кінець x в неперіодичний кінець y, то портрет автоморфізму α містить нескінчену кількість станів, які починаються у вершинах кінця x, оскільки в портреті автоморфізму α вершини квазіперіодичного кінця x кодуються неперіодичною послідовністю двійкого 2-адичного розкладу кінця y.

Далі, розглянемо автоморфізм β, який має наступний портрет: всі вершини деякого неперіодичного кінця x кодуються послідовністю двійкового 2-адичного розкладу кінця x, всі інші вершини 0-ми. Очевидно β належить $QAutT_2$, але не є скінченностановим, оскільки містить нескінчену кількість станів, які починаються у вершинах кінця x. Тобто $FAutT_2$ є власною підмножиною $QAutT_2$.

$QAutT_2$ не є групою. Дійсно, обернений автоморфізм до автоморфізму β переводить квазіперіодичний кінець ...00000 в неперіодичний кінець x, тобто β належить $QAutT_2$, а β^{-1} не належить $QAutT_2$. □

Очевидно, що група $FAutT_2$ є становo-замкненою.

Назвемо 2-адичну функцію скінченностановою, якщо автоморфізм дерева T_2, що її визначає, є скінченостановим.

Лема 4.1.1. $(x+p) \in FAutT_2 \Leftrightarrow p \in Z_2^{\mathbb{Q}}$.

Доведення. $\Rightarrow$ Автоморфізм $x+p : 0 \to p$. Скінченостановий автоморфізм переводить квазіперіодичні кінці в квазіперіодичні. Оскільки ...000 - квазіперіодичний, то і p-квазіперіодичний, тобто належить $Z_2^{\mathbb{Q}}$. p як квазіперіодичне число має наступний двійковий запис:

$$p = ...a_{k+m}...a_{k+1}...a_{k+m}...a_{k+1}a_k...a_2a_1.$$

Натуральне число $a_{k+m}...a_{k+1}$ будемо називати періодом числа p.

p можна представити у вигляді:

$$p = ...0...01...0...01 \cdot 2^k \cdot q + a_k...a_2a_1 \quad (1)$$

де період 0...01 складається з m цифр, а $q = a_{k+m}...a_{k+1}$- період числа p.

$\Leftarrow$ Нехай $\varepsilon = \gamma_{x+1}$, тобто ε - adding machine. Автоморфізм ε підноситься у 2-адичну степінь наступним чином:

$$\varepsilon^{2p} = (\varepsilon^p, \varepsilon^p), \varepsilon^{2p+1} = (\varepsilon^p, \varepsilon^{p+1}) \circ \sigma \quad (2)$$

Згідно з (1) $\varepsilon^p = (\varepsilon^{...01\frac{0...01}{m}})^{q*2^n} \circ \varepsilon^v$ де $q, m, v, n \in \mathbb{Z}^+$,$v$- початок довжини n двійкового запису числа p до початку періода q довжини m.

Згідно з (2) автоморфізм $\varepsilon^{...01\frac{0...01}{m}}$ містить m станів вигляду $(\varepsilon^{...01\frac{0...01}{m}})^{2^k}, k \in \{0, 1, ..., m-1\}$, та $m-1$ станів вигляду $(\varepsilon^{...01\frac{0...01}{m}})^{2^k} \circ \varepsilon, k \in \{1, ..., m-1\}$,тобто містить $2m-1$ станів. Оскільки $\varepsilon^{...01\frac{0...01}{m}}$ скінченостановий автоморфізм, то і ε^p-скінченостановий, так як $q, v, n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Лема 4.1.2. *Автоморфізм* $px \in FAutT_2 \Leftrightarrow p \in (Z_2^{\mathbb{Q}})^*$.

Доведення. Автоморфізми $f_1(x) = (2k+1)x$ та $f_2(x) = (1/(2k+1))x$ скінченостанові одночасно, оскільки

$$f_1 = {f_2}^{-1}$$

$$((2m+1)/(2k+1))x = (2m+1)x \circ (1/(2k+1))x$$

$$-kx = -x \circ kx$$

то достатньо довести, що $-x$ та $(2t+1)x$ - скінченостанові $\forall t \in \mathbb{Z}^+$.

$(2t+1)x$ містить тільки стани вигляду $(2t+1)x + f$, де $f \in \{0, 1, ..., (2t+1)\}$. Дійсно

$$(2t+1)x = ((2t+1)x, (2t+1)x + t)$$

$$(2t+1)x + 2f = ((2t+1)x + f, (2t+1)x + (k+f))$$

$$(2t+1)x + (2f+1) =$$

$$= ((2t+1)x + f, (2t+1)x + (t+f+1)) \circ \sigma$$

Якщо $f \le t$, то $t+f \le 2k, t+f+1 \le 2t+1$, тобто автоморфізм $(2t+1)x$ має не більше $2t+2$ станів.

Далі

$$-x = (-x, -x-1)$$

$$-x-1 = (-x-1, -x-1) \circ \sigma$$

тобто $-x$ - автоморфізм з 2-ма станами. $\square$

У рівнянні $\alpha^\chi = \beta$ розв'язок, який переводить ...000 в ...000 позначимо, як χ_0.

Лема 4.1.3. *Нехай ε та α спряжені в $AutT_2$. Рівняння $\varepsilon^\chi = \alpha$ має розв'язок в $\chi \in FAutT_2$ тоді й тільки тоді, коли $\exists \chi_0 \in FAutT_2$, такий, що $\varepsilon^{\chi_0} = \alpha$ (χ_0 : ...000 $\to$ ...000).*

Доведення. $\Leftarrow$ $\chi = \chi_0$

$\Rightarrow$ Для розв'язку $\chi : 0 \to p, \chi \in FAutT_2$ обов'язково $p \in Z_2^{\mathbb{Q}}$, оскільки скінченостановий автоморфізм переводить квазіперіодичні кінці в квазіперіодичні. Тоді(за лемою 4.1.1) ε^{-p} - скінченостановий автоморфізм і $\chi_0 = \varepsilon^{-p} \circ \chi : 0 \to 0$.

$\square$

Лема 4.1.4. $f(x) = p_1 x + p_2 \in FAutT_2 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}}$

Доведення.

$$p_1 x + p_2 = p_1 x \circ (x + p_2) \qquad (1)$$

$\Leftarrow x + p_2 \in FAutT_2, p_1 x \in FAutT_2$(леми 4.1.1,4.1.2).

$\Rightarrow p_1 x + p_2 : 0 \to p_2$. Оскільки $p_1 x + p_2 \in FAutT_2$, то $p_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}}$. За лемою 4.1.1 $x + p_2 \in FAutT_2$. Згідно з (1) $p_1 x \in FAutT_2$. За лемою 4.1.2 $p_1 \in Z_2^{\mathbb{Q}}$.

$\square$

Теорема 4.1.2. *Множина автоморфізмів, що задаються скінченностановими лінійними функціями є станово-замкненою самоподібною підгрупою групи скінченностанових автоморфізмів бінарного дерева $FAutT_2$.*

Доведення. Якщо числа

$$a, b, c, d, 2k$$

є раціональними, то очевидно, і числа

$$\frac{a-1}{2}, k, k+1, \frac{a-1}{2}+k, \frac{a-1}{2}+k+1, ca, cb+d, \frac{1}{a}, \frac{b}{a}$$

є також раціональними.

Отже множина станів скінченностанової лінійної функції складається зі скінченностанових лінійних функцій:

$$ax = (ax, ax + \frac{a-1}{2}),$$

$$x + 2k = (x + k, x + k),$$

$$x + 2k + 1 = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma,$$

$$ax + 2k = ax \circ (x + 2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + k, x + k) =$$

$$= (ax + k, ax + \frac{a-1}{2} + k),$$

$$ax + 2k + 1 = ax \circ (x + 2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + k, x + k + 1) \circ \sigma =$$

$$= (ax + k, ax + \frac{a-1}{2} + k + 1) \circ \sigma,$$

добуток скінченностанових лінійних функцій є скінченностановою лінійною функцією:

$$(ax + b) \circ (cx + d) = c(ax + b) + d = cax + (cb + d),$$

та обернена до скінченностанової лінійної функції є скінченностановою лінійною функцією:

$$(ax + b)^{-1} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Нейтральним елементом групи є скінченностанова лінійна функція:

$$f(x) = x.$$

□

Обчислимо централізатори елементів в групі скінченностанових лінінійних функцій.

Теорема 4.1.3. *Якщо автоморфізм* α *дерева* T_2*, що задається функцією* $f(x) = ax + b$ *є скінченностановим автоморфізмом максимального про-порядку, то його централізатор в групі скінченностанових автоморфізмів* $FAutT_2$ *має вигляд:*

$$C_{FAutT_2}(\alpha) = \langle \alpha^p | p = log_a((a-1)t+1), t \in Z_2 \cap \mathbb{Q} \rangle =$$
$$= \langle a^{log_a((a-1)t+1)}x + b\frac{a^{log_a((a-1)t+1)} - 1}{a-1} | t \in Z_2 \cap \mathbb{Q} \rangle =$$
$$= \langle ((a-1)t+1)x + bt | t \in Z_2 \cap \mathbb{Q} \rangle$$

Доведення. Оскільки

$$C_{FAutT_2}(\alpha) = C_{AutT_2}(\alpha) \cap FAutT_2$$

то ,використовуючи теорему 3.2.3, отримуємо рівність:

$$C_{FAutT_2}(\alpha) = \langle \alpha^p | p \in Z_2 \rangle \cap FAutT_2.$$

Далі, для раціонального числа a^p є раціональним числом, якщо

$$p = log_a r$$

, де r- раціональне число. Згідно з лемою 8.0.11 автоморфізм

$$f(x) = ax + b$$

є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли a та b- раціональні числа.

Використовуючи лему 8.0.11 та лему 3.2.2 остаточно отримуємо:

$$C_{FAutT_2}(\alpha) = \langle \alpha^p | p \in Z_2 \rangle \cap FAutT_2 =$$
$$= \langle a^p x + b\frac{a^p - 1}{a-1} | p \in Z_2 \rangle \cap FAutT_2 =$$
$$= \langle a^{log_a((a-1)t+1)}x + b\frac{a^{log_a((a-1)t+1)} - 1}{a-1} | t \in Z_2 \cap \mathbb{Q} \rangle =$$
$$= \langle ((a-1)t+1)x + bt | t \in Z_2 \cap \mathbb{Q} \rangle.$$

□

4.2 Скінченностанова спряженість лінійних функцій на кільці цілих 2-адичних чисел

Цей розділ присвячений відповіді на питання, чи спряжені в $FAutT_2$ скінченостанові автомати максимального про-порядку, що задаються лінійними функціями. Використані наступні позначення:

T_2 - однорідне кореневе дерево валентності 2, координатизоване природнім чином,

$AutT_2$ - група автоморфізмів дерева T_2,

e- нейтральний елемент групи $AutT_2$,

$FAutT_2$ - підгрупа скінченностанових автоматних підстановок в $AutT_2$,

Z_2 - кільце цілих 2-адичних чисел.

Розглянемо праву та ліву вершини 1-го рівня. Вони є коренями двох піддерев, які назвемо відповідно правим та лівим. Запис $\alpha = (\beta, \gamma)$ означає, що автоморфізм α на ліве піддерево діє автоморфізмом β, на ліве піддерево діє автоморфізмом γ, вершини 1-го рівня залишає на місці. Запис $\alpha = (\beta, \gamma) \circ \sigma$ означає, що автоморфізм α на ліве піддерево діє автоморфізмом β, на ліве піддерево діє автоморфізмом γ, вершини 1-го рівня міняє місцями. Автоморфізми β,γ є станами автоморфізму α.

Множення автоморфізмів відбувається наступним чином:

$$(\beta_1, \gamma_1) \circ (\beta_2, \gamma_2) = (\beta_1 \circ \beta_2, \gamma_1 \circ \gamma_2)$$

$$(\beta_1, \gamma_1) \circ \sigma \circ (\beta_2, \gamma_2) = (\beta_1 \circ \gamma_2, \gamma_1 \circ \beta_2) \circ \sigma$$

Поставимо у відповідність автоморфізмам з $AutT_2$ функції $Z_2 \to Z_2$. Нехай вершини T_2 занумеровано природним чином:для двох вершин $n+1$-го рівня, що з'єднані з однією вершиною n-го рівня, права вершина помічена 1, ліва 0.

Поставимо у відповідність кінцю x з дерева T_2 2-адичне число $\overline{x}$, двійковий запис якого співпадає з кодуванням x в T_2. Означимо функцію $f_\gamma : Z_2 \to Z_2$, що відповідає автоморфізму γ наступним чином $f_\gamma(\overline{x}) = x \circ \gamma$ (γ_f відповідає f). Далі будемо ототожнювати x та $\overline{x}$, f_γ та γ. Добуток автоморфізмів $\alpha \circ \beta$,будемо записувати як суперпозицію функцій $f_\alpha \circ f_\beta$(першою діє ліва функція).

Наприклад, adding machine, що задається автоматом $\varepsilon = (e, \varepsilon) \circ \sigma$ відповідає функції $f_\varepsilon(x) = x + 1$. Централізатор такої функції в $AutT_2$ складається з функцій

$f(x) = x + p, p \in Z_2$(див.[3]), тобто з 2-адичних степенів ε, оскільки

$$\varepsilon^p = \gamma_{x+1}^p = \gamma_{x+p}\ (\forall p \in Z_2)$$

Множину обертовних елементів в кільці K позначимо, як K^*.

Множину $\{p = m/(2n+1) | m, n \in \mathbb{Z}\}$ позначимо, як $Z_2^{\mathbb{Q}}$. Вона складається з 2-адичних чисел, що мають період в двійковому запису.

Лема 4.2.1. *Всі функції* $f(x) = ax + p, a$ $(p \in (Z_2^{\mathbb{Q}})^*)$ *спряжені з функцією* $f(x) = ax + 1$ *в* $FAutT_2$.

Доведення. Для рівняння $\alpha_{ax+1}^{\chi} = ax + p, \chi_0 = px$. Дійсно

$$p^{-1}x \circ (ax+1) \circ px =$$

$$= (a(p^{-1}x) + 1) \circ px = p(a(p^{-1}x) + 1) = ax + p$$

Згідно з лемою 2 $\chi_0 \in FAutT_2$. □

Теорема 4.2.1. *Автоморфізми* $f(x) = (4k+1)x + 1 (k \in Z_2)$ *-автоморфізми максимального про-порядку.*

Доведення.

$$(4k+1)x = ((4k+1)x, (4k+1)x + 2k) =$$

$$= ((4k+1)x, (4k+1)x) \circ (e, x + 2k)$$

Автоморфізм вигляду (a, a) належить коммутанту в $AutT_2$. $x + 2k$,а відповідно і $(e, x + 2k)$ належать коммутанту в $AutT_2$.

$$(4k+1)x + 1 = (4k+1)x \circ (x+1)$$

$x+1$- максимального про-порядку, отже і $(4k+1)x+1$- максимального про-порядку. □

Означимо $(4k+1)^{\widehat{x}}$, як $\chi_0 : 0 \to 0$ в рівнянні $x + 1^{\chi} = (4k+1)x + 1$. Має місце рівність

$$(4k+1)^x = 4k(4k+1)^{\widehat{x}} + 1 \qquad (*)$$

де $(4k+1)^x$ -функція, що продовжується з $\mathbb{Z}$ на Z_2 по неперервності в топології на Z_2, оскільки функція $\frac{(4k+1)^x - 1}{4k}$ є автоморфізмом з $AutT_2$ і

$$\left(\frac{4k+1)^x - 1}{4k}\right)^{-1} \circ (x+1) \circ$$

$$\circ(\frac{(4k+1)^x-1}{4k}) = (4k+1)x+1$$

Звернемо увагу на те, що $(4k+1)^x$ не задається автоморфізмом з $AutT_2$.

Теорема 4.2.2. *Функції $f_1(x) = x+1$ та $f_2(x) = 5x+1$ не спряжені в $FAutT_2$.*

Доведення. Дійсно, згідно з $(*)$ $5^x \in Z_2^q \Leftrightarrow 5^{\widehat{x}} \in Z_2^q$. Далі $5^{\widehat{x}} : 1/3 \to 5^{\widehat{1/3}}$. $\sqrt[3]{5}$ не належить $Z_2^q \Rightarrow 5^{\widehat{1/3}}$ не належить $Z_2^q \Rightarrow 5^{\widehat{x}} : 1/3 \to 5^{\widehat{1/3}}$ не належить $FAutT_2$. Згідно з лемою 3 $f_1(x) = x+1$ та $f_2(x) = 5x+1$ не спряжені в $FAutT_2$. □

Теорема 4.2.3. *Автоморфізми $ax+1$ та $a^{-1}x+1$ ($a = 4k+1, k \in Z_2^q, a \neq 1$) не спряжені в $FAutT_2$.*

Доведення. Множина функцій

$$\{\chi_k(x) = \frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)} | k \in Z_2\} \quad (1)$$

містить всі розв'язки рівняння по невідомому χ

$$\chi^{-1} \circ (ax+1) \circ \chi = \frac{1}{a}x + 1 \quad (2)$$

і тільки їх.

Покажемо, що $\chi_k(x)$ є розв'язком рівняння (2).

$$\chi^{-1}(x) = \frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)} \ ,$$

$$\chi_k^{-1}(x) \circ (ax+1) \circ \chi_k(x) =$$

$$= (\frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)}) \circ (ax+1) \circ (\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}) =$$

$$= (a(\frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)}) + 1) \circ (\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}) =$$

$$= (\frac{-a^{k-2}x + a^{\widehat{k-1}}}{a^{k-2}((a-1)x-a)}) \circ (\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}) =$$

$$\frac{(-x-a)/((a-1)x-a)}{-a/((a-1)x-a)} = \frac{-x-a}{-a} = \frac{1}{a}x + 1.$$

Далі, якщо χ є розв'язком рівняння (2) і переводить $\chi : 0 \to t, t \in Z_2$ (для рівняння (2) існує єдиний χ, такий, що $\chi : 0 \to t$, для фіксованого $t \in Z_2$. Див.[3]), то $\chi(x) = \chi_k(x)$, де $k = log_a(a^{k-1}(a-1)t+1)$, тобто інших розв'язків, крім (1), немає.

Автоморфізм дерева T_2, що задається функцією

$$f(x) = \frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}$$

не є скінченностановим для всіх 2-адичних k .

Дійсно, має місце наступна рівність

$$\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)} = (a^k x + a^{\widehat{k}}) \circ (\frac{x}{px+q})$$

де $p = (a-1)/a, q = 1/a$.

Далі, якщо автоморфізм $\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}$ є скінченностановим, то ,за лемою 5, і автоморфізм $a^k x + a^{\widehat{k}}$ є скінченностановим, оскільки $\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}$ переводить кінець ...0000 в квазіперіодичний,за теоремою 1 ,кінець $a^{\widehat{k}}/a^{k-1}$, а кінці $a^k, a^{\widehat{k}}$ та $a^{\widehat{k}}/a^{k-1}$ є квазіперіодичними одночасно. А автоморфізм $\frac{x}{px+q}$ містить нескінчену кількість станів вигляду

$$\frac{x}{p2^t x + q}, t \in \mathbb{Z}^+$$

тобто маємо протиріччя, і автоморфізм $\frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}$ - нескінченностановий $\forall k \in Z_2$.

Як наслідок, рівняння (2) не має розв'язків в $FAutT_2$. $\square$

Звернемо увагу на те, що згідно з лемою 4 автоморфізми $a^{-1}x+1$ та $a^{-1}x - a^{-1}$ спряжені в $FAutT_2$. Тобто, згідно з теоремою 4 автоморфізми $ax+1$ та $a^{-1}x - a^{-1}$ не спряжені в $FAutT_2$, хоча і мають однаковий зріст, оскільки $(ax+1)^{-1} = a^{-1}x - a^{-1}$. Тобто має місце наступне твердження:

Теорема 4.2.4. *Група $FAutT_2$ є амбівалентною.*

Теорема 4.2.5. *Функції $f_1(x) = (4k_1+1)x+1$ та $f_2(x) = (4k_2+1)x+1$ ($k_1, k_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}}$) спряжені в $FAutT_2 \Leftrightarrow 4k_1+1 = 4k_2+1$.*

Доведення. $ax+1, bx+1 (a = 4k_1+1, b = 4k_2+1\ k_1, k_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}},\ (4k_1+1) \neq (4k_2+1)^{\pm 1})$ не спряжені в $FAutT_2$.

Дійсно, якщо автоморфізми $\alpha, \beta \in FAutT_2$ спряжені в $FAutT_2$, то для всіх $p \in Z_2$ має місце $(\alpha^p \in FAutT_2) \Leftrightarrow (\beta^p \in FAutT_2)$(згідно з теоремою 4, ця умова не є достатньою). Далі, без обмеження загальності $b \neq a^n (n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1)$.

$\log_a((a-1)x+1)$ є бієкцією $Z_2 \to Z_2$, як функція, обернена до $a^{\widehat{x}} (a = 4k+1, k, x \in Z_2)$.

$(ax+1)^t = (a^t x + a^{\widehat{t}}) (t \in Z_2)$ $(**)$.

За теоремою Діріхле про наявність простих чисел в арифметичній прогресії $\exists x \in \mathbb{Z}$,таке, що $c = (a-1)x+1$- просте число, якого немає в розкладі a та b. Тоді (згідно з лемою 5 та (**)) $(ax+1)^{\log_a c} \in FAutT_2$,оскільки $a^{\log_a c} = c$ є раціональним числом, а $(bx+1)^{\log_a c}$ не належить $FAutT_2$,оскільки $b^{\log_a c}$ не є раціональним числом. Додаючи теорему 4 отримаємо результат теореми. □

Висновки

Скінченностанові автоморфізми максимального про-порядку, що задаються лінійними функціями $ax+c,\ bx+d\ (a,b,c,d \in Z_2)$ спряжені в $FAutT_2$ тоді і тільки тоді, коли $a=b$.

4.3 Розширення класу лінійних функцій

На відміну від автоморфізмів $x+1, 5x+1, 9x+1, ...$ автоморфізми $3x+1, 7x+1...$ не є максимального про-порядку. Для розширення запасу функцій введемо операцію $\bigoplus$ додавання за модулем 2.

Теорема 4.3.1. *Автоморфізми* $f(x) = (4k+3)x \oplus 1 (k \in Z_2)$ *-автоморфізми максимального про-порядку.*

Доведення. Автоморфізм вигляду (a,a) належить коммутанту в $AutT_2$. $x+2k$,а відповідно і $(e, x+2k)$ належать коммутанту в $AutT_2$. З рівності

$$(e, x+2k+1) \circ \sigma = (e, x+2k) \circ (e, x+1) \circ \sigma = (e, x+2k) \circ (x+1)$$

отримуємо, що

$$(e, x+2k+1) \circ \sigma$$

-автоморфізм максимального про-порядку.

Для $f(x) = (4k+3)x \oplus 1$ маємо:

$$(4k+3)x = ((4k+3)x, (4k+3)x+2k+1) =$$

$$= ((4k+3)x, (4k+3)x) \circ (e, x+2k+1)$$

Отже

$$(4k+3)x \oplus 1 = (4k+3)x \circ \sigma = ((4k+3)x, (4k+3)x) \circ ((e, x+2k+1) \circ \sigma)$$

- автоморфізм максимального про-порядку. □

Теорема 4.3.2. *Функції*

$$f_1(x) = (4k+1)x + 1$$

та

$$f_2(x) = -(4k+1)x \oplus 1 \ (k \in Z_2)$$

спряжені в $FAutT_2$.

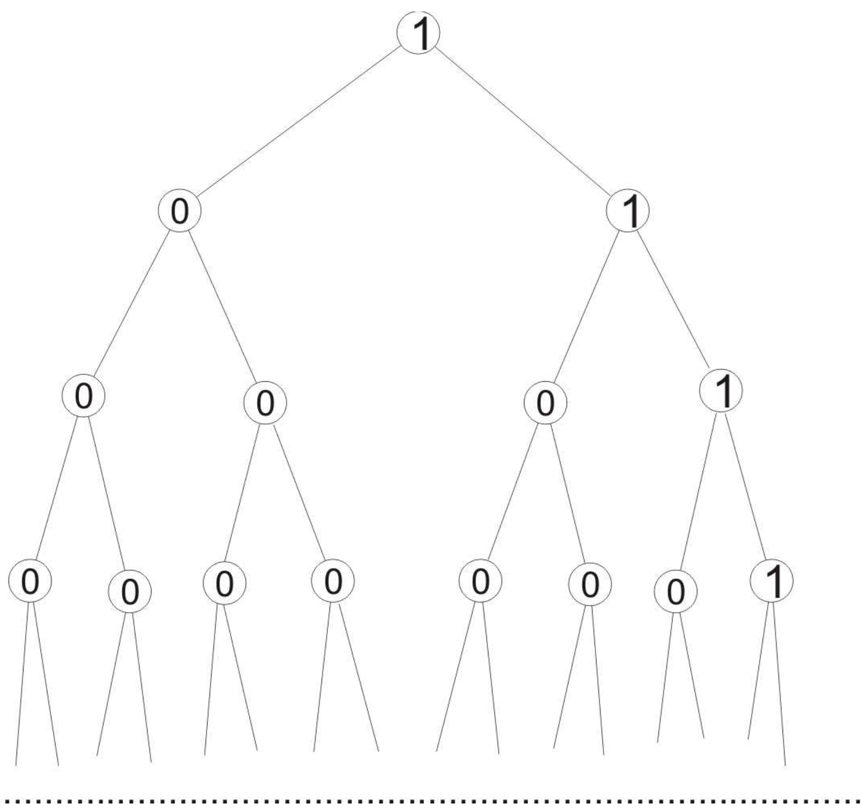
Доведення. Має місце рівність

$$(-x,x)^{-1} \circ ((4k+1)x+1) \circ (-x,x) = -(4k+1)x \oplus 1.$$

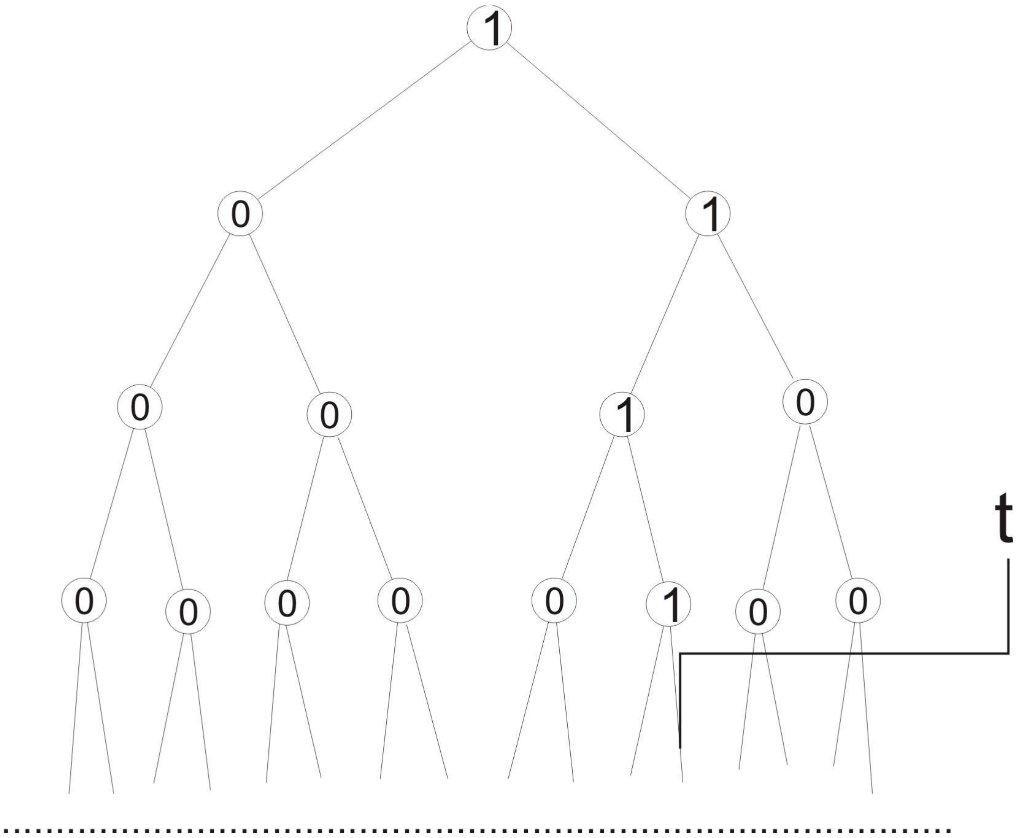
А оскільки $-x \in FAutT_2$, то і $(-x,x) \in FAutT_2$.

□

Автоморфізм ε, що задає adding machine має наступний портрет:



Позначимо, як ε_t(t-кінець дерева T_2) автоморфізм, портрет якого виглядає наступним чином:

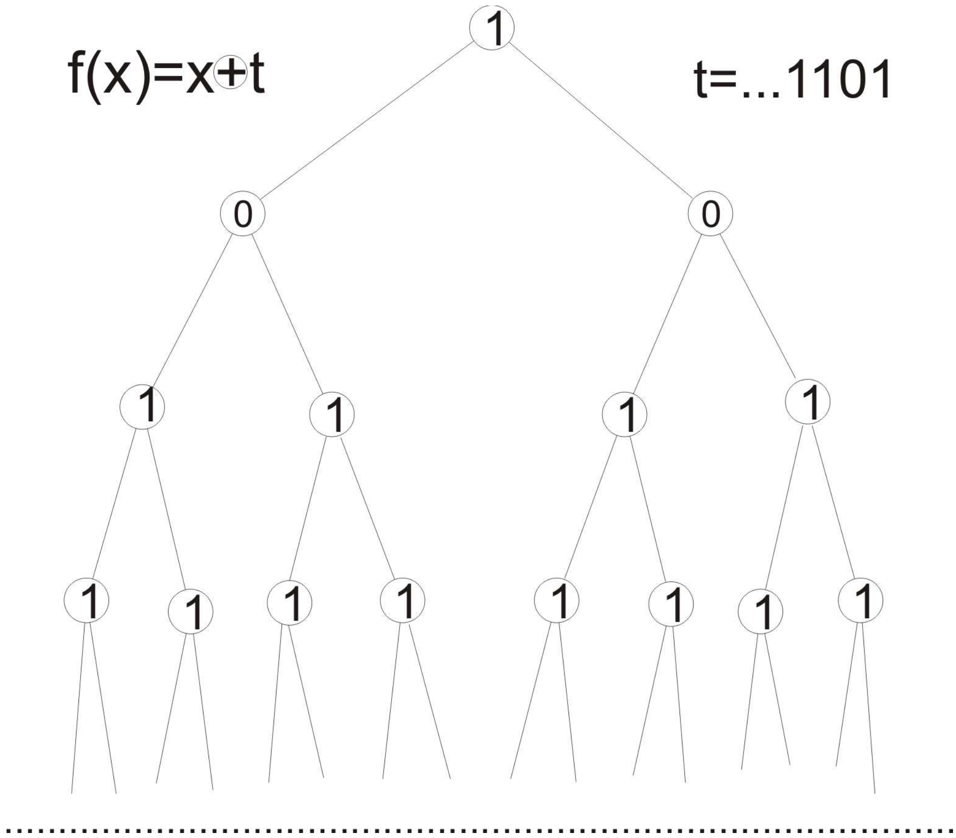


тобто на портреті вершини, що належать кінцю t відмічені 1-ю, всі інші вершини відмічені 0-м.

Співставимо кінцю 2-адичне число, що має такий же двійковий розклад. Поставимо у відповідність t автоморфізм дерева T_2, портрет якого будується наступним чином: якщо на к-му місці у двійковому розкладі t стоїть 1-ця, то всі вершини $k-1$-го рівня відповідного портрету відмічені 1-ми, якщо на к-му місці у двійковому розкладі t стоїть 0, то всі вершини $k-1$-го рівня відповідного портрету відмічені 0-ми.

Такий автоморфізм задається функцією $f(x) = x \oplus t$.

Наприклад, автоморфізм, що задається функцією $f(x) = x \oplus ...1101$ має такий портрет:



Має місце наступне твердження:

Теорема 4.3.3. *Автоморфізми ε та ε_t спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли t- раціональне.*

Доведення. Легко бачити, що

$$(x \oplus t)^{-1} = x \oplus t.$$

Далі:

$$(x \oplus t)^{-1} \circ \varepsilon \circ (x \oplus) t = (x \oplus t) \circ \varepsilon \circ (x \oplus t) = \varepsilon_t.$$

Оскільки автоморфізм $f(x) = x \oplus t$, є скінченностановим тоді, і тільки тоді, коли двійковий розклад t є квазіперіодичною послідовністю, тобто t є раціональним числом, то має місце твердження теореми. □

5 Ізометрії кільця Z_2

Зручною для роботи з двійковими автоматами, особливо з нескінченно-становими, є техніка їх представлення у вигляді функцій кільця Z_2.

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на Z_2. Кожен автоморфізм дерева α задає функцію f_α за правилом: якщо автоморфізм α переводить кінець x в кінець y, то $f_\alpha(x) = y$. Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією $f(x) = x + 1$.

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм необхідно, що б ця функція пару кінців з однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

Приклад 5.0.1. *Функція $f(x) = 2x$ переводить пару ...1111 та ...0000 в пару ...1110 та ...0000 відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція $f(x) = 2x$ не є автоморфізмом дерева.*

Приклад 5.0.2. *Функція $f(x) = x^2$ не є автоморфізмом дерева.*

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$(2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 =$$
$$= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) =$$
$$= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1)$$

то для пари 2-адичних чисел x_1, x_2, що мають спільний початок ненульової довжини n, пара x_1^2, x_2^2 має спільний початок як найменше довжини n+1, отже відображення $f(x) = x^2$ є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Далі наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця Z_2, що є стискаючими, тобто такими, що задовільняють умові Ліпшиця порядку 1 в ультраметриці:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$$

В цьому класі виділяється підможина, що відповідає ізометріям, а отже груповим автоматам.

5.1 Стискаючи функції кільця Z_2

Означимо метрику ρ на кільці Z_2. Кожен елемент $x \in Z_2$ можна єдиним чином представити у вигляді $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2.

Далі під фразою $a \in Z_2$ ділиться на $b \in Z_2$, будемо розуміти, що $\frac{a}{b}$ належить кільцю Z_2.

Означення 5.1.1. *Функція $ord_2(x)$ для $x \in Z_2$ означається наступним чином. Нехай $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2. Тоді $ord_2(x) = n$.*

Означення 5.1.2. *Означимо відстань $\rho(x, y)$ для $x, y \in Z_2$.*

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ord_2(x-y)}$$

Означення 5.1.3. *Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається ізометрією, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$$

Множину ізометрій позначимо як $AutZ_2$.

Означення 5.1.4. *Ізометрія $f : Z_2 \to Z_2$ називається шарово-транзитивною, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^k(0)$ має 2^n різних значень по модулю 2^n. Множину шарово-транзитивних ізометрій позначимо, як $STAutZ_2$*

Лема 5.1.1. *Функція f є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$.*

Доведення. Представимо $f(x) - f(y)$ та $x - y$ у вигляді: $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$, $x - y = u_2 * 2^{n_2}$, де - u_1, u_2 обертовні елементи кільця Z_2. Оскільки f - ізометрія, то $n_1 = n_2$. Отже маємо:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{u_1}{u_2} = u_1 * u_2^{-1}$$

тобто дріб належить групі одиниць кільця Z_2.

З іншої сторони, якщо для всіх $x, y \in Z_2$ добуток $2^{n_1-n_2} * u_1 * u_2^{-1}$ належить групі одиниць кільця Z_2, то $n_1 = n_2$, тому f - ізометрія.

Означення 5.1.5. *Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$$

Множину стискаючих функцій позначимо як $EndZ_2$.

□

Означення 5.1.6. *Функція* $f : Z_2 \to Z_2$ *називається строго-стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

Множину строго-стискаючих функцій позначимо як $CEndZ_2$.

Зауваження 5.1.1. *Нехай різниця* $x-y$ *ділиться на* 2^n $(n \in \mathbb{N})$. *Тоді те що функція* $f(x)$ *є*

a) ізометрією, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ *ділиться на* 2^n*, але не ділиться на* 2^{n+1} *(дріб* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *належить групі одиниць кільця* Z_2*)*

b) строго-стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ *ділиться на* 2^{n+1}*(дріб* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *належить* $2 * Z_2$*)*

c) стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ *ділиться на* 2^n *(дріб* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *належить* Z_2*)*

Зауваження 5.1.2. *Легко бачити, що об'єднання множини ізометрій з множиною строго стискаючих функцій є власною підмножиною множини стискаючих функцій.*

Теорема 5.1.1. *Якщо* f *- стискаюча,* g *- стискаюча, то* $f + g$ *- стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, другий доданок також ділиться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f + g$ є стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.2. *Якщо* f *- ізометрія,* g *- строго стискаюча, то* $f + g$ *- ізометрія*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f - ізометрія, а g - строго стискаюча функція. Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f+g$ є ізометрією. □

Теорема 5.1.3. *Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f+g$ - строго стискаюча*

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))=$$

$$=(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1}, і звідси маємо, що $f+g$ є строго стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.4. *Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то $f+g$ - строго стискаюча*

Доведення.

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=a_1+a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f та g - ізометрії, то a_1 та a_2 належать множині обертовних елементів кільця Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже a_1+a_2 ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$ і тому $f+g$ - строго стискаюча функція. □

Наслідок 5.1.1. *Якщо f, g та h - ізометрії, то то $f+g+h$ - ізометрія*

Дійсно, оскільки за теоремою $g+h$ - строго стискаюча, а f- ізометрія, то за теоремою $f+(g+h)$ - ізометрія.

Теорема 5.1.5. *Якщо f - стискаюча, то $2*f$ - строго стискаюча функція.*

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді $f(x)-f(y)$ також ділиться на 2^n, оскільки f є стискаючою. Розглянемо різницю

$$2*f(x)-2*f(y)=2*(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності ділиться на 2^{n+1}, отже маємо, що $2 * f$ є строго стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.6. *Якщо f - стискаюча, g - стискаюча, то $f * g$ - стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x) * g(x) - f(y) * g(y) =$$

$$= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^n. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f * g$ є стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.7. *Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f*g$ - строго стискаюча.*

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x) * g(x) - f(y) * g(y) =$$

$$= f(x) * (g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^{n+1}. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f * g$ є строго стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.8. *Нехай f - ізометрія, а g - стискаюча функція.*

Тоді $f * (2 * g + 1)$ - ізометрія

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x) - f(y)$ та $g(x) - g(y)$ обидві діляться на 2^n, але не діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - ізометрії.

Розглянемо різницю

$$f(x) * (2 * g(x) + 1) - f(y) * (2 * g(y) + 1) =$$

$$= 2 * f(x) * (g(x) - g(y)) + (2 * g(y) + 1) * (f(x) - f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} . Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f * (2 * g + 1)$ є ізометрією. □

Наслідок 5.1.2. *Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $f * (2 * g + 1)$ - ізометрія*

Дійсно, і ізометрія і строго стискаюча функція є стискаючими.

Теорема 5.1.9. *Нехай функції f та g є стискаючими.*

Тоді $2 * f * g$ - строго стискаюча функція

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{2f(x) * g(x)}{x - y} - \frac{2f(y) * g(y)}{x - y} = \frac{2((f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)))}{x - y} =$$

$$= 2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2$$

$$a_1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},\ a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

Оскільки f та g - стискаючи, то a_1 та a_2 належать Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$. Отже $2g(x) * a_1 + 2f(y) * a_2$ ділиться на 2 для всіх $x, y \in Z_2$ і тому $2 * f * g$ - строго стискаюча функція. □

Наслідок 5.1.3. *Нехай f - ізометрія, або строго стискаюча функція, g - ізометрія, або строго стискаюча функція. Тоді $2 * f * g$ - строго стискаюча функція.*

Теорема 5.1.10. *Якщо f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то*

$$\frac{f}{2 * g + 1}$$

- ізометрія.

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{f(x)}{2g(x) + 1} - \frac{f(y)}{2g(y) + 1} = \frac{2(f(x)g(y) - f(y)g(x)) + f(x) - f(y)}{(2g(x) + 1)(2g(y) + 1)}$$

Знаменник не впливає на парність дробу, оскільки є добутком обертовних елементів кільця Z_2.

Розглянемо відношення:

$$\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(y)-f(y)(g(x)-g(y)))+(f(x)-f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{2(f(x)-f(y))g(y)}{x-y}-\frac{2f(y)(g(x)-g(y))}{x-y}+\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то a_1 належить множині обертовних елементів кільця Z_2, а a_2 належить Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$. Отже

$$(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

належить множині обертовних елементів кільця Z_2, і тому $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія. □

Наслідок 5.1.4. *Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія*

Теорема 5.1.11. *Якщо f - строго стискаюча функція, g - строго стискаюча функція, то суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ - строго стискаюча функція.*

Доведення. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

ділиться на 2 для всіх $x, y \in Z_2$.

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}*\frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб ділиться на 2, оскільки f - строго стискаюча функція. Другий дріб також ділиться на 2, оскільки g - строго стискаюча функція. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ є строго стискаючою функцією. □

Теорема 5.1.12. *Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ - ізометрія.*

Доведення. Скористаємось лемою 5.1.1. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y}$$

належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} * \frac{g(f(x)) - g(f(y))}{f(x) - f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки f - ізометрія. Другий дріб також належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки g - ізометрія. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ є ізометрією. □

Наслідком попередніх теорем є наступні три теореми:

Теорема 5.1.13. *Стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце з мультиплікативною одиницею $f(x) = x$ відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 5.1.14. *Строго стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце без одиниці відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина строго стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 5.1.15. *Множина ізометрій кільця Z_2 є класом суміжності по підгрупі строго стискаючих функцій відносно операції поелементного додавання в групі стискаючих функцій.*

Наступна теорема потрібна для продовження натуральних функцій до 2-адичних ізометрій.

Теорема 5.1.16. *Ізометрія χ, визначена на всюди щільній в Z_2 підмножині M, єдиним чином продовжується до ізометрії $\overline{\chi}$ на Z_2.*

Доведення. Оскільки ізометрія є неперевною функцією, а множина M є всюду щільною в Z_2, то для елемента $x \notin M$ значення $\overline{\chi}(x)$ визначено єдиним чином, як

$$\overline{\chi}(x) = \lim_{n \to \infty} \chi(x_n)$$

де $\{x_n\}$ послідовність елементів із M, збіжна к x в Z_2.

На множині M функція $\overline{\chi}$ співпадає з χ. □

Теорема 5.1.17. *Шарово-транзитивна функція $f : Z_2 \to Z_2$ є ізометрією тоді і лише тоді, коли оператор примитивної рекурсії $g(x) = I[f](x)(g(0) = 0, g(x+1) = f(g(x)))$ від функції $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ визначає функцію g, неперервне продовження якої на Z_2 є ізометрією кільця Z_2.*

Доведення. Якщо f -шарово-транзитивна ізометрія, то $I[f](x)$ є 0-розв'язком(0-розв'язок - розв'язок, що переводить 0 в 0) рівняння спряженості $\varepsilon^\chi = f$. Дійсно, якщо $\chi(0) = 0$, то $\chi(n) = f^n(0)$ для $x \in \mathbb{N}$. Звідси $\chi(n+1) = f(f^n(0)) = f(\chi(n))$ і $\chi(x) = I[f](x)(x \in \ \mathbb{N})$. Оскільки $\mathbb{N}$ всюди щільна в Z_2, то, згідно з теоремою 5.1.16 існує єдине продовження ізометрії $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ до ізометрії $\chi : Z_2 \to Z_2$.

З іншого боку, якщо ізометрія f не є шарово-транзитивною, то замикання множини $M = \{x | x = f^n(0), n \in \mathbb{N}\}$ є власною підмножиною Z_2, тобто χ не є сюр'єктивним відображенням з Z_2 на Z_2, і тому не є ізометрією. □

Приклад 5.1.1. *Легко бачити, що, $f(x) = x$ є ізометрією, а $g(x) = c, c \in Z_2$ строго стискаючою функцією. Тому, згідно з теоремою $f(x) + g(x) = x + c,\ c \in Z_2$ є ізометрією.*

Приклад 5.1.2. *Оскільки $f(x) = x+c,\ c \in Z_2$ є ізометрією, а для $c \in Z_2^*$ $f(x) = x+c$ є шарово-транзитивною ізометрією і $I[x+c](x) = c * x$ то, згідно з теоремою $g(x) = c * x\ (c \in Z_2^*)$ є ізометрією.*

Приклад 5.1.3. *Оскільки $f(x) = a * x\ (a \in Z_2^*)$ є ізометрією, а $g(x) = b, b \in Z_2$ строго стискаючою функцією, то, згідно з теоремою лінійна функція $f(x) + g(x) = a * x + b,\ c \in Z_2$ є ізометрією.*

5.2 Ізометричні многочлени кільця Z_2

Розглянемо многочлени кільця $Z_2[x]$. У цьому розділі буде сформульовано умови, при яких многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ буде ізометрією кільця Z_2. Означимо $S_n(x_1, x_2)$, як

$$S_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1} \cdot x_2^k$$

Приклад 5.2.1. $S_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2,\ S_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ *і т.д.*

Означення 5.2.1. *Означимо функцію $\mu(x) = \overline{x}$:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \in 2 \cdot Z_2 \\ 1, x \in Z_2^* \end{cases}$$

Теорема 5.2.1. $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$

Доведення. S_{2k} складається з с парної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Тому S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 непарні. Очевидно, що S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 є парними. Крім того $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$, тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 - різної парності. Отже таблиця значень для $\overline{S_{2k}}(x_1, x_2)$ співпадає з таблицею істинності для $\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$. □

Теорема 5.2.2. $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cup \overline{x_2}$

Доведення. S_{2k+1} складається з с непарної кількості доданків, кожен з яких буде непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 непарні. Очевидно, що S_{2k} є парним, якщо x_1 та x_2 є парними. Крім того $S_{2k} = x_1 + S_{2k-1} \cdot x_2 = S_{2k-1} \cdot x_1 + x_2$, тому S_{2k} є непарним, якщо x_1 та x_2 - різної парності. Отже таблиця значень для $\overline{S_{2k+1}}(x_1, x_2)$ співпадає з таблицею істинності для $\overline{x_1} \cup \overline{x_2}$. □

Означення 5.2.2.

$$D_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Лема 5.2.1. *Для многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *має місце рівність*

$$D_f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x_1, x_2)$$

Теорема 5.2.3. *Многочлен* $f(x) \in Z_2[x]$ *є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли*

$$\forall\ x_1, x_2 \in Z_2\ \overline{D_f}(x_1, x_2) = 1$$

Означення 5.2.3. *Для многочлена* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *означимо* A_f *та* B_f*:*

$$A_f = \mu\left(\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} a_{2k}\right)$$

$$B_f = \mu\left(\sum_{k=2}^{[\frac{n+1}{2}]} a_{2k-1}\right)$$

Теорема 5.2.4. *Має місце наступна рівність:*

$$\overline{D_f}(x_1, x_2) = \overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$$

Наслідок 5.2.1. *Згідно з теоремами 5.2.3 та 5.2.4 многочлен* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли формула* $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ *є тотожньо-істиною.*

Теорема 5.2.5. $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ *є тотожньо-істиною тоді, і тільки тоді, коли* $\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$

Доведення. Побудуємо табличку вигляду формули $\overline{a_1} \oplus (A_f \cap (x_1 \oplus x_2)) \oplus (B_f \cap (x_1 \cup x_2))$ для різних значень $\overline{a_1},\ A_f,\ B_f$.

$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 0,\ B_f = 0$	0
$\overline{a_1} = 0,\ A = 0,\ B_f = 1$	$x_1 \cup x_2$
$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 1,\ B_f = 0$	$x_1 \oplus x_2$
$\overline{a_1} = 0,\ A_f = 1,\ B_f = 1$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$	1
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 1$	$\neg(x_1 \cup x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 1,\ B_f = 0$	$\neg(x_1 \oplus x_2)$
$\overline{a_1} = 1,\ A_f = 1,\ B_f = 1$	$\neg((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2))$

Таблиці істинності формул $x_1 \cup x_2$, $x_1 \oplus x_2$ та $(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$ мають наступний вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \cup x_2$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \cup x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

Отже формула є тотожньо-хибною для $\overline{a_1} = 0,\ A_f = 0,\ B_f = 0$, тотожньо-істиною для $\overline{a_1} = 1,\ A_f = 0,\ B_f = 0$ і виконливою у всіх інших випадках. □

Наслідок 5.2.2. *Згідно з наслідком 5.2.1 та теоремою 5.2.5 многочлен* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ *є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли коефіцієнт* a_1 *є непарним 2-адичним числом, сума коефіцієнтів з парними номерами більше 0 є парним 2-адичним числом та сума коефіцієнтів з непарними номерами більше 3 є парним 2-адичним числом*

Приклад 5.2.2. *Згідно з наслідком 5.2.2 наступні многочлени є ізометріями:*

$$f(x) = 5x + 1$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x$$

а многочлени

$$f(x) = 4x + 1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 3x$$

не є ізометріями

6 Централізатори шарово-транзитивних елементів в групі скінченно-станових автоморфізмів $FAutT_2$

Відомо, що централізатори шарово-транзитивних елементів в $AutT_2$ описуються наступною теоремою:

Теорема 6.0.6. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Метою даної роботи є дослідження централізаторів шарово-транзитивних елементів в $FAutT_2$, оскільки результату, аналогічного теоремі 6.0.6 для $FAutT_2$ немає.

Означення 6.0.4. *Позначимо як:*

$x * a$ - ліву дію автоморфізму a на кінець x дерева T_2,

$a \circ b$ - суперпозицію автоморфізмів a та b дерева T_2,

Z_2 - кільце цілих 2-адичних чисел.

Лема 6.0.2. *Для $p \in Z_2$ має місце рівність:*

$$0 * \varepsilon^p = p$$

Доведення. Оскільки $t * \varepsilon^p = t + p$, то $0 * \varepsilon^p = 0 + p = p$. □

Теорема 6.0.7. *Нехай χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t. Тоді має місце рівність:*

$$0 * x^p = p * \chi_x$$

Доведення. Оскільки $\varepsilon^{\chi_x} = x$, то має місце співвідношення:

$$x^p = (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon \circ \chi_x)^p = \chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x$$

Отже за лемою 6.0.2 та рівністю $0 * \chi_x = 0$ отримуємо:

$$0 * x^p = 0 * (\chi_x^{-1} \circ \varepsilon^p \circ \chi_x) = ((0 * \chi_x^{-1}) * \varepsilon^p) * \chi_x) = (0 * \varepsilon^p) * \chi_x = p * \chi_x$$

щ.т.д. □

Має місце наступна лема:

Лема 6.0.3. *Нехай x - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{AutT_2}(x) = Z_2$$

Доведення. За теоремою 6.0.6

$$C_{AutT_2}(x) = \{x^p | p \in Z_2\}$$

Далі, скориставшись теоремою 6.0.7, маємо:

$$0 * x^{Z_2} = Z_2 * \chi_x$$

де χ_x - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = x$ відносно автоморфізма t.

Оскільки χ_x - автоморфізм, то

$$Z_2 * \chi_x = Z_2$$

щ.т.д. □

Означення 6.0.5. *Означимо множину $F_p (p \in Z_2)$ наступним чином:*

$p \in F_p$,

якщо $2t+1 \in F_p$, то $t \in F_p, t+1 \in F_p$,

якщо $2t \in F_p$, то $t \in F_p$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в F_p, якщо отримано з p за k кроків.

Означення 6.0.6. *Означимо множину $P_{m,n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ наступним чином:*

$m \in P_{m,n}$,

якщо $2t+1 \in P_{m,n}$, то $t-n \in P_{m,n}$, $t+n+1 \in P_{m,n}$,

якщо $2t \in P_{m,n}$, то $t \in P_{m,n}$.

Будемо казати, що t_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, якщо отримано з m за k кроків.

Лема 6.0.4. *Нехай 2-адичне квазіперіодичне число p дорівнює $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$. Тоді множини $P_{m,n}$ та F_p скінченні або нескінченні одночасно.*

Доведення. Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{2m+1}{2n+1} = 2\frac{m-n}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2m}{2n+1} = 2\frac{m}{2n+1}$$

то в F_p $\frac{2m+1}{2n+1}$ породжує $\frac{m-n}{2n+1}$ та $\frac{m+n+1}{2n+1}$, а $\frac{2m}{2n+1}$ породжує $\frac{m}{2n+1}$.

Отже, якщо t_k належить k-му рівню в F_p, то $t_k(2n+1)$ належить k-му рівню в $P_{m,n}$, і навпаки, якщо t'_k належить k-му рівню в $P_{m,n}$, то $\frac{t'_k}{2n+1}$ належить k-му рівню в F_p. Тому має місце рівність:

$$|P_{m,n}| = |F_p|$$

щ.т.д. □

Лема 6.0.5. *Множина* $P_{m,n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$ *є скінченою.*

Доведення. Згідно з означенням, якщо $t \in P_{m,n}$, то або $\frac{t}{2}$ або $\frac{t-1}{2}-n$ та $\frac{t-1}{2}+n+1$.Нехай t_k відноситься до k-го рівня в $P_{m,n}$, тоді має місце рівність:

$$t_k = \frac{t_{k-1} + a*(2n+1)}{2}, a = 0, 1, -1$$

Використавши цю рівність k разів, отримаємо:

$$t_k = \frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})$$

Оскільки $|a_i| \leq 1$, то маємо наступну оцінку:

$$|t_k| = \left|\frac{m}{2^k} + (2n+1)(\frac{a_0}{2^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2})\right| \leq \left|\frac{m}{2^k}\right| + |2n+1| \leq |m| + 2n + 1$$

Отже кількість елеметів в множині $P_{m,n}$ обмежено нерівністю:

$$|P_{m,n}| \leq 2(|m| + 2n + 1)$$

тому множина $P_{m,n}$ є скінченою, щ.т.д. □

Лема 6.0.6. *Множина* F_p *скінченна тоді, і тільки тоді, коли* p *- квазіперіодичне число.*

Доведення. $\Rightarrow$ Для $2t+1$ та $2t$ число t отримується відкиданням останьої цифри у двійковому запису, отже F_p містить всі числа, що отримуються з p відкиданням декількох останніх цифр. Якщо p не квазіперіодичне, то маємо нескінченну кількість таких чисел, тому F_p не є скінченною.

$\Leftarrow$ p - квазіперіодичне число тоді і лише тоді, коли $p = \frac{m}{2n+1}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup 0)$. Отже за лемами 6.0.4 та 6.0.5 множина F_p є скінченною. □

Теорема 6.0.8. *Нехай ε - adding machine. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Доведення. Оскільки має місце рівність

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = C_{AutT_2}(\varepsilon) \cap FAutT_2$$

то, за теоремою 6.0.6, елементи централізатора $C_{FAutT_2}(\varepsilon)$ мають вигляд $\{\varepsilon^p | \varepsilon^p \in FAutT_2\}$. Легко бачити, якщо p - не квазіперіодичне число, то ε^p - нескінченно-становий, оскільки переводить квазіперіодичне число 0 в не квазіперіодичне число p. Далі, нехай $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$, тобто квазіперіодичне. За лемою 6.0.6 множина F_p - скінченна. З іншої сторони, мають місце рівності:

$$\varepsilon^{2t+1} = (\varepsilon^t, \varepsilon^{t+1}) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2t} = (\varepsilon^t, \varepsilon^t)$$

Отже стани автоморфізму ε^p вичерпуються автоморфізмами вигляду

$$\varepsilon^t, t \in F_p$$

Оскільки F_p - скінченна, то ε^p - скінченно-становий автоморфізм, щ.т.д. □

Теорема 6.0.9. *Нехай ε - adding machine. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(\varepsilon) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. За теоремою 6.0.8

$$C_{FAutT_2}(\varepsilon) = \{\varepsilon^p | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

Далі, скориставшись лемою 6.0.2, маємо:

$$0 * \varepsilon^{Z_2 \cap \mathbb{Q}} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

щ.т.д. □

Теореми 6.0.8 та 6.0.9 можна застосувати для дослідження скінченно-станової спряженості з автоморфізмом ε - adding machine. Це показує наступна теорема:

Теорема 6.0.10. *Якщо 0-розв'язок t_0 рівняння спряженості відносно t*

$$\varepsilon^t = a$$

не є скінченно-становим, то це рівняння не має скінченно-станових розв'язків.

Доведення. Припустимо, що t_0 - нескінченно-становий, а рівняння $\varepsilon^t = a$ має скінченно-становий розв'язок $t' : p \to 0$, де p - квазіперіодичне число. Оскільки кожен розв'язок єдиним чином можна представити у вигляді

$$t' = x \circ t_0, x \in C_{FAutT_2}(\varepsilon)$$

та $p * \varepsilon^{-p} = 0$, то за теоремою 6.0.8 $t' = \varepsilon^{-p} \circ t_0$. Оскільки t_0 - нескінченно-становий, а ε^{-p} - скінченно-становий, то t' - нескінченно-становий. Отже маємо протиріччя. □

Теорема 6.0.11. *Нехай a - шарово-транзитивний автоморфізм. Тоді*

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

де χ_a - 0-розв'язок рівняння спряженості $\varepsilon^t = a$ відносно t.

Доведення. Має місце наступна рівність:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = p$$

Дійсно, за теоремою 6.0.7 отримаємо:

$$0 * a^{(p*\chi_a^{-1})} = (p * \chi_a^{-1}) * \chi_a = p * (\chi_a^{-1}) \circ \chi_a) = p$$

Отже $a^{(p*\chi_a^{-1})}$ може бути скінченно-становим тільки тоді, коли $p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$. З іншої сторони за теоремою 6.0.6 усі елементи централізатора $C_{AutT_2}(a)$ мають вигляд $a^{(p*\chi_a^{-1})}$, оскільки χ_a^{-1} - автоморфізм Z_2. Приймаючи до уваги, що

$$C_{FAutT_2}(a) = C_{AutT_2}(a) \cap FAutT_2$$

отримуємо включення

$$C_{FAutT_2}(a) \subseteq \{a^{(p*\chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\}$$

щ.т.д. □

Означення 6.0.7. *Означимо функцію* $h_x : C_{AutZ_2}(x) \to Z_2$*, де* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм, наступним чином:*

$$h_x(u) = 0 * u$$

Зауважимо, що згідно з означенням

Теорема 6.0.12. *Скінченностановий автоморфізм* x *є шарово-транзитивним тоді, і тільки тоді, коли* $h_x : C_{AutT_2}(x) \to Z_2$ *- бієкція.*

Означення 6.0.8. *Означимо функцію* $Log_x : C_{AutZ_2}(x) \to Z_2$*, де* x *- шарово-транзитивний скінченно-становий автоморфізм, наступним чином:* $Log_x(u) = t$ *для* $u = x^t$*.*

Теорема 6.0.13. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

Доведення. Згідно з теоремою 6.0.11 маємо включення:

$$0 * C_{FAutT_2}(x) \subseteq \{0 * a^{(p * \chi_a^{-1})} | p \in Z_2 \cap \mathbb{Q}\} = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

□

Теорема 6.0.14. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді* $Log_x : C_{AutT_2}(x) \to Z_2$ *- бієкція.*

Гіпотеза 6.0.1. *Нехай* x *- шарово-транзитивний скінченностановий автоморфізм. Тоді*

$$0 * C_{FAutT_2}(x) = (Z_2 \cap \mathbb{Q})$$

7 Загальні питання спряженості

Означення 7.0.9. *Означимо функцію $\varphi : STAutZ_2 \to STAutZ_2$ наступним чином $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$, де x_1, x_2 визначаються співвідношенням $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

Функція визначена корректно, оскільки, якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2, то і $x_1 \circ x_2$ є шарово-транзитивним автоморфізмом кільця Z_2.

Означення 7.0.10. *Означимо функцію $\pi_L : AutZ_2 \to AutZ_2$ наступним чином $\pi_L(x) = x_1$, де x_1 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

Означення 7.0.11. *Означимо функцію $\pi_R : AutZ_2 \to AutZ_2$ наступним чином $\pi_R(x) = x_2$, де x_2 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$*

Очевидно, що для шарово-транзитивного автоморфізма a має місце рівність $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$ і значення $\pi_L(a), \pi_R(a)$ та $\varphi(a)$ зв'язані наступним співвідношенням:

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a)$$

Крім того, для автоморфізмів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1},\ \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1}$$

$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1},\ \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1}$$

$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b),\ \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b)$$

$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a),\ \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a)$$

Теорема 7.0.15. *Нехай a, b - шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2, а χ_0 - 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b)$$

Доведення. Дійсно, оскільки $a^{\chi_0} = b$, то $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0)$$

$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0)$$

Скористаємось методом математичної індукції:

1) Для n=0 маємо рівність $a^{\chi_0} = b$ і тверження виконується. 2) Нехай для $n = k$ твердження теореми виконується, тобто $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$. Покажемо, що воно також має місце для $n = k + 1$.

Оскільки $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$, то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і $\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) = \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)}$, тому має місце рівність $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$ і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми. ☐

Теорема 7.0.16. *Нехай a, b - шарово-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця Z_2. Тоді має місце твердження, що χ_0 - 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$ є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли $\pi_L^n(\chi_0)$ є скінченностановим для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Означення 7.0.12. *Назвемо скінченно-станову ізометрію f 0-повною якщо образ 0 при дії на нього централізатором цього елементу співпадає з множиною квазіперіодичних елементів кільця Z_2*

$$0 * C_{FAutT_2}(f) = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

Наслідок 7.0.3. *Нехай a, b - шарово-транзитивні скінченно-станові 0-повні ізометрії кільця Z_2. Тоді a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряжені в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Лема 7.0.7. *Скінченно-станова кусково-лінійна шарово-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Теорема 7.0.17. *Два скінчено-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Доведення. За теоремою про скінченно-станову спряженість лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів два таких автоморфізми $ax+b$ та $cx+d$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $a = c$. Отже, за наслідком 8.0.24 та лемою 8.0.25 маємо твердження теореми. $\square$

Приклад 7.0.3. *Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми*

$$f(x) = (3x+1, 3x) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (9x+2, x+7) \circ \sigma$$

за теоремою 9.0.39 спряжені в $FAutT_2$*, оскільки*

$$3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$$

8 Спряженість кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів

Означення 8.0.13. *Назвемо ізометрію кусково-лінійною, якщо існує* $n \in \mathbb{N}$*, для якого всі стани* n*-го рівня цієї ізометрії є лінійними.*

Розглянемо проблему скінченно-станової спряженості для сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.

Теорема 8.0.24 надає рекурсивний критерій скінченно-станової спряженості сферично-транзитивних ізометрій бінарного кореневого дерева. Теорема 8.0.21 дозволяє при перевірці скінченно-станової спряженості 0-повних сферично-транзитивних ізометрій обмежитися перевіркою 0-розв'язку рівняння спряженості.

Означення 8.0.14. *Групу автоморфізмів регулярного кореневого бінарного дерева* T_2 *позначимо* $AutT_2$.

Означення 8.0.15. *При дії автоморфізма* a *на дерево* T_2 *цей автоморфізм індукує дію на піддеревах. Ці дії також є автоморфізмами дерева* T_2*, оскільки* T_2 *є самоподібним. Назвемо ці автоморфізми станами автоморфізму* a *(див.[1]).*

Означення 8.0.16. *Автоморфізм дерева* T_2*, що має лише скінченну кількість різних станів, назвемо скінченно-становим. Групу всіх скінченно-станових автоморфізмів регулярного кореневого бінарного дерева* T_2 *позначимо* $FAutT_2$.

Означення 8.0.17. *Нехай* x, y *— кінці дерева* T_2 *(нескінченні прості шляхи з початком у корені). Те, що ізометрія* $a \in AutT_2$ *переводить* $x \in T_2$ *в* $y \in T_2$*, позначимо як*

$$x * a = y.$$

Суперпозицію ізометрій a, $b \in AutT_2$ *позначимо, як*

$$a \circ b.$$

Означення 8.0.18. *Назвемо автоморфізм кореневого бінарного дерева сферично-транзитивним, якщо підстановка вершин кожного рівня складається точно з одного циклу.*

Множину сферично-транзитивних автоморфізмів позначимо як $STAutT_2$.

Означення 8.0.19. *Означимо функцію $\varphi : AutT_2 \to AutT_2$ для автоморфізмів вигляду $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ наступним чином $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$ (запис $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ означає, що автоморфізм x діє на лівому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_1, на правому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_2 та міняє місцями вершини першого рівня.) Для автомофізмів вигляду $x = (x_1, x_2)$ будемо вважати φ не визначеною.*

Згідно з означенням, довільний сферично-транзитивний автоморфізм $x \in AutT_2$ переставляє вершини 1-го рівня, і тому має вигляд $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$. Отже, φ визначена для всіх $x \in STAutT_2$.

Лема 8.0.8. *Якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ є сферично-транзитивним автоморфізмом дерева T_2, то і $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$ є сферично-транзитивним автоморфізмом дерева T_2.*

Доведення. Розглянемо послідовність вершин n-го рівня дерева T_2, отриману наступним чином:

$(a_n)_0$ — вершина n-го рівня, що належить піддереву дерева T_2 з коренем в лівій вершині 1-го рівня. Назвемо таке дерево лівим піддеревом, з коренем в правій вершині — правим піддеревом. Далі

$$(a_n)_{k+1} = (a_n)_k * x.$$

Оскільки автоморфізм x міняє праве та ліве піддерева місцями, то елементи $(a_n)_{2k}$ належать лівому піддереву, а $(a_n)_{2k+1}$ — правому. Далі, оскільки x — сферично-транзитивний, то усі елементи $\{(a_n)_k | 0 \le k \le 2^n - 1\}$ є попарно різними та $(a_n)_{2^n} = (a_n)_0$. (1)

Розглянемо квадрат автоморфізму x

$$x^2 = x \circ x = (x_1, x_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = (x_1 \circ x_2, x_2 \circ x_1).$$

Підстановка вершин n-го рівня($n \neq 0$) автоморфізму x^2 складається з двох циклів довжини 2^{n-1} — $\{(a_n)_{2k} | 0 \le k \le 2^{n-1} - 1\}$ та $\{(a_n)_{2k+1} | 0 \le k \le 2^{n-1} - 1\}$. Згідно з зауваженням 1 підстановка вершин довільного рівня лівого піддерева автоморфізмом $x_1 \circ x_2$ складається з одного циклу, тому він є шарово-транзитивним. $\square$

Згідно з лемою 8.0.8 для шарово-транзитивного автоморфізму x $\varphi^n(x)$ визначене коректно для довільного натурального n.

Означення 8.0.20. *Означимо функцію* $\pi_L : AutT_2 \to AutT_2$ *наступним чином* $\pi_L(x) = x_1$*, де* x_1 *визначається співвідношенням* $x = (x_1, x_2)$ *або* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$.

Означення 8.0.21. *Означимо функцію* $\pi_R : AutT_2 \to AutT_2$ *наступним чином* $\pi_R(x) = x_2$*, де* x_2 *визначається співвідношенням* $x = (x_1, x_2)$ *або* $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$.

Очевидно, що для сферично-транзитивного автоморфізма a має місце рівність $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$ і значення $\pi_L(a), \pi_R(a)$ та $\varphi(a)$ зв'язані наступним співвідношенням

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a).$$

Крім того, для автоморфізмів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1},\ \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1},$$

$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1},\ \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1},$$

$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b),\ \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b),$$

$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a),\ \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a).$$

Лема 8.0.9. *Скінченно-станові сферично-транзитивні автоморфізми* a *і* b *спряжені в* $FAutT_2$*, тоді і лише тоді, коли* $\varphi(a)$ *і* $\varphi(b)$ *спряжені в* $FAutT_2$.

Доведення. Нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$.

$\Rightarrow$

Припустимо, що існує автоморфізм $x \in FAutT_2$, такий, що $a^x = b$.

Якщо $x = (x_1, x_2)$, то має місце наступне співвідношення

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) =$$

$$= (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_1 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Отже, $b_1 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$ і $b_2 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$, тому

$$\varphi(b) = b_1 \circ b_2 = (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) = x_1^{-1} \circ a_1 \circ a_2 \circ x_1 = \varphi(a)^{x_1}$$

і $\varphi(a)$ спряжений з $\varphi(b)$ скінченно-становим автоморфізмом x_1.

Якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$, то має місце наступне співвідношення

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ =$$

$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_2 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Отже, $b_1 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$ і $b_2 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$, тому

$$\varphi(b) = b_1 \circ b_2 = (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) =$$

$$= x_2^{-1} \circ a_2 \circ a_1 \circ x_2 = x_2^{-1} \circ a_1^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ a_1 \circ x_2 = \varphi(a)^{a_1 \circ x_1}$$

і $\varphi(a)$ спряжений з $\varphi(b)$ скінченно-становим автоморфізмом $a_1 \circ x_2$.

$\Leftarrow$

Припустимо, що існує автоморфізм $x \in FAutT_2$, такий, що $\varphi(a)^x = \varphi(b)$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченно-становим розв'язком рівняння спряженості $a^{\chi} = b$. Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$a^{\hat{x}} = (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) =$$

$$= (x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x) \circ \sigma =$$

$$= ((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma = ((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma =$$

$$= (b_1, b_2) \circ \sigma = b.$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 — скінченно-станові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченно-становим. Отже, $\hat{x} \in FAutT_2$. $\square$

Застосувавши лему 9.0.14 n разів отримаємо рекурсивний критерій спряженості сферично-транзитивних скінченно-станових ізометрій дерева T_2:

Теорема 8.0.18. *Нехай a, b — сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії дерева T_2. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряжені в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Зауважимо, що при перевірці спряженості в певному класі автоморфізмів цей критерій є не результативним. Наприклад, для дослідження спряженості транзитивно-стабільних автоморфізмів (для яких $a = \varphi(a)$) потрібна інша техніка (див. [3]). Технічно спростити дослідження питання спряженості у таких випадках дозволяють твердження, що розглядаються нижче.

Означення 8.0.22. *Назвемо* 0*-розв'язком рівняння спряженості* $a^\chi = b$ *автоморфізм* χ_0 *такий, що*

$$0 * \chi_0 = 0, \quad a^{\chi_0} = b.$$

Теорема 8.0.19. *Нехай* a, b *— сферично-транзитивні ізометрії дерева* T_2, *а* χ_0 *—* 0*-розв'язок рівняння спряженості* $a^{\chi_0} = b$. *Тоді* $\forall n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b).$$

Доведення. Дійсно, оскільки $a^{\chi_0} = b$, то $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0),$$

$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0).$$

Скористаємося методом математичної індукції:

1) Для $n = 0$ маємо рівність $a^{\chi_0} = b$ і твердження виконується. 2) Нехай для $n = k$ твердження теореми виконується, тобто $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$. Покажемо, що воно також має місце для $n = k + 1$.

Оскільки $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$, то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і

$$\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) =$$

$$= ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) =$$

$$= (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) =$$

$$= \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)},$$

тому має місце рівність $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$ і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми. □

Теорема 8.0.20. *Нехай* a, b *— сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії дерева* T_2. *Тоді* χ_0 *—* 0*-розв'язок рівняння спряженості* $a^{\chi_0} = b$ *є скінченностановим, тоді і тільки тоді, коли* $\pi_L^n(\chi_0)$ *є скінченностановим для деякого* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$.

0-розв'язок χ_0 має вигляд

$$\chi_0 = (\pi_L(\chi_0), \pi_R(\chi_0)).$$

Очевидно, має місце рівність:

$$a^{\chi_0} = (\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0), \pi_R(\chi_0)^{-1} \circ a_2 \circ \pi_L(\chi_0)) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Звідси маємо

$$(\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0) = b_1 \Rightarrow \pi_R(\chi_0) = a_1^{-1} \circ \pi_L(\chi_0) \circ b_1.$$

Оскільки a_1, b_1 — скінченностанові, то з того, що $\pi_L(\chi_0)$ — скінченностанова ізометрія, випливає, що $\pi_R(\chi_0)$ — скінченностанова, а тому і χ_0 є скінченно-становою ізометрією.

Отже, 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$ є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли $\pi_L(\chi_0)$ є скінченностановим. (1)

За теоремою 8.0.19 $\pi_L(\chi_0)$ є 0-розв'язком рівняння спряженості

$$(a_1 \circ a_2)^{\chi} = b_1 \circ b_2.$$

Застосувавши твердження 1 n разів, отримаємо твердження теореми. □

Означення 8.0.23. *Назвемо скінченно-станову ізометрію f 0-повною, якщо образ 0 при дії на нього централізатором цього елементу співпадає з множиною квазіперіодичних елементів дерева T_2*

$$0 * C_{FAutT_2}(f) = T_2 \cap \mathbb{Q}.$$

Лема 8.0.10. *Скінченно-станова ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi^n(a)$ є 0-повною для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для ізометрії $a = (b, c) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення

$$0 * a^{2t} = 2(0 * \varphi(a)^t),$$

$$0 * a^{2t+1} = 2(0 * \varphi(a)^t b) + 1.$$

Отже, ізометрія a є 0-повною, тоді і лише тоді, коли $\varphi(a)$ є 0-повною. Застосувавши отримане твердження n разів отримаємо аналогічне твердження для $\varphi^n(a)$. □

Теорема 8.0.21. *Нехай a, $b \in FAutT_2$, причому b — 0-повна сферично-транзитивна ізометрія. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли існує скінченностановий 0-розв'язок рівняння спряженості $a^\chi = b$.*

Доведення. Нехай скінченно-станові ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ скінченно-становою ізометрією χ ($a^\chi = b$). Оскільки χ — скінченно-станова, то в рівності $0 * \chi = p$ p — квазіперіодичний елемент дерева T_2.

Далі, b є 0-повною, отже існує скінченностанова ізометрія c, що задовольняє умовам:

$$c^{-1} \circ b \circ c = b, \quad 0 * c = p.$$

Очевидно, має місце наступне співвідношення

$$a^\chi = b^c.$$

Тому

$$a^{\chi \circ c^{-1}} = b.$$

Крім того, має місце рівність:

$$0 * (\chi \circ c^{-1}) = 0.$$

Отже, якщо χ — скінченно-станова ізометрія, то $\chi \circ c^{-1}$ є 0-розв'язком, звідки маємо твердження теореми. □

Дослідження групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева за допомогою ізометрій кільця цілих p-адичних чисел надає зручну техніку для вирішення низки проблем, пов'язанних з цією групою. Отримаємо представлення данної групи у 2-адичній моделі наступним чином:

Означення 8.0.24. *Поставимо у відповідність автоморфізму a дерева T_2 функцію $a_f : Z_2 \to Z_2$:*

$$a_f(\hat{x}) = x * a$$

де x - кінець дерева T_2, $\hat{x}$ - відповідне представлення кінця x в кільці Z_2 цілих 2-адичних чисел.

Розглянемо вирішення проблеми скінченно-станової спряженості для сферично-транзитивних кусочно-лінійних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.

В статті [2] було доведено наступні твердження ($FAutT_2$ - група скінченно-станових автоморфізмів кореневого бінарного дерева):

Лема 8.0.11. $f(x) = p_1x + p_2 \in FAutT_2 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$

Теорема 8.0.22. *Автоморфізми* $f(x) = (4k+1)x + (2t+1)(k, t \in Z_2)$ *є сферично-транзитивними.*

Теорема 8.0.23. *Ізометрії* $f_1(x) = (4k_1+1)x+1$ *та* $f_2(x) = (4k_2+1)x+1$ $(k_1, k_2 \in Z_2^{\mathbb{Q}})$ *спряжені в* $FAutT_2 \Leftrightarrow 4k_1 + 1 = 4k_2 + 1$.

В статті [3] була доведена наступна теорема:

Теорема 8.0.24. *Нехай* a, b *- сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії кільця* Z_2. *Ізометрії* a *та* b *спряжені в* $FAutT_2$ *тоді, і тільки тоді, коли* $\varphi^n(a)$ *та* $\varphi^n(b)$ *спряжені в* $FAutT_2$ *для деякого* $n \in \mathbb{N}$.

Скористаємося цими твердженнями далі.

Наприклад, за теоремою 8.0.23 автоморфізми $5x+1$ та $5x+3$ спряжені в $FAutT_2$, а автоморфізми $5x + 1$ та $9x + 1$ не спряжені в $FAutT_2$.

Але теорема 8.0.23 не дозволяє відповісти на питання, чи спряжені, наприклад, скінченно-станові шарово-транзитивні автоморфізми вигляду $(3x, 15x+1)\circ\sigma$ та $(5x+2, 9x + 3) \circ \sigma$, або $(x, 15x + 1) \circ \sigma$ та $(3x, 15x + 1) \circ \sigma$.

Метою данної статті є узагальнення теореми 8.0.23 для класу скінченно-станових кусково-лінійних шарово-транзитивних автоморфізмів.

Лема 8.0.12. *Скінченно-станова лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні рівності:

$$(((a-1)t+1)x+bt) \circ (ax+b) = a(((a-1)t+1)x+bt)+b =$$

$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

та

$$(ax+b) \circ (((a-1)t+1)x+bt) = ((a-1)t+1)(ax+b)+bt =$$

$$= a((a-1)t+1)x+b(a-1)t+b+bt =$$

$$= a((a-1)t+1)x+abt+b$$

Отже автоморфізм $((a-1)t+1)x+bt$ комутує з автоморфізмом $ax+b(a, b, t \in Z_2)$.

Згідно з лемою 8.0.11, при $a, b, t \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$ автоморфізм $((a-1)t+1)x + bt$ є скінченно-становим, а отже належить централізатору $C_{FAutT_2}(ax+b)$.

За теоремою 8.0.22 якщо автоморфізм $ax+b$ є сферично-транзитивним, то $a = 4a'+1, b = 2b'+1, a', b' \in Z_2$. Оскільки b є обертовним елементом кільця Z_2 та

$$0 * ((4a't+1)x + (2b'+1)t) = (2b'+1)t$$

а $4a't+1$ є обертовним для довільного $t \in Z_2$ (умова автоморфності $(4a't+1)x + (2b'+1)t)$, то

$$0 * C_{FAutT_2}(ax+b) = Z_2 \cap \mathbb{Q}$$

□

Лема 8.0.13. *Скінченно-станова ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi^n(a)$ є 0-повною для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для ізометрії $a = (b, c) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення:

$$0 * a^{2t} = 2(0 * \varphi(a)^t)$$

$$0 * a^{2t+1} = 2(0 * \varphi(a)^t b) + 1$$

Отже, ізометрія a є 0-повною, тоді, і лише тоді, коли $\varphi(a)$ є 0-повною. Застосувавши отримане твердження n разів отримаємо аналогічне твердження для $\varphi^n(a)$. □

Теорема 8.0.25. *Скінченно-станова кусково-лінійна сферично-транзитивна ізометрія є 0-повною.*

Доведення. Для кусково-лінійної сферично-транзитивної ізометрії a існує $n \in \mathbb{N}$, такий, що ізометрія $\varphi^n(a)$ є лінійною. Отже за лемами 8.0.12 та 8.0.13 маємо твердження теореми. □

Теорема 8.0.26. *Два скінченно-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Доведення. За теоремою 8.0.23 скінченно-станові сферично-транзитивні втоморфізми $ax+b$ та $cx+d$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $a = c$. Отже, за теоремою 8.0.24 та теоремою 8.0.25 маємо твердження теореми. □

Розглянемо наступний приклад застосування теореми 9.0.39.

Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми

$$f(x) = (3x + 1, 3x) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (9x + 2, x + 7) \circ \sigma$$

за теоремою 9.0.39 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$$

9 Спряженість лінійних ізометрій у загальному випадку

Означення 9.0.25. *Означимо* **розмічене дерево типу** D_f *для автоморфізму* $f \in AutZ_2$ *наступним чином.*

- *Корінь дерева помітимо автоморфізмом* f.
- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом* $a = (b, c) \circ \sigma$, *то з n+1-им рівнем цю вершину з'єднує тільки одне ребро. Іншу вершину цього ребра помітимо автоморфізмом* $\pi_L(a) \circ \pi_R(a)$
- *Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом* $a = (b, c)$, *то з n+1-им рівнем цю вершину з'єднує два ребра. Іншу вершину одного ребра помітимо автоморфізмом* $\pi_L(a)$, *другого ребра -* $\pi_R(a)$.

Автоморфізм, що помічає вершину $t \in D_f$ *дерева типу позначимо як* $D_f(t)$. *Множину вершин n-го рівня дерева* D *позначимо як* $L_n(D)$.

Зауваження 9.0.1. *За побудовою, піддерево розміченного дерева типу співпадає з розміченним деревом типу автоморфізму, що помічає корінь цього піддерева.*

Приклад 9.0.4. *Побудуємо розмічене дерево типу для автоморфізму* $f(x) = 3x + 2$ *(рис. 2)*

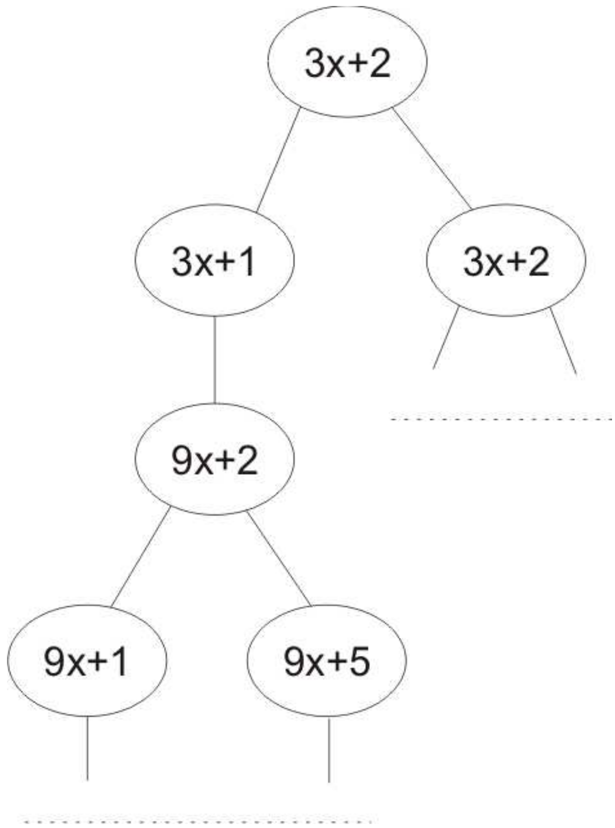


Рис. 2: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = 3x + 2$.

Лема 9.0.14. *Нехай*

$$a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

$$a' = a_1 \circ a_2, b' = b_1 \circ b_2$$

та a' і b' спряжені в $FAutT_2$.

Тоді a і b також спряжені в $FAutT_2$.

Доведення. За умовою леми існує $x \in FAutT2$, такий, що $(a')^x = b'$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченно-становим розв'язком рівняння спряженості

$$a^{\chi} = b$$

Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$a^{\hat{x}} = (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) =$$

$$= (x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x) \circ \sigma =$$

$$= ((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma = ((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma =$$

$$= (b_1, b_2) \circ \sigma = c$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 - скінченно-станові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченно-становим. Отже $\hat{x} \in FAutT_2$, щ.т.д.

□

Теорема 9.0.27. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли існує ізоморфізм α їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого автоморфізми в відповідних вершинах попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2, \ D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Доведення. $\Rightarrow$ Дійсно, нехай $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_1^{x_1} \quad b_2 = a_2^{x_2}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = \sigma \circ (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) \circ \sigma \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) = (b_1, b_2)$$

і, отже

$$b_1 = a_2^{x_2} \quad b_2 = a_1^{x_1}$$

Далі, нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma, a^x = b$ Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) = (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_2 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma \circ \sigma =$$

$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) =$$

$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже

$$b_1 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$$

$$b_2 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$$

$$b_1 \circ b_2 = (a_2 \circ a_1)^{x_2}$$

$$b_2 \circ b_1 = (a_1 \circ a_2)^{x_1}$$

Згідно з вищезазначеним, відповідні автоморфізми дерева типу спряжені станами автоморфізму x.

$\Leftarrow$ Якщо такий ізоморфізм розмічених дерев типу існує, то автоморфізми, якими помічаются корені цих дерев, спряжені, отже автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$.

□

Зауважимо, що достатньо перевірити спряженість автоморфізмів хоча б одного рівня. Дійсно, згідно з лемою 9.0.14, зі спряженості відповідних автоморфізмів $(n+1)$-го рівня випливає спряженість автоморфізмів n-го рівня. Отже, згідно з теоремою 9.0.27, має місце наступна теорема:

Теорема 9.0.28. *Автоморфізми a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх розмічених дерев типу($D_a * \alpha = D_b$), для якого існує рівень, що всі автоморфізми в відповідних вершинах цього рівня попарно спряжені в $FAutT_2$*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \in L_n(D_a), \exists x \in FAutT_2 \; D_a(t)^x = D_b(t * \alpha)$$

Зауважимо, що оскільки у спряжених автоморфізмів їх дерева типу ізоморфні, то в умові теореми 9.0.28 достатньо ізоморфізму $(D_a)_n$ та $(D_b)_n$

Теорема 9.0.29. *Дерево типу автоморфізму вигляду $f(x) = ax + b, f \in AutZ_2$ є ланцюгом тоді, і лише тоді, коли $a = 4k + 1, b = 2t + 1$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Якщо $b = 2t$, то дерево типу для f не є ланцюгом, оскільки

$$(ax + 2t) = \left(ax + t, ax + t + \frac{a-1}{2}\right)$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 0-му рівні.

Якщо $a = 4k + 3, b = 2t + 1$, то

$$(4k + 3)x + (2t + 1)) = ((4k + 3)x + t, (4k + 3)x + t + 1 + 2k + 1) \circ \sigma$$

і 1-й рівень D_f складається з однієї вершини, яка помічена автоморфізмом

$$((4k + 3)x + t) \circ ((4k + 3)x + t + 2k + 1) = (4k + 3)^2 x + t(4k + 3) + t + 1 + 2k + 1 =$$

$$= (4k + 3)^2 x + 2(2t + 1)(k + 1) =$$

$$= ((4k + 3)^2 x + (2t + 1)(k + 1), (4k + 3)^2 x + ((2t + 1) + 4(2k + 1))(k + 1))$$

отже маємо розгалуження в дереві типу D_f на 1-му рівні.

$\Leftarrow$ 1-й рівень дерева типу автоморфізму вигляду $f(x) = (4k + 1)x + (2t + 1)$ складається з однієї вершини. Далі:

$$x * \pi_L(f) = (4k + 1)x + t$$

$$x * \pi_R(f) = (4k + 1)x + (t + 1) + 2k$$

$$x * \pi_L(f) \circ \pi_R(f) = (4k + 1)((4k + 1)x + t) + (t + 1) + 2k =$$

$$= (4k + 1)^2 x + (4k + 2)t + 2k + 1 = (4k' + 1)x + (2t' + 1),$$

$$k' = 4k^2 + 2k, t' = (2k + 1)t + k$$

Отже кожний наступний рівень дерева для цього автоморфізму буде складатись з однієї вершини. $\square$

Лема 9.0.15. *Автоморфізми $f(x) = ax + 2^n$ та $g(x) = ax + 2^n(2b' + 1)$ спряжені в $FAutT_2$.*

Доведення. Дійсно, автоморфізми f та g спряжені за допомогою скінчено-станового автоморфізму $\chi(x) = (2b' + 1)x$:

$$\left(\frac{1}{2b' + 1}x\right) \circ (ax + 2^n) \circ ((2b' + 1)x) = \left(\frac{a}{2b' + 1}x + 2^n\right) \circ ((2b' + 1)x) =$$

$$= (2b' + 1)\left(\frac{a}{2b' + 1}x + 2^n\right) = ax + 2^n(2b' + 1)$$

$\square$

Лема 9.0.16. *Мають місце наступні співвідношення:*

$$(2k+1)x + 2t = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t)$$

$$(2k+1)x + 2t + 1 = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t + 1) \circ \sigma$$

Доведення. Дійсно, для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2)$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x)}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1)-1}{2}$$

а для автоморфізму $f : Z_2 \to Z_2$ вигляду $f = (f_1, f_2) \circ \sigma$ маємо

$$f_1 = \frac{f(2x)-1}{2}, \quad f_2 = \frac{f(2x+1)}{2}$$

Автоморфізм $f(x) = (2k+1)x$ має вигляд

$$f = (f_1, f_2)$$

оскільки залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни. Отже

$$(2k+1)x = ((2k+1)x, (2k+1)x + k)$$

$$x + 2k + 1 = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Оскільки $f(x) = x + 2k$, очевидно, залишає першу цифру двійкового розкладу x без зміни, то

$$\pi_L(x+2k) = \frac{2x+2k}{2} = x + k, \quad \pi_R(x+2k) = \frac{2x+1+2k-1}{2} = x + k$$

тому

$$x + 2k = (x + k, x + k)$$

Для $f(x) = x + 2k + 1$ маємо:

$$x + 2k + 1 = (x + 2k) \circ (x + 1) = (x + k, x + k) \circ (x, x + 1) \circ \sigma = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma$$

Отже

$$(2k+1)x + 2t = (2k+1)x \circ (x + 2t) =$$

$$= ((2k+1)x, (2k+1)x + k) \circ (x + t, x + t) =$$

$$= ((2k+1)x + t, (2k+1)x + k + t)$$

Аналогічно отримуємо:

$$(2k+1)x+2t+1=(2k+1)x\circ(x+2t+1)=$$

$$=((2k+1)x,(2k+1)x+k)\circ(x+t,x+t+1)\circ\sigma=$$

$$=((2k+1)x+t,(2k+1)x+k+t+1)\circ\sigma$$

щ.т.д. $\square$

Лема 9.0.17. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду $f(x)=ax+b, f\in AutZ_2$ знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $g(x)=ax+(2b'+1)$.*

Доведення. Дійсно, за лемою 9.0.16

$$(2k+1)x+2^nt=((2k+1)x+2^{n-1}t,(2k+1)x+2^{n-1}t+k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x+2^n(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже, якщо $b\neq 0$, то рівно за n рівнів знайдеться вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$

Якщо $b=0,k\neq 0$, то

$$(2k+1)x=((2k+1)x,(2k+1)x+k)$$

і до автоморфізму $(2k+1)x+k$ можна застосувати попередні міркування. $\square$

Теорема 9.0.30. *Для довільного не тотожнього автоморфізму вигляду $f(x)=ax+b, f\in AutZ_2$ знайдеться вершина його розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $g(x)=(4k'+1)x+(2t'+1)$.*

Доведення. Дійсно, за лемою 9.0.17 знайдеться вершина розміченого дерева типу, що помічена автоморфізмом вигляду $ax+(2t+1)$.

Оскільки $ax+b$ - ізометрія кільця Z_2, то $a=2k+1$. Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$, виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 9.0.16, помічена автоморфізмом

$$((2k+1)x+t)\circ((2k+1)x+k+t+1)=(2k+1)((2k+1)x+t)+k+t+1=$$

$$= (2k+1)^2x + (2k+1)t + k + t + 1 = (4(k^2+k)+1)x + (k+1)(2t+1) =$$
$$= (4k'+1)x + t'$$

За лемою 9.0.17, в піддереві розміченого дерева типу з вершиною, поміченною автоморфізмом $(4k'+1)x+t'$ знайдеться вершина, помічена автоморфізмом $(4k'+1)x+(2t''+1)$, щ.т.д. □

З теореми 9.0.29 та теореми 9.0.30 випливає:

Теорема 9.0.31. *В дереві типу не тотожнього лінійного автоморфізму знайдеться хоча б один ланцюг*

Означення 9.0.26. *Співставимо кожній вершині дерева типу автоморфізму індекс, що дорівнює кількості розгалужень, починаючи з кореня на шляху до цієї вершини. Наприклад, якщо дерево типу є ланцюгом, то індекс кожної його вершини дорівнює 0.*

Зауваження 9.0.2. *Легко бачити, що для ізоморфізму $\phi : D_1 \to D_2$ двох дерев типу індекс образу вершини $\phi(x) \in D_2$ дорівнює індексу прообразу вершини $x \in D_1$.*

Лема 9.0.18. *Для автоморфізму $f(x) = ax + b$ автоморфізм, що маркує вершину n-го рівня розміченного дерева типу має вигляд*

$$a^{2^{n-k+1}}x + b'$$

де k - індекс цієї вершини.

Доведення. Дійсно, за лемою 9.0.16

$$(2k+1)x + t = ((2k+1)x + t, (2k+1)x + t + k)$$

отже, якщо вершина розміченного дерева типу помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$, то з цієї вершини виходить дві гілки, і інші їх вершини помічені автоморфізмами $(2k+1)x + 2^{n-1}(2t+1)$ та $(2k+1)x+2^{n-1}(2t+1)+k$. Отже при розгалуженні автоморфізми, що маркують вершини наступного рівня мають такий же самий коефіцієнт біля x.

Далі, з вершини розміченного дерева типу, що помічена автоморфізмом $(2k+1)x+(2t+1)$ виходить одна гілка, інша вершина якої, за лемою 9.0.16, помічена автоморфізмом

$$((2k+1)x+t) \circ ((2k+1)x + k + t + 1) = (2k+1)^2x + (2k+1)t + k + t + 1$$

Отже в цьому випадку автоморфізм, що маркує вершину наступного рівня має коефіцієнт біля x, що дорівнює квадрату попереднього коефіцієнту. Отже отримуємо твердження теореми.

□

Лема 9.0.19. *Два не тотожніх лінійних автоморфізми $f(x) = ax + b'$ та $g(x) = -ax + b''$ мають неізоморфні дерева типу.*

Доведення. Якщо a має вигляд $4k' + 1$ то $-a$ має вигляд $4k'' + 3$ $(-4k' - 1 = -4(k' + 1) + 3)$.

Припустимо, що автоморфізми f та g мають ізоморфні дерева типу :

$$D_f * \alpha = D_g$$

За лемою 9.0.18 для довільного $n \in \mathbb{N}$ всі вершини n-го рівня з індексом n в розміченому дереві типу $D_{(4k'+1)x+b}$ помічені автоморфізмами вигляду $(4k' + 1)x + b'$.

Множина таких вершин не є порожньою, оскільки принаймні містить корінь дерева $D_{(4k'+1)x+b}$.

З іншого боку, оскільки автоморфізм $(4k' + 1)x + b$ не є тотожнім, то серед вершин n-го рівня з індексом n знайдеться вершина $v \in D_{(4k'+1)x+b}$, помічена автоморфізмом вигляду $(4k' + 1)x + (2t + 1)$ (інакше в кожній вершині дерева типу маємо розгалуження, що відповідає тотожньому автоморфізму).

За теоремою 9.0.29 піддерево дерева типу $D_{(4k'+1)x+b}$ з коренем в вершині v є ланцюгом.

При ізоморфізмі α дерев $D_{(4k'+1)x+b}$ та $D_{(4k''+3)x+c}$ образ $v * \alpha \in D_{(4k''+3)x+c}$ цієї вершини має такий самий індекс, як і v, і, за лемою 9.0.18, автоморфізм, що помічає вершину $v * \alpha$, має вигляд $(4k'' + 3)x + c'$.

Але, за теоремою 9.0.29, дерево типу автоморфізму піддерево дерева типу $D_{(4k''+3)x+c}$ з коренем в вершині $v * \alpha$ не є ланцюгом. Отже маємо протиріччя.

□

Теорема 9.0.32. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ можуть бути спряжені лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. Нехай автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$.

За теоремою 9.0.31 в розміченому дереві типу D_f автоморфізму f знайдеться ланцюг. Нехай v - вершина в D_f, що належить цьому ланцюгу. За лемою 9.0.18

автоморфізм, що маркує цю вершину має вигляд $a^{2^{n-k+1}}x+b'$, де k - індекс вершини v, а n - номер рівня, якому вона належить.

Згідно з теоремою 9.0.27, при ізоморфізмі α дерев типу D_f та D_g автоморфізм $a^{2^{n-k+1}}x+b'$, що маркує вершину $v \in D_f$ спряжений в $FAutT_2$ з автоморфізмом, що маркує вершину $v*\alpha \in D_g$.

Згідно з зауваженням 9.0.2 та лемою 9.0.18 автоморфізм, що маркує вершину $v*\alpha \in D_g$ має вигляд $c^{2^{n-k+1}}x+b''$.

Згідно з зауваженням 9.0.1 дерева типу автоморфізмів $a^{2^{n-k+1}}x+b'$ та $c^{2^{n-k+1}}x+b''$ є ланцюгом, а отже є сферично-транзитивними.

За теоремою про спряженість сферично-транзитивних лінійних автоморфізмів в $FAutT_2$ маємо рівність

$$a^{2^{n-k+1}} = c^{2^{n-k+1}}$$

Отже $a = \pm c$, але, оскільки f та g спряжені в $FAutT_2$, то, за лемою 9.0.19, маємо рівність $a = c$, щ.т.д.

□

Теорема 9.0.33. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax + 2^r(2b+1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d+1)$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай f та g - спряжені в $FAutT_2$. За теоремою 9.0.32 - $a = c$.

$\Leftarrow$ Нехай $a = c$. Тоді $f(x) = ax + 2^r(2b+1)$ та $g(x) = cx + 2^r(2d+1)$ спряжені скінчено-становим автоморфізмом

$$\chi_0(x) = \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x$$

Дійсно

$$\chi_0^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \left(\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x\right) \circ (ax + 2^r(2b+1)) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$

$$= \left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) \circ \left(\left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)x\right) =$$

$$= \left(\frac{2d+1}{2b+1}\right)\left(a\left(\frac{2b+1}{2d+1}\right)x + 2^r(2b+1)\right) = ax + 2^r(2d+1) =$$

$$= cx + 2^r(2d+1)$$

□

Зауваження 9.0.3. *За теоремою 9.0.32 автоморфізми $f(x) = ax$ та $g(x) = cx$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $a = c$.*

Теорема 9.0.34. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$, $s > 0$ спряжені в $FAutT_2$, якщо $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$.*

Доведення. Оскільки $b_1 \equiv b_2(\mod 2^s)$, то

$$\frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)} \in Z_2$$

Автоморфізми f та g спряжені в $FAutT_2$ за допомогою скінчено-станового автоморфізму

$$\chi(x) = x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}$$

Дійсно, має місце наступна рівність:

$$\chi^{-1} \circ f \circ \chi = (x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) \circ ((2^s(2k+1)+1)x + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$

$$= ((2^s(2k+1)+1)(x - \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) + b_1) \circ (x + \frac{b_1 - b_2}{2^s(2k+1)}) =$$

$$= (2^s(2k+1)+1)x - \frac{(2^s(2k+1)+1-1)(b_1 - b_2)}{2^s(2k+1)} + b_1 = (2^s(2k+1)+1)x + b_2$$

□

Лема 9.0.20. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + 2b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + 2b_2$ спряжені в $FAutT_2$*

Доведення. Є наслідком теореми 9.0.34. □

Теорема 9.0.35. *Скінчено-станові автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + b_2$ спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $b_1 \equiv b_2(\mod 2)$*

Доведення. $\Leftarrow$ Згідно з лемою 9.0.16, 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax + (2t + 1)$ складається з однієї вершини, а 1-й рівень дерева типу автоморфізму $ax + 2t$ складається з двох вершин. Отже автоморфізми $f(x) = (4k+3)x + b_1$ та $g(x) = (4k+3)x + b_2$ не спряжені в $AutT_2$, а отже і в $FAutT_2$, якщо $b_1 \not\equiv b_2(\mod 2)$.

$\Rightarrow$ За теоремою 9.0.33 та лемою 9.0.20. □

Теорема 9.0.36. *Автоморфізми $f(x) = x + 2^n$ та $g(x) = x + 2^m$ спряжені в $AutT_2$ тоді, і лише тоді, коли $m = n$.*

Доведення. Дійсно, мають місце наступні співвідношення:

$$(x+2^n)=(x+2^{n-1},x+2^{n-1})$$

$$(x+1)=(x,x+1)\circ\sigma$$

Отже дерево типу автоморфізму $f(x)=x+2^n$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу D_{x+2^n}, звідси маємо твердження теореми. □

Теорема 9.0.37. *Автоморфізми* $f(x)=(2^s(2k+1)+1)x+2^n, n<s$ *та* $g(x)=(2^s(2k+1)+1)x+2^m, m<s(s>1)$ *спряжені в* $AutT_2$ *тоді, і лише тоді, коли* $m=n$.

Доведення. За теоремою 9.0.29, дерево типу автоморфізму $f(x)=(2^s(2k+1)+1)x+1, s>1$ є ланцюгом.

Далі, має місце співвідношення:

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^n)=((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1},(2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)+2^{n-1})=$$

$$=((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1},(2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}((2k+1)2^{s-n}+1))$$

Оскільки число $(2k+1)2^{s-n}+1$ - непарне при $n<s$, то, за лемою 9.0.15 , автоморфізм $(2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}((2k+1)+2^{n-s})$ спряжен автоморфізму $(2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1}$, і вони мають ізоморфні дерева типу.

Тому, згідно з зауваженням 9.0.1, автоморфізми

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1},(2^s(2k+1)+1)x+2^{s-1}(2k+1)+2^{n-1})$$

та

$$((2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1},(2^s(2k+1)+1)x+2^{n-1})$$

мають ізоморфні дерева типу.

Отже дерево типу автоморфізму $f(x)=(2^s(2k+1)+1)x+2^n, n<s, s>1$ до n-го рівня ізоморфно $(T_2)_n$ і кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, звідси маємо твердження теореми.

□

Лема 9.0.21. *Скінчено-станові автоморфізми* $f(x)=(2^s(2k+1)+1)x+2^n, n<s, s>1$ *та* $g(x)=(2^s(2k+1)+1)x$ *не спряжені в* $AutT_2$.

Доведення. Оскільки має місце співвідношення

$$(2^s(2k+1)+1)x = ((2^s(2k+1)+1)x, (2^s(2k+1)+1)x + 2^{s-1}(2k+1)$$

то в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ для довільного n знайдеться вершина n-го рівня, що не є коренем ланцюга - це вершина, помічена автоморфізмом $(2^s(2k+1)+1)x$.

З іншого боку, кожна вершина n-го рівня є коренем ланцюга в дереві типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$, тому дерева типу $D_{(2^s(2k+1)+1)x+2^n}$ та $D_{(2^s(2k+1)+1)x}$ не ізоморфні.

Отже автоморфізми $f(x) = (2^s(2k+1)+1)x + 2^n, n < s, s > 1$ та $g(x) = (2^s(2k+1)+1)x$ не спряжені в $FAutT_2$.

□

Означення 9.0.27. *Означимо функцію $\phi_a(x)$ наступним чином:*

$$\phi_a(b) = \begin{cases} -n-1,\ a=1,\ b=2^n(2t+1); \\ 2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0,\ b=0 \\ (2^n \mod 2^s)+2^s,\ a=2^s(2k+1)+1, s>0\ b=2^n(2t+1); \end{cases}$$

Теорема 9.0.38. *Два лінійних автоморфізми $f(x) = ax+b$ та $g(x) = cx+d$ спряжені тоді, і лише тоді, коли $\phi_a(b) = \phi_c(d)$.*

Означення 9.0.28. *Назвемо автоморфізм кусково-лінійним, якщо існує $n \in \mathbb{N}$, для якого всі стани n-го рівня цього автоморфізму є лінійними.*

Зауваження 9.0.4. *Для перевірки спряженості в $FAutT_2$ кусково-лінійних автоморфізмів достатньо застосувати теорему 9.0.28 до рівня, на якому усі стани ціх автоморфізмів лінійні, та теорему 9.0.38 для попарної перевірки спряженості відповідних автоморфізмів, що маркують вершини цього рівня в деревах розміченого типу ціх автоморфізмів.*

Наприклад, має місце наступна теорема:

Теорема 9.0.39. *Два скінчено-станові лінійні сферично-транзитивні автоморфізми спряжені в $FAutT_2$ тоді, і лише тоді, коли знайдеться рівень, для якого всі автоморфізми цього рівня є лінійними, та добутки всіх коефіцієнтів біля x рівні для обох автоморфізмів.*

Приклад 9.0.5. *Кусочно-лінійні сферично-транзитивні автоморфізми*

$$f(x) = (5x + 3, 9x + 2) \circ \sigma$$

та

$$g(x) = (15x, 3x + 1) \circ \sigma$$

за теоремою 9.0.39 спряжені в $FAutT_2$, оскільки

$$5 \cdot 9 = 15 \cdot 3$$

10 Дифференційовність ізометрій

10.1 Кусково-лінійні ізометрії

Теорема 10.1.1. *Скінчено-станова ізометрія кільця Z_2 є дифференційовною в раціональній точці тоді і лише тоді, коли вона є лінійною в певному околі цієї точки.*

Доведення. Нехай x - кінець дерева T_2. $x_{(n)}$ - початок довжини n, $x^{(n)}$ - хвіст кінця x.

$x = x^{(n)}x_{(n)}$.

a - скінчено-становий автоморфізм, що відповідає деякій скінчено-становій ізометрії. Означимо:

$$F_a(x, y) = \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$

Дифференційовність ізометрії̈ a в точці x рівносильно існуванню границі в ультраметриці:

$$\lim_{y \to x} F_a(x, y)$$

Нехай $b_0(a, x), b_1(a, x), ..., b_n(a, x)...$ -послідовність станів вздовж кінця x, $b_n(a, x) = a_{x_{(n)}}$, а $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x)...$ -послідовність кінців $y_n(x) = x^{(n)}$.

Оскільки a - скінчено-становий, а x раціональний, то послідовності $b_n(a, x)$ та $y_n(x)$ є квазіперіодичними. Отже послідовність пар $(b_n(a, x), y_n(x))$ є квазіперіодичною і існує пара, яка зустрічається нескінчену кількість разів. Позначимо її як (a_c, x_c).

Далі $B(x, n)$ - шар радіусу $(\frac{1}{2})^n$ з центром в кінці x. Означимо $D(a, x, n)$ як множину значень $F_a(x, y)$, де x - фіксований кінець, а $y \in B(x, n)$:

$$D(a, x, n) = B(x, n) \circ F_a(x, *)$$

Оскільки має місце рівність

$$F_a(x^{(n)}x_{(n)}, y^{(n)}x_{(n)}) = F_{a_{x_{(n)}}}(x^{(n)}, y^{(n)})$$

то

$$\exists c \forall n \in \{\mathbb{N} \cup 0\} D(a, x, n) \supseteq D(a_c, x_c, 0) \qquad (1)$$

Отже, згідно з (1) для існування границі

$$\lim_{y \to x} \frac{a(x) - a(y)}{x - y}$$

необхідно, щоб множина $D(a_c, x_c, 1)$ складалась з єдиного елементу, тому

$$\frac{a(x) - a(x_c)}{x - x_c} = const \Rightarrow a(x) = const * (x - x_c) + a(x_c).$$

□

Лема 10.1.1. *Якщо скінченно-станова ізометрія кільця Z_2 є дифференційовною в раціональній точці, то вона є дифференційовною в кожній точці деякого її околу.*

Доведення. Дійсно, функція, що є лінійною в певному околі є дифференційовною в кожній точці цього околу. □

Теорема 10.1.2. *Скінченно-станова ізометрія f кільця Z_2 є дифференційовною тоді і лише тоді, коли вона є кусково-лінійною функцією.*

Доведення. Оскільки ультраметричний простір Z_2 є компактним, а множина раціональних 2-адичних чисел є всюди щільною в Z_2, то з покриття околами з теореми 10.1.1 можна виділити скінчене підпокриття. Оскільки простір є ультраметричним, то з цього підпокриття можна виділити підпокриття, що складається з куль, що не перетинаються. На кожній такій кулі ізометрія f є лінійною, отже f - кусково-лінійна функція. □

10.2 Не дифференційовні ізометрії

Лема 10.2.1. *Якщо автоморфізм є не дифференційовним в кожній натуральній точці, то він є не дифференційовним на Z_2.*

Доведення. Дійсно, оскільки множина натуральних чисел є всюди щільною на Z_2,

□

Теорема 10.2.1.

Приклад 10.2.1. *Скінченно-становий автоморфізм, що задається співвідношеннями:*

$$a = (b, c),$$

$$b = (a, d),$$

$$c = (c, c),$$

$$d = (c, d) \circ \sigma$$

є не диференційовним лише в точці 0.

Дійсно, мають місце наступні співвідношення:

$$f_a(\ldots 000) = \ldots 000,$$

$$f_a(\ldots 001) = \ldots 001,$$

$$f_a(\ldots 010) = \ldots 110.$$

Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{f_a(\ldots 001) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 001} = \frac{\ldots 001 - \ldots 01010}{\ldots 001} = \ldots 001$$

та

$$\frac{f_a(\ldots 010) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 010} = \frac{\ldots 110 - \ldots 000}{\ldots 010} = \ldots 011,$$

то

$$\frac{f_a(\ldots 001) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 001} \neq \frac{f_a(\ldots 010) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 010}.$$

Отже, за теоремою 10.2.1, автоморфізм a є не диференційовним в точці 0. В усіх інших точках автоморфізм a є диференційовним, оскільки

$$f_a(x \cdot 2^{2n}) = f_c(x) \cdot 2^{2n}$$

та

$$f_a(x \cdot 2^{2n+1}) = f_d(x) \cdot 2^{2n+1},$$

і автоморфізм c відповідає диференціовній функції $f_c(x) = x$*, а автоморфізм d відповідає диференціовній функції* $f_d(x) = x + 1$*.*

11 Дослідження скінченно-станових лінійних ізометрій

11.1 1-станові автоморфізми

Усього маємо 2 1-станових автоморфізми.

Приклад 11.1.1. *Автоморфізм, що задається співвідношенням*

$$a = (a, a)$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = x$$

(рис. 3).

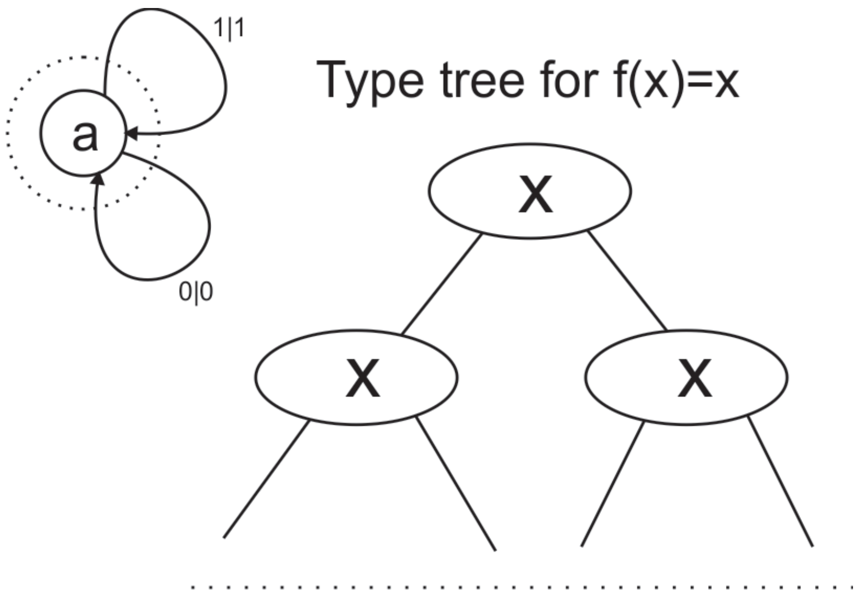


Рис. 3: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = x$.

Приклад 11.1.2. *Автоморфізм, що задається співвідношенням*

$$a = (a, a) \circ \sigma$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = -x - 1.$$

(рис. **??***).*

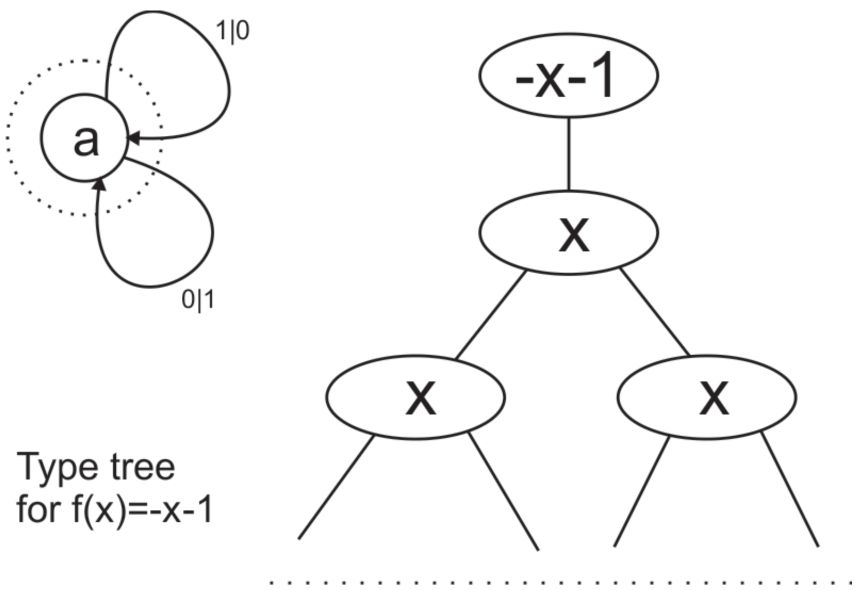


Рис. 4: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = -x - 1$.

11.2 2-станові автоморфізми

Усього маємо $3*2*4*2 = 48$ можливостей задати 2-становий автоморфізм. Але деякі з таких автоморфізмів насправді є 1-становими.

Приклад 11.2.1. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (x_1, x_2)$$

$$b = (x_3, x_4)$$

де $x_i \in \{a, b\}$ *(*$1 \le i \le 4$*), є 1-становим автоморфізмом, що задається співвідношенням*

$$a = (a, a)$$

та відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = x.$$

Приклад 11.2.2. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (x_1, x_2) \circ \sigma$$

$$b = (x_3, x_4) \circ \sigma$$

де $x_i \in \{a, b\}$ *(*$1 \le i \le 4$*), є 1-становим автоморфізмом, що задається співвідношенням*

$$a = (a, a)$$

та відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = -x - 1.$$

Отже залишилось $48 - (3 * 4 + 3 * 4) = 24$ 2-станових автоморфізми.

Приклад 11.2.3. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (b, a) \circ \sigma$$

$$b = (b, b)$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = x + 1$$

(рис. 5).

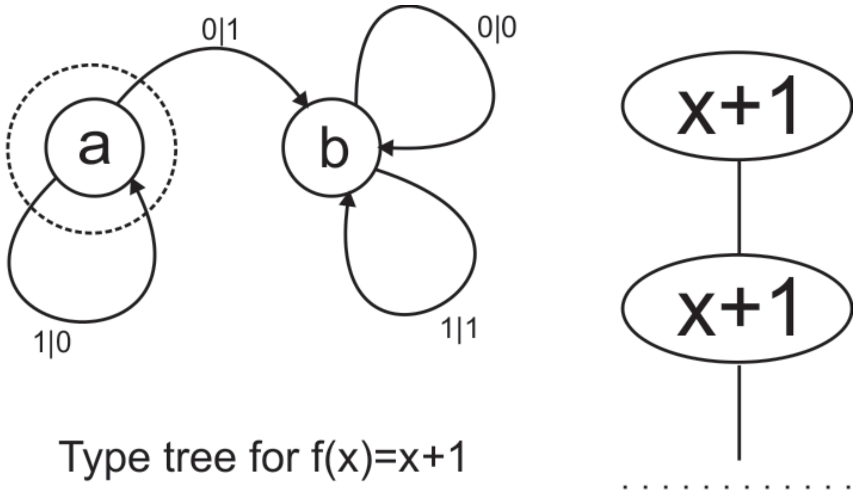


Рис. 5: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = x + 1$.

Приклад 11.2.4. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (a, b) \circ \sigma$$

$$b = (b, b)$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = x - 1$$

(рис. 7).

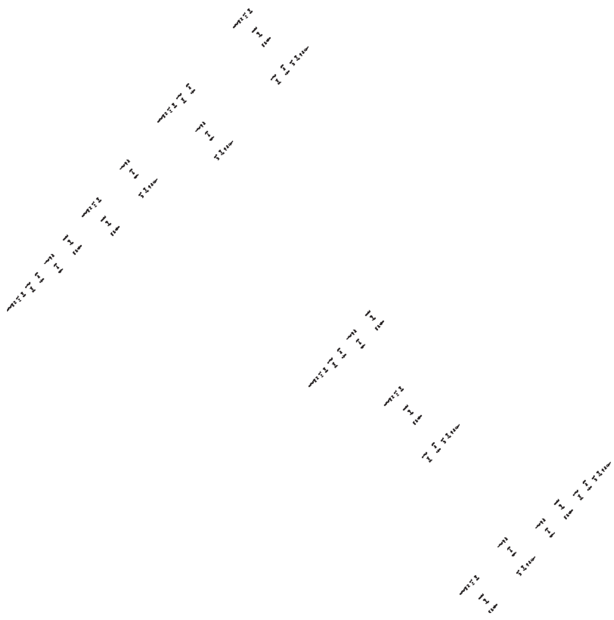


Рис. 6: Дійсна функція автоморфізму $f(x) = 5x + 1$.

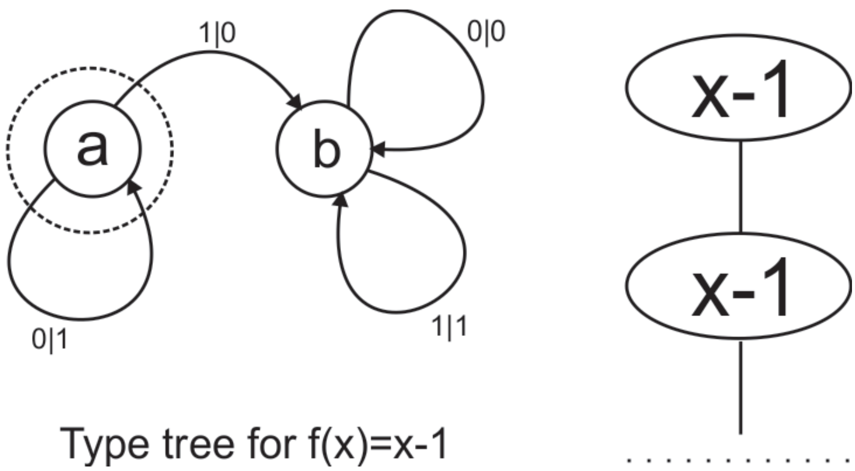


Рис. 7: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = x - 1$.

Приклад 11.2.5. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (a, b)$$

$$b = (b, b) \circ \sigma$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = -x$$

(рис. 8).

Приклад 11.2.6. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (b, a)$$

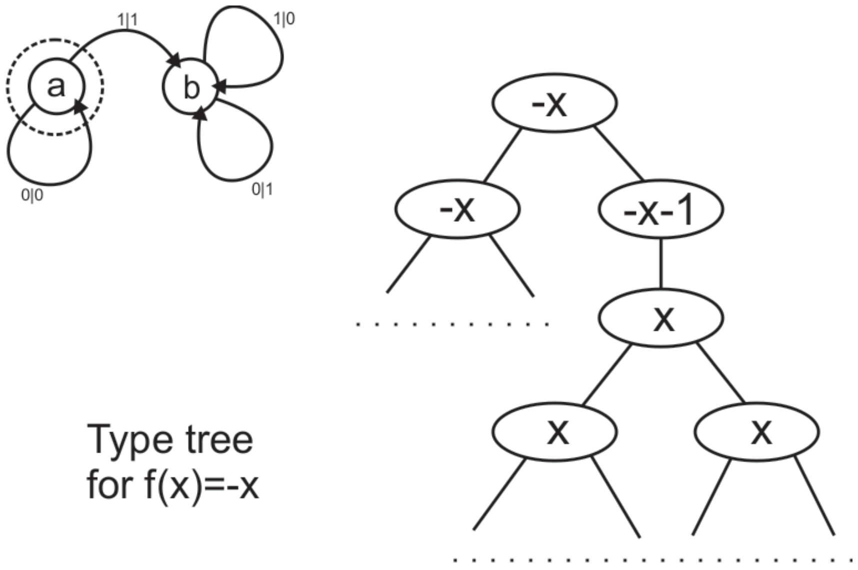


Рис. 8: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = -x$.

$$b = (b, b) \circ \sigma$$

відповідає лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = -x - 2$$

(рис. 9).

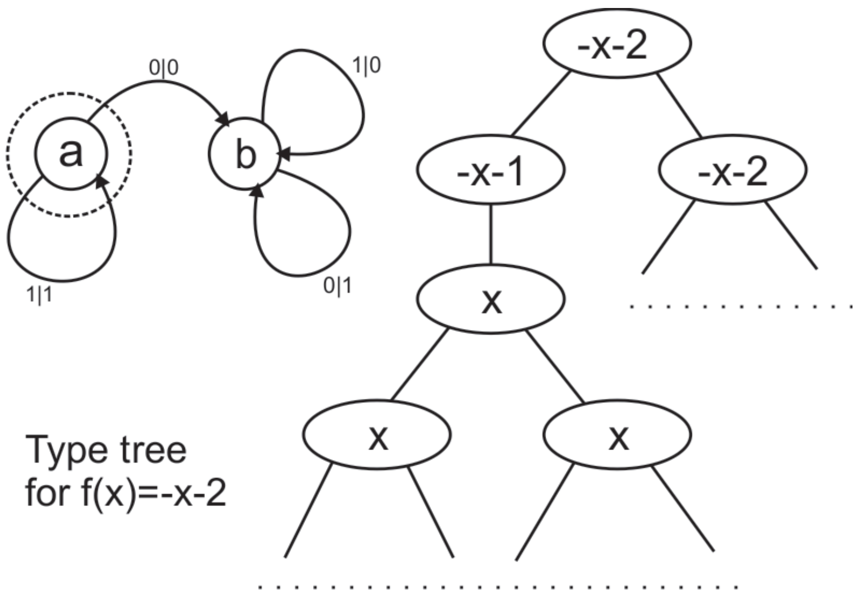


Рис. 9: Розмічене дерево типу автоморфізму $f(x) = -x - 2$.

Приклад 11.2.7. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (b, b) \circ \sigma$$

$$b = (b, b)$$

відповідає кусково-лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = (x, x) \circ \sigma.$$

Приклад 11.2.8. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (b, b)$$

$$b = (b, b) \circ \sigma$$

відповідає кусково-лінійній 2-адичній функції

$$f_a(x) = (-x - 1, -x - 1).$$

Приклад 11.2.9. *Автоморфізм, що задається співвідношеннями*

$$a = (b, b)$$

$$b = (a, a) \circ \sigma$$

не є диференційовним в жодній точці. Дійсно, мають місце наступні співвідношення:

$$f_a(\ldots 00000) = \ldots 01010,$$

$$f_a(\ldots 00111) = \ldots 10101,$$

$$f_a(\ldots 00001) = \ldots 01011.$$

Оскільки мають місце рівності:

$$\frac{f_a(\ldots 111) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 111} = \frac{\ldots 10101 - \ldots 01010}{\ldots 111} =$$
$$= \frac{\ldots 10101 + \ldots 010110}{\ldots 111} = -\ldots 10101011 = \ldots 10101$$

та

$$\frac{f_a(\ldots 001) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 001} = \ldots 101011 - \ldots 01010 =$$
$$= \ldots 101011 + \ldots 010110 = 1,$$

то

$$\frac{f_a(\ldots 111) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 111} \neq \frac{f_a(\ldots 001) - f_a(\ldots 000)}{\ldots 001}.$$

Отже, за теоремою 10.2.1, автоморфізм a є не диференційовним в точці 0.

Дійсна функція цього автоморфізму має наступний вигляд(рис.10)

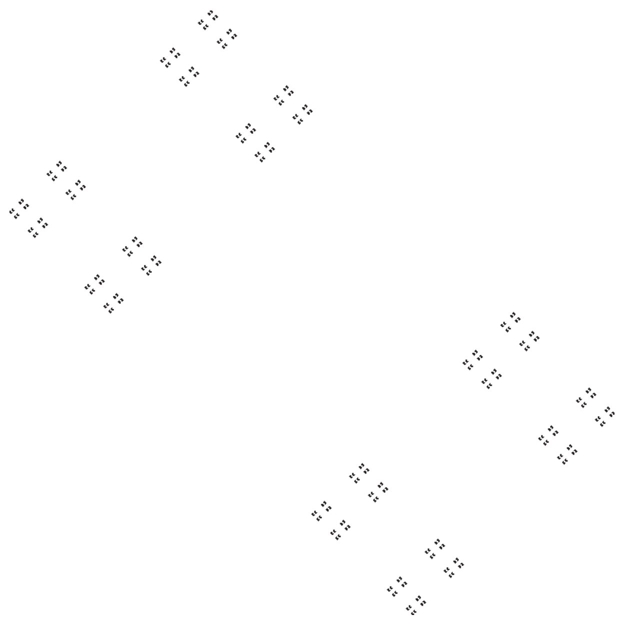


Рис. 10: Дійсна функція автоморфізму $a = (b, b), b = (a, a) \circ \sigma$.

12 Спряженість транзитивно-стабільних автоморфізмів в $FAutT_2$

Відсутність на даний момент необхідної та достатньої умови спряженості автоморфізмів в групі скінченно-автоматних підстановок примушує при дослідженні рівняння спряженості використовувати певні достатні умови(Наприклад, шарово-транзитивні автоморфізми a та b не спряжені, якщо фактор-послідовність для a періодична, а для b - не періодична, або - якщо a та b мають різний ріст). Стабільно-транзитивні автоморфізми дуже близьки по своїх властивостях один до одного, тому цілий клас достатніх умов є не еффективним при дослідженні питання спряженості таких автоморфізмів. В роботі пропонується підхід, що дозволяє побудувати перетин класу спряженості в групі скінченно-автоматних підстановок, що містить автоморфізм adding machine, з множиною транзитивно стабільних автоморфізмів.

Означення 12.0.1. *Означимо фактор n-го рівня шарово-транзитивного автоморфізма*

$$a = (b, c) \circ \sigma$$

індуктивно. Фактором 1-го рівня для автоморфізму a называється автоморфізм $b \circ c$*. Фактором n-го рівня автоморфізма a називається фактор 1-го рівня для фактора (n-1)-рівня автоморфізма a .*

Означення 12.0.2. *Фактор-послідовністю для автоморфізму $a \in AutZ_2$ назвемо послідовність $\{a_n\}$ автоморфізмів, в якій a_n дорівнює фактору n-го рівня для автоморфізму a.*

Означення 12.0.3. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ транзитивно-стабільним, якщо фактор-послідовність для цього автоморфізму є стаціонарною.*

Рекурсивно означимо множини W_x та R_x для шарово-транзитивного автоморфізму $x \in AutT_2$.

Означення 12.0.4. *Тотожній автоморфізм id належить W_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить W_x. Тоді автоморфізм $x \circ t_2$ належить W_x.*

Означення 12.0.5. *Тотожній автоморфізм id належить R_x. Нехай автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ або автоморфізм $t = (t_1, t_2) \circ \sigma$ належить R_x. Тоді автоморфізми t_1 та $x \circ t_2$ належать R_x.*

Легко бачити, що W_x належить R_x.

Приклад 12.0.10. *Обчислимо множини W_ε та R_ε для автоморфізма adding machine, що задається співвідношенням $\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$.*

Обчислимо W_ε. Згідно рекурсивної процедури разом з id множині W_ε належить автоморфізм ε. Далі з ε отримаємо ε^2, з ε^2 отримаємо ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині W_ε не має. Отже W_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Обчислимо R_ε. Згідно рекурсивної процедури разом з id множині R_ε належать автоморфізми id та ε. Далі з ε отримаємо id та ε^2, з ε^2 отримаємо ε та ε^2. Зрозуміло, що більше ніяких автоморфізмів в множині R_ε не має. Отже R_ε складається з автоморфізмів id, ε та ε^2.

Означення 12.0.6. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ регулярним, якщо множина R_x - скінченна.*

Означення 12.0.7. *Назвемо автоморфізм $x \in AutT_2$ слабко регулярним, якщо множина W_x - скінченна.*

Оскільки W_x належить R_x, то регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Згідно з прикладом 12.0.10 автоморфізм adding machine ε є регулярним.

Лема 12.0.1. *Автоморфізм $b \in AutT_2$ є транзитивно-стабільним тоді, і тільки тоді, коли знайдеться $t \in AutT_2$, такий, що $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай $b = (t, l) \circ \sigma$. Оскільки b - транзитивно-стабільний, то $b = t \circ l$, отже $l = t^{-1} \circ b$.

$\Leftarrow$ $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Оскільки $t \circ t^{-1} \circ b = b$, то b - транзитивно-стабільний. □

Теорема 12.0.1. *Нехай b - транзитивно-стабільний автоморфізм, що задається співвідношенням $b = (t, t^{-1} \circ b) \circ \sigma$. Тоді 0-розв'язком рівняння $\varepsilon^{\chi} = b$ є автоморфізм, що задається співвідношенням $a = (a, a \circ t)$*

Доведення. Зауважимо, що для автоморфізму $a = (a, a \circ t)$

$$...000 * a = ...000$$

Дійсно,

$$x0 * (a, b) = (x * a)0$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} a^{-1} \circ \varepsilon \circ a = (a, a \circ t)^{-1} \circ \varepsilon \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma \circ (a, a \circ t) = \\ = (a^{-1}, t^{-1} \circ a^{-1}) \circ (id, \varepsilon) \circ (a \circ t, a) \circ \sigma = \\ = (t, t^{-1} \circ (a^{-1} \circ \varepsilon \circ a)) \circ \sigma \end{aligned}$$

Оскільки для шарово-транзитивних, а отже і для стабільно-транзитивних автоморфізмів α та β, 0-розв'язок рівняння $\alpha^{\chi} = \beta$ існує і єдиний, то, згідно з зауваженням та отриманною рівністю, автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є 0- розв'язком рівняння $\varepsilon^{\chi} = b$. □

Природнім є питання, при яких t автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим. Умова скінченно-становості автоморфізму t є необхідною. Дійсно, оскільки автоморфізм a є скінченно-становим, то його права проекція $\pi_R(a) = a \circ t$ є скінченно-становим автоморфізмом, і тому автоморфізм

$$t = a^{-1} \circ (a \circ t) = a^{-1} \circ \pi_R(a)$$

також є скінченно-становим. Але ця умова не є достатньою. Це показують наступні теорема та приклад:

Теорема 12.0.2. *Автоморфізм $a = (a, a \circ t)$ є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли t - регулярний.*

Доведення. Нехай $\pi_L(a)$ ліва, а $\pi_R(a)$ - права проекція автоморфізму $a = (a, a \circ t)$. Тоді мають місце рівності:

$$\pi_L(a \circ f) = a \circ \pi_L(f)$$

$$\pi_R(a \circ f) = a \circ (t \circ \pi_R(f))$$

Тобто станами автоморфізму a є автоморфізми вигляду $\{a \circ x | x \in R_t\}$. Тому a є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли множина R_t є скінченною. □

Приклад 12.0.11. *Автоморфізм $a = (a, a \circ 3x)$ не є скінченно-становим.*

Покажемо, що множина W_{3x} - нескінченна. Дійсно, вона містить нескінченну кількість автоморфізмів вигляду $3^n x + c_n$. Отже автоморфізм $x * t = 3x$ є скінченно-становим(зі станами $3x, 3x+1, 3x+2$), але не є слабко-регулярним, тому не є і регулярним. За теоремою 12.0.2 автоморфізм $a = (a, a \circ 3x)$- нескінченно-становий.

Наслідком теорем 12.0.1 та 12.0.2 є наступна теорема:

Теорема 12.0.3. *Нехай b - транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм t - ліва проекція автоморфізма b. Автоморфізми ε та b спряжені в $FAutT_2$ тоді, і тільки тоді, коли t - регулярний.*

Далі сформулюємо крітерій скінченно-становості для транзитивно-стабільних автоморфізмів.

Теорема 12.0.4. *Нехай b - транзитивно-стабільний автоморфізм, автоморфізм t - ліва проекція автоморфізма b. Автоморфізм b є скінченно-становим тоді, і тільки тоді, коли t - слабко регулярний.*

Доведення. Очевидно b та b^{-1} мають однакову кількість станів. Покладемо

$$b' = b^{-1} = (b^{-1} \circ t, t^{-1}) \circ \sigma$$

Кожен стан b' з вершиною, що належить кінцю ...000 має вигляд

$$b' \circ x \mid x \in W_t$$

Якщо множина W_t - скінчена, то інші стани мають вигляд ,

$$t^{-1} \circ t_1 \circ ... \circ t_N$$

(де t_i є підстанами автоморфізму t і кількість доданків обмежена деяким натуральним N, що залежить від $|W_t|$), або є підстанами таких станів.

Отже b є скінченно-становим тоді, і лише тоді, коли множина W_t є скінченою.

□

Як було зауважено регулярний автоморфізм є слабко регулярним. Цікаво отримати приклад слабко регулярного автоморфізму, який не є регулярним. Згідно з теоремами 12.0.3 та 12.0.4 такий автоморфізм дозволяє побудувати приклад скінченно-станового стабільно-транзитивного автоморфізму, що не є спряженим з adding machine в $FAutT_2$. Побудувати слабко регулярний автоморфізм, який не є регулярним дозволяє наступна теорема.

Теорема 12.0.5. *Скінченно-становий автоморфізм $t = (t_1, t_2)$ є слабко регулярним тоді і тільки тоді, коли автоморфізм t_2 є слабко регулярним.*

Доведення. Достатньо звернути увагу на те, що:

$$W_t = \{id, t, t \circ t_2, ...\} = id \cup \{t \circ x | x \in W_{t_2}\}$$

Тобто множини W_t та W_{t_2} скінченні або нескінченні одночасно. □

Приклад 12.0.12. *Згідно з прикладом 12.0.11 автоморфізм $t' : x \to 3x$ не є регулярним, автоморфізм id є слабко регулярним. Тому автоморфізм $t = (3x, id)$ є слабко-регулярним автоморфізмом, що не є регулярним.*

Маємо приклад двох транзитивно-стабільних скінченно-станових автоморфізмів не спряжених в $FAutT_2$:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$b = ((3x, id), (\frac{1}{3}x, id) \circ b) \circ \sigma$$

Сформулюємо основний результат:

Перетин множини транзитивно-стабільних автоморфізмів з класом спряженості в групі скінченно-станових автоморфізмів, що містить adding machine, складається з транзитивно-стабільних автоморфізмів з регулярною лівою проекцією.

13 Зв'язка груп

Сформулюємо твердження, за допомогою яких буде побудована конструкція зв'язки двох груп.

$A1.\ a * b = f_b(a) \circ b$

$A2.\ (G, \circ)$ - група

$A3.\ (G, *)$ - напівгрупа ($A3a.\ (G, *)$ - група)

$A4.\ f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$

$A5.\ f_c(a \circ b) = f_c(a) \circ f_c(b)$

Сформулюємо твердження

$$T1.\ f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$$

та

$$T1a.\ f_c(f_b(a) \circ b) = f_{f_c(b) \circ c}(a) \circ f_c(b)$$

Теорема 13.0.6. $A1, A2, A3 \vdash T1$

Доведення.

1	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A3$
2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A1, 1$
3	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$2, A2$

$\square$

Теорема 13.0.7. $A1, A2, T1 \vdash A3$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a) \circ b) \circ c = f_{b*c}(a) \circ (f_c(b) \circ c)$	$A2, 1$
3	$(a * b) * c = a * (b * c)$	$A1, 2$

$\square$

Теорема 13.0.8. $A2, A5, T1 \vdash A4$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

$\square$

Теорема 13.0.9. $A1, A2, A5, A3 \vdash A4$

Доведення.

1	$f_c(f_b(a) \circ b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$T1$
2	$f_c(f_b(a)) \circ f_c(b) = f_{b*c}(a) \circ f_c(b)$	$A5, 1$
3	$f_a(f_b(c)) = f_{b*a}(c)$	$A2, 2$

$\square$

Теорема 13.0.10. $A1, A2, A5, A4 \vdash A3$

Сформулюємо твердження $T2 : \forall b\ f_b(x)-$ сюр'єкція.

Теорема 13.0.11. $A1, A2, A3, A4, T2 \vdash A5$

Приклад 13.0.13. $\boxed{a \circ b = f_b(a) \hat{\circ} b}$ *- приклад зв'язки відомих конструкцій множення та антимноження*

$\circ_1 \sim \hat{\circ}, \circ_2 \sim \circ$

$a \circ b$ *- множення в групі*

$a \hat{\circ} b = b \circ a$ *- антимноження в групі*

$f_a(b) = a^{-1} \circ b \circ a$

Приклад 13.0.14. $\boxed{a \hat{\circ} b = f_b(a) \oplus b}$ *- приклад визначення множення автоморфізмів на портретах за допомогою простої операції додавання портретів за модулем 2*

$\circ_1 \sim \oplus, \circ_2 \sim \hat{\circ}$

$a \oplus b$ *- додавання по модулю 2 портретів автоморфізмів* a *та* b

$a \hat{\circ} b = b \circ a$ *- антимноження в групі автоморфізмів*

$f_a(b)$ *- перестановка кінців портрету автоморфізму* a *під дією автоморфізму* b^{-1}

Приклад 13.0.15. $\boxed{a * b = f_b(a) \circ b}$

$\circ_1 \sim \circ, \circ_2 \sim *$

$a \circ b$ *- множення в групі автоморфізмів*

Означимо функцію g *на множині автоморфізмів вигляду* $a = (a, a \circ t)$ *наступним чином* $g(a) = a^{-1} \circ \pi_R(a) = t$

$a * b = g(g^{-1}(a) \circ g^{-1}(b))$

$f_a(b) = (g^{-1}(a))^{-1} \circ b \circ g^{-1}(a) = b^{g^{-1}(a)}$

Приклад 13.0.16. $\boxed{a * b = (a+1) \cdot b + a = a \cdot b + a + b}$

$\circ_1 \sim +, \circ_2 \sim *$

$a + b$ *- додавання дійсних чисел*

$a * b$ *- асоціативна операція на множині дійсних чисел*

$f_a(b) = (a+1) \cdot b$

Література

[1] *Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский* Автоматы, динамические системы и группы. Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей, Тр. МИАН, 231, Наука, М., 2000, 134–214

[2] *Морозов Д.І.* Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева . Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. - 2008.– вип.№1 –С.40- 43.

[3] *Морозов Д.І.* Скінченно-станова спряженість сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева. Науковий часопис НПУ Драгоманова. Вісник Київського ун-ту. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. -2013. №12.-С.5-12.

[4] Сущанский В.И. Группы изометрий p- пространства Бэра. Докл. АН УССР.-1984.-№8.-с.28-30

[5] Сущанский В.И. Сплетения по последовательности груп подстановок и финитно-апроксимируемые группы . Докл. АН СССР.-1984.-№2.-с.19-22

[6] *R.I.Grigorchuk, V.V.Nekrashevych, V.I.Sushchansky* Automata, dynamical systems and groups. Proc. V.A. Steklov Inst. Math., Vol. 231 (2000), 134-215.

[7] *V.Nekrashevych* Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs, Vol.117, 231 pp., 2005.

[8] Brunner A. Sidki S. On the automorphism group of the one-rooted binary tree //J. Algebra. - 1997. - V.195. - P. 465-486.

[9] Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І. Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева. Наукові записки НаУКМА.- Т.39. Фізико-математичні науки. - 2005. -с.25-27.

[10] Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І. Розширені 2-адичні числа як централізатори автоморфізмів регулярного кореневого дерева валентності 3. Наукові записки НаУКМА.- Т.51. Фізико-математичні науки. - 2006. -с.4-7.

[11] Adams, S. and Spacier, R.,Kazhdan Groups, Cocycles and Trees, Am.J.Math., 1990, vol.112. pp.271-287.

[12] Bartholdi, L. and Grigorchuk, R., On Parabolic Subgroups and Hecke Algebras of Some Fractal Groups, Preprint of Forschungsinst. Math.,ETH-Zurich, 1999.

[13] Bartholdi, L. and Grigorchuk, R., On the Spectrum of Hecke Type Operators Related to Some Fractal Groups, Present edition, pp.1-41.

[14] Brunner, A.M. and Sidki, S., The Generation of GL (n, Z) by Finite State Automat, Int. J. Algebra and Comput., 1998, vol.8, no.1, pp.127-139.

[15] Buescu, J. and Stewart, I., Liapunov Stability and Adding Machines, Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1995, vol.15, pp.1-20.

[16] Dye, H., On Groups of Measure Preserving Transformations. I, Am. J.Math.,1959, vol. 81, pp. 119-159.

[17] Eilenberg, S., Automata, Languages, and Machines, New York: Academic, 1974, vol. A.

[18] Grigorchuk, R., Just Infinite Branch Groups, in New Horizons in Pro-p Groups, du Sautoy, M.P.F., Segal, D., and Shalev, A., Boston: Birkhauser, 2000, pp. 121-179 (Progr. Math., vol.184).

[19] Gromov, M., Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps, Publ. Math. IHES , 1981, vol. 53, pp. 53-73.

[20] Gupta, N. and Sidki, S., Some Infinite p-Groups, Algebra i Logika, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 584-589.

[21] Horejs, J., Transformation Defined by Finite Automata, Probl. Kibern., 1963, vol. 9, pp. 23-26.

[22] Nekrashevych, V.V. and Sushchansky, V.I., Some Problems on Groups of Finitely Automatic Permutations, Mat.Stud., 2000, vol. 13, no. 1, pp. 93-96.

[23] Nekrashevych, V.V. and Sushchansky, V.I., On Confinal Dynamics of Rooted Tree Automorphisms, Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra, Atki-

nson, M., Gilbert, N., and Howie, H., Eds., Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, pp. 229-246 (LMS Lect. Note Ser.; vol. 275).

[24] Gavron, P., Nekrashevych, V.V. and Sushchansky, V.I., Conjugacy Classes of the Group of Tree Automorphisms, Mat. Zametki, 1999, vol. 65, no. 6, pp. 938-941.

[25] Nekrashevych, V.V. and Sushchansky, V.I., Automata with Restricted Memory and Endomorphisms of a Shift, Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukr., 2000(in press)

[26] Olijnyk, A., Free Products of C2 as Groups of Finitely Automatic Permutations, Vopr. Algebry, 1999, vol. 14, pp. 158-165.

[27] Rhodes, J., Monoids Acting on Trees, Int. J. Alg. And Comput., 1991, vol. 1, pp. 253-279.

[28] Sidki, S., Regular Trees and Their Automorphisms, Rio de Janeiro: IMPA, 1998 (Monogr. Mat., vol. 56.

[29] Sidki, S., Automorphisms of One-Rooted Trees: Growth, Circuit Structure and Acyclicity, J. Math. Sci., 2000, vol. 100, no. 1, pp. 1925-1943.

[30] Sushchansky, V.I. and Mocko,E., Cycles of Distance Decreasing Mappings in Certain Local Domains, Colloq. Math. (in press).

[31] Aleshin, S.V., Finite Automata and Burnside's Problem on Periodic Groups, Mat. Zametki, 1972, vol. 11, pp. 319-328.

[32] Aleshin, S.V., A Free Group of Finite Automata, Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1:Mat.Mekh., 1983, no. 4, pp. 12-16.

[33] Bezushchak, O.O. and Sushchansky, V.I., Conjugacy in the Isometry Groups of Baire Metrics, Ukr. Mat. Zh., 1991, vol. 43, no. 9, pp. 1148-1155.

[34] Glebskii, Yu.V. , Coding by Finite Automata, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, vol. 141, no. 5, pp. 1094-1057.

[35] Glushkov, V.M., Abstract Theory of Automata, Usp. Mat. Nauk, 1961, vol. 16, no. 5, pp. 3-62.

[36] Grigorchuk, R.I., On Periodic Groups Generated by Finite Automata, 18-ya Vsesoyuznaya algebraicheskaya konferentsiya (18th All-Union Algebraic Conf.), Kishinev, 1985.

[37] Kudryavtsev, V.M., Aleshin, S.V., and Podkolzin, A.S., Vvedenie v teoriyu avtomatov (Introduction to the Theory of Automata),Moscow: Nauka, 1985.

[38] Merzlyakov, Yu. I., On Infinite Finite Generated Periodic Groups, Dokl. Akad. Nauk SSS, 1983, vol. 268, no. 4, pp. 803-805.

[39] Oliinyk, A., Free Groups of Automatic Permutations, Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukr., 1998, no. 7, pp. 40-44.

[40] Oliinyk, A.,Free Abelian Groups of Finite Automata, Visn. Kiiv. Univ., Ser. Fiz. - Mat. Nauki, 1999, no. 1, pp. 74-77.

[41] Rozhkov, A.V., Finiteness Conditions in the Groups of Tree Automorphisms, Doctoral (Phys.-Math.) Dissertation, Cheliabinsk, 1996.

[42] Sushchanskii, V.I., Wreath Products and Periodic Factorizable Groups, Mat. Sb., 1989, vol. 108, no. 8, pp. 1073-1091.

[43] Sushchanskii, V.I., Wreath Products and Periodic Factorizable Groups, Algebra i Anal., 1994, no. 1, pp. 199-232.

[44] Sushchanskii, V.I.,Groups of Automatic Permutations, Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukr., 1998, no. 6, pp.47-51.

[45] Sushchanskii, V.I., Groups of Finitely Automatic Permutations, Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukr.,1999, no. 2, pp. 29-32.

[46] Laurent Bartholdil, The growth of Grigorchuk'sTtorsion Group, Internat. Math. Res. Notices 20 (1998), 1394-1356.

[47] Laurent Bartholdil and Rostislav I.Grigorchuk, Spectra of fractal groups, 1998.

[48] Rostislav I.Grigorchuk, On Burnside's problem on periodic groups, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1980), no. 1, 53-54, english translation: Functional Anal. Appl.14 (1980), 41-43.

[49] Rostislav I.Grigorchuk, Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48 (1984), no. 5, 939-985, english translation: Math. USSR-Izv. 25 (1985), no. 2, 259-300.

[50] Rostislav I.Grigorchuk, Degrees of growth of p-groups and torsion-free groups, Mat. Sb. (N.S.) 126 (168) (1985), no.2, 194-214, 286.

[51] Rostislav I.Grigorchuk, On the Hilbert-Poincare series of graded algebras that are associated with groups, Mat. Sb. (N.S.) 180 (1989), no.2, 207-225, 304, english translation: Math. USSR-Sb. 66 (1990), no.1, 211-229.

[52] Rostislav I.Grigorchuk and Pierre de la Harpe, On the problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory, J.Dynam. Control Systems 3 (1997), no.1, 51-89.

[53] Alexander V. Rozhkov, Lower central series of a group of tree automorphisms, Mat. Zametki 60 (1996), no.2, 225-237, 319.

[54] Alexander V. Rozhkov, Conditions of finiteness in groups of automorphisms of trees, Habilitation thesis, Chelyabinsk, 1996.

[55] Laurent Bartholdil and Rostislav I.Grigorchuk, Lie methods in growth of groups and groups of finite width, Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra (Michael Atkinson et al., ed.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol.275, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp.1-27.

[56] Rostislav I.Grigorchuk, Just infinite branched groups,Horizons in Profinite Groups (Dan Segal, Markus P.F.du Sautoy, and Aner Shalev, eds.), Birkhauser, Basel, 2000, pp.121-179.

[57] Narain D. Gupta and Said N.Sidki, On the Burniside problem for periodic groups, Math. Z. 182 (1983), 385-388.

[58] Narain D. Gupta and Said N.Sidki, Some infinite p-groups, Algebra I Logika 22 (1983), no.5, 584-589.

[59] Rostislav I.Grigorchuk and Andrej Zuk, On the asymptotic spectrum of random walks on infinite families of graphs, Proceeding of the Conference "Random Walks

and Discrete Potential Theory "(Cortona) (M.Picardello and W.Woess, eds.), Symposia Mathematica (Cambridge University Press), 22-28 June, 1997, pp.134-150.