УДК 517.5

Морозов Д. І.

Ізометрії та стискаючи функції кільця Z_2

Робота є продовженням роботи [2], у якій досліджується ізометричність поліномів кільця Z_2. У данній роботі вивчається представлення автоморфізмів бінарного кореневого дерева функціями кільця Z_2.

Ключові слова: кореневе дерево, автоморфізм дерева, ізометрія, 2-адична функція

Зручною для роботи з двійковими автоматами, особливо з нескінчено-становими, є техніка їх представлення у вигляді функцій кільця Z_2.

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на Z_2. Кожен автоморфізм дерева α задає функцію f_α за правилом: якщо автоморфізм α переводить кінець x в кінець y, то $f_\alpha(x) = y$. Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією $f(x) = x + 1$.

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм необхідно, що б ця функція пару кінців з однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

Приклад 1. Функція $f(x) = 2x$ переводить пару ...1111 та ...0000 в пару ...1110 та ...0000 відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція $f(x) = 2x$ не є автоморфізмом дерева.

Приклад 2. Функція $f(x) = x^2$ не є автоморфізмом дерева.

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$(2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 =$$
$$= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) =$$
$$= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1)$$

то для пари 2-адичних чисел x_1, x_2, що мають спільний початок ненульової довжини n, пара x_1^2, x_2^2 має спільний початок довжини як найменше довжини n+1 отже відображення $f(x) = x^2$ є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Далі наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця Z_2, що є стискаючими. В цьому класі виділяється підмножина, що відповідає ізометріям, а отже груповим автоматам.

Стискаючи функції кільця Z_2Означимо метрику ρ на кільці Z_2. Кожен елемент $x \in Z_2$ можна єдиним чином представити у вигляді $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2.

Далі під фразою $a \in Z_2$ ділиться на $b \in Z_2$, будемо розуміти, що $\frac{a}{b}$ належить кільцю Z_2.

Означення 1. Функція $ord_2(x)$ для $x \in Z_2$ означається наступним чином. Нехай $x = u * 2^n$, де u - обертовний елемент кільця Z_2. Тоді $ord_2(x) = n$.

Означення 2. Означимо відстань $\rho(x, y)$ для $x, y \in Z_2$.

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ord_2(x-y)}$$

Означення 3. Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається ізометрією, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$$

Множину ізометрій позначимо як $AutZ_2$.

Означення 4. Ізометрія $f : Z_2 \to Z_2$ називається шарово-транзитивною, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^k(0)$ має 2^n різних значень по модулю 2^n. Множину шарово-транзитивних ізометрій позначимо, як $STAutZ_2$

Лема 1. Функція f є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$.

Доведення. Представимо $f(x) - f(y)$ та $x - y$ у вигляді: $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$, $x - y = u_2 * 2^{n_2}$, де - u_1, u_2 обертовні елементи кільця Z_2. Оскільки f - ізометрія, то $n_1 = n_2$. Отже маємо:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{u_1}{u_2} = u_1 * u_2^{-1}$$

тобто дріб належить групі одиниць кільця Z_2.

З іншої сторони, якщо для всіх $x, y \in Z_2$ добуток $2^{n_1-n_2} * u_1 * u_2^{-1}$ належить групі одиниць кільця Z_2, то $n_1 = n_2$, тому f - ізометрія.

Означення 5. Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається стискаючою, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$$

Множину стискаючих функцій позначимо як $EndZ_2$.

Означення 6. Функція $f : Z_2 \to Z_2$ називається строго-стискаючою, якщо

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

Множину строго-стискаючих функцій позначимо як $CEndZ_2$.

Зауваження 1. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n ($n \in \mathbb{N}$). Тоді те що функція $f(x)$ є

a) ізометрією, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} (дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить групі одиниць кільця Z_2)

b) строго-стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^{n+1}(дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить $2 * Z_2$)

c) стискаючою, рівносильно умові: $f(x)-f(y)$ ділиться на 2^n (дріб $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ належить Z_2)

Зауваження 2. Легко бачити, що об'єднання множини ізометрій з множиною строго стискаючих функцій є власною підмножиною множини стискаючих функцій.

Теорема 1. Якщо f - стискаюча, g - стискаюча, то $f + g$ - стискаюча.

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, другий доданок також ділиться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f + g$ є стискаючою функцією.

Теорема 2. Якщо f - ізометрія, g - строго стискаюча, то $f + g$ - ізометрія

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f - ізометрія, а g - строго стискаюча функція. Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f + g$ є ізометрією.

Теорема 3. Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f + g$ - строго стискаюча

Доведення. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) =$$

$$= (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1} , другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1}, і звідси маємо, що $f + g$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 4. Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то $f + g$ - строго стискаюча

Доведення.

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))}{x - y} =$$

$$= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} + \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = a_1 + a_2$$

$$a_1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \ a_2 = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

Оскільки f та g - ізометрії, то a_1 та a_2 належать множині обертовних елементів кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$. Отже $a_1 + a_2$ ділиться на 2 для всіх $x, y \in Z_2$ і тому $f + g$ - строго стискаюча функція.

Наслідок 1. Якщо f, g та h - ізометрії, то то $f + g + h$ - ізометрія

Дійсно, оскільки за теоремою $g + h$ - строго стискаюча, а f- ізометрія, то за теоремою $f + (g + h)$ - ізометрія.

Теорема 5. Якщо f - стискаюча, то $2 * f$ - строго стискаюча функція.

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді $f(x)-f(y)$ також ділиться на 2^n, оскільки f є стискаючою. Розглянемо різницю

$$2*f(x)-2*f(y)=2*(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності ділиться на 2^{n+1}, отже маємо, що $2*f$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 6. Якщо f - стискаюча, g - стискаюча, то $f*g$ - стискаюча.

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^n, оскільки f та g - стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x)*g(x)-f(y)*g(y)=$$

$$=f(x)*(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^n. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f*g$ є стискаючою функцією.

Теорема 7. Якщо f - строго стискаюча, g - строго стискаюча, то $f*g$ - строго стискаюча.

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - строго стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x)*g(x)-f(y)*g(y)=$$

$$=f(x)*(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^{n+1}. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f*g$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 8. Нехай f - ізометрія, а g - стискаюча функція.

Тоді $f*(2*g+1)$ - ізометрія

Доведення. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^n, але не діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g - ізометрії.

Розглянемо різницю

$$f(x)*(2*g(x)+1)-f(y)*(2*g(y)+1)=$$

$$=2*f(x)*(g(x)-g(y))+(2*g(y)+1)*(f(x)-f(y))$$

Друга частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} . Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f*(2*g+1)$ є ізометрією.

Наслідок 2. Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $f*(2*g+1)$ - ізометрія

Дійсно, і ізометрія і строго стискаюча функція є стискаючими.

Теорема 9. Нехай функції f та g є стискаючими.

Тоді $2*f*g$ - строго стискаюча функція

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{2f(x)*g(x)}{x-y}-\frac{2f(y)*g(y)}{x-y}=$$

$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(x)+f(y)(g(x)-g(y)))}{x-y}=$$

$$=2g(x)*a_1+2f(y)*a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\; a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f та g - стискаючи, то a_1 та a_2 належать Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже $2g(x)*a_1+2f(y)*a_2$ ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$ і тому $2*f*g$ - строго стискаюча функція.

Наслідок 3. Нехай f - ізометрія, або строго стискаюча функція, g - ізометрія, або строго стискаюча функція. Тоді $2*f*g$ - строго стискаюча функція.

Теорема 10. Якщо f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то

$$\frac{f}{2*g+1}$$

- ізометрія.

Доведення. Розглянемо різницю:

$$\frac{f(x)}{2g(x)+1}-\frac{f(y)}{2g(y)+1}=$$

$$=\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{(2g(x)+1)(2g(y)+1)}$$

Знаменник не впливає на парність дробу, оскільки є добутком обертовних елементів кільця Z_2.

Розглянемо відношення:

$$\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(y)-f(y)(g(x)-g(y)))}{x-y}+$$

$$+\frac{(f(x)-f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{2(f(x)-f(y))g(y)}{x-y}-\frac{2f(y)(g(x)-g(y))}{x-y}+$$

$$+\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

Оскільки f - ізометрія, а g - стискаюча функція, то a_1 належить множині обертовних елементів кільця Z_2, а a_2 належить Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже

$$(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

належить множині обертовних елементів кільця Z_2, і тому $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія.

Наслідок 4. Нехай f - ізометрія, а g - ізометрія, або строго стискаюча. Тоді $\frac{f}{2*g+1}$ - ізометрія

Теорема 11. Якщо f - строго стискаюча функція, g - строго стискаюча функція, то суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ - строго стискаюча функція.

Доведення. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$.

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}*\frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб ділиться на 2, оскільки f - строго стискаюча функція. Другий дріб також ділиться на 2, оскільки g - строго стискаюча функція. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 12. Якщо f - ізометрія, g - ізометрія, то суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ - ізометрія.

Доведення. Скористаємось лемою 1. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$.

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}*\frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)}$$

Друга частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки f - ізометрія. Другий дріб також належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки g - ізометрія. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ є ізометрією.

Наслідком попередніх теорем є наступні три теореми:

Теорема 13. Стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце з мультиплікативною одиницею $f(x)=x$ відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.

Теорема 14. Строго стискаючи функції на кільці Z_2 утворюють кільце без одиниці відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина строго стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.

Теорема 15. Множина ізометрій кільця Z_2 є класом суміжності по підгрупі строго стискаючих функцій відносно операції поелементного додавання в групі стискаючих функцій.

Наступна теорема потрібна для продовження натуральних функцій до 2-адичних ізометрій.

Теорема 16. Ізометрія χ, визначена на всюди щільній в Z_2 підмножині M, єдиним чином продовжується до ізометрії $\overline{\chi}$ на Z_2.

Доведення. Оскільки ізометрія є неперевною функцією, а множина M є всюду щільною в Z_2, то для елемента $x\notin M$ значення $\overline{\chi}(x)$ визначено єдиним чином, як

$$\overline{\chi}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi(x_n)$$

де $\{x_n\}$ послідовність елементів із M, збіжна к x в Z_2.

На множині M функція $\overline{\chi}$ співпадає з χ.

Теорема 17. Шарово-транзитивна функція $f : Z_2 \to Z_2$ є ізометрією тоді і лише тоді, коли оператор примітивної рекурсії $g(x) = I[f](x)(g(0) = 0, g(x+1) = f(g(x)))$ від функції $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дає функцію g, неперервне продовження якої на Z_2 є ізометрією кільця Z_2.

Доведення. Якщо f -шарово-транзитивна ізометрія, то $I[f](x)$ є 0-розв'язком(0-розв'язок - розв'язок, що переводить 0 в 0) рівняння спряженності $\varepsilon^{\chi} = f$ Дійсно, якщо $\chi(0) = 0$, то $\chi(n) = f^n(0)$ для $x \in \mathbb{N}$. Звідси $\chi(n+1) = f(f^n(0)) = f(\chi(n))$ і $\chi(x) = I[f](x)(x \in \mathbb{N})$. Оскільки $\mathbb{N}$ всюди щільна в Z_2, то, згідно з теоремою 16 існує єдине продовження ізометрії $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ до ізометрії $\chi : Z_2 \to Z_2$.

З іншого боку, якщо ізометрія f не є шарово-транзитивною, то замикання множини $M = \{x | x = f^n(0), n \in \mathbb{N}\}$ є власною підмножиною Z_2, тобто χ не є сюр'єктивним відображеням з Z_2 на Z_2, і тому не є ізометрією.

Приклад 3. Легко бачити, що, $f(x) = x$ є ізометрією, а $g(x) = c, c \in Z_2$ строго стискаючою функцією. Тому, згідно з теоремою $f(x) + g(x) = x + c,\ c \in Z_2$ є ізометрією.

Приклад 4. Оскільки $f(x) = x + c,\ c \in Z_2$ є ізометрією, а для $c \in Z_2^*$ $f(x) = x + c$ є шарово-транзитивною ізометрією і $I[x+c](x) = c * x$ то, згідно з теоремою $g(x) = c * x$ $(c \in Z_2^*)$ є ізометрією.

Приклад 5. Оскільки $f(x) = a * x$ $(a \in Z_2^*)$ є ізометрією, а $g(x) = b, b \in Z_2$ строго стискаючою функцією, то, згідно з теоремою лінійна функція $f(x) + g(x) = a * x + b,\ c \in Z_2$ є ізометрією.

1. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции / Коблиц Н. — 1982 — 190 с.

2. Морозов Д.І. Ізометричність поліномів над кільцем цілих 2-адичних чисел.

/ Наукові записки НаУКМА. Серія: Фізико-математичні науки. - 2011.–Т.113.-С.13-15

D. Morozov

Isometrics and compressing functions of the ring Z_2.

This work is a continuation of paper [2], which investigated izometrical polynomials of the ring Z_2. In this paper we study representations of automorphisms of binary rooted tree with functions of ring Z_2.

Keywords: rooted tree, tree automorphism, izometries, 2-adic function