



Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse (68)

LE TENNIS, C'EST DE LA BALLE !!!



Caroline AMIS, Danaé MAKOWKA et Loïck ABGRALL encadrés par Marc STRUBEL

Année 2019-2020

Plan:

- 1. Premiers rebonds
- 2. Rebonds sur une raquette
- 3. Etude de la déformation de la balle
- 4. Etude à haute vitesse avec lanceur
- 5. Etude de l'échauffement de la balle

Résumé du projet

A la fin de notre année de première, nous avons décidé de poursuivre le travail commencé en TPE pour participer aux Olympiades. Il concernait le tennis, et plus particulièrement le rebond de la balle. Il nous restait beaucoup à découvrir!

Tout d'abord, les critères de rebond d'une balle de tennis sont définis par des règles internationales. Nous avons constaté lors de nos premières mesures que toutes les balles ne remplissent pas ces critères, et que le rebond d'une balle, sur une raquette ou sur le sol, dissipe plus ou moins d'énergie.

Nous avons d'abord cherché à savoir quels paramètres influençaient ce rebond, en particulier la tension du cordage et la nature des cordes.

Nous avons ensuite étudié l'élasticité de la balle, pour comprendre que la balle ne se comporte pas comme un ressort mais montre de l'hystérésis, source de dissipation. Nous avons mesuré cette énergie dissipée de manière statique, mais cette mesure est très difficile en dynamique.

Nous avons donc filmé des chocs à haute vitesse pour estimer la force et la déformation de la balle, puis nous avons essayé de mesurer l'échauffement de la balle due au choc pour faire un bilan d'énergie.

I. Premiers rebonds:

- 1) Les balles
- a) Intro

Les balles sont composées de deux sphères en caoutchouc, remplies d'air et recouvertes de feutre jaune ou blanc.

Balle de tennis coupée en deux

b) Principales caractéristiques: masse, taille, structure, polymère, revêtement



La balle de tennis doit avoir un diamètre compris entre D = 6,350 cm et D = 6,668 cm, et sa masse doit varier entre m = 56,7 g et m = 58,5 g.

On teste le rebond d'une balle en la laissant tomber d'une hauteur de 254 cm (100 pouces) sur du béton; un rebond entre 134,62 et 147,32 cm (53 et 58 pouces) est acceptable s'il a lieu au niveau de la mer, à 20 $^{\circ}$ C, avec une humidité relative de 60 $^{\circ}$ C; les balles à haute altitude ont différentes caractéristiques si elles sont testées au niveau de la mer.

Il existe des balles sans pression et des balles pressurisées.

c) Notre choix:

Pour toutes nos expériences, nous utilisons des balles Head Tour neuves de masse $\mathbf{m} = 58 \pm 1$ g et de diamètre $\mathbf{D} = 6.6 \pm 0.1$ cm, ou des balles sans marque de Leclerc.

Expérience n°1:

Notre expérience a pour but de vérifier la hauteur de rebond indiqué dans les règles de la fédération internationale de tennis (FIT) qui doit être comprise entre 134,62 et 147,32 cm. Nous avons laissé tomber, d'une hauteur de 254 cm, la balle de bonne qualité Head et la balle de moindre qualité de la marque Leclerc, puis nous avons mesuré la hauteur de rebond. Voici tous nos résultats.

N° lancer		1	2	3	4	5	6	Hauteur
								de rebond
								moyenne
								(cm)
Hauteur rebond (cm)	Balle	129	130	128	129	130	129	129±1
	Head							
	(6)							
	Ball	86	85	84	86	89	88	86±2
	Leclerc							
	(5)							

La valeur trouvée pour la balle Head est de 129±1cm; elle est donc presque comprise dans l'intervalle de valeurs autorisées.

Pour la balle Head, la variation d'énergie est:

$$\Delta E = mg\Delta z = 58.10^{-3} *9,81*(2,54-1,29) = 711mJ$$

$$r = h_f/h_i = 1,29/2,54 = 0,51$$



Expérience de lâcher



Machine à corder

II. Rebonds sur une raquette :

2.1. Les raquettes :

Une raquette adulte cordée pèse de 270 à 370 grammes.

La longueur maximale d'une raquette est de 73,66 cm (29 pouces) et la longueur standard des raquettes adultes est de 68.5 cm.

Le cordage est très divers, mais il existe deux grandes familles : les naturels, en boyau, et les synthétiques, qui peuvent être monofilament (en polyester, kevlar, nylon, aramide, polyéthylène), multifilaments, guipés ou polyvalents, ils sont constitués d'une âme centrale de type monofilament (polyester ou nylon) autour de laquelle sont torsadés les filaments ; on applique par la suite une ou plusieurs gaines siliconées, ou enfin hybrides, par exemple boyau naturel sur les travers et monofilaments sur les montants.



Structures de cordages synthétiques

Jauge

La jauge, souvent exprimée en millimètre ou en centième de millimètre, correspond au diamètre du cordage; elle est généralement comprise entre 1.22 (jauge fine) et 1.28 mm (jauge épaisse).

Tension

La tension du cordage correspond à la force appliquée à chaque corde pour la tendre.

Sa valeur se situe en général entre 20 et 30 kg soit entre 196 et 294 Newton.

2.2. Influence de l'énergie initiale :

Expérience N°2:

Après avoir étudié le rebond sur le sol, il fallait étudier le rebond sur une raquette.

Pour cela nous avons construit une dispositif avec raquette fixe, et balle lâchée d'une hauteur hi variable sans vitesse initiale, grâce à un dispositif à tiroir (voir photo); pour chaque valeur de hi nous mesurions la hauteur de rebond hf.

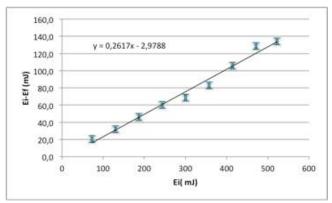
L'énergie initiale de la balle est Ei = m*g*hi et son énergie finale Ef = m*g*hf.

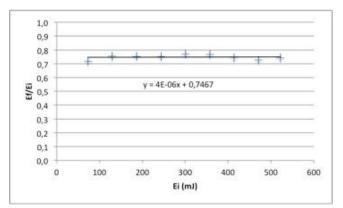


Voici nos résultats:

			I	1	I
hi (cm)	Ei(mJ)	hf (cm)	Ef (mJ)	Ei -Ef (mJ)	Ef/Ei
91,8	5,22E+02	6,82E+01	3,88E+02	1,34E+02	7,43E-01
82,8	4,71E+02	6,02E+01	3,43E+02	1,29E+02	7,27E-01
72,8	4,14E+02	5,42E+01	3,08E+02	1,06E+02	7,45E-01
62,8	3,57E+02	4,82E+01	2,74E+02	8,31E+01	7,68E-01
52,8	3,00E+02	4,07E+01	2,32E+02	6,88E+01	7,71E-01
42,8	2,44E+02	3,22E+01	1,83E+02	6,03E+01	7,52E-01
32,8	1,87E+02	2,47E+01	1,41E+02	4,61E+01	7,53E-01
22,8	1,30E+02	1,72E+01	9,79E+01	3,19E+01	7,54E-01
12,8	7,28E+01	9,20E+00	5,23E+01	2,05E+01	7,19E-01

L'incertitude sur hi est de 2 mm, celle sur hf est due à la dispersion des mesures, l'écartype est en moyenne de 4 mm.





On constate que l'énergie perdue par la balle représente toujours environ un quart (26%) de l'énergie initiale, mais si on compare au cas d'une chute sur le béton, on perd beaucoup moins d'énergie.

Mais où est perdue cette énergie? Dans la raquette ou dans la balle?

2.3. Influence de la tension du cordage :

Expérience N°3:

Dispositif expérimental:

Nous souhaitions savoir si la tension du cordage a une influence sur le rebond. Pour pouvoir faire varier la tension, nous avons élaboré une raquette expérimentale composée d'un cadre en bois ainsi que de clefs de guitare qui permettent de tendre plus ou moins le cordage. Ce dispositif est monté sur le dispositif de mesure de l'expérience 2, avec le même protocole que pour l'expérience 2.

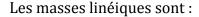
Grâce à ce montage nous avons pu faire varier le cordage (mono filament et multi filament) ainsi que la tension du cordage.

La tension du cordage était mesurée à l'aide d'un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence : la tension, en Newton, est liée à la fréquence du fondamental de la corde en Hertz par :

$$f = \frac{c}{2l}$$
 avec $c = \sqrt{\frac{To}{\mu}}$ célérité de l'onde en m.s-1

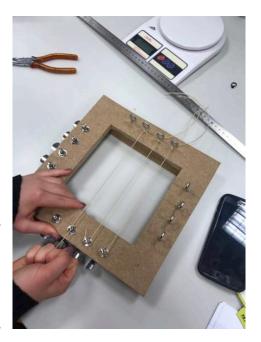
f est la fréquence en Hz; $L=0.20\,m$ est la longueur de la corde.

T est la tension en N ; μ la masse linéique en kg.m⁻¹.



 $\mu = 20.0/12.00 = 1.7 \text{ g.m}^{-1}$ pour le monofilament

 $\mu = 19.3/1,24 = 1.6 \text{ g.m}^{-1}$ pour le multifilament





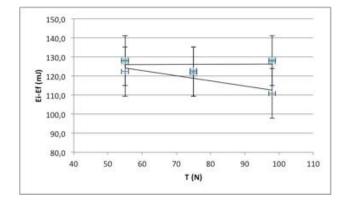
Exemple: pour une tension de 10 kg (donc de 98 Newtons) en monofilament:

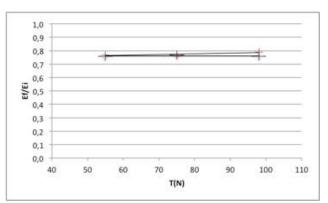
$$f = \frac{1}{0,20 \times 2} \times \sqrt{\frac{98 \times 12}{20 \times 10^{4} - 3}} = 600 \text{ Hertz}$$

Afin de régler la tension de 10 kg sur la corde monofilament il ne restait donc plus qu'à écouter le son produit par le signal de 600 Hertz et ensuite accorder la corde (comme sur une guitare).

Voici le tableau que nous avons pu établir pour hi = 92,5 cm :

	f (Hz)	Tension(N)	Ei(mJ)	hf (cm)	Ef (mJ)	Ei -Ef (mJ)	Ef/Ei
	600	98	5,26E+02	70+-1	3,98E+02	1,28E+02	7,57E-01
Mono	525	75	5,26E+02	71+-2	4,04E+02	1,22E+02	7,68E-01
	450	55	5,26E+02	70+-2	3,98E+02	1,28E+02	7,57E-01
	618	98	5,26E+02	73+-2	415,3554	1,11E+02	7,89E-01
Multi	561	75	5,26E+02	71+-2	4,04E+02	1,22E+02	7,68E-01
	464	55	5,26E+02	71+-2	4,04E+02	1,22E+02	7,68E-01





Les mesures ne sont pas significatives, les incertitudes de mesure sont trop élevées; on peut conclure que la différence de comportement des deux types de cordage n'est pas flagrante à faible vitesse.

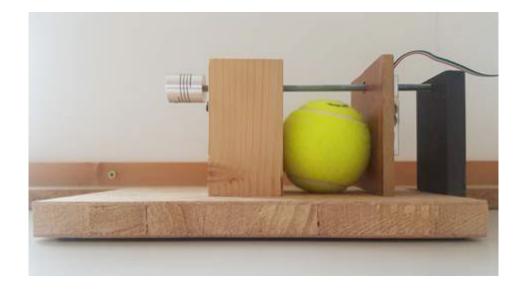
Conclusion : quel que soit le type de rebond, une énergie entre 100 et 200 mJ est perdue par la balle ; il est peu probable que cette énergie ait été transférée au cordage, qui est beaucoup plus rigide. Ou est alors passée cette énergie ?

III. Etude de la déformation de la balle :

3.1. Etude statique:

Pour comprendre ou l'énergie est perdue, nous voulons étudier le rapport entre la force appliquée à la balle et sa déformation.

Expérience N°4:



Dans ce montage, la plaque de bois fine à droite de la balle nous sert à la compresser sur la partie plus épaisse de gauche. La plaque de droite est vissée sur une jauge de contrainte reliée à un amplificateur HX711 et une carte Arduino.

La partie de gauche, avec la "manivelle", nous permet de comprimer la balle en comptant le nombre de tours (ou demi-tours) et la compression correspondante.

Pour établir cette correspondance tours-compression, nous avons mesuré 50 filets de la vis, pour une distance de 4.0 ± 0.1 cm.

Pour 1 tour, on compresse la balle de :
$$\Delta x = \frac{4.0 \times 10^{-2}}{50} = 8 \times 10^{-4} = 0.800 \pm 0.002 \ mm$$

La tension U renvoyée par la carte Arduino est reliée à la force exercée sur le capteur par une loi :

$$F = aU + b$$

$$\Delta F = 0.1 N$$

Etalonnage du capteur :

Au démarrage, le logiciel tare : on a : b = 0

Dans la loi F = aU, a est le facteur de calibration (115780 pour capteur 5 kg).

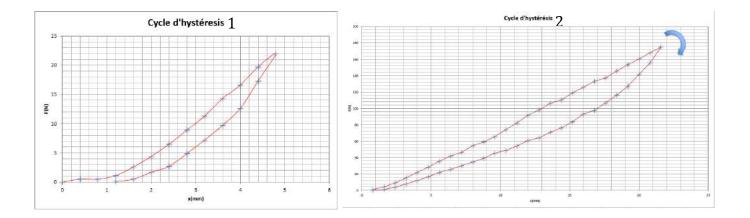
Pour étalonner le capteur, nous avons suspendu une masse définie (1 kg) au capteur, et avec l'affichage en direct du programme (moniteur série), nous modifiions le facteur de calibration pour afficher une force de 9.8N (définition du poids où g = 9.8 N / kg).

On en déduit le facteur de calibration correspondant au capteur. Cette manipulation doit être effectuée pour chaque nouveau capteur (celui de 20kg dans notre cas).

Mesures:

Avec le montage ci-dessus, nous avons progressivement compressé la balle en mesurant la compression x (en mm) et la force de compression (en N). Cette expérience a été réalisée deux fois avec deux balles différentes : une balle Head « usée » (cycle 1) et une balle Head neuve (cycle 2).

Les mesures sont en annexe.



La courbe obtenue est un cycle d'hystérésis, qui traduit une dissipation de l'énergie du système étudié (la balle). Pour un ressort, qui restitue toute son énergie, cette courbe serait linéaire.

La balle entre son état initial (avant déformation) et son état final (après déformation) n'a pas restitué toute son énergie : une partie s'est dissipée : elle correspond à l'aire du cycle tracé, ce que nous pouvons écrire :

Energie finale = Energie initiale -
$$\int_{0}^{T \text{ final}} F \cdot dx$$

Conclusion : la balle, après déformation, ne conserve pas la totalité de son énergie.

Pour le cycle 1, on a comprimé la balle jusqu'à F_{max} = 22,0 N et x_{max} = 4,8 mm; on mesure une aire

$$A = 11,9 \text{ mJ}$$

avec $F_{\text{max}}.x_{\text{max}} = 106 \text{ mJ}$

Pour le cycle 2, on a comprimé la balle jusqu'à F_{max} = 185 N et x_{max} = 22,5 mm ; on mesure une aire

$$A = 443 \text{ mJ}$$

avec $F_{\text{max}}.x_{\text{max}} = 4162 \text{ mJ}$

On remarque que dans les deux cas on : $A \simeq F_{\text{max}}.x_{\text{max}}/9$.

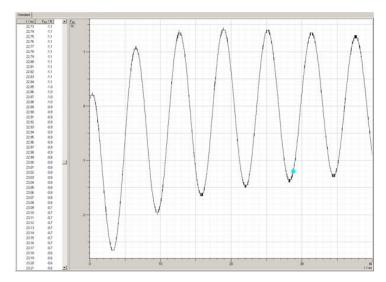
Conclusion: les valeurs obtenues sont variables suivant la force appliquée sur la balle et sa compression, mais quelle est cette compression dans un vrai match de tennis ? Pour le savoir il faut faire ces mesures en dynamique, en haute vitesse.

3.2. Etude dynamique:

Avec notre montage expérimental à trappe/tiroir (voir expérience n°3), nous avons voulu étudier le cycle d'hystérésis à faible vitesse dans des conditions reproductibles avec possibilité de faire varier la hauteur.

Avec la jauge de contraintes reliée à la carte Arduino, nous ne pouvions pas récupérer les données Nous devions utiliser un autre capteur de force.

Capteur de force Cassylab:



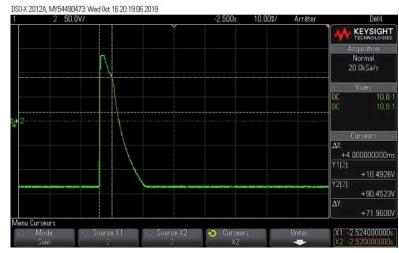
Problèmes: avec le capteur à jauges de contraintes CassyLab, nos résultats étaient imprécis, car le capteur continuait d'osciller après le choc avec la balle (photo ci-contre), ce qui nous empêchait de tirer de bonnes conclusions de l'expérience.

Photo de l'enregistrement sur CassyLab

Capteur piézoélectrique :

N'obtenant pas de résultats intéressants, nous avons donc opté pour un capteur piézoélectrique à la place du capteur à jauge de contrainte.

Autre problème : le capteur piézoélectrique est difficile à étalonner étant donné qu'il ne fonctionne qu'en mesures dynamiques (quand la force varie).



En voici un exemple avec une photo de l'enregistrement avec un capteur piézoélectrique : on peut estimer la durée du choc avec des curseurs : $\Delta t \simeq 4$ ms.

Nous avons finalement continué à travailler avec le capteur à jauges de contraintes couplé à l'Arduino, qui présente l'inconvénient de ne pas avoir une grande fréquence de fonctionnement (l'amplificateur limite à 80 Hz).

Il est de plus impossible de mesurer la compression de la balle de manière instantanée en dynamique, aussi nous avons décidé de passer en vitesse « réelle » dans un club de tennis.

IV. Etude à haute vitesse avec lanceur :

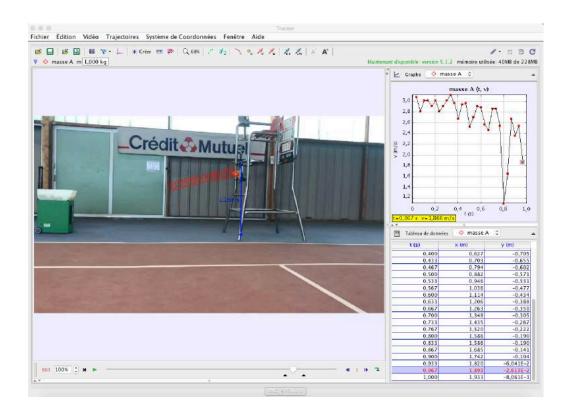
Nous allons à présent nous intéresser à l'étude de la balle à haute vitesse afin d'observer la vitesse de la balle avant et après rebond sur la raquette.

Pour cela nous avons utilisé un lanceur de balle de tennis qui est le Spin Shot Player qui simulait des frappes à plat c'est-à-dire sans effet. Nous avons accroché une raquette sur un support à une distance fixe de la machine.

Pour étudier les variations de vitesse avons réalisé des vidéos avec un smartphone filmant à 240 images par seconde, et utilisé le logiciel de pointage Tracker afin d'exploiter nos résultats.

Expérience n°5:

Analyse d'une vidéo avec Tracker (3764)



Voici nos résultats sur la meilleure vidéo réalisée :

Film	Vi (m.s-1)	ΔVi (m.s-1)	Vf (m.s-1)	Δ Vf (m.s-1)	Eci (J)	Ecf (J)	ΔEc (J)
3764	20,0	0,8	17,2	1,2	11,6 ±1,0	8,6±1,2	3,0 ±1,6

Malgré les très grosses incertitudes, on constate que la perte d'énergie est cette fois de :

$$\Delta E = 3.0 \pm 1.6$$
 J.

Remarque 1 : dans l'expérience n°2, la vitesse maximale (lâcher d'une hauteur hi = 91, 8 cm) est $v = (2ghi)^{1/2} = 4,2$ m.s⁻¹. Il est donc étonnant que sur l'image de Tracker on lise environ 2 m.s⁻¹; en fait le logiciel calcule avec une cadence de 30 images par seconde, donc il faut multiplier les valeurs de vitesse obtenues par 240/30 = 8.

Remarque 2 : la perte d'énergie représente 3/11,6 = 0,26 soit 26 % de l'énergie incidente, comme dans l'expérience 1 à basse vitesse !

Estimation de la force exercée sur la raquette :

Nous n'avons pas pu mesurer la force exercée par la balle sur la raquette, car le choc était beaucoup trop rapide pour être mesuré par la jauge de contrainte, et nous n'avons eu accès au lanceur qu'une seule fois. Nous avons alors décidé d'estimer la force à partir de la déformation de la balle.

Nous avions également réalisé des films plus rapprochés, sur lesquels on constate que la balle est environ comprimée de moitié.

Si on considére $x = D/2 = 3.3 \pm 1.6$ cm (incertitude 50% comme sur la mesure précédente), en utilisant l'appareil de compression statique, nous avons pu mesurer une force nécessaire de F = 265 N.

D'après nos premières mesures, on peut donc estimer l'énergie dissipée à :

$$\Delta E = F.D/2/9 = 1.0 \pm 0.5 J$$

On constate que cette mesure est du même ordre de grandeur que la précédente.







Il nous reste à trouver ou est passée cette énergie.

V. Échauffement de la balle :

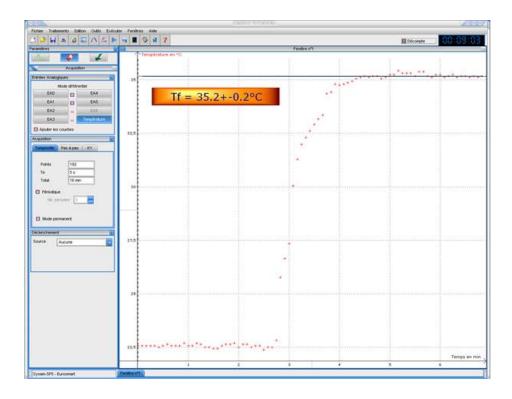
5.1 Calorimétrie:

L'énergie dissipée doit se retrouver sous forme d'énergie thermique dans la balle. Afin de mesurer le transfert d'énergie thermique dans la balle, il nous est nécessaire de connaître sa capacité calorifique.

Expérience n°6:

Grace à une expérience de calorimétrie, nous avons déterminé la capacité calorifique d'une balle de tennis (type Leclerc : mauvaise balle). Au préalable, nous avons découpé la balle de tennis en petits morceaux et l'avons placé dans une étuve à une température constante $T_i = 108^{\circ}C$. Le couvercle du calorimètre est percé de deux trous dans lesquels nous avons placé un thermomètre et un agitateur. Après avoir déposé 200mL ($m_0 = 200$ g) d'eau à $T_0 = 22,5^{\circ}C$ dans le calorimètre, on a introduit rapidement les morceaux de balle avant de fermer le couvercle. Nous avons préalablement démarré une acquisition sur Latis-pro pour récupérer en direct la température dans le calorimètre et étudier son évolution au cours du temps. Les mesures du thermomètre sont envoyées en direct à Latis-pro via l'interface. Nous avons attendu que la température se stabilise avant de terminer l'acquisition.

Voici les résultats que nous avons obtenus :



La température finale est T_f = 35.2 \pm 0.2 °C. Ces résultats obtenus nous permettent de calculer la capacité calorique c de la balle de tennis étudiée :

$$c = -\frac{(\mu + m_0)c_0(T_f - T_0)}{m(T_f - T_i)}$$

$$= -\frac{((200 + 46) * 4,18)(35,2 - 22,5)}{111(35,2 - 106)}$$

$$c = 1,66 \text{ J. } g^{-1}.\text{ K}^{-1}$$

Où μ = 46 g est la valeur en eau du calorimètre, m0 = 200 g la masse initiale d'eau, m = 111 g la masse des morceaux de balle, c0 = 4180 J.kg⁻¹.K⁻¹ la capacité calorifique de l'eau, Ti et Tf respectivement les températures mesurées en début et en fin d'expérience et T0 la température de l'eau placée dans la cuve au début.

Nous ne savons pas de quel polymère est fait la balle, mais le caoutchouc naturel a par exemple une capacité calorifique de c=2,09 J. g^{-1} . K^{-1} , proche de notre mesure.

5.2 Mise en évidence du transfert d'énergie :

Nous souhaitions mettre en évidence l'énergie dissipée dans la balle ; cette énergie étant faible, il nous fallait comprimer la balle de nombreuses fois, afin de mettre en évidence l'échauffement de la balle.

Expérience n°7:

Nous avons construit un appareil à partir d'une scie sauteuse, permettant de comprimer la balle Head Tour plusieurs fois par minute. Nous avons inséré un thermomètre dans la balle pour mesurer sa variation de température.

Pour mesurer le nombre de compressions pendant la durée d'étude Δt , nous devions connaître le nombre de compressions par seconde, donc la fréquence f de la scie ; pour cela nous avons utilisé un stroboscope , et nous avons mesuré f = 55 Hz.



Le nombre de compressions est donc N = f. Δt

La course la course de la tete est $x = 1.8 \pm 0.1$ cm, qui correspond à la compression.

D'après la courbe d'hystérésis n°2, la force maximale est donc F_{max} = 141 N.

On peut donc estimer les pertes par hystérésis pour une compression à :

$$\Delta E = 141.18/9 = 282 \text{ mJ}.$$

Avant compression, la température de la balle est Ti = 20,3°C.

Nous avons réalisé plusieurs mesures de même durée $\Delta t = 45$ secondes de frappe avec notre dispositif, la moyenne des températures finales obtenues sur 4 mesures est :

$$Tf = 32 \pm 2$$
°C.

L'énergie thermique gagnée par la balle pour une compression vaut donc :

$$\Delta E_{th} = \frac{mc\Delta T}{N} = \frac{mc(Tf - Ti)}{N} = \frac{58 * 1,66 * (31,5 - 20,3)}{55 * 45} = 436 \, mJ$$

Le résultat est assez différent du résultat précédent, mais il est du même ordre.

Conclusion: nous avons mis en évidence les pertes d'énergie lors du choc d'une balle sur une raquette, et sa compression, provoquant des pertes par hystérésis, qui sont ensuite converties en énergie thermique dans la balle.

Epilogue: nous avions décidé de refaire l'expérience de calorimétrie 6 avec une balle « chauve », obtenue en enlevant le feutre. En manipulant cette balle, nous avons alors réalisé que le feutre absorbe une quantité non négligeable d'énergie: une mesure de lacher d'un hauteur de 92 cm donne hf = 68 cm avec une balle revetue, mais hf' = 72,8 cm pour la balle chauve, ce qui montre qu'une partie de l'énergie est absorbée par le feutre. Il nous faudrait donc reprendre nos mesures pour dissocier l'effet du feutre et l'effet du caoutchouc!!!

Remerciements:

Arnaud BOIRON, agrégé préparateur au lycée SCHWEITZER.

Olivier NUSSBAUM, professeur de tennis à Kingersheim

Valérie SEBIRE, du magasin Court Annexe de Brunstatt

Bibliographie:

Rod Cross, Dynamic properties of tennis balls [pdf], Sports Engeeneering, 1999.

Rod Cross, A bounce of a ball, American Journal of Physics n° 67, Mars 1999.

https://www.itftennis.com/officiating/rulebooks/rules-of-tennis.aspx: regles du tennis.

http://twu.tennis-warehouse.com/learning_center/balltesting.php: propriétés des balles.

http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/: site de Rod Cross, un spécialiste de la physique du tennis.

https://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-tennis.html

https://www.polymersolutions.com/blog/whats-in-a-tennis-ball-besides-rubber/

Annexes : mesures de compression

Mesures et cycle pour la première balle étudiée :

Demi-tours	x(mm)	Force (N)
0	0	0
1	0,4	0,5
2	0,8	0,2
3	1,2	1,1
4	1,6	2,6
5	2	4,4
6	2,4	6,5
7	2,8	8,9
8	3,2	11,3
9	3,6	14,3
10	4	16,6
11	4,4	19,7
12	4,8	22
11	4,4	17,3
10	4	12,6
9	3,6	9,7
8	3,2	7,2
7	2,8	4,9
6	2,4	2,7
5	2	1,7
4	1,6	0,5
3	1,2	0,1

Mesures et cycle pour la seconde balle étudiée :

Tours	x(mm)	F(N)
1	0,8	1,2
2	1,6	4,3
3	2,4	9,2
4	3,2	15
5	4	22,1
6	4,8	28,3
7	5,6	35,4
8	6,4	42
9	7,2	46,4
10	8	54,7
11	8,8	59,3
12	9,6	65,4
13	10,4	74
14	11,2	82,4
15	12	91,7
16	12,8	98
17	13,6	106,3
18	14,4	110,3
19	15,2	119
20	16	125,9
21	16,8	133
22	17,6	137,2
23	18,4	146
24	19,2	153,5
25	20	160,2
26	20,8	168

27	21,6	175
26	20,8	155,8
25	20	141,5
24	19,2	127
23	18,4	116,5
22	17,6	106,7
21	16,8	97,8
20	16	93,3
19	15,2	83,6
18	14,4	76,5
17	13,6	70,7
16	12,8	64,1
15	12	61,1
14	11,2	54,3
13	10,4	48,5
12	9,6	45,4
11	8,8	39,1
10	8	34,4
9	7,2	29,9
8	6,4	25,4
7	5,6	21,7
6	4,8	16,3
5	4	11,7
4	3,2	7,8
3	2,4	3,8
2	1,6	1,1
1	0,8	0,1