Принцип работы в бакалаврской работе (НЕлинейная фильтрация):

1. Берется четкое изображение, затем размывается с помощью размытия по гауссу.
2. Процесс идентификации параметров:
    a. На четком изображении выбираются случайные точки (500 штук; вектор **y**) и соответствующие им точки на размытом изображении, вместе с окружающими точками маски (5x5).
    b. Строится матрица **X**, в которой в строке значения для каждой выбранной маски размытого изображения.

Маска:

6	5	4	5	6
5	3	2	3	5
4	2	1	2	4
5	3	2	3	5
6	5	4	5	6

$$
\begin{aligned}
y_i = a_{i1}x_1 + & \\
& +a_{i2}x_2 + a_{i3}x_2^2 + a_{i4}x_2^3 + \\
& +a_{i5}x_3 + a_{i6}x_3^2 + a_{i7}x_3^3 + \\
& +a_{i8}x_4 + a_{i9}x_4^2 + a_{i10}x_4^3 + \\
& +a_{i11}x_5 + a_{i12}x_5^2 + a_{i13}x_5^3 + \\
& +a_{i14}x_6 + a_{i15}x_6^2 + a_{i16}x_6^3
\end{aligned}
$$

Формула 1.

Соответственно строки матрицы **X** состоят из $\overline{a_{i1}, a_{i16}}$

    c. Если ранг матрицы **X** не равен 16, то процесс повторяется с 2.a
    d. Далее решается система линейных уравнений: **Xc=y**
    e. Нормализуются найденный вектор **c** (в бакалаврской работе этого не было)
3. Восстанавливаем размытое изображение применяя для каждой точки формулу 1.

Принцип работы в бакалаврской работе (линейная фильтрация):

1. Берется четкое изображение, затем размывается с помощью размытия по гауссу.
2. Процесс идентификации параметров:
   a. На четком изображении выбираются случайные точки (500 штук; вектор **y**) и соответствующие им точки на размытом изображении, вместе с окружающими точками маски (5x5).
   b. Строится матрица **X**, в которой в строке значения для каждой выбранной маски размытого изображения.

Маска:

22	15	10	16	23
14	6	2	7	17
13	5	1	3	11
21	9	4	8	18
25	20	12	19	24

$$\begin{aligned} y_i = {} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 + a_{i5}x_5 + \\ & + a_{i6}x_6 + a_{i7}x_7 + a_{i8}x_8 + a_{i9}x_9 + a_{i10}x_{10} + \\ & + a_{i11}x_{11} + a_{i12}x_{12} + a_{i13}x_{13} + a_{i14}x_{14} + a_{i15}x_{15} + \\ & + a_{i16}x_{16} + a_{i17}x_{17} + a_{i18}x_{18} + a_{i19}x_{19} + a_{i20}x_{20} + \\ & + a_{i21}x_{21} + a_{i22}x_{22} + a_{i23}x_{23} + a_{i24}x_{24} + a_{i25}x_{25} \end{aligned}$$

Формула 2.

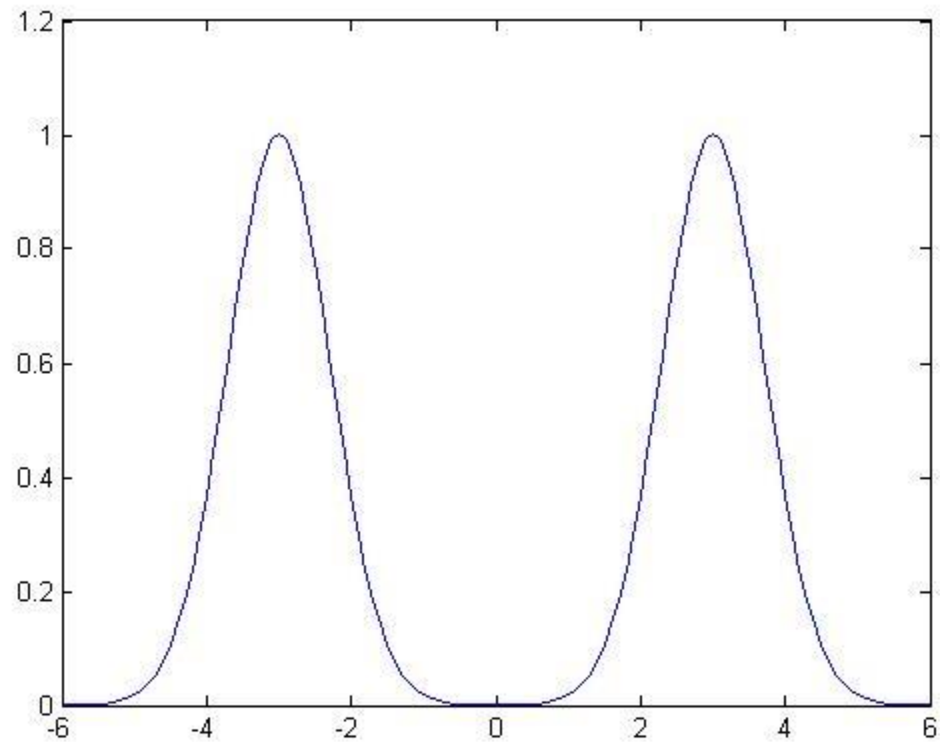
Соответственно строки матрицы **X** состоят из $\overline{a_{i1}, a_{i25}}$

   c. Если ранг матрицы **X** не равен 25, то процесс повторяется с 2.a
   d. Далее решается система линейных уравнений: **Xc=y**
   e. Нормализуются найденный вектор **c** (в бакалаврской работе этого не было)
3. Восстанавливаем размытое изображение применяя для каждой точки формулу 2.

Проблемы:

1) Случайные точки выбирались так, чтобы в их число не попали такие краевые точки, которые не удовлетворяют покрытие маской.
2) При восстановлении – не восстанавливаются точки на границах, которые не удовлетворяют покрытие маской.
3) Мало исследовалась ситуация – идентификации на одном изображении, а восстановление другого изображения.

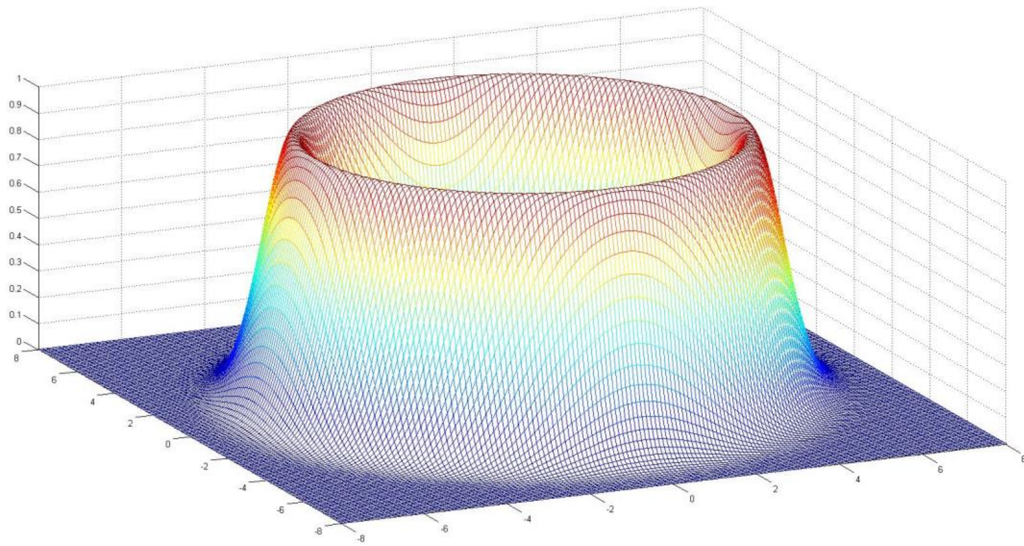
График частотной характеристики для «хорошей» восстанавливающей функции:

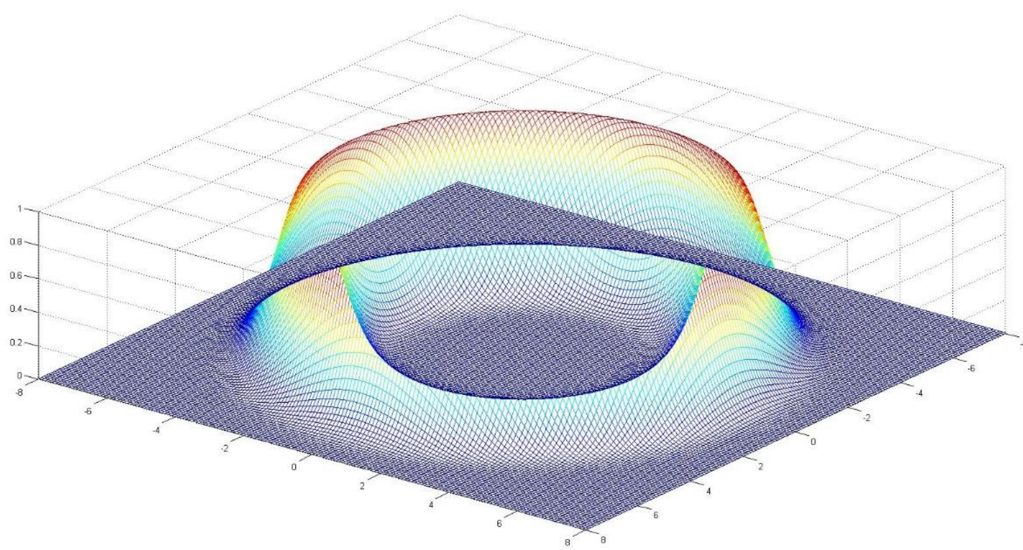


Уравнение для данного графика имеет вид:

$$y = ae^{-(cx-f)^2} + be^{-(dx+g)^2} \quad (a = b = c = d = 1, e = f = 3)$$

Трехмерный случай:





Уравнение:

$$z = ae^{-\left(\sqrt{bx^2+cy^2}-d\right)^2} \qquad \left(a=b=c=1, \mathrm{d}=5\right)$$

Из частотной характеристики искажающая функция получается следующим образом:

1) 2-х мерный случай:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(ae^{-(cx-f)^2} + be^{-(dx+g)^2} \right) e^{ixn} dx$$

Рассмотрим одно слагаемое:

$$f_1(n) = a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(cx-f)^2} e^{ixn} dx$$

Воспользуемся свойством преобразования Фурье:

$$e^{ian} f(n) \approx F(x-a)$$

тогда: $f_1(n) = ae^{in\frac{f}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} e^{ixn} dx$

Еще одно свойство преобразования Фурье (Википедия):

$$\exp\left(-an^2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(\frac{-x^2}{4a} \right)$$

тогда: $f_1(n) = ae^{in\frac{f}{c}} \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-\frac{n^2}{4c}} = \frac{a}{\sqrt{2c}} e^{\frac{n}{c}\left(if - \frac{n}{4}\right)}$

Добавив второе слагаемое и переобозначив константы получим:

$f(n) = ae^{icn - fn^2} + be^{-idn - gn^2}$, где a,b,c,d,f,g – неизвестные параметры

Идеи: задать параметры c,d,f,g в ручную, а параметры a и b оставить как неизвестные, которые будут находится с помощью идентификации, а модель остается линейной.

2) 3-х мерный случай:

$$f\left(n_1,n_2\right)=\iint ae^{-\left(\sqrt{bx^2+cy^2}-d\right)^2}e^{ixn_1+iyn_2}dxdy$$

Численное решение:

$$f\left(n_1,n_2\right)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_je^{-\left(\sqrt{bx^2+cy^2}-d\right)^2}e^{ix_in_1+iy_jn_2}$$

В общем случае i и j изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, но с определенных границ $\left(-d-\sqrt{d};-d+\sqrt{d}\right)$ и $\left(d-\sqrt{d};d+\sqrt{d}\right)$ значение функции ЧХ резко стремится к нулю, что позволяет ограничить количество слагаемых – $\frac{4d}{h^2}$ (где h – шаг разбиения интервала). – В этом утверждении я не уверен, т.к. значение ЧХ резко стремится к нулю, но не значение подынтегральной функции (преобразования Фурье).

Идеи: задать параметры b,c,d в ручную, а для каждой точки изображения независимо от соседних будет строится уравнение с линейно независимыми неизвестными параметрами модели a_{ij} (количество параметров системы $\frac{4d}{h^2}$).