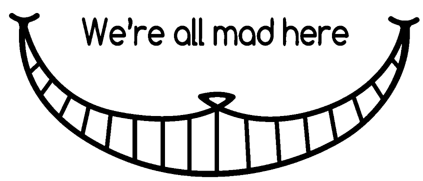
Требования к оформлению:

1. Подпишите работу сверху: id_for_online, фамилию, имя, номер группы.
2. Должно быть выписано решение задачи, только ответ не засчитывается.
3. Для каждого пункта задания обведите полученный численный ответ или формулу в торжественную рамочку.

Requirements:

1. State your identity at the top of the sheet: id_for_online, first name, last name, group number.
2. Full solutions are required, answer without explanations is not graded.
3. You should draw a pretty box around every final numeric answer or formula.



Номер выполняемого варианта n определяется как $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
Во всех задачах $k = \text{id\_for\_online}$.

Вариант 1

1. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

x	$-k$	0	k
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$0.5-\theta$	0.5	θ

Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \bar{X}$.

а) Найдите $\mathrm{E}(\hat{\theta})$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

б) Подберите константы a и b так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = a + b\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра θ.

2. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 6x(\theta - x)/\theta^3, \text{ при } x \in [0; \theta]; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

где θ — неизвестный параметр распределения. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

3. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ при } x \geq k; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

где θ — неизвестный параметр. Проверьте, будет ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X} - k$ эффективной?

4. Время от начала контрольной работы до её загрузки в систему lms подчинено закону с функцией плотности

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-40}{\theta}\right), \text{ при } x \geq 40; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

По случайной выборке X_1, X_2, X_3, ..., X_n оценивают параметр θ.

а) Найдите такие константы a и b, чтобы оценка $\hat{\theta}_1 = a + b\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ была несмещённой.

б) Какая из двух несмещённых оценок $\hat{\theta}_1$ или $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 40$ является более эффективной? Обоснуйте ответ.

Номер выполняемого варианта n определяется как $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
Во всех задачах $k = $ id_for_online.

Вариант 2

1. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 6x(\theta - x)/\theta^3, \text{ при } x \in [0;\theta]; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

где θ — неизвестный параметр распределения.

а) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

б) Подберите константу c так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = c\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра θ.

2. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ при } x \geq k; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

где θ — неизвестный параметр.

Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n+1} - k$ состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

3. Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0;1)$. Проверьте, будет ли эффективной оценка $\hat{p} = \bar{X}$.

4. Время от начала контрольной работы до её загрузки в систему lms подчинено закону с функцией плотности

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-30}{\theta}\right), \text{ при } x \geq 30; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

По случайной выборке X_1, X_2, X_3, ..., X_n оценивают параметр θ.

а) Найдите такие константы a и b, чтобы оценка $\hat{\theta}_1 = a + b\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ была несмещённой.

б) Какая из двух несмещённых оценок $\hat{\theta}_1$ или $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 30$ является более эффективной? Обоснуйте ответ.

Номер выполняемого варианта n определяется как $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
Во всех задачах $k = \text{id\_for\_online}$.

Вариант 3

1. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

x	$-k$	0	k
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$0.5 - \theta$	0.5	θ

   Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \bar{X}$.

   а) Найдите $\mathrm{E}(\hat{\theta})$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

   б) Подберите константы a и b так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = a + b\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра θ.

2. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ при } x \geq k; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

   где θ — неизвестный параметр.

   Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n+1} - k$ состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

3. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n — случайная выборка из распределения Пуассона

$$\mathbb{P}(X_i = m) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^m}{m!}, \text{ если } m \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

   где λ — неизвестный параметр. Проверьте, будет ли эффективной оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$?

4. Время от начала контрольной работы до её загрузки в систему lms подчинено закону с функцией плотности

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-20}{\theta}\right), \text{ при } x \geq 20; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

   По случайной выборке X_1, X_2, X_3, ..., X_n оценивают параметр θ.

   а) Найдите такие константы a и b, чтобы оценка $\hat{\theta}_1 = a + b \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ была несмещённой.

   б) Какая из двух несмещённых оценок $\hat{\theta}_1$ или $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 20$ является более эффективной? Обоснуйте ответ.

The variant n is defined as $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
In all problems $k = \text{id\_for\_online}$.

Variant 1

1. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n — be a random sample from discrete distribution given by the table

x	$-k$	0	k
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$0.5-\theta$	0.5	θ

   Consider the estimator $\hat{\theta} = \bar{X}$.

   а) Find $\mathrm{E}(\hat{\theta})$. Check whether the estimator $\hat{\theta}$ is unbiased for the parameter θ?

   б) Find a and b such, that $\tilde{\theta} = a + b\bar{X}$ is unbiased for the parameter θ.

2. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n be a random sample from a distribution with density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 6x(\theta - x)/\theta^3, \text{ if } x \in [0;\theta]; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

   where θ is the unknown paramater. Is the estimator $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ consistent for the parameter θ?

3. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n be a random sample from a distribution with density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ if } x \geq k; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

   where θ is the unknown paramater. Check whether the estimator $\hat{\theta} = \bar{X} - k$ is efficient?

4. The time between the beginning of the test and the upload to the lms system has the density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-40}{\theta}\right), \text{ if } x \geq 40; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

   Given the random sample X_1, X_2, X_3, ..., X_n we estimate θ.

   а) Find the constants a and b such that the estimator $\hat{\theta}_1 = a + b\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ is unbiased.

   б) Which estimator $\hat{\theta}_1$ or $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 40$ is more efficient? Justify.

The variant n is defined as $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
In all problems $k = $ id_for_online.

Variant 2

1. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n — be a random sample from distribution with density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 6x(\theta - x)/\theta^3, \text{ if } x \in [0;\theta]; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

where θ — is the unknown parameter.

a) Check whether $\hat{\theta} = \bar{X}$ is unbiased for the parameter θ?

б) Find the constant c such, that the estimator $\tilde{\theta} = c\bar{X}$ is unbiased for the parameter θ.

2. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n be a random sample from distribution with density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ if } x \geq k; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

where θ is the unknown parameter.
Check whether the estimator $\hat{\theta}_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n+1} - k$ is consistent for θ?

3. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n — be a random sample from Bernoulli distribution with unknown parameter $p \in (0;1)$.
Check whether the estimator $\hat{p} = \bar{X}$ is efficient.

4. The time between the beginning of the test and the upload to the lms system has the density

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x-30}{\theta}\right), \text{ if } x \geq 30; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

Given the random sample X_1, X_2, X_3, ..., X_n we estimate θ.

a) Find the constants a and b such that the estimator $\hat{\theta}_1 = a + b\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ is unbiased.

б) Which estimator $\hat{\theta}_1$ or $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 30$ is more efficient? Justify.

The variant n is defined as $n = (\text{id\_for\_online} \mod 3) + 1$.
In all problems $k = \text{id\_for\_online}$.

Variant 3

1. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n be a random sample from discrete distribution given by the table

x	$-k$	0	k
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$0.5 - \theta$	0.5	θ

   Consider the estimator $\hat{\theta} = \bar{X}$.

   а) Find $\mathrm{E}(\hat{\theta})$. Check whether the estimator $\hat{\theta}$ is unbiased for the parameter θ?

   б) Find a and b such, that $\tilde{\theta} = a + b\bar{X}$ is unbiased for the parameter θ.

2. Пусть X_1, X_2, X_3, ..., X_n случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-k}{\theta}\right), \text{ при } x \geq k; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

   where θ is the unknown parameter.
   Is the estimator $\hat{\theta}_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n+1} - k$ consistent?

3. Let X_1, X_2, X_3, ..., X_n be a random sample from Poisson distribution

$$\mathbb{P}(X_i = m) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^m}{m!}, \text{ если } m \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

   where λ is the unknown parameter. Check whether the estimator $\hat{\theta} = \bar{X}$ is efficient?

4. The time between the beginning of the test and the upload to the lms system has the density

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-20}{\theta}\right), \text{ if } x \geq 20; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases},$$

   Given the random sample X_1, X_2, X_3, ..., X_n we estimate θ.

   а) Find the constants a and b such that the estimator $\hat{\theta}_1 = a + b\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ is unbiased.

   б) Which estimator $\hat{\theta}_1$ or $\hat{\theta}_2 = \bar{X} - 20$ is more efficient? Justify.