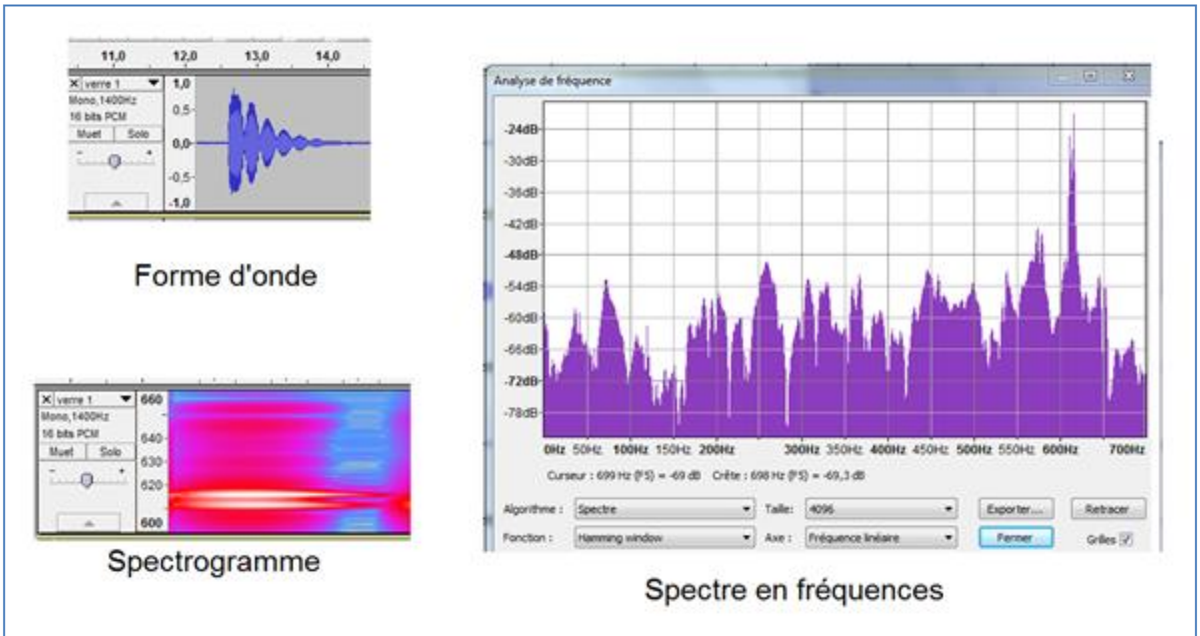
Peut-on vraiment casser un verre avec la voix
ou le son d'un instrument de musique ?

ANNEXES

LYCÉE PARC DES LOGES – ÉVRY
ANNÉE SCOLAIRE : 2019/2020

Sommaire

Annexe 1 : Méthodes d’analyse spectrale



principaux outils d'analyse spectrale avec Audacity

Le logiciel Audacity permet d’enregistrer des sons, c'est-à-dire de les transformer en tensions électriques.

- L’amplitude de référence d’une tension enregistrée est 1,414 V , amplitude qu’il convient de ne pas dépasser en règle générale. A cette amplitude correspond le chiffre 1 sur l’échelle linéaire des formes d’onde.
- Par ailleurs, on peut aussi exprimer le niveau d’un signal monofréquence sinusoidal en référence à cette valeur : L (dBu) = 10 log $\frac{amplitude\ du\ signal}{1{,}414}$, dBu signifiant decibels unloaded.

C’est pourquoi avec des outils comme Audacity le niveau sonore maximum est généralement 0dB.

La forme d’onde (mode linéaire) représente le signal en fonction du temps comme on le verrait sur un oscilloscope .

Elle permet donc de distinguer

- un signal fort d’un signal faible(figa)
- Un amortissement rapide d’un amortissement plus long (fig b)

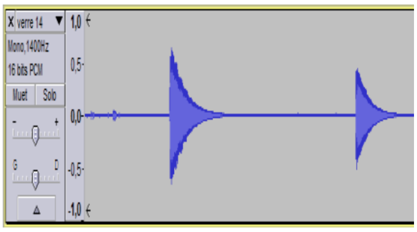
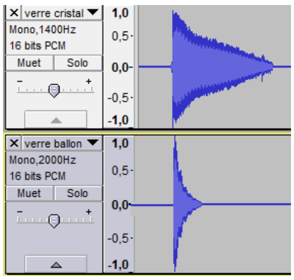
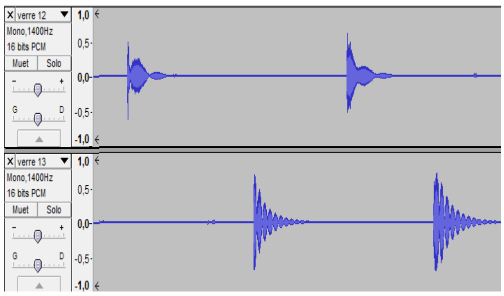


Figure a

Figure b



- (fig c) On peut aussi détecter si un verre a deux fréquences de résonance proches et évaluer leur différence. En effet si c’est le cas des battements apparaissent.



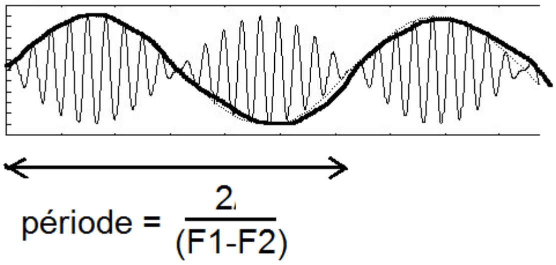
En effet, si nous additionnons deux signaux de même amplitude

A $\cos(2\pi f_1 t)$ *et A* $\cos(2\pi f_1 t)$,

A $\cos(2\pi f_1 t)$ + *A* $\cos(2\pi f_1 t)$ = *2A* $\cos\left(\frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2}\right)\left(\frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2}\right)$.

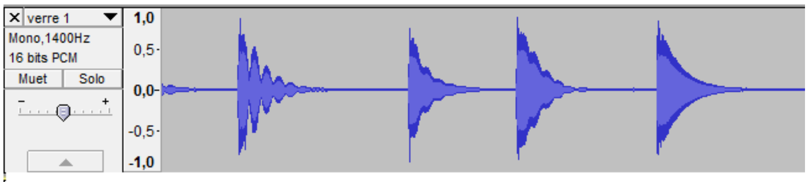
Soit un signal de pulsation $\frac{f1+f2}{2}$ *modulé par un signal de fréquence* $\frac{f1-f2}{2}$.

Il apparaît des « bosses » de période $\frac{1}{f1-f2}$.



Il suffit de mesurer la durée en secondes d'une bosse et de calculer son inverse pour trouver l'écart entre les deux fréquences de résonance. Dans notre exemple, un lobe a un durée de 0,2s environ, donc l'écart de fréquence entre le deux fréquences proches est 4Hz, ce qui est confirmé sur le spectre (pics à 611 et 615 Hz) .

On peut également apprécier (-mais c'est plus visible en mode spectrogramme) l'importance relative des deux fréquences.



modulation importante : les deux fréquences sont très présentes

modulation faible, un mode de résonance est prépondérant

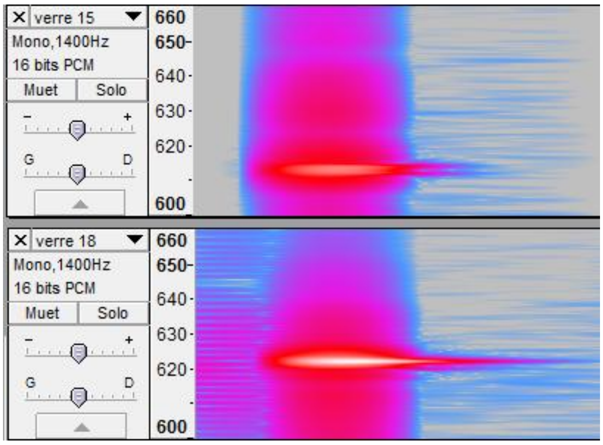
pas de modulation: une seule fréquence est présente

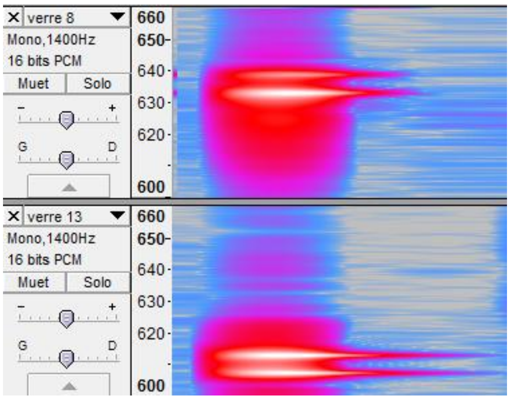
Le spectrogramme permet d'évaluer le niveau sonore (dBu) des fréquences présentes dans un intervalle de fréquences donné (échelle verticale) , et ce en fonction du temps .

Par ailleurs une échelle de fausses couleurs (paramétrées par nos soins entre -15 dBu et -50dBu) permet simultanément d'évaluer le niveau sonore des signaux qui composent le spectre.

Le spectrogramme permet donc

- (à droite) de comparer (en dB) les réponses à une excitation (la tache blanche correspond au maximum de l'échelle de fausses couleurs : le verre 18 résonne plus fort que le verre 15)

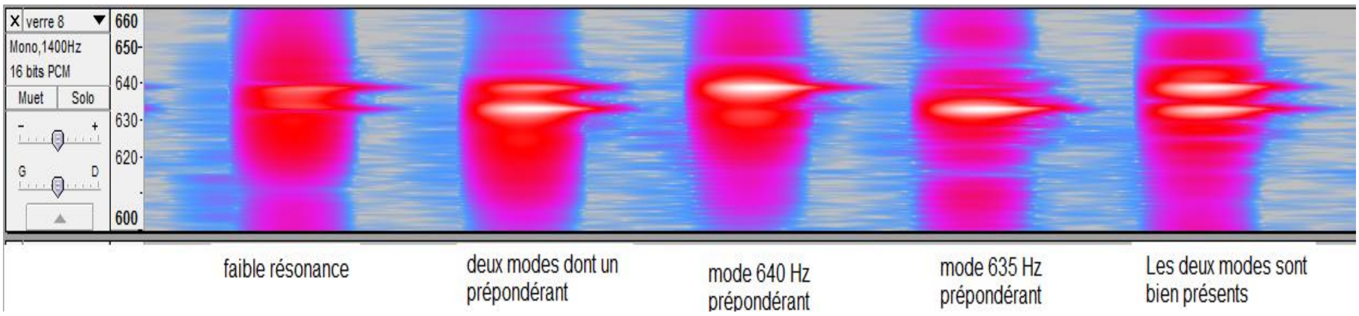




- (à gauche) De comparer la durée de la phase d'amortissement

(le verre 13 résonne beaucoup plus longtemps que le verre 8 ; par ailleurs on distingue très bien les deux fréquences propres)

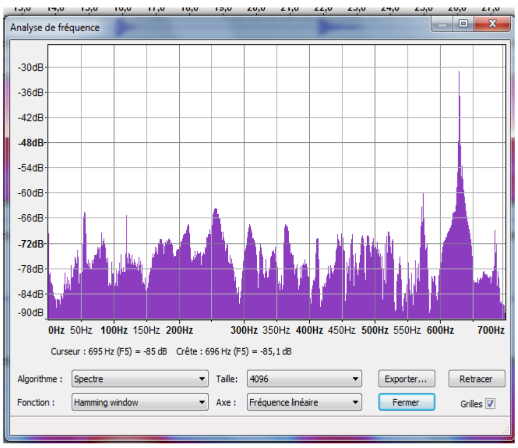
- D'observer la réponse en fréquence d'un même verre suivant l'endroit où il est excité . Ci-dessous les réponses d'un même verre frappé en plusieurs lieux différents de son diamètre maximal)

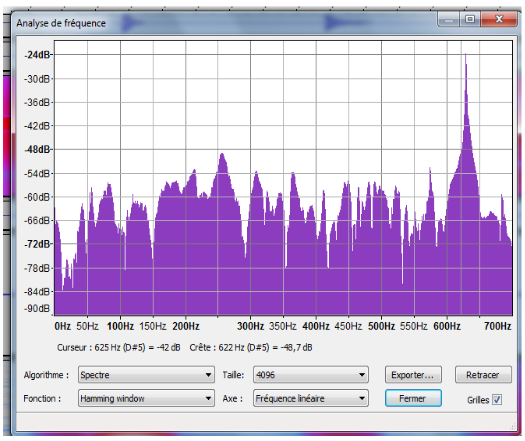


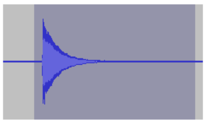
le spectre en fréquences montre les fréquences qui composent le signal , ou plus exactement puisque le signal n'est pas périodique la décomposition en une somme de signaux monofréquence sinusoidaux du signal correspondant à <u>l'intervalle de temps sélectionné.</u>

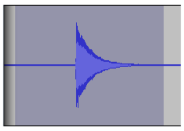
Frapper un verre par une courte percussion revient mathématiquement à lui proposer une infinité de fréquences d'excitation. Le spectre permet donc de trouver immédiatement les principales fréquences propres du verre.

On pourrait du coup penser obtenir quelque chose de similaire à la réponse en fréquence en régime forcé, et du coup comparer qualitativement les facteurs de qualité. Mais malheureusement l'allure du spectre dépend de la durée de l'intervalle sélectionné (à droite), c'est pourquoi nous avons en définitive abandonné cette voie eu profit de mesures en régime forcé.

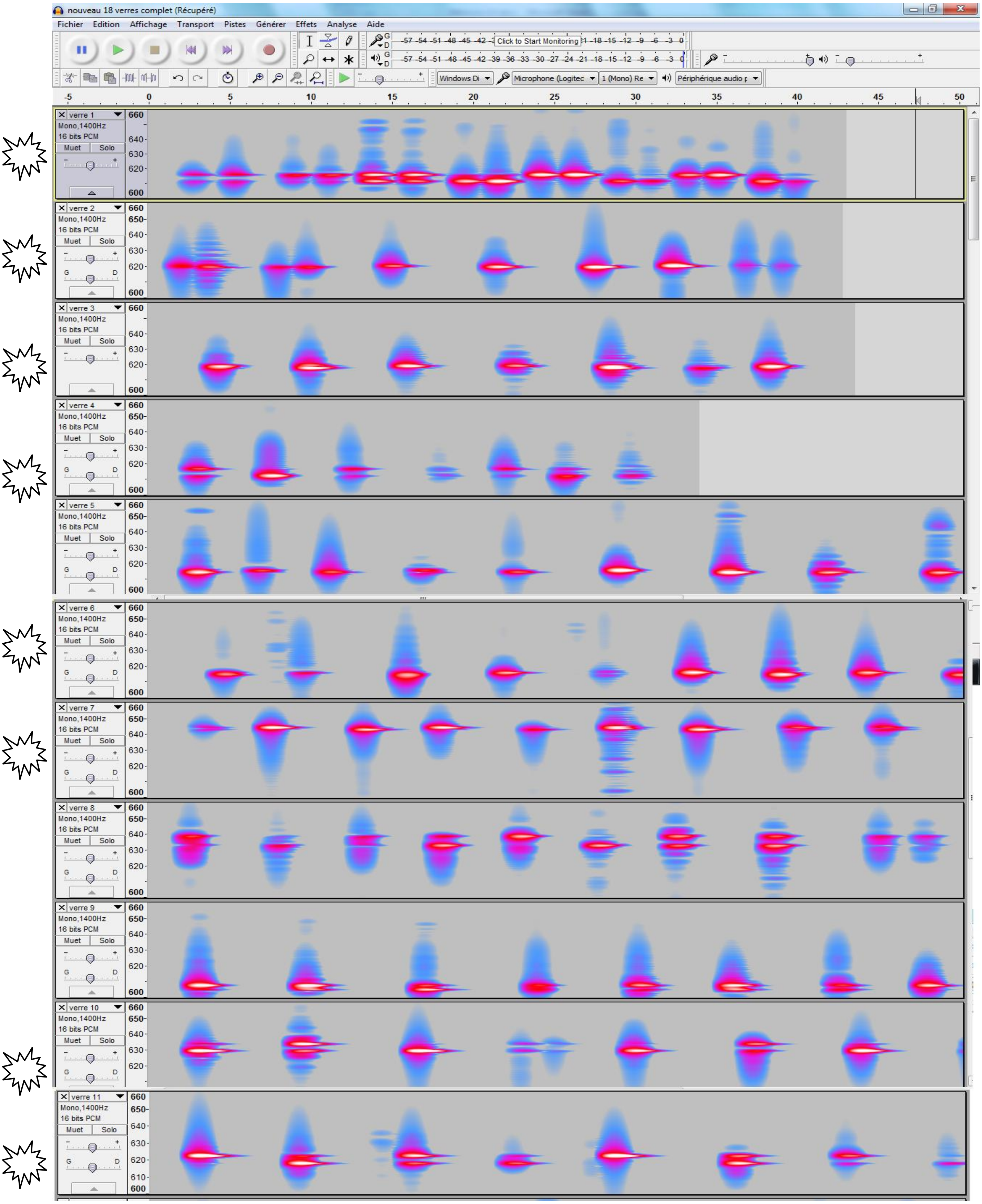


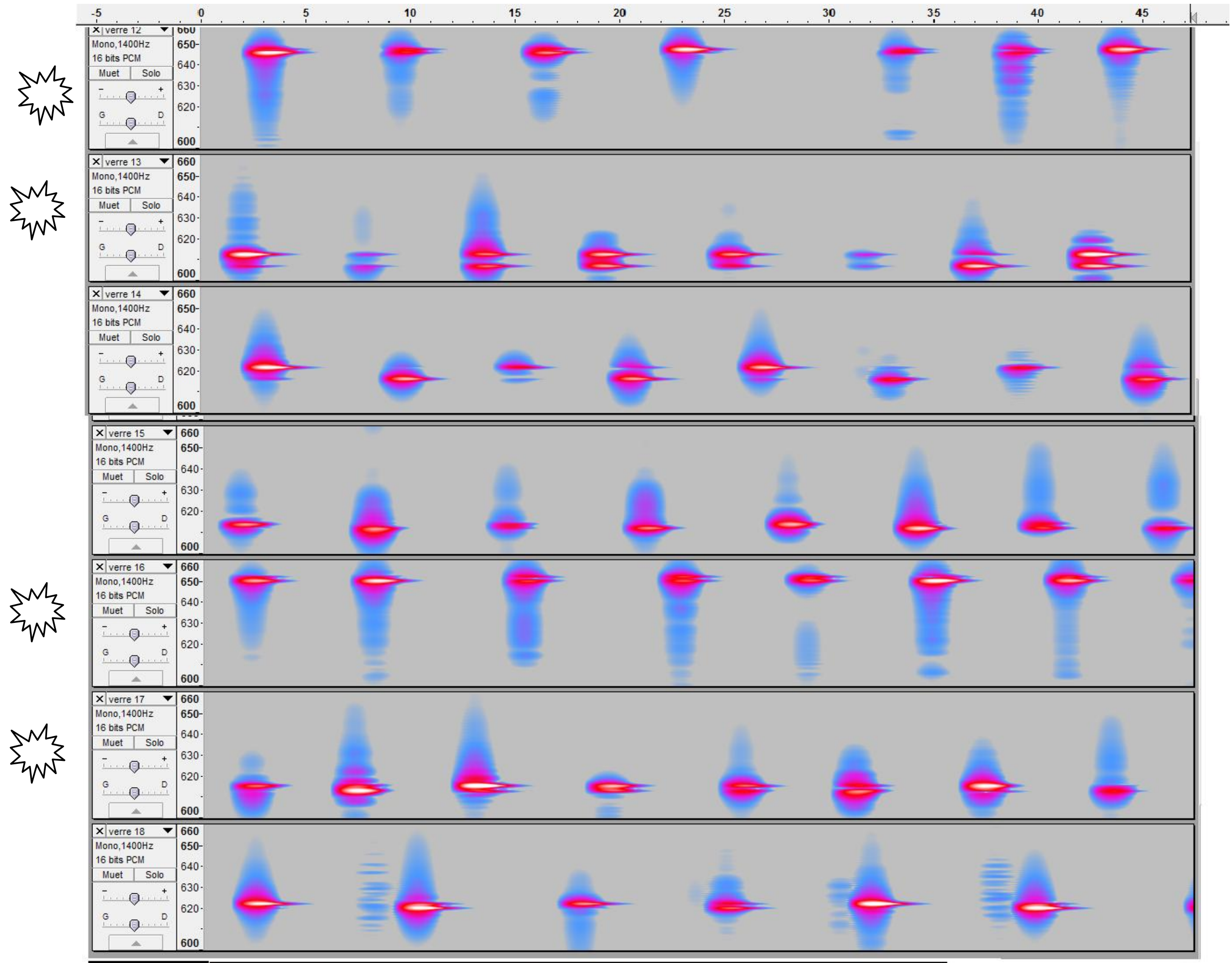


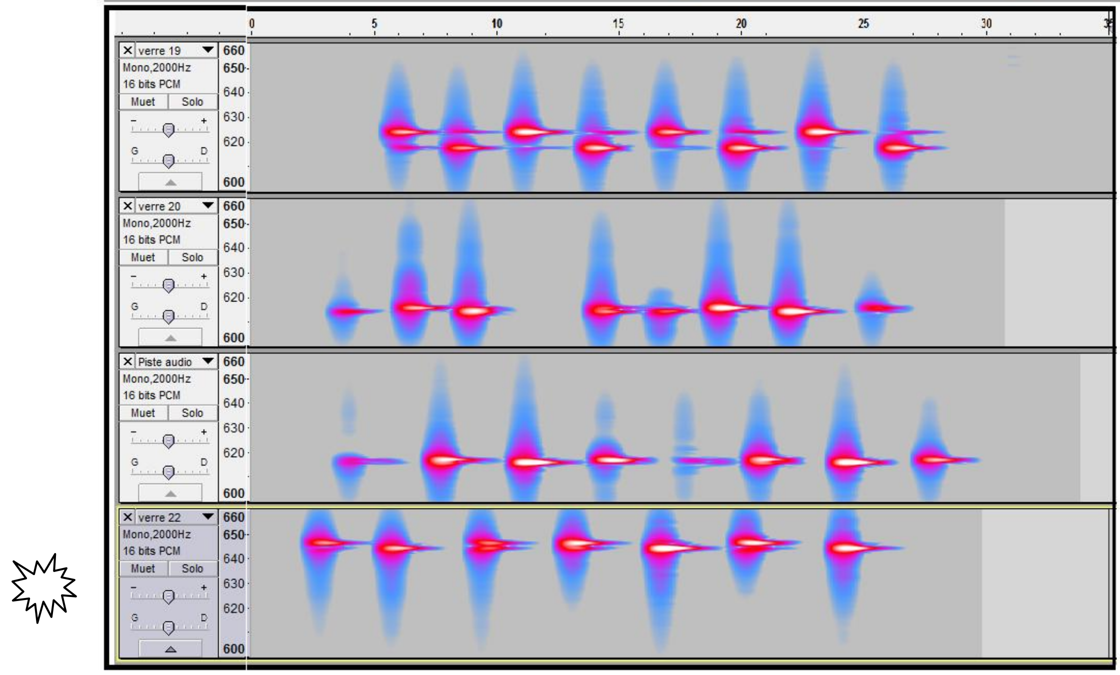


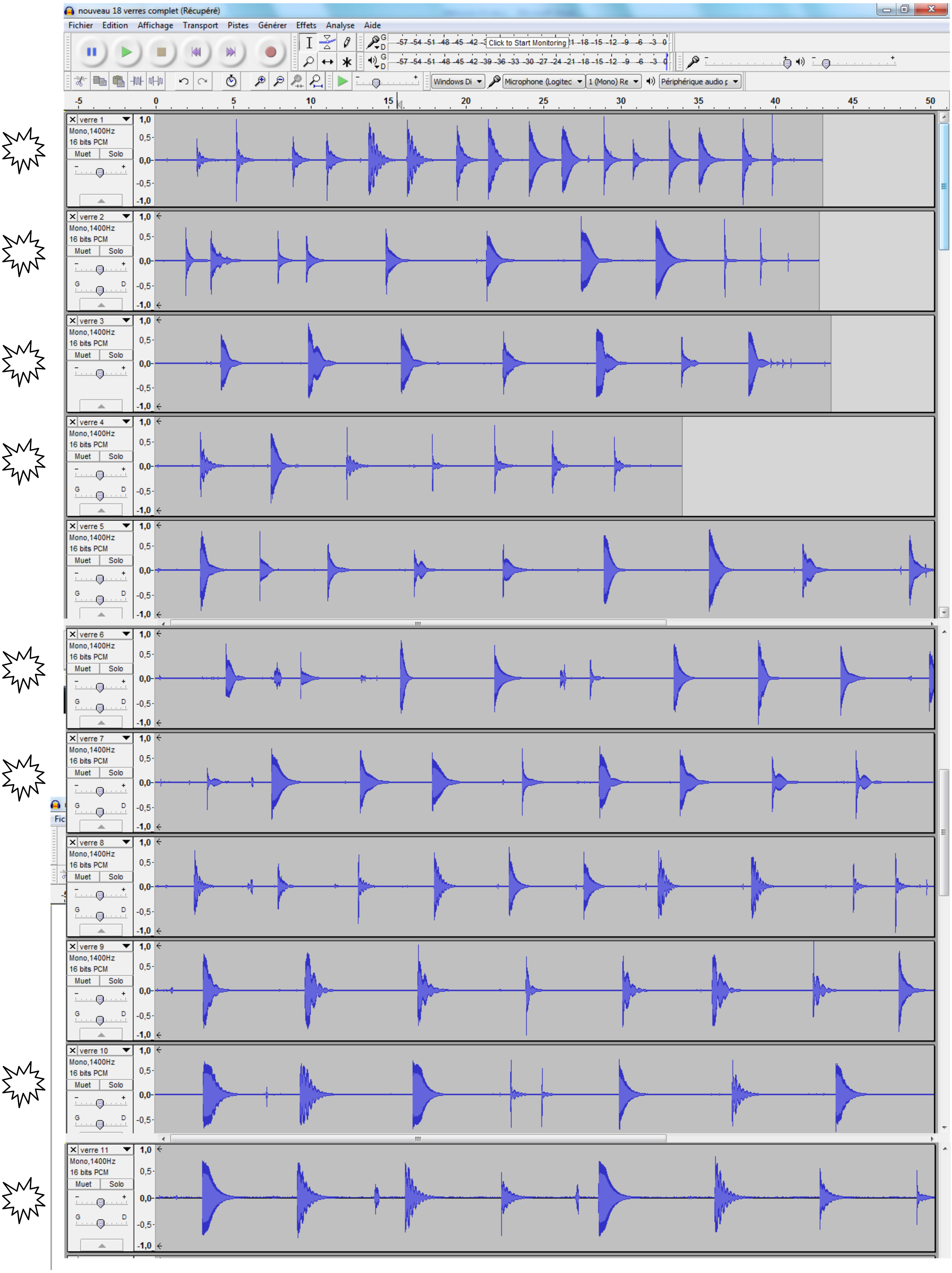


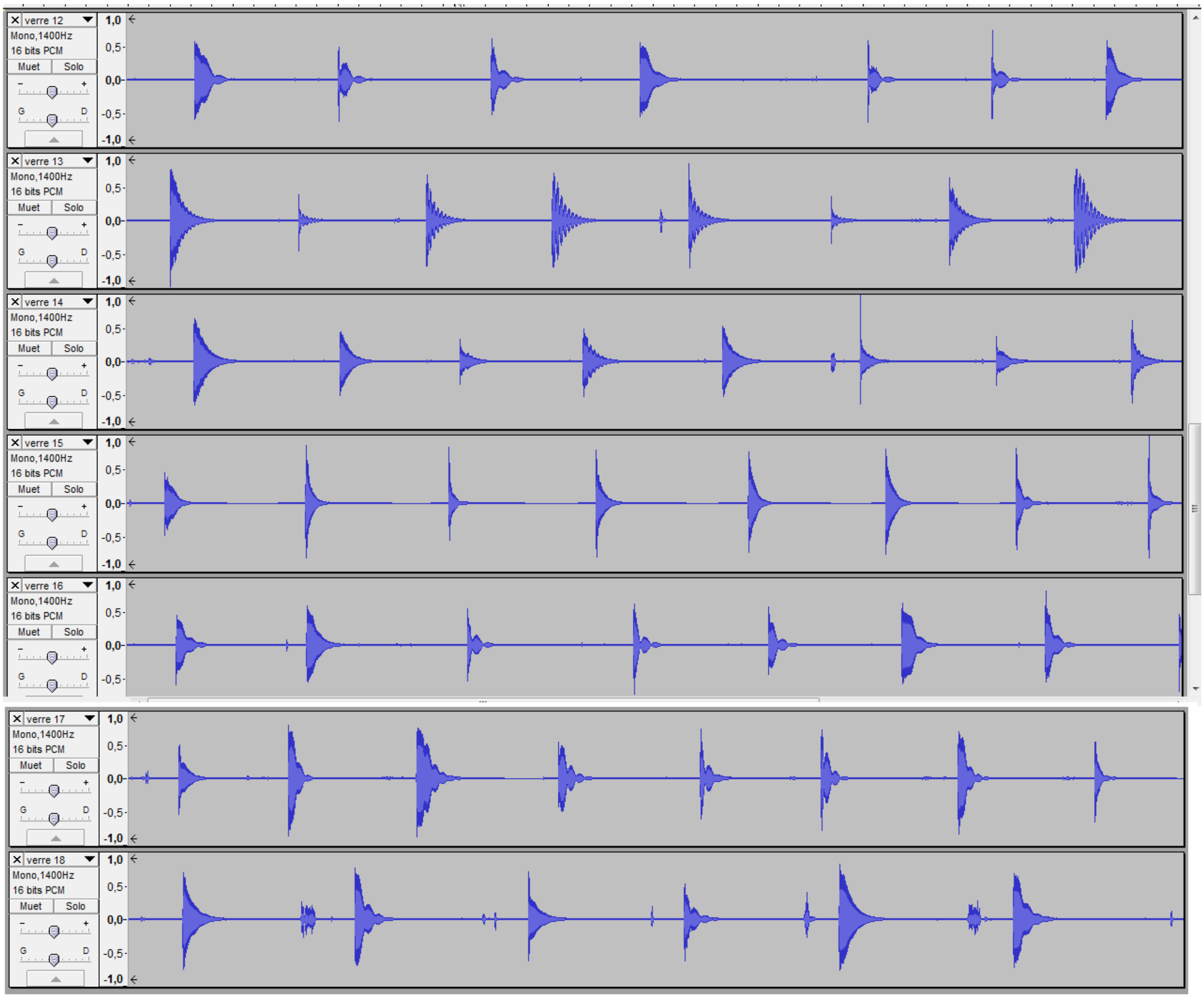
Annexe 2 Audiogrammes et spectrogrammes des 22 verres étudiés

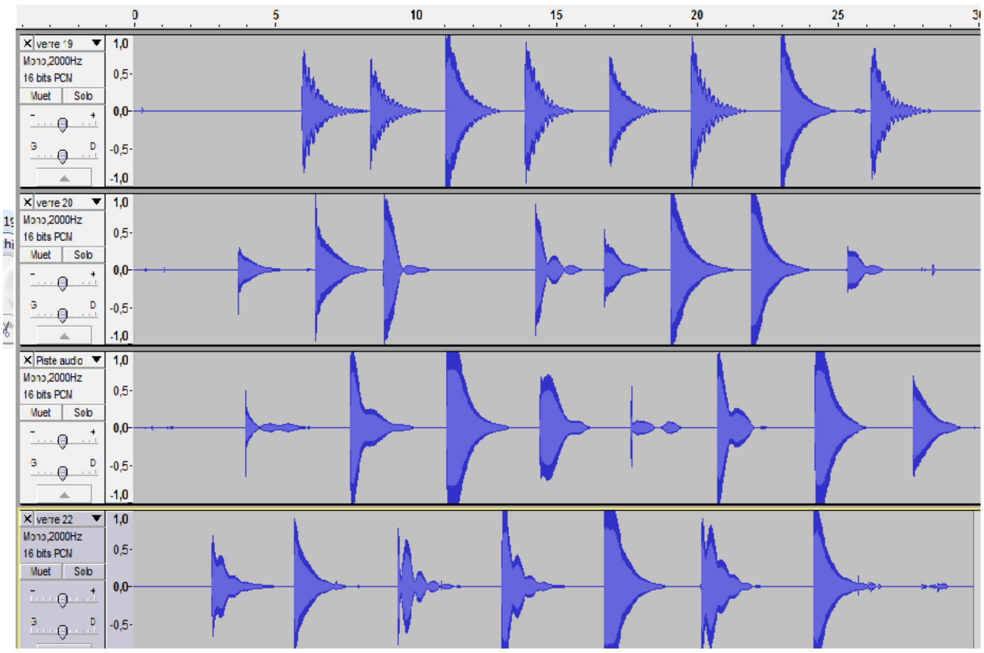



-5 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
verre 12
verre 13
verre 14
verre 15
verre 16
verre 17
verre 18
Mono,1400Hz
16 bits PCM
Muet
Solo
660
650
640
630
620
600


0 5 10 15 20 25 30
verre 19
verre 20
Piste audio
verre 22
Mono,2000Hz
16 bits PCM
Muet
Solo
660
650
640
630
620
600

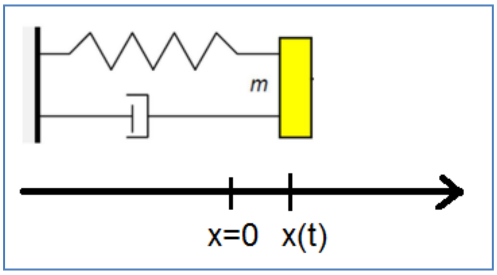

nouveau 18 verres complet (Récupéré)
Fichier Edition Affichage Transport Pistes Générer Effets Analyse Aide
Click to Start Monitoring
Windows Di
Microphone (Logitec
1 (Mono) Re
Périphérique audio p
verre 1
verre 2
verre 3
verre 4
verre 5
verre 6
verre 7
verre 8
verre 9
verre 10
verre 11
Mono,1400Hz
16 bits PCM
Muet
Solo


verre 12
Mono,1400Hz
16 bits PCM
Muet
Solo
verre 13
verre 14
verre 15
verre 16
verre 17
verre 18
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0


0
5
10
15
20
25
verre 20
Mono,2000Hz
16 bits PCM
Piste audio
verre 22
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0

Annexe 3 : L'oscillateur harmonique en régime libre et forcé

régime libre



Soit une masse soumise à une force de rappel $\vec{F_r}$ proportionnelle (facteur k) à son élongation. Cette masse est également soumise à des frottements $\overrightarrow{F_{frott}}$ proportionnels (facteur f) à sa vitesse, ainsi qu'à son poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$.

(seconde loi de Newton) $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F_r} + \overrightarrow{F_{frott}} + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$

Comme le poids et la réaction se compensent , Il vient si $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe x que

$-kx\,\overrightarrow{u_x} - f\,x'\,\overrightarrow{u_x} = m\,x''\,\overrightarrow{u_x}$ soit $x'' + \frac{f}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$

Si l'on pose $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$ et $\frac{f}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$ on montre que la fonction x(t) solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}[K_1\cos\Omega t + K_2\sin\Omega t]$ où $\Omega = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2\right)}$, K_1 et K_2 dépendant des conditions initiales du mouvement.

En particulier si à t=0 l'objet est écarté sans vitesse initiale de sa position d'équilibre, alors

$x(t) = K_1 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\cos\Omega t$.

Il s'agit donc d'un mouvement sinusoidal (oscillateur « harmonique ») de (pseudo) pulsation Ω dont l'amplitude A(t) décroit de façon exponentielle. ($pulsation\ \Omega$ = 2π fréquence = 2p/Période)

Remarques :

En l'absence de frottements (Q infini) $\Omega = \omega_0 = 2\pi F_0$ où F_0 est la fréquence propre de l'oscillateur.

Ω n'est réel que si $\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 \geq 0$ soit si $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Q est le « facteur de qualité » de l'oscillateur.

Rappelons que $\frac{f}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$ d'où $Q = \frac{m\,\omega_0}{f}$. Des frottements trop importants auraient donc pour effet de dégrader le facteur de qualité Q d'empêcher les oscillations.

L'amplitude $A(t) = K_1 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}$ d'où – ln (A(t)) est une fonction linéaire du temps. Nous utiliserons cette propriété pour vérifier que nos verres peuvent effectivement être considérés comme de oscillateurs harmoniques. On peut par ailleurs estimer Q d'après son coefficient directeur.

Régime forcé :

Le même système masse-ressort est considéré, mais cette fois le système subit une excitation forcée $\overrightarrow{F_{exc}} = F\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x}$

L'équation issue de la seconde loi devient donc $F\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} - kx\,\overrightarrow{u_x} - f\,x'\,\overrightarrow{u_x} = m\,x''\,\overrightarrow{u_x}$ soit encore

Soit $m\,x'' + f\,x' + k\,x = F\cos\omega t$

Cette fois le mouvement est forcé, c'est-à-dire que x(t) est nécessairement de la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$.

Si l'on remplace dans l'expression précédente il vient que

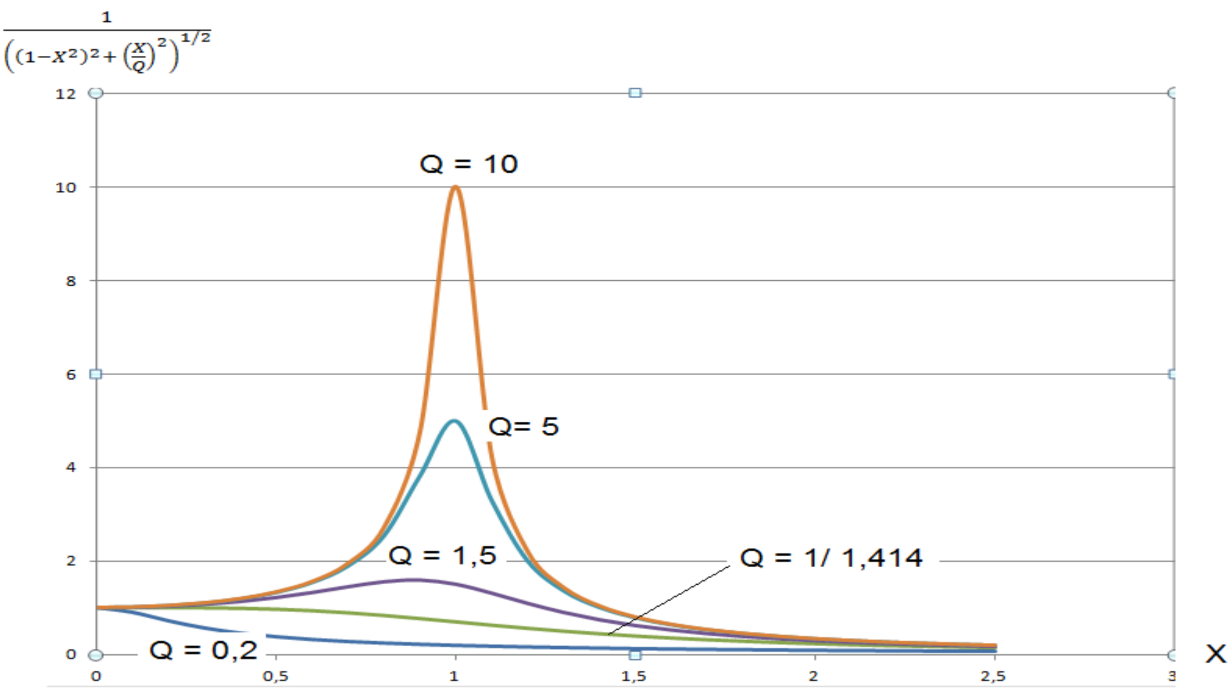
$A\,((\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \varphi) - \omega_0\,\omega\sin(\omega t + \varphi)/Q) = F/m\,\cos(\omega t)$.

De ceci (ref ...) on tire au final que

$A = \frac{\frac{F}{m}}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\,\omega_0^2}{Q^2}\right)^{1/2}}$. En posant $X = \frac{\omega}{\omega_0}$ il vient que $A = \frac{F}{m\,\omega_0^2}\left[\frac{1}{\left((1-X^2)^2 + \left(\frac{X}{Q}\right)^2\right)^{1/2}}\right]$

En dérivant cette fonction par rapport à la variable X on montre que sa pente est nulle pour X= 0 et $pour$ $X = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}$ e qui suppose donc que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous avons entré le terme entre crochets sur un tableur excel et on obtient l'allure suivante :



Si la fréquence d'excitation est faible , le système « suit » l'excitateur.

pour un facteur de qualité supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a amplification du mouvement pour une valeur de X proche de 1

C'est la résonance et c'est ce qui nous intéresse (pour casser, le verre doit voir son mouvement s'amplifier jusqu'à la rupture).

En conséquence X = $\frac{\omega}{\omega_0}$ = $\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}$

Si le facteur de qualité est très grand , le maximum de résonance est atteint pour une excitation de fréquence identique à la fréquence propre en régime libre.

Sinon (et c'est d'ailleurs ce que nous observerons souvent) , le terme sous la racine étant inférieur à 1, la résonance est atteinte pour une valeur de fréquence d'excitation légèrement inférieure à la fréquence propre en régime libre.

Si Q ≤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de résonance.

Si l' excitation est trop rapide, le système ne suit plus.

Calcul du   facteur de qualité

On peut donc estimer le facteur de qualité d'un oscillateur de 4 façons différentes

1) Amortissement en régime libre

L'amplitude A(t) des oscillations en régime libre contient un facteur exponentiel $e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}$ où donc

$\frac{A(t+nT)}{A(t)} = e^{\frac{-2\pi}{2Q}n}$ donc Q = $\frac{n\,\pi}{\ln\frac{A(t+nT)}{A(t)}}$

2) (régime forcé)   Différence entre fréquence propre et fréquence de résonance

$\frac{\omega_{resonance}}{\omega_0} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}$

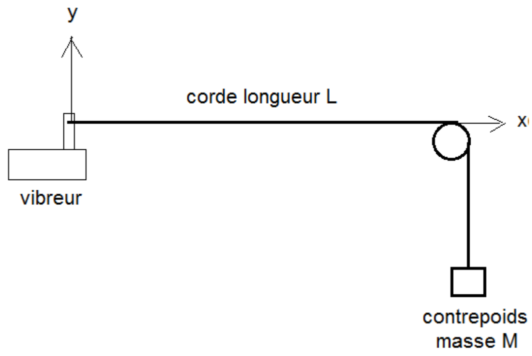
3) Quand le facteur de qualité est très grand on montre que Q = $\frac{f_{resonance}}{f2-f1}$

où f1 et f2 sont les fréquences pour lesquelles l'amplitude du mouvement = $\frac{Amplitude\ maxi}{\sqrt{2}}$

C'est la méthode que nous avons utilisée .

4) Quand le facteur de qualité est très grand on montre que Q = $\frac{Amplitude\ de\ l'oscillateur\ à\ la\ résonance}{Amplitude\ de\ l'excitation}$

Annexe 4 : Ondes stationnaires transversales (Corde de Melde)



Soit une corde horizontale de masse m et de longueur L , fixée à un vibreur vertical animé d'un mouvement sinusoïdal, et tendue sous l'action d'un contrepoids dont le poids génère une tension de la corde T = Mg

On montre   (niveau post-bac) que la seconde loi de Newton aboutit à l'équation aux dérivées

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\ \ y(x,t)}{dx}\right) = \frac{1}{c^2}\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{d\ y(x,t)}{dt}\right)$.   où $c = \sqrt{\frac{T\ L}{m}}$

Ce type d'équation dit « de propagation » admet n'importe quelle solution f et g de la forme $f\ (t + \frac{x}{c})$ ou $g\ (t - \frac{x}{c})$.

c est donc homogène à une célérité.

La solution générale est donc y(t) = $f\ (t + \frac{x}{c}) + g\ (t - \frac{x}{c})$

Dans notre situation, en admettant que les mouvements du vibreur sont de faible amplitude nous pouvons dire que ∀ t y(x=0) . De ceci il vient que $f\ (t) + g\ (t) = 0\quad \forall t$, c'est-à-dire que f = -g .

Supposons maintenant (puisque nous sommes en régime forcé ») que f (qui peut être quelconque) est une fonction sinusoïdale de forme $\sin(\omega(t - \frac{x}{c}))$ (et donc $g = -\sin(\omega(t + \frac{x}{c}))$)

Alors $y(x,t) = \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) - \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) = \sin(\omega t - \frac{\omega x}{c}) - \sin(\omega t + \frac{\omega x}{c}) = -2 \cos \omega t\ \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$

Ici intervient la seconde condition aux limites : y(x=L) = 0 $\forall t$

Ceci impose donc que $\frac{\omega L}{c} = n\pi$, n entier

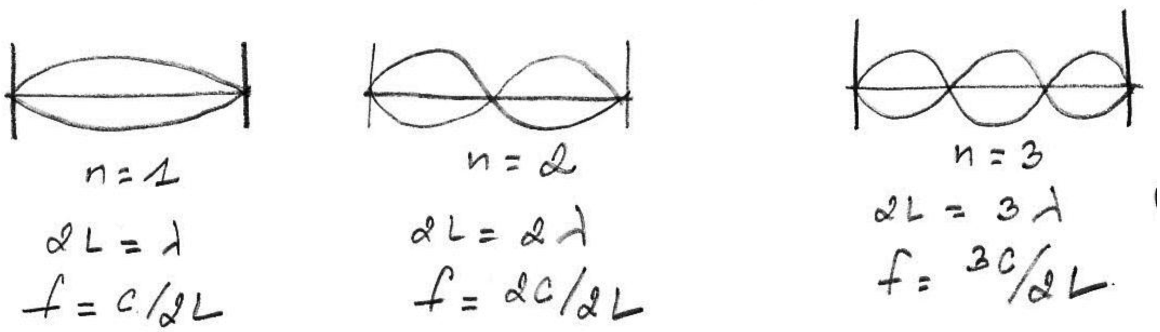
soit encore comme $\omega = 2\pi f$ que $f = \frac{n\ c}{2\ L}$,

soit encore puisque $c = \lambda f$ que $\lambda = \frac{2L}{n}$

En conclusion : $y(x,t) = = -2\ (\cos \omega t)\ \ \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$

Tout segment de la corde vibre à la pulsation ω mais l'amplitude de cette vibration dépend de x .

Seules certaines fréquences et certaines longueurs d'ondes sont possibles.

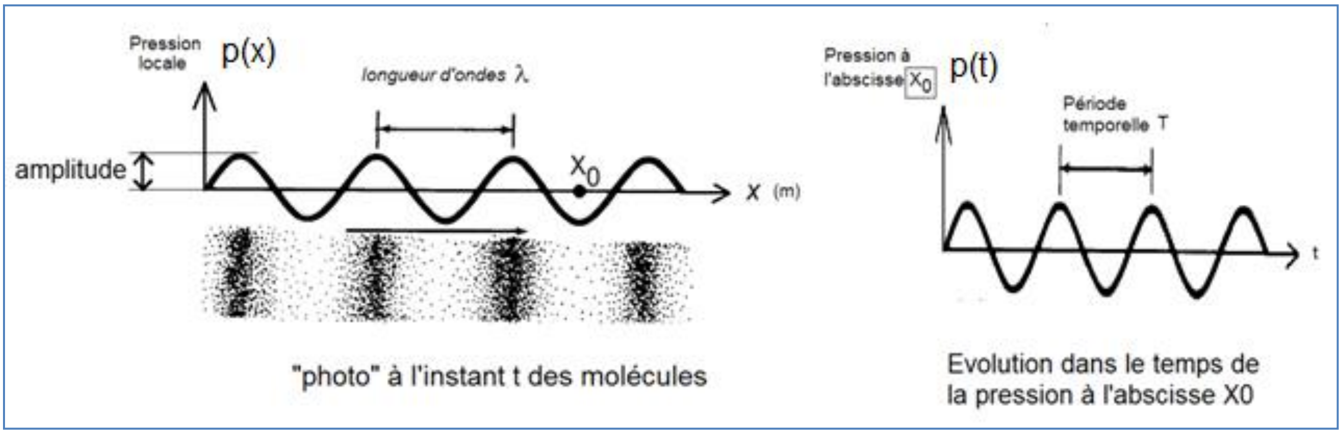


Ces mouvements constituent les « modes propres de vibration » de la corde.

Dans le cas d'un verre évidemment il est très difficile voire impossible de mettre en équation le mouvement du bord, mais de la même façon nous allons observer des « modes propres » qui comme pour la corde vibrante auront une amplitude indépendante du temps, mais dépendant seulement du lieu.

Annexe 5 : Le son et ses grandeurs

Une onde sonore correspond à la propagation d'une surpression. Dans le cas d'un son continu l'onde est périodique et présente une double périodicité :



Si l'on considère une surface S perpendiculaire à l'axe de propagation de l'onde sonore, cette surface est donc traversée par un va et vient de molécules. Si l'on considère que l'énergie de ces particules est essentiellement cinétique , la puissance P , quantité d'énergie passant par la surface S pendant la durée Dt a pour dimension $\frac{dimension\ d'une\ énergie\ cinétique}{Durée\ \ x\ Surface}$, soit $\frac{M}{T}\ \frac{L^2}{T^2}$
Supposons maintenant que la surface S soit occupée par une paroi. Les particules (supposons pour simplifier qu'elles arrivent toutes perpendiculairement à la paroi) voient leur quantité ed mouvement (de norme mv) changer de sens pendant la durée Dt . Or par définition $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$

- Donc la force exercée par une particule qui frappe la paroi sera $\frac{2\,mv}{Dt}$ pour une particule et sa dimension est $\frac{M\,L}{T^2}$
- Donc la « pression acoustique » petit p exercée sur la paroi par l'onde sonore, qui comme toute pression est le quotient d'une force sur une surface, aura pour dimension $\frac{M\,L}{T^2}\ \frac{1}{L^2}$.
- C'est cette pression p qui va s'exercer sur les parois du verre, sous l'effet de l'onde générée par le haut parleur.
- C'est également cette pression qui est convertie en signal électrique par un microphone électrodynamique.
- On peut alors montrer que P est proportionnelle à $\frac{S\,p^2}{\rho\,c}$ (en tout cas au niveau des dimensions c'est homogène).
- Si maintenant on s'intéresse à la puissance par unité de surface, que nous appellerons « intensité sonore I» alors I est proportionnelle à $\frac{p^2}{\rho\,c}$. Elle dépend donc de la pression acoustique, masse volumique du matériau .
- Par définition, le niveau sonore en décibels L (dB) = 10 log $\frac{I}{I_S}$ où I_s est l'intensité seuil de l'oreille humaine (10^{-12} W/m^2)

.

Niveau sonore en dBu (audio)

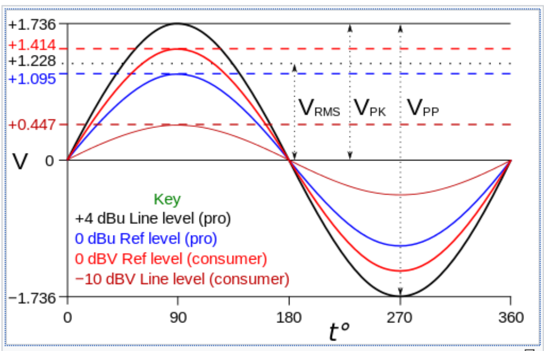
Le logiciel Audacity permet d'enregistrer des sons, c'est-à-dire de les transformer en tensions électriques.

- L'amplitude de référence d'une tension enregistrée est 1,414 V , amplitude qu'il convient de ne pas dépasser en règle généraleau moment de l'enregistrement . A cette amplitude correspond le chiffre 1 sur l'échelle linéaire des formes d'onde.
- Par ailleurs, on peut aussi exprimer le niveau d'un signal monofréquence sinusoidal en référence à cette valeur :

  L (dBu) = 10 log $\frac{amplitude\ du\ signal}{1{,}414}$,

  dBu signifiant decibels unloaded.

C'est pourquoi avec des outils comme Audacity (mais aussi sur les Vu-mètres des amplis…) le niveau sonore maximum est généralement 0dB



Signaux sinusoïdaux idéaux de tension en fonction du temps pour les niveaux de référence et ligne ; la tension efficace V_{RMS}, l'amplitude V_{PK}, et l'amplitude crête à crête V_{PP} sont indiquées pour le niveau ligne professionnel (+4dBu).

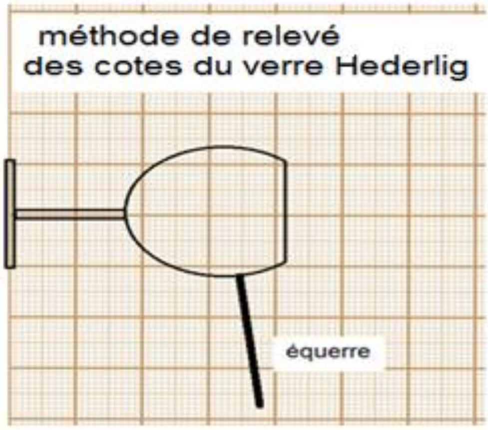
(source : WP, article "niveau ligne")

Annexe 6 - Simulations informatiques

Lorsqu'il s'agit d'un objet aussi complexe qu'un verre il n'est plus question de mettre le système en équation. Seules des méthodes de simulation de type « éléments finis » calculant les oscillations de proche en proche dans le système (auparavant numérisé) permettent d'accéder aux modes de vibration.

Dès juin 2018 nous avons noué des liens avec MM Hecht et Despres du laboratoire Jacques Louis Lyons de l'UPMC. Mr HECHT a en effet développé un logiciel de calculs de vibrations performant permettant à partir des dimensions de l'objet de prédire ses modes de vibration.

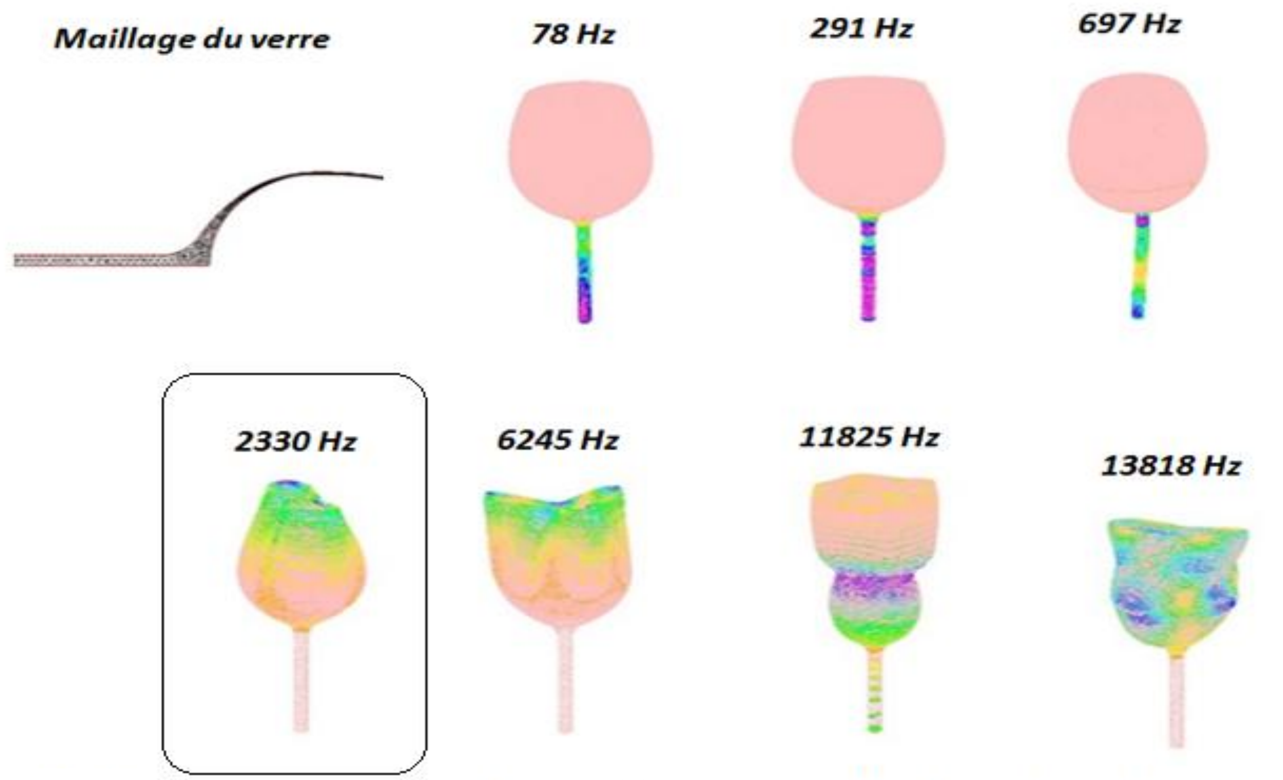
Pour cela il nous a fallu prendre les cotes du verre. Ne parvenant pas à trouver un partenaire capable de le faire avec une machine de mesure tridimensionnelle nous nous sommes rabattus sur une méthode simple consistant à placer le verre contre un mur et relever son profil à l'aide d'une équerre sur une feuille de papier millimétré. Pour les épaisseurs nous avons ensuite cassé le verre et mesuré les épaisseurs de matière à différentes hauteurs.



hauteur mm	diamètre extérieur	rayon extérieur	épaisseur de verre locale
225	74	37	1,5
224	74	37	1
210	84	42	1
200	90	45	1
190	96	48	1
180	99	49,5	1
170	101	50,5	1
160	101	50,5	1
150	97,5	48,75	1,5
140	90	45	2,5
130	75	37,5	3,5
120	53	26,5	4,5
117	43	21,5	21,5
110	23	11,5	11,5
100	11	5,5	5,5
90			
80			
70			
60			
50	10	5	5
40			
30			
20	10	5	5
10	19,5	9,75	9,75
0	78	39	39

La simulation informatique a donné des résultats très intéressants quoique contrastés (ci-dessous) Le résultat positif est qu'elle nous a appris l'allure des principaux modes de vibration du verre . Par contre, les fréquences indiquées en gras ne correspondaient pas à ce qui était observé (le principal mode de compression-dilatation du bord du verre Hederlig a une fréquence propre située entre 610 et 650 Hz et non 2330 Hz).

Nous avons mis cela sur le compte de notre méthode de mesure , sans compter que nous n'avons pas réussi à obtenir de la part d'Ikea plus d'informations que celles de la plaquette commerciale, notamment sur la nature du verre. Mais somme toute, la suite montrera que ceci n'avait pas une grande importance .



principaux modes de vibration du verre Hederlig.Le mode qui a été observé au stroboscope est entouré. Par contre la fréquence ne correspond pas.

Annexe 7 – Carte mentale (logiciel Xmind)

Ce document nous a permis d'organiser nos idées avant de démarrer le projet.