Курсова робота
на тему "Узагальнені розв'язки операторних рівнянь"
студента групи ОМ-3
факультету комп'терних наук та кібернетики
Київського націоналного університету імені Тараса Шевченка
Пушкіна Дениса Євгеновича

Узагальнені розв'язки операторних рівнянь

Нехай $\mathcal{L}$ - деякий оператор, що діє з простору E в простір F. Надалі через $D(\mathcal{L})$ та $R(\mathcal{L})$ будемо позначати область визначення та область значень оператора $\mathcal{L}$. Розглянемо операторне рівняння

$$\mathcal{L}u = f, u \in D(\mathcal{L}), f \in F$$

Зрозуміло, що дане рівняння може мати розв'зки не для будь-якого $f \in F$. Ціллю даної роботи є дати "розумне"означення розв'язку операторного рівняння у випадку, коли $f \notin R(\mathcal{L})$.

Сильний узагальнений розв'язок

Нехай E - лінійний простір, F - банаховий, $\mathcal{L}$ - лінійний ін'єктивний оператор, що діє з E в F. Припустимо, що $D(\mathcal{L}) = E$, а $R(\mathcal{L})$ - щільна множина у F.
Розглянемо операторне рівняння

$$\mathcal{L}u = f, u \in E, f \in F$$

Введемо на лінійному просторі E норму наступним чином: $||u||_E = ||\mathcal{L}u||_F$. Легко перевірити, що ця функція дійсно задовольняє усі аксіоми норми. Тепер лінійний простір E перетворився на нормований, який, можливо, не є повним. Нехай $\bar{E}$ - поповнення цього лінійного нормованого простору. $\mathcal{L}$ - ін'єктивний оператор, тому він є бієкцією між E та $R(\mathcal{L})$. Оскільки $||\mathcal{L}u||_F = ||u||_E$, $\mathcal{L}$ є лінійним неперервним оператором між E та $R(\mathcal{L})$ і задає ізометрію між цими просторами. $\bar{E}$ та F - поповнення просторів E та $R(\mathcal{L})$ відповідно, простори E та $R(\mathcal{L})$ є ізометричними, значить простори $\bar{E}$ та F також є ізометричними та оператор $\mathcal{L}$ природнім чином продовжується до оператора $\bar{\mathcal{L}}$, що задає ізометрію між $\bar{E}$ та F. Як наслідок, оператор $\bar{\mathcal{L}}$ зберігає властивості лінійності та ін'єктивності, але тепер для довільного $f \in F$ існує єдиний розв'язок $u = \bar{\mathcal{L}}^{-1}(f) \in \bar{E}$.

1 (**Означення**). Сильним узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}(u) = f, u \in E, f \in F$ будемо називати елемент $u \in \bar{E}$ такий, що $\bar{\mathcal{L}}u = f$.

Міркування, наведені вище, дозволяють сформулювати наступну теорему.

2 (**Теорема**). Для довільного $f \in F$ існує єдиний сильний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$.

Трохи змінимо постановку задачі. Нехай E, F - банахові простори, $\mathcal{L}$ - лінійний ін'єктивний оператор, що діє з E в F. Припустимо, що $D(\mathcal{L})$ - всюди щільна лінійна підмножина в E, $R(\mathcal{L})$ - всюди щільна в F. Аналогічним чином можна побудувати сильний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$, що лежить у просторі $\bar{E}$, що є поповненням лінійного простору $D(\mathcal{L})$ відносно норми $||u|| = ||\mathcal{L}u||_F$. Дослідимо, за яких умов можна гарантувати, що сильний узагальнений розв'язок лежить у просторі E.

3 (**Теорема**). Нехай $\mathcal{L}$ - коерцитивний оператор із замкненим графіком. Тоді має місце щільне неперервне вкладення $\bar{E} \subset E$.
Доведення
Оскільки оператор $\mathcal{L}$ - коерцитивний, тобто $\forall u \in D(\mathcal{L})$ $||u||_E \leq c||\mathcal{L}(u)||_F = c||u||_{\bar{E}}$, то має місце вкладання $(D(\mathcal{L}), ||\cdot||_{\bar{E}}) \subset (D(\mathcal{L}), ||\cdot||_E)$, тому будь-яка фундаментальна послідовність в $(D(\mathcal{L}), ||\cdot||_{\bar{E}})$ буде також фундаментальною в $(D(\mathcal{L}), ||\cdot||_E)$ та еквівалентні (в сенсі псевдометрики $\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$) фундаментальні послідовності в $(D(\mathcal{L}), ||\cdot||_{\bar{E}})$ будуть також еквівалентними в $(D(\mathcal{L}), ||\cdot||_E)$. Тепер припустимо, що дві фундаментальні

послідовності $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ є нееквівалентними в $\bar{E}$, але еквівалентні в E. Тоді послідовність $\{u_i\} = \{x_i - y_i\}$ також фундаментальна у цих просторах, тому

$$u_i \to u \in \bar{E}, u \neq 0, u_i \to 0 \in E,$$

де збіжність розглядається по топологіям відповідних просторів. Це можна переписати наступним чином:

$$\mathcal{L}u_i \to \mathcal{L}u \in F, \mathcal{L}u \neq 0, u_i \to 0 \in E,$$

що неможливо, якщо оператор $\mathcal{L}$ має замкнений графік. Отже, $\bar{E}$ є підмножиною E. Далі, якщо нерівність $||u||_E \leq c||\mathcal{L}u||_F = c||u||_{\bar{E}}$ справджувалась $\forall u \in D(\mathcal{L})$, то з міркувань неперервності вона буде справджуватися і для $\forall u \in \bar{E}$. Отже, маємо неперервне вкладення $\bar{E} \subset E$. Щільність вкладення випливає з того, що множина $D(\mathcal{L})$ є щільною в просторі E і міститься в просторі $\bar{E}$.

Зауважимо, що в умові теореми ми могли замінити замкненість графіку на неперервність, оскільки для лінійного оператора, що діє в банахових просторах, ці дві властивості є рівносильними. Доведемо це.

4 (Теорема). Нехай X, Y - банахові простори. Лінійний оператор $T : X \to Y$ неперервний тоді і тільки тоді, коли графік цього оператора замкнений в $X \times Y$.
Доведення
Достатність. Нехай T - неперервний і $x_n \to x$. Тоді $Tx_n \to Tx$. Якщо до того ж $Tx_n \to y$, то $x = y$, тобто графік $\Gamma(T)$ оператора T замкнений.
Необхідність. Нехай $\Gamma(T)$ - замкнений підпростір простору $X \times Y$ (з нормою $||(x, Tx)||_{\Gamma(T)} = ||x||_X + ||Tx||_Y$). Легко показати, що оскільки простори X і Y банахові, то і простір $\Gamma(T)$ банаховий. Розглянемо допоміжний оператор $U : \Gamma(T) \to X$, який діє за правилом $U(x, Tx) = x$. З огляду на нерівність

$$||U(x, Tx)|| = ||x|| \leq ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)||$$

оператор U неперервний. Оскільки U - бієктивний, то за теоремою про обернений оператор в банахових просторах, обернений оператор неперервний, тобто $||U^{-1}||$ скінченна. Відповідно,

$$||Tx|| \leq ||(x, Tx)|| = ||U^{-1}x|| \leq ||U^{-1}|| \cdot ||x||$$

що й означає неперервність оператора $||T||$.

Сильний майже розв'язок

Нехай E, F - банахові, $\mathcal{L}$ - лінійний ін'єктивний оператор, що діє з E в F. Припустимо, що $D(\mathcal{L}) = E$, а $R(\mathcal{L})$ - щільна множина у F.
На практиці іноді неможливо точно визначити праву частину f рівняння $\mathcal{L}(u) = f$. Тоді доводиться розглядати ε - наближення f, тобто такий елемент $f_\varepsilon \in F$, що $||f - f_\varepsilon|| < \varepsilon$, тоді елемент $u = \mathcal{L}^{-1}(f)$ можна вважати ε - наближенням розв'язку цього рівняння (в сенсі, що його образ $\mathcal{L}(u)$ відрізняється від f на менше, ніж ε). В зв'язку з цим введемо таке означення.

5 (Означення). Послідовність елементів $u_n \in E$ будемо називати сильним майже розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f$, якщо $f_n = \mathcal{L}u_n \to f$, $n \to \infty$. При цьому елемент $\bar{u} = \bar{\mathcal{L}}^{-1}f \in \bar{E}$ називається сильним граничним елементом майже розв'язку ($\bar{u}$ буде границею послідовності u_n у просторі $\bar{E}$).

Із визначення сильного майже розв'язку випливає, що граничний елемент будь-якого сильного майже розв'язку є одночасно і сильним узагальненим розв'язком, та навпаки, для кожного сильного узагальненого розв'язку можна побудувати сильний майже розв'язок, що буде збігатися до нього. Тому поняття сильного майже розв'язку та сильного узагальненого розв'язку можна ототожнити.

Слабкий узагальнений розв'язок

Нехай $\mathcal{L} : E \to F$ - лінійний ін'єктивний оператор, що діє у банахових просторах E і F, область визначення $D(\mathcal{L})$ всюду щільна в E, область значень $R(\mathcal{L})$ всюду щільна в F.
Розглянемо спряжений оператор $\mathcal{L}^* : F^* \to E^*$, який визначається наступним чином. На $D(\mathcal{L})$ покладемо $(\mathcal{L}^*\varphi)(u) = \varphi(\mathcal{L}u)$, а з $D(\mathcal{L})$ на E оператор $\mathcal{L}^*\varphi$ продовжується за неперервністю.
Зрозуміло, що якщо оператор $\mathcal{L}$ не є неперервним, то оператор $\varphi(\mathcal{L}u)$ також може не бути неперервним, тобто спряжений оператор $\mathcal{L}^*$, в загальному випадку, не є всюди визначеним.
Для подальших міркувань ми зробимо припущення, що $D(\mathcal{L}^*)$ - тотальна підмножина F^* у двоїстості (F, F^*) (тобто $\forall f \in F\ \exists \varphi \in D(\mathcal{L}^*) : \varphi(f) \neq 0$), а $R(\mathcal{L}^*)$ - тотальна підмножина E^* у двоїстості (E, E^*).
Відмітимо, що умова тотальності $R(\mathcal{L}^*)$ буде виконуватись при будь-якому з наступних припущень:
A) Оператор $\mathcal{L}$ всюди визначений на E;
B) Оператор $\mathcal{L}$ коерцитивний, тобто $||\mathcal{L}u||_F \geq m||u||_E\ \forall u \in D(\mathcal{L})$, $m > 0$.
C) Простір E рефлексивний.
При виконанні умов B), C), тотальність множини $R(\mathcal{L})$ випливає з наступних результатів, описаних у [2], та з того, що із всюди щільності множини $R(\mathcal{L})$ випливає її тотальність.

6 (Теорема). Для того, щоб спряжене рівняння $\mathcal{L}^*\varphi = l$ було розв'язне для всюди щільної множини фукціоналів з E^*, необхідно щоб оператор $\mathcal{L}$ був ін'єктивним. У випадку рефлексивного простору E, ця умова є і достатньою.

7 (Теорема). Для того, щоб спряжене рівняння $\mathcal{L}^*\varphi = l$ було розв'язне для будь-якого функціоналу $l \in E^*$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$||\mathcal{L}u||_F \geq m||u||_E, \forall u \in D(\mathcal{L}), m > 0$$

Доведемо тотальність $R(\mathcal{L}^*)$ при виконанні припущення A). Скористаємось формулою

$$R(\mathcal{L}^*)^\circ \cap D(\mathcal{L}) = Ker(\mathcal{L}),$$

де $M^\circ \subset E$ - поляра множини $M \subset E^*$ в двоїстості (E, E^*). Доведомо справедливість цієї формули для довільного лінійного оператора. Оскільки $R(\mathcal{L}^*)$ - лінійна множина, то $R(\mathcal{L}^*)^\circ$ співпадає з анулятором множини $R(\mathcal{L}^*)$. Тому

$$R(\mathcal{L}^*)^\circ \cap D(\mathcal{L}) = \{u \in D(\mathcal{L}) : l(u) = 0, \forall l \in R(\mathcal{L}^*)\} = \{u \in D(\mathcal{L}) : \varphi(\mathcal{L}u) = 0, \forall \varphi \in D(\mathcal{L}^*)\}$$

оскільки $D(\mathcal{L}^*)$ - тотальний лінійний підпростір простору F^*, то

$$R(\mathcal{L}^*)^\circ \cap D(\mathcal{L}) = \{u \in D(\mathcal{L}) : \mathcal{L}u = 0\} = Ker(\mathcal{L})$$

Формулу доведено. Із неї безпосередньо випливає, що

$$(R(\mathcal{L}^*)^\circ \cap D(\mathcal{L}))^\circ = (Ker(\mathcal{L}))^\circ.$$

З всюди визначеності оператора маємо $D(\mathcal{L}) = E$, а з ін'єктивності $Ker(\mathcal{L}) = \{0\}$. Тому

$$R(\mathcal{L}^*)^{\circ\circ} = (Ker(\mathcal{L}))^\circ = E^*.$$

Значить, біполяра множини $R(\mathcal{L}^*)$, тобто слабке замикання $R(\mathcal{L}^*)$, співпадає з E^*, звідки випливає тотальність множини $R(\mathcal{L}^*)$ в E^*.
Остаточно робимо висновок, що множина функціоналів $R(\mathcal{L}^*) \subset E^*$ є тотальним лінійним многовидом простору E^* відносно двоїстості (E, E^*); лінійні простори F і $D(\mathcal{L}^*)$ також перебувають у двоїстості.
Розглянемо лінійний простір E з топологією $\sigma(E, R(\mathcal{L}^*))$. Такий простір буде локально опуклим векторним топологічним простором. З тотальності множини $R(\mathcal{L}^*)$ в E^* випливає, що цей простір буде віддільний. Тоді його поповнення $\widetilde{E}$ також буде локально опуклим і віддільним векторним топологічним простором. Кожен з функціоналів $l \in E^*$ вигляду $l = \mathcal{L}^*\varphi$, де $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$, буде допускати єдине розширення на $\widetilde{E}$ за неперервністю, яке ми позначимо за $\widetilde{l}$. Тоді спряженим до простору $\widetilde{E}$ буде простір, що складається з усіх функціоналів $\widetilde{l}$, де $l = \mathcal{L}^*\varphi$, $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$.
Розглянемо довільний неперервний лінійний функціонал $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$ та лінійний неперервний функціонал $l \in R(\mathcal{L}^*)$, $l = \mathcal{L}^*\varphi$. Тоді якщо $\mathcal{L}u = f$, то:

$$l(u) = (\mathcal{L}^*\varphi)(u) = \varphi(\mathcal{L}u) = \varphi(f)$$

Тому природнім буде наступне означення.

8 (Означення). Слабким узагальненим розв'язком операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$ будемо називати такий елемент $u \in \widetilde{E}$, що для будь-якого $\widetilde{l} \in \widetilde{E}^*$: $l = \mathcal{L}^*\varphi$, $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$, задовольняє свівідношенню:

$$\widetilde{l}(u) = \varphi(f)$$

Поняття слабкого узагальненого розв'язку $u \in \widetilde{E}$, так само як і у випадку з сильним узагальненим розв'язком, виникає тоді, коли елемент f правої частини рівняння $\mathcal{L}u = f$ не належить множині значень $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ і класичного розв'язку не існує.
З означення одразу випливає, що будь-який класичний розв'язок є одночасно і слабким узагальненим.
Перевіримо, що якщо $f \in R(\mathcal{L})$, то єдиним слабким узагальненим розв'язком є класичний.
Нехай $f \in R(\mathcal{L})$ і $u \in \widetilde{E}$ - слабкий узагальнений розв'язок. Тоді для усіх $\widetilde{l}$: $l = \mathcal{L}^*\varphi$, $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$, маємо:

$$\widetilde{l}(u) = \varphi(f)$$

Крім того, знайдеться такий елемент $u_1 \in E$, для якого $\mathcal{L}u_1 = f$. Цей елемент u_1 буде одночасно і слабким узагальненим розв'язком, тобто:

$$\widetilde{l}(u_1) = \varphi(f), l = \mathcal{L}\varphi$$

Оскільки множина всіх лінійних функціоналів $\widetilde{l}$, де $l = \mathcal{L}^*\varphi$, $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$, співпадає з усім простором $\widetilde{E}^*$, то маємо, що $\widetilde{l}(u) = \widetilde{l}(u_1)$ $\forall \widetilde{l} \in \widetilde{E}^*$. Оскільки множина функціоналів спряженого простору до віддільного локально опуклого простору відокремлює його точки, остаточно маємо, що $u = u_1$.
Аналогічними міркуваннями можна показати, що якщо слабкий узагальнений розв'язок $\widetilde{u} \in D(\mathcal{L})$, то цей розв'язок буде класичним.

Слабкий майже розв'язок

По аналогії з сильним майже розв'язком введемо у розгляд поняття слабкого майже розв'язку.

9 (Означення). Послідовність елементів $\{u_n\} \subset D(\mathcal{L})$ будемо називати *слабким майже розв'язком* операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$, якщо $f_n = \mathcal{L}u_n \to f$ при $n \to \infty$ у метриці простору F, а $u_n \to \widetilde{u} \in \widetilde{E}$ при $n \to \infty$ у слабкій топології $\sigma(\widetilde{E}, R(\mathcal{L}^*))$. При цьому елемент $\widetilde{u} \in \widetilde{E}$ називають *слабким граничним елементом майже розв'язку.*

Розглянемо зв'язок між поняттями слабкого узагальненого розв'язку і слабкого майже розв'язку. Покажемо, що u буде слабким узагальненим розв'язком операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$ тоді і лише тоді, коли він буде слабким граничним елементом деякого майже розв'язку. Нехай u - граничний елемент майже розв'язку, тоді $u \in \widetilde{E}$ та існує така послідовність $\{f_n\} \subset R(\mathcal{L})$, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в метриці простору F, а $u_n \to u$ при $n \to \infty$ в топології $\sigma(\widetilde{E}, R(\mathcal{L}^*))$, де $u_n = \mathcal{L}^{-1}(f_n) \in D(\mathcal{L})$. Тому для будь-якого $\varphi \in D(\mathcal{L}^*) \subset F^*$ виконується:

$$l(u_n) = (\mathcal{L}^*\varphi)(u_n) = \varphi(\mathcal{L}u_n) = \varphi(f_n) \to \varphi(f)$$

З іншого боку, оскільки $l \in R(\mathcal{L}^*)$, маємо $l(u_n) = \widetilde{l}(u_n) \to \widetilde{l}(u)$ при $n \to \infty$. Таким чином $\widetilde{l}(u) = \varphi(f)$ для будь-якого $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$ і $l = \mathcal{L}^*\varphi$, тобто u є слабким узагальненим розв'язком.
В іншу сторону, припустимо, що u - слабкий узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$, тобто

$$\widetilde{l}(u) = \varphi(f)$$

виконується для всіх $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$ та $l = \mathcal{L}^*\varphi$.
Нехай $\{f_n\}$ - довільна послідовність з $R(\mathcal{L})$, така, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у метриці простору F. Позначимо $u_n = \mathcal{L}^{-1}(f_n)$. Тоді для довільного функціоналу $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$ та $l = \mathcal{L}^*\varphi$ виконується:

$$l(u_n) = (\mathcal{L}^*\varphi)(u_n) = \varphi(\mathcal{L}u_n) = \varphi(f_n) \to \varphi(f) = \widetilde{l}(u)$$

при $n \to \infty$.
Таким чином, для довільного функціоналу $\widetilde{l} \in \widetilde{E}^*$ маємо $\widetilde{l}(u_n) = l(u_n) \to \varphi(f) = \widetilde{l}(u)$ при $n \to \infty$. Тому послідовність u_n збігається до u в топології $\sigma(\widetilde{E}, R(\mathcal{L}^*))$, тобто u - граничний елемент майже розв'язку $\{u_n\}$.

Існування та єдиність слабкого узагальненого розв'язку для лінійного операторного рівняння

Як і раніше, будемо припускати, що $\mathcal{L} : E \to F$ - лінійний ін'єктивний оператор з всюди щільними областю визначення $D(\mathcal{L})$ та областю значень $R(\mathcal{L})$, простори E і F - банахові, множина $D(\mathcal{L}^*)$ є тотальною в просторі F^* у двоїстості (F, F^*), множина $R(\mathcal{L}^*)$ - тотальна в E^* у двоїстості (E, E^*).
Позначимо через T топологію, індуковану на $R(\mathcal{L}) \subset F$ нормою простору F, а через $(R(\mathcal{L}), T)$, $(E, \sigma(E, R(\mathcal{L}^*)))$ векторні простори $R(\mathcal{L})$ та E, наділені топологіями T і $\sigma(E, R(\mathcal{L}^*))$ відповідно.

10 (Лема). У описаних вище припущеннях обернений оператор $B = \mathcal{L}^{-1} : (R(\mathcal{L}), T) \to (E, \sigma(E, R(\mathcal{L}^*)))$ є лінійним неперервним оператором.
Доведення.
Так як $(E, \sigma(E, R(\mathcal{L}^*)))$ - векторний топологічний простір, в якому множини

$$W(l_1,...,l_n;\varepsilon)=\{u:u\in E,l_1(u)<\varepsilon,...,l_n(u)<\varepsilon\},$$
де $\varepsilon>0$, $l_i\in R(\mathcal{L}^*)$, $i\in\{1,2,...,n\}$, утворюють фундаментальну систему околів нуля, то достатньо перевірити, що усі прообрази вигляду
$B^{-1}(W(l_1,...,l_n;\varepsilon))=\mathcal{L}(W(l_1,...,l_n;\varepsilon))$ будуть околами нуля в просторі $(R(\mathcal{L}),T)$.
Дійсно,

$$\mathcal{L}(W(l_1,...,l_n;\varepsilon))=\{\mathcal{L}u:l_1(u)<\varepsilon,...,l_n(u)<\varepsilon\}=\{\mathcal{L}u:\varphi_1(\mathcal{L}u)<\varepsilon,...,\varphi_n(\mathcal{L}u)<\varepsilon\},$$

де $l_i=\mathcal{L}^*\varphi_i$, $i\in\{1,2,...,n\}$. Тоді маємо:

$$\mathcal{L}(W(l_1,...,l_n;\varepsilon))=\{f\in R(\mathcal{L}):\varphi_1(f)<\varepsilon,...,\varphi_n(f)<\varepsilon\}=W_{R(\mathcal{L})}(\varphi_1,...,\varphi_n;\varepsilon),$$

де $W_{R(\mathcal{L})}(\varphi_1,...,\varphi_n;\varepsilon)$ - окіл, що належить до фундаментальної системи околів нуля векторного простору $R(\mathcal{L})$, наділеного топологією $\sigma(R(\mathcal{L}),D(\mathcal{L}^*))$. Оскільки топологія T, породжена нормою, сильніша за слабку топологію $\sigma(R(\mathcal{L}),D(\mathcal{L}^*))$, то множина $W_{R(\mathcal{L})}(\varphi_1,...,\varphi_n;\varepsilon)$ буде відкритим околом нуля в топології T.

11 (Теорема). У описаних вище припущеннях слабкий узагальнений розв'язок операторного рівняння $\mathcal{L}u=f$ існує і єдиний для довільного $f\in F$.
Доведення.
Спочатку доведемо єдиність. Припустимо, що дане операторне рівняння має два слабких узагальнених розв'яки u_1 та u_2, $u_1,u_2\in\widetilde{E}$. Тоді для довільного лінійного неперервного функціоналу $\widetilde{l}\in\widetilde{E}$, де $l=\mathcal{L}^*\varphi$, $\varphi\in D(\mathcal{L}^*)$, виконується

$$\widetilde{l}(u_1)=\varphi(f)=\widetilde{l}(u_2)$$

Оскільки векторний топологічний простір $\widetilde{E}$ є віддільним, це означає, що $u_1=u_2$. Таким чином, операторне рівняння $\mathcal{L}u=f$ не може мати більше одного слабкого узагальненого розв'язку.
Тепер довелемо існування слабкого узагальненого розв'язку. Так як множина значень $R(\mathcal{L})$ всюди щільна у просторі F, то існує послідовність елементів f_n із $R(\mathcal{L})$ така, що $f_n\to f$ при $n\to\infty$ по нормі простору F. Покажемо, що послідовність $u_n=\mathcal{L}^{-1}(f_n)$ буде слабким майже розв'язком операторного рівняння (тоді, як було доведено раніше, граничний елемент цього майже розв'язку і буде слабким узагальненим розв'язком). За вищедоведеною лемою, оператор $\mathcal{L}^{-1}:(R(\mathcal{L}),T)\to(E,\sigma(E,R(\mathcal{L}^*)))$ є неперервним лінійним оператором. Так як простір $(R(\mathcal{L}),T)$ - нормований, а $(E,\sigma(E,R(\mathcal{L}^*)))$ - повний віддільний векторний топологічний простір, оператор $\mathcal{L}^{-1}$ однозначно продовжується до лінійного неперервного відображення $\widetilde{B}$ простору F в $\widetilde{E}$. Тому послідовність $u_n=\mathcal{L}^{-1}(f_n)=\widetilde{B}(f_n)\to\widetilde{B}(f)\in\widetilde{E}$ при $n\to\infty$, тобто послідовність u_n є слабким майже розв'язком, а елемент $\widetilde{B}(f)$ є її слабким граничним елементом, а отже і слабким узагальненим розв'язком операторного рівняння. Таким чином, існування слабкого узагальненого розв'язку доведено.

Зв'язок між сильним і слабким узагальненим розв'язком

12 (Лема). Нехай векторні простори $\bar{X}_1$ та $\bar{X}_2$ є поповненням векторного простору X по топологіям τ_1 та τ_2 відповідно. Нехай топологія τ_2 слабша за топологію τ_1 та виконується умова:
$\{u_n\}\subset X$, $u_n\to u\in\bar{X}_1$ по топології простору $\bar{X}_1$, $u_n\to 0$ по топології простору $\bar{X}_2$ $\Rightarrow$ $u=0$.
Тоді простір X_1 щільно вкладений в простір X_2.

Щоб встановити зв'язок між сильним і слабким узагальниним розв'язком, нам знадобиться наступна теорема.

13 (Теорема). Простір $\bar{E}$ щільно вкладений в простір $\widetilde{E}$.
Доведення
Простори $\bar{E}$ і $\widetilde{E}$ - поповнення одного й того самого лінійного простору $D(\mathcal{L})$. Нехай послідовність $\{u_n\} \subset D(\mathcal{L})$ збігається до 0 в топології простору $\bar{E}$. Тоді $\mathcal{L}u_n \to 0$ при $n \to \infty$ в просторі F, а значить $\varphi(\mathcal{L}u_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якого $\varphi \in F^*$. Таким чином, $l(u_n) \to 0$ для довільного $l \in R(\mathcal{L}^*)$. Це означає, що $u_n \to 0$ в топології простору $\widetilde{E}$. Звідки маємо, що топологія простору $\widetilde{E}$ слабша за топологію простору $\bar{E}$. Щоб скористатися лемою про вкладеність, залишилось перевірити умову: якщо $u_n \to u$ в топології простору $\bar{E}$ і $u_n \to 0$ в просторі $\widetilde{E}$, то $u = 0$. Із збіжності $u_n \to u$ в просторі $\bar{E}$, маємо:

$$l(u_n) = \mathcal{L}^*\varphi(u_n) = \varphi(\mathcal{L}u_n) \to \varphi(\bar{\mathcal{L}}u)$$

для всіх $l \in R(\mathcal{L}^*)$. З іншого боку, з того, що $u_n \to 0$ в просторі $\widetilde{E}$ випливає, що $l(u_n) \to 0$ також для всіх $l \in R(\mathcal{L}^*)$. Таким чином, маємо, що $\varphi(\bar{\mathcal{L}}u) = 0$ для будь-якого $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$. В наслідок тотальності множини $D(\mathcal{L}^*)$ та ін'єктивності оператора $\bar{\mathcal{L}}$, $u = 0$. Таким чином, за лемою про вкладеність, простір $\bar{E}$ щільно вкладений в простір $\widetilde{E}$.

14 (Теорема). Поняття сильного узагальненого розв'язку та слабкого узагальненого розв'язку еквівалентні.
Доведення
Нехай $u \in \bar{E}$ - сильний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$. Оскільки множина $R(\mathcal{L})$ щільна в просторі F, існує послідовність $(f_n) \subset F$, яка збігається до f, тому існує послідовність $u_n = \mathcal{L}^{-1}f_n \in \bar{E}$ така, що $u_n \to u$ в просторі $\bar{E}$. Внаслідок попередньої теореми $u \in \widetilde{E}$ і $u_n \to u$ у просторі $\widetilde{E}$. Це означає, що послідовність (u_n) є слабким майже розв'язком, а u - її граничним елементом, тому u є слабким узагальненим розв'язком.
Доведемо, що слабкий узагальнений розв'язок $u \in \widetilde{E}$ буде сильним узагальненим розв'язком. Дійсно, в $\bar{E}$ існує сильний узагальнений розв'зок u^*, який, як щойно було доведено, буде одночасно і слабким розв'язком. Так як слабкий розв'язок рівняння єдиний, маємо, що $u = u^*$, і цей елемент є одночасно і сильним, і слабким розв'язком.

На сам кінець, зауважимо, що з щойно доведеної теореми випливає, що у означенні слабкого узагальненого розв'язку умова $\exists \widetilde{u} \in \widetilde{E}$: $u_n = \mathcal{L}^{-1}(f_n) \to \widetilde{u}$ в топології простору $\widetilde{E}$ є наслідком умови $f_n = \mathcal{L}u_n \to f$ в топології простору F, тобто ця умова є надлишковою. Дійсно, з того, що $f_n = \mathcal{L}u_n \to f$ випливає, що у послідовність u_n є сильним майже розв'язком, тому у неї є сильний граничний елемент, який, в наслідок щойно доведеної теореми, буде одночасно і слабким узагальненим розв'язком. Далі, для будь-якого лінійного функціоналу $\widetilde{l} \in (\widetilde{E})^*$: $l = \mathcal{L}^*\varphi$ маємо $\widetilde{l}(u_n) = l(u_n) = \varphi(\mathcal{L}u_n) = \varphi(f_n) \to \varphi(f) = \widetilde{l}(u)$, тобто u_n збігається до u в топології $\sigma(\widetilde{E}, R(\mathcal{L}^*))$, що й треба було довести.

Застосування узагальнених розв'язків операторних рівнянь

Як було показано, сильні та слабкі узагальнені розв'язки належать просторам $\bar{E}$ та $\widetilde{E}$. Однак конструктивне задання цих просторів у багатьох практично важливих випадках є дуже складною задачею. Тому зазвичай намагаються встановити наявність щільного вкладення простору $\bar{E}$ або $\widetilde{E}$ в деякий інший добре вивчений простір. Саме цією ідеєю ми скористаємось у наступному прикладі.

Узагальнені розв'язки для нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо деякі приклади узагальнених розв'язків для операторних рівнянь з обмеженим лінійним оператором $\mathcal{L}$: $l_2 \to l_2$, де

$$l_2 = \{x = (x_1, ..., x_k, ...), \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

зі скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

Надалі будемо позначати через e_k, $k \in \mathbb{N}$, одиничні орти простору l_2:

$$e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$$

Як відомо, будь-який лінійний оператор $\mathcal{L}$: $l_2 \to l_2$ задається нескінченною матрицею (яку ми також будемо позначати літерою $\mathcal{L}$ і ототожнювати з оператором $\mathcal{L}$):

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & ... \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & ... \\ ... & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & ... \\ ... & & & & \end{pmatrix},$$

де $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, ...)^T = \mathcal{L}e_i$. Тоді елемент $f = \mathcal{L}u$ представляється у вигляді добутку матриці $\mathcal{L}$ на вектор-стовпчик u з l_2. Додатково припустимо, що виконується умова Гільберта-Шмідта, а саме:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right) < \infty$$

і покажемо, що тоді для довільного $x =\in l_2$ його образ $y = \mathcal{L}x \in l_2$ та $||\mathcal{L}|| <= M$ (тим самим буде доведена неперервність оператора $\mathcal{L}$). Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \right) = M||x||$$

Отже, область визначення оператора $\mathcal{L}$ співпадає з усім l_2. Для того, що використати теорію ущагальнених розв'язків, небхідно встановитих, за яких умов на матрицю $\mathcal{L}$ множина значень оператора $R(\mathcal{L})$ є всюди щільною в l_2 та оператор є ін'єктивний. Для цього позначимо $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, ...)$; в силу виконання умови Гільберта-Шмідта, вектор $a_i \in l_2$, $i \in \{1, 2, ...\}$, тому кожен рядок a_i матриці $\mathcal{L}$ можна вважати елементом простору l_2. Тоді

$$f = \mathcal{L}u, f = (f_1, ..., f_n, ...), u = (u_1, ..., u_n, ...),$$

$$f_i = (a_i, u), i = 1, 2, ...$$

звідси $Ker(\mathcal{L}) = 0$ тоді і тольки тоді, коли система елементів

$$\mathcal{R} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$$

буде тотальною в l_2: якщо $(a_i, u) = 0\, \forall i \in \mathbb{N}$, то $u = 0$. Для дослідження проблеми щільності $R(\mathcal{L})$ в l_2 введемо наступне означення.

15 (**Означення**). Нескінченну матрицю, що задовольняє умові Гільберта-Шмідта, будемо називати *матрицею з розрідженими рядками*, якщо кожен рядок a_i матриці $\mathcal{L}$ не належить замкненому лінійному підпростору

$$\bar{L}_i = \overline{Lin(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ...)},$$

породженому іншими векторами $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ...)$ системи $\mathcal{R}$ в метриці простору l_2.

Позначимо $B = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - множина всіх одиничних ортів.

16 (**Теорема**). Нехай оператор $\mathcal{L}$ - ін'єктивний. Тоді $B \subset R(\mathcal{L})$ тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathcal{L}$ має розріджені рядки.
Доведення
Достатність. Нехай матриця має розріджені рядки, тобто $a_i \notin \bar{L}_i$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, тоді $\bar{L}_i \neq l_2$ ті існує елемент $u_i \neq 0$, що ортогональний до замкненого підпростору $\bar{L}_i$: $u_i \perp \bar{L}_i$. Тоді $c_i = (a_i, u_i) \neq 0$, бо інакше $f_i = \mathcal{L}u_i = ((a_1, u_i), ..., (a_n, u_i), ...)^T = (0, 0, ...)^T$, що суперечить ін'єктивності оператора $\mathcal{L}$. Покладемо $\bar{u}_i = u_i/c_i$, отримаємо $\mathcal{L}u_i = e_i$. Таким чином, $e_i \in R(\mathcal{L})$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, тобто $B \subset R(\mathcal{L})$.
Необхідність. Нехай $B \subset R(\mathcal{L})$. Це означає, що для кожного натурального i існує такий елемент u_i, що $e_i = \mathcal{L}u_i$, тобто $(a_i, u_i) = 1$ та $(a_k, u_i) = 0$ при $k \neq i$, а значить $(g, u_i) = 0$ для всіх $g \in \bar{L}_i$, тобто $u_i \perp \bar{L}_i$. Звідси випливає, що $a_i \notin \bar{L}_i$, тобто $\mathcal{L}$ є матрицею з розрідженими рядками.

17 (**Наслідок**). Будь-який ін'єктивний обмежений оператор $\mathcal{L}$, що задається матрицею з розрідженими рядками, має всюди щільну множу значень $R(\mathcal{L})$ в l_2.
Доведення
Випливає з того, що $B \subset R(\mathcal{L})$ та $R(\mathcal{L})$ - лінійне розмаїття, тому $Lin(B) \subset R(\mathcal{L})$. Так як $Lin(B)$ - всюди щільна множина в l_2, то $\overline{R(\mathcal{L})} \supset \overline{Lin(B)} = l_2$.

Відмітимо, що поняття матриці з розрідженими рядками є узагальненням класичного поняття невиродженої матриці на випадок нескінченних матриць, так як в чкінченновимірному випадку матриця є невиродженою тоді і тільки тоді, коли вона є матрицею з розрідженими рядками. Прикладів матриць з розрідженими ряками доволі багато: діагональні, трикутні, унітарні матриці тощо.
Розв'язання операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$ в просторі l_2 з обмеженим лінійним оператором $\mathcal{L}$ рівносильно розв'занню системи з нескінченної кількості лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j = b_i, u = (u_1, u_2, ...), b = (b_1, b_2, ...) \in l_2, i \in \mathbb{N}$$

Для знаходження узагальненого розв'язку рівняння $\mathcal{L}u = f$ розглянемо простір s усіх числових послідовностей з метрикою

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

де $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...) \in s$. Як відомо, s є повним лінійним метричним простором; спряжений до s простір s^* складається з функціоналів вигляду $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k x_k$, а збіжність в метриці s рівносильна покоординатній збіжності. Звідси випливає, що збіжність послідовності $\{x_n\} \subset s$ в слабкій топології $\sigma * (s, s^*)$ також співпадає з покоординатною збіжністю, а отже в просторі s збіжність в $\sigma * (s, s^*)$-топології та збіжність за метрикою ρ співнадають.

18 (**Визначення**). Послідовність $\{x_n\}$ простору E називають слабко фундаментальною, якщо для будь-якого функціоналу $\varphi \in E^*$ числова послідовність $\{\varphi(x_n)\}$ є фундаментальною.
Простір E називають секвенційно слабко повним, якщо будь-яка слабко фундаментальна послідовність з E слабко збігається до елементу з E.

19 (**Теорема**). Простір s є секвенційно слабко повним.
Доведення.
Нехай $\{x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...)\}$ - слабко фундаментальна послідовність з s. Виберемо в якості φ функціонал $\varphi_i(x) = x_i$, отримаємо, що числова координатна послідовність $\varphi_i(x_n) = x_i^{(n)}$ фундаментальна, а отже й збіжна, а отже послідовність $\{x_n\}$ є покоординатно збіжною. Це й означає, що $\{x_n\}$ є слабко збіжною до елемента з s.

20 (**Теорема**). Простір l_2 щільно вкладений в простір s.
Доведення.
Зрозуміло, що $l_2 \subset s$ як множина та l_2 вкладений в s алгебраїчно. Перевіримо топологічну вкладеність, тобто що виконується умова:
якщо $\{x_n\} \subset l_2$, $x_n \to x^* \in l_2$ по топології простору l_2, то $x_n \to x^*$ по топології простору s. Дійсно, з $x_n \to x \in l_2$ по топології l_2 маємо $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(n)} - x_i^*)^2 \to 0 \Rightarrow x_i^{(n)} - x_i^* \to 0\ \forall i \in \mathbb{N}$, тобто x_n збігається до x^* покоординатно, що й означає збіжність за топологією простору s.
Залишалось перевірити щільність вкладення. Нехай $x = (x_1, x_2, ...) \in s$. Побудуємо послідовність $y_n = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in l_2$. Тоді $y_n \to x$ за топологією простору s, отже $x \in \overline{l_2}$ $\forall x \in s$. Щільність вкладення доведено.

21 (**Теорема**). Якщо матриця $\mathcal{L}$ та транспонована матриця $\mathcal{L}^*$ мають розріджені рядки, то будь-який узагальнений розв'язок відповідної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь належить простору s.
Доведення
З означення узагальненого розв'язку можна зробити висновок, що такий розв'язок належить слабкому суквенційному замиканню E^S векторного простору E у віддільному локально випуклому топологічному векторному просторі $\widetilde{E}$ (поповнення E по топології $\sigma(E, R(\mathcal{L}^*)))$. Оскільки транспонована матриця $\mathcal{L}^*$ є матрицею з розрідженими рядками, множина значень $R(\mathcal{L}^*)$ спряженого оператора $\mathcal{L}^*$: $l_2 \to l_2$ містить орти e_k. Тому $s^* = L(B) \subset R(\mathcal{L}^*)$, отже топологія $\sigma(l_2, R(\mathcal{L}^*))$ сильніша за топологію $\sigma(l_2, L(B)) = \sigma(l_2, s^*)$. Нехай $\bar{u}$ - довільний елемент із слабкого секвенційного замикання l_2^S і $\{u_n\}$ - деяка послідовність з l_2, яка збігається до $\bar{u}$ в топології $\sigma(l_2, R(\mathcal{L}^*))$. Звідси випливає, що послідовність $\{u_n\}$ буде фундаментальною в топології $\sigma(l_2, R(\mathcal{L}^*))$, тому вона буде фундаментальною і в більш слабкій топології $\sigma(l_2, s^*)$, а значить і в топології $\sigma(s, s^*)$, тобто $\{u_n\}$ буде слабко фундаментальною послідовністю з s. Оскільки простір s є секвенційно слабко повним, то $\{u_n\}$ збігається до деякого елементу $\widetilde{u} \in s$. Далі, оскільки простір l_2 вкладений в простір s, то слабке замикання l_2^S вкладене в поповнення простору s за топологією $\sigma(s, s^*)$. Остання топологія є віддільною, тому $\bar{u} = \widetilde{u} \in s$, що й треба було довести.

На сам кінець, роглянемо один простий приклад використання розвинутої нами теорії відшукання узагальненого розв'язку для нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай нескінченна матриця $\mathcal{L}$ є діагональною з $a_{ii} = \lambda_i \neq 0$ і $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leq \infty$. В цьому випадкуматриця $\mathcal{L}$ породжує на l_2 ін'єктивний ермітовий оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, причому матриці $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$ мають розріджені рядки. Поклажемо $a_{nn} = \lambda_n = \frac{1}{n}$, тоді

$$\mathcal{L}u = (u_1, \frac{u_2}{2}, ..., \frac{u_n}{n}, ...), u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in l_2.$$

Помітимо, що, наприклад, елемент $y = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...) \notin R(\mathcal{L})$, тому система не має класичного розв'язку. Однак елемент $\bar{u} = (1, 1, ..., 1, ...) \in s$ буде узагальненим розв'язком: до цього узагальненого розв'язку в топології простору s збігається майже розв'язок $u_n = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...) = \mathcal{L}^{-1} u_n$, де $u_n = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$.

Список використаної літератури

1. С. И. Ляшко, Д.А. Номировский, Ю. И. Петунин, В. В. Семенов "Обобщенные решения операторных уравнений".

2. Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин, А. Г. Костюченко "Справочная математическая библиотека".

3. Вулих Б. З. "Введение в функциональный анализ".

4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. "Интерполяция линейных операторов".

5. Крейн С. Г. "Линейные уравнения в банаховом пространчтве".

6. Кадець В. М. "Курс функціонального аналізу та теорії міри".