# 1. Минимумы

## 1.1. Контрольная работа 1

### Теоретический минимум

1. Сформулируйте классическое определение вероятности.

2. Выпишите формулу условной вероятности.

3. Дайте определение независимости (попарной и в совокупности) для $n$ случайных событий.

4. Выпишите формулу полной вероятности, указав условия её применимости.

5. Выпишите формулу Байеса, указав условия её применимости.

6. Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины $X$. Выпишите свойства функции $F_X(x)$.

7. Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины $X$. Выпишите свойства функции $f_X(x)$.

8. Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y)$, где $X$ и $Y$ — случайные величины, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы.

9. Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно $\mathrm{Var}(\alpha X + \beta)$, где $X$ — случайная величина, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы.

10. Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности для случайной величины $X$, имеющей следующее распределение:

    а) биномиальное;

    б) Пуассона;

    в) геометрическое;

    г) равномерное;

    д) экспоненциальное.

## Задачный минимум

**Важно**: на контрольной работе каждая из задач минимума может несущественно изменяться!

1. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0.3, \mathbb{P}(B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(A|B)$;

   б) Найдите $\mathbb{P}(A \cup B)$;

   в) Являются ли события $A$ и $B$ независимыми?

2. Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА. Малыш выбирает наугад четыре кубика и выкладывает их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что при этом получится слово КОРТ.

3. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров.

   Из этих урн наугад выбирается одна урна.

   а) Вычислите вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым.

   б) Посчитайте вероятность того, что была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым.

4. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1.

   а) Найдите вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции в этом отделе.

   б) Сотрудником банка была совершена ошибка. Найдите вероятность того, что ошибку допустил неопытный сотрудник.

5. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.25$ |

   а) Найдите константу $c$.

   б) Найдите $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

   в) Найдите $\mathbb{P}(X < -3)$.

   г) Найдите $\mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$.

   д) Выпишите функцию распределения случайной величины $X$ и постройте её график.

   е) Имеет ли случайная величина $X$ функцию плотности?

6. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.25$ |

   Найдите

а) константу $c$

б) $\mathrm{E}(X)$

в) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathrm{E}(|X|)$

7. Пусть случайная величина $X$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0.75$. Найдите

   а) $\mathbb{P}(X = 0)$;

   б) $\mathbb{P}(X > 0)$;

   в) $\mathbb{P}(X < 0)$;

   г) $\mathrm{E}(X)$;

   д) $\mathrm{Var}(X)$;

   е) наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$.

8. Пусть случайная величина $X$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Найдите

   а) $\mathbb{P}(X = 0)$;

   б) $\mathbb{P}(X > 0)$;

   в) $\mathbb{P}(X < 0)$;

   г) $\mathrm{E}(X)$;

   д) $\mathrm{Var}(X)$;

   е) наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$.

9. В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Они выходят на каждом этаже начиная со второго равновероятно и независимо друг от друга.

   а) Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдет хотя бы один человек.

   б) Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже не выйдет ни одного человека.

   в) Вычислите вероятность того, что все выйдут на 6-м этаже или выше.

   г) Вычислите вероятность того, что никто не выйдет на 6-м этаже или выше.

10. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона и не зависет от количество сбоев в любые другие сутки. Среднее количество сбоев за сутки равно 3.

    а) Найдите вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

    б) Вычислите вероятность того, что за **двое** суток не произойдет ни одного сбоя.

11. Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

    Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$

в) $\mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$

г) $\mathbb{P}(X \in [2; 3])$

д) $F_X(x)$

12. Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0; 1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу $c$;

б) $\mathrm{E}(X)$;

в) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$;

г) $\mathrm{Var}(X)$;

д) $\mathrm{E}(\sqrt{X})$.

## 1.2. Контрольная работа 2

### Теоретический минимум

Первые девять вопросов второго минимума в точности дублируют вопросы первого минимума. В десятом вопросе про распределения появляется нормальное распределение.

1. Сформулируйте классическое определение вероятности.

2. Выпишите формулу условной вероятности.

3. Дайте определение независимости (попарной и в совокупности) для $n$ случайных событий.

4. Выпишите формулу полной вероятности, указав условия её применимости.

5. Выпишите формулу Байеса, указав условия её применимости.

6. Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины $X$. Выпишите свойства функции $F_X(x)$.

7. Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины $X$. Выпишите свойства функции $f_X(x)$.

8. Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y)$, где $X$ и $Y$ — случайные величины, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы.

9. Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно $\mathrm{Var}(\alpha X + \beta)$, где $X$ — случайная величина, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы.

10. Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности для случайной величины $X$, имеющей следующее распределение:

    а) биномиальное;

    б) Пуассона;

    в) геометрическое;

    г) равномерное;

    д) экспоненциальное;

    е) нормальное.

11. Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора.

12. Сформулируйте определение и свойства совместной функции плотности двух случайных величин, сформулируйте определение независимости случайных величин.

13. Сформулируйте определение и свойства ковариации случайных величин.

14. Сформулируйте определение и свойства корреляции случайных величин.

15. Сформулируйте определение и свойства условной функции плотности.
16. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathrm{E}(Y|X=x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.
17. Сформулируйте определение математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица $A$ была ковариационной матрицей некоторого случайного вектора.
18. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.
19. Сформулируйте закон больших чисел в слабой форме.
20. Сформулируйте центральную предельную теорему.
21. Сформулируйте теорему Муавра—Лапласа.
22. Сформулируйте определение сходимости по вероятности для последовательности случайных величин.

### Задачный минимум

1. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=-1)$

б) $\mathbb{P}(Y=-1)$

в) $\mathbb{P}(X=-1 \cap Y=-1)$

г) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

д) $F_{X,Y}(-1,0)$

е) Таблицу распределения случайной величины $X$

ж) Функцию $F_X(x)$ распределения случайной величины $X$

з) Постройте график функции $F_X(x)$ распределения случайной величины $X$

2. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=1)$

б) $\mathbb{P}(Y=1)$

в) $\mathbb{P}(X=1 \cap Y=1)$

г) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

д) $F_{X,Y}(1,0)$

е) Таблицу распределения случайной величины $Y$

ж) Функцию $F_Y(y)$ распределения случайной величины $Y$

з) Постройте график функции $F_Y(y)$ распределения случайной величины $Y$

3. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$

б) $\mathrm{E}(X^2)$

в) $\mathrm{Var}(X)$

г) $\mathrm{E}(Y)$

д) $\mathrm{E}(Y^2)$

е) $\mathrm{Var}(Y)$

ж) $\mathrm{E}(XY)$

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ некоррелированными?

4. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$

б) $\mathrm{E}(X^2)$

в) $\mathrm{Var}(X)$

г) $\mathrm{E}(Y)$

д) $\mathrm{E}(Y^2)$

е) $\mathrm{Var}(Y)$

ж) $\mathrm{E}(XY)$

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ некоррелированными?

5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = -1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = -1)$

в) Таблицу условного распределения случайной величины $Y$ при условии $X = -1$

г) Условное математическое ожидание случайной величины $Y$ при $X = -1$

д) Условную дисперсию случайной величины $Y$ при условии $X = -1$

6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = 1)$

в) Таблицу условного распределения случайной величины $Y$ при условии $X = 1$

г) Условное математическое ожидание случайной величины $Y$ при $X = 1$

д) Условную дисперсию случайной величины $Y$ при условии $X = 1$

7. Пусть $\mathrm{E}(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(3Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

8. Пусть $\mathrm{E}(X) = -1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(2Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

9. Пусть случайная величина $X$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(0 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X > 2)$

в) $\mathbb{P}(0 < 1 - 2X \leq 1)$

10. Пусть случайная величина $X$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X < -2)$

в) $\mathbb{P}(-2 < -X + 1 \leq 0)$

11. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X < 4)$.

12. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(-2 < X < 4)$.

13. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{E}(Y) = 2, \mathrm{Var}(Y) = 6$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X + 2Y < 7)$.

14. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 1, \mathrm{E}(Y) = 3, \mathrm{Var}(Y) = 7$. Найдите $\mathbb{P}(1 < 3X + Y < 7)$.

15. Игральная кость подбрасывается $420$ раз. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от $1400$ до $1505$?

16. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью $0.5$, в девятку – $0.3$, в восьмерку – $0.1$, в семерку – $0.05$, в шестерку – $0.05$. Стрелок сделал $100$ выстрелов. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что он набрал не менее $900$ очков?

17. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от $26500$ до $26800$.

18. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $289$. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что за $100$ рабочих дней суммарное число посетителей составит от $28550$ до $29250$ человек.

19. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{2})$,

б) $\mathbb{P}(X \leq Y)$,

в) $f_X(x)$,

г) $f_Y(y)$,

д) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

20. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{2})$,

б) $\mathbb{P}(X \leq Y)$,

в) $f_X(x)$,

г) $f_Y(y)$,

д) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

21. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(Y)$,

в) $\mathrm{E}(XY)$,

г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

22. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(Y)$,

в) $\mathrm{E}(XY)$,

г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

23. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

24. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1]\times[0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1]\times[0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

## 1.3. Контрольная работа 3

### Теоретический минимум

1. Дайте определение нормально распределённой случайной величины. Укажите диапазон возможных значений, функцию плотности, ожидание, дисперсию. Нарисуйте функцию плотности.

2. Дайте определение хи-квадрат распределения с помощью нормальных распределений. Укажите диапазон возможных значений, математическое ожидание. Нарисуйте функцию плотности при разных степенях свободы.

3. Дайте определение распределения Стьюдента с помощью нормальных распределений. Укажите диапазон возможных значений. Нарисуйте функцию плотности распределения Стьюдента при разных степенях свободы на фоне нормальной стандартной функции плотности.

4. Дайте определение распределения Фишера с помощью нормальных распределений. Укажите диапазон возможных значений. Нарисуйте возможную функцию плотности.

Для следующего блока вопросов предполагается, что имеется случайная выборка $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ из распределения с функцией плотности $f(x, \theta)$, зависящей от от параметра $\theta$. Дайте определение каждого понятия из списка или сформулируйте соответствующую теорему:

5. Выборочное среднее и выборочная дисперсия;

6. Формула несмещённой оценки дисперсии;

7. Выборочный начальный момент порядка $k$;

8. Выборочный центральный момент порядка $k$;

9. Выборочная функция распределения;

10. Несмещённая оценка $\hat{\theta}$ параметра $\theta$;

11. Состоятельная последовательность оценок $\hat{\theta}_n$;

12. Эффективность оценки $\hat{\theta}$ среди множества оценок $\hat{\Theta}$;

13. Неравенство Крамера–Рао для несмещённых оценок;

14. Функция правдоподобия и логарифмическая функция правдоподобия;

15. Информация Фишера о параметре $\theta$, содержащаяся в одном наблюдении;

16. Оценка метода моментов параметра $\theta$ при использовании первого момента, если $\mathrm{E}(X_i) = g(\theta)$ и существует обратная функция $g^{-1}$;

17. Оценка метода максимального правдоподобия параметра $\theta$;

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

18. Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$;

19. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для $\mu$ при известной дисперсии, для $\mu$ при неизвестной дисперсии, для $\sigma^2$;

### Задачный миннимум

1. Для взрослого мужчины рост в сантиметрах, величина $X$, и вес в килограммах, величина $Y$, являются компонентами нормального случайного вектора $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathrm{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\mathrm{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим разницу роста и веса, $U = X - Y$. Считается, что человек страдает избыточным весом, если $U < 90$.

   а) Определите вероятность того, что рост мужчины отклоняется от среднего более, чем на $10$ см.

   б) Укажите распределение случайной величины $U$. Выпишите её плотность распределения.

   в) Найдите вероятность того, что случайно выбранный мужчина страдает избыточным весом.

2. Рост в сантиметрах, случайная величина $X$, и вес в килограммах, случайная величина $Y$, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathrm{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\mathrm{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет $170$ см.

   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет $170$ см.

   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший $90$ кг, при условии, что его рост составляет $170$ см.

3. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) выборочное среднее,

   б) неисправленную выборочную дисперсию,

   в) исправленную выборочную дисперсию,

   г) выборочный второй начальный момент,

   д) выборочный третий центральный момент.

4. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) вариационный ряд,

   б) первый член вариационного ряда,

   в) последний член вариационного ряда,

   г) график выборочной функции распределения.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

| $x$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x)$ | $2/3 - \theta$ | $1/3$ | $\theta$ |

Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X} + 2}{5}$.

   а) Найдите $\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right)$.

   б) Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещённой оценкой неизвестного параметра $\theta$?

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения и $\hat{\theta} = \bar{X}$.

   а) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещённой оценкой неизвестного параметра $\theta$?

   б) Подберите константу $c$ так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = c\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра $\theta$.

7. Пусть $X_1, X_2, X_3$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0, 1)$. Какие из следующих ниже оценкой являются несмещенными? Среди перечисленных ниже оценок найдите наиболее эффективную оценку:

   - $\hat{p}_1 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$,
   - $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$,
   - $\hat{p}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$.

8. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n+1}$ состоятельной?

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ состоятельной оценкой неизвестного параметра $\theta$?

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Используя центральный момент второго порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра $\theta$.

11. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

| $x$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x)$ | $2/3 - \theta$ | $1/3$ | $\theta$ |

Используя второй начальный момент, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$. Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -3, 0, 2)$ найдите числовое значение найденной оценки параметра $\theta$.

12. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с функцией плотности

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра $p$.

14. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \ge 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ эффективной?

15. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где $c_i$ — цена одного наблюдения в $i$-ой страте, а $n_i$ — число наблюдений, которые приходятся на $i$-ую страту. Найдите $n_1$, $n_2$ и $n_3$, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

| Страта | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Среднее значение | 30 | 40 | 50 |
| Стандартная ошибка | 5 | 10 | 20 |
| Вес | 25% | 25% | 50% |
| Цена наблюдения | 1 | 5 | 10 |

## 1.4. Контрольная работа 4

### Теоретический минимум

1. Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области.

2. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли $Bin(1, p)$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Укажите формулу для статистики:

3. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при известной дисперсии $\sigma^2$, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu = \mu_0$.

4. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при неизвестной дисперсии $\sigma^2$, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu = \mu_0$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что есть две независимые случайные выборки: выборка $X_1$, $X_2$, ... размера $n_x$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_x; \sigma_x^2)$ и выборка $Y_1$, $Y_2$, ... размера $n_y$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_y; \sigma_y^2)$.

Укажите формулу для статистики или границ доверительного интервала:

5. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии известны;

6. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии не известны, но равны;

7. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при известных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu_x - \mu_y = \Delta_0$;

8. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu_x - \mu_y = \Delta_0$;

9. Статистика, проверяющая гипотезу о равенстве дисперсий, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

**Задачный минимум**

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2 = 4$. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\mu$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$

постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\mu$.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = 1.07, \quad x_2 = 3.66, \quad x_3 = -4.51,$$

постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\sigma^2$.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$

постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25 \\ &y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06 \end{aligned}$$

постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p$. Используя реализацию случайной выборки $X_1, \ldots, X_n$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $p$.

7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$ соответственно. Известно, что $n = 100$, $\bar{x}_n = 0.6$, $m = 200$, $\bar{y}_m = 0.4$. Постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха $p_X - p_Y$.

8. Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за $i$-ый день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром $\lambda$. Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\lambda$.

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения
$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$
   где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр распределения. Известно, что $n = 100$ и $\bar{x}_n = 0.52$.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для параметра $\lambda$.

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\mu$ и известной дисперсией $\sigma^2 = 4$. Объем выборки $n = 16$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 2$ вы используете критерий: если $\bar{X} \leq 1$, то вы не отвергаете гипотезу $H_0$, в противном случае вы отвергаете гипотезу $H_0$ в пользу гипотезы $H_1$. Найдите

    а) вероятность ошибки 1-го рода;

    б) вероятность ошибки 2-го рода;

    в) мощность критерия.

11. На основе случайной выборки, содержащей одно наблюдение $X_1$, тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim U[-0.7; 0.3]$ против альтернативной гипотезы $H_1 : X_1 \sim U[-0.3; 0.7]$. Рассматривается критерий вида: если $X_1 > c$, то гипотеза $H_0$ отвергается в пользу гипотезы $H_1$. Выберите константу $c$ так, чтобы уровень значимости этого критерия составлял $0.1$.

12. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
$$y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91,$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

15. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25$$
$$y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

16. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
$$y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91,$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$$

17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0; 1)$.Имеется следующая информация о реализации случайной выборки, содержащей $n = 100$ наблюдений: $\sum_{i=0}^{n} x_i = 60$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5, \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$

18. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — две независимые случайные выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$. Имеется следующая информация о

реализациях этих случайных выборок: $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 60$, $m = 150$,$\sum_{j=1}^{m} y_j = 50$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y, \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$$

19. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. На уровне значимости 5% проверьте утверждение Васи.

20. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудился целый год и провел серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

| | Пётр звонит | Пётр не звонит |
|---:|---:|---:|
| Вася ест | 200 | 40 |
| Вася не ест | 25 | 100 |

На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи Васей.

21. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией $v > 0$, где $\mu$ и $v$ — неизвестные параметры. Известно, что выборка состоит из $n = 100$ наблюдений, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 146$. При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : v = 1$ на уровне значимости 5%.

# 2. Ответы к минимумам

## 2.1. Контрольная работа 1 — Задачный минимум

1. а) $0.25$
   б) $0.6$
   в) зависимы
2. а) $0.5$
   б) $0.75$
   в) независимы
3. $\frac{4}{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}$
4. $0.5$
5. $7/15$
6. $0.028$
7. $\frac{5}{7}$
8. а) $0.5$
   б) $0.75$
   в) $0$
   г) $0.5$
   д)
   е) функция плотности не существует
9. а) $0.5$
   б) $0$

в) $0.5$
г) $0.5$
д) $0.5$

10. а) $0.25$
б) $0.75$
в) $0$
г) $0.25$
д)
е) функция плотности не существует

11. а) $0.25$
б) $0.25$
в) $0.75$
г) $11/16$
д) $0.75$

12. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$
б) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^4$
в) $0$
г) $3$
д) $0.75$
е) $2, 3$

13. а) $\left(\frac{3}{5}\right)^5$
б) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^5$
в) $0$
г) $2$
д) $1.2$
е) $2$

14. а) $e^{-100}$
б) $1-e^{-100}$
в) $0$
г) $100$
д) $99, 100$

15. а) $e^{-101}$
б) $1-e^{-101}$
в) $0$
г) $101$
д) $100, 101$

16. $1-\frac{8^5}{9^5}$

17. $\frac{8^5}{9^5}$

18. $1-e^{-3}$

19. $e^{-6}$

20. а) $0.5$
б) $0.5$
в) $0.25$
г) $0$

21. а) $0.5$
б) $0.5$
в) $\frac{1}{3}$
г) $\frac{1}{12}$
д) $1$

22. а) $2$
б) $0.25$
в) $\frac{3}{4}$
г) $1$

23. а) $2$
б) $0.5$
в) $0.5$
г) $0$
д) $0.8$

## 2.2. Контрольная работа 2 — Задачный минимум

1. а) $0.5$
   б) $0.3$
   в) $0.2$
   г) нет
   д) $0.3$
   е)

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.5$ | $0.5$ |

   ж) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 0.5, & \text{при } x \in [-1; 1) \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$

2. а) $0.5$
   б) $0.4$
   в) $0.2$
   г) да
   д) $0.6$
   е)

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | $0.4$ | $0.2$ | $0.4$ |

   ж) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < -1 \\ 0.4, & \text{при } y \in [-1; 0) \\ 0.6, & \text{при } y \in [0; 1) \\ 1, & \text{при } y \geq 1 \end{cases}$

3. а) $0$
   б) $1$
   в) $1$
   г) $0$
   д) $0.6$
   е) $0.6$
   ж) $0$
   з) $0$
   и) $0$
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

4. а) $0$
   б) $1$
   в) $1$
   г) $0$
   д) $0.8$
   е) $0.8$
   ж) $0$
   з) $0$
   и) $0$
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

5. а) $0.25$
   б) $0.2$
   в) Обозначим $A = \{X = -1\}$

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y \vert A)$ | $0.4$ | $0.2$ | $0.4$ |

   г) $0$
   д) $0.8$

6. а) $0.5$
   б) $0.2$
   в) Обозначим $A = \{X = 1\}$

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y \vert A)$ | $0.4$ | $0.2$ | $0.4$ |

   г) $0$
   д) $0.8$

7. а) $0$
   б) $36$
   в) $9$
   г) $60$
   д) $-4$
   е) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$
   ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. а) $-4$
   б) $8$
   в) $1$
   г) $10$

д) $-6$

е) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. а) $0.3413$
   б) $0.0228$
   в) $0.1915$

10. а) $0.6826$
    б) $0.0228$
    в) $0.1574$

11. $0.4332$

12. $0.8185$

13. $0.4514$

14. $0.5328$

15. $\approx 0.8185$

16. $\approx 0.9115$

17. $\approx 0.6422$

18. $\approx 0.9606$

19. а) $0.125$
    б) $0.5$
    в) $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
    г) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
    д) нет

20. а) $\frac{1}{16}$
    б) $\frac{1}{2}$
    в) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
    г) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
    д) да

21. а) $\frac{7}{12}$
    б) $\frac{7}{12}$
    в) $\frac{1}{3}$
    г) $-\frac{1}{144}$
    д) $-\frac{1}{11}$

22. а) $\frac{2}{3}$
    б) $\frac{2}{3}$
    в) $\frac{4}{9}$
    г) $0$
    д) $0$

23. а) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
    б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
    в) $\frac{7}{12}$
    г) $\frac{11}{144}$

24. а) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
    б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
    в) $\frac{2}{3}$
    г) $\frac{1}{18}$

## 2.3. Контрольная работа 3 — Задачный минимум

1. а) $\approx 0.15$
   б) $U \sim \mathcal{N}(101, 29)$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 29}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-101)^2}{29}}$
   в) $\approx 0.02$

2. а) $71.14$
   б) $f(y|x = 170) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 20}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-71.14)^2}{20}}$
   в) $\approx 0$

3. а) $0.25$
   б) $0.6875$
   в) $0.91(6)$
   г) $0.75$
   д) $-0.28125$
4. а) $-1, 0, 1, 1$
   б) $-1$
   в) $1$
   г) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.25, & -1 \le x < 0 \\ 0.5, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$
5. а) $\theta$
   б) да
6. а) нет, оценка смещена
   б) $c = 2$
7. а) все оценки несмещенные
   б) $\hat{p}_3$ наиболее эффективная
8. да
9. да
10. $\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \cdot 20}{n}}$
11. $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$, $\hat{\theta}_{MM} = 0.68$
12. $\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$
13. $\hat{p}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
14. да
15. $n_1 \approx 260, n_2 \approx 232, n_3 \approx 658$

## 2.4. Контрольная работа 4 — Задачный минимум

1. $\left[-1.6 - 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}; -1.6 + 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
2. $\left[-1.6 - 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}; -1.6 + 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}\right]$
3. $\left[\frac{17.43 \cdot 2}{4.61}; \frac{17.43 \cdot 2}{0.21}\right]$
4. $\left[-1.6 - (-2.6) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}; -1.6 - (-2.6) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\right]$
5. $\left[1.04 - (-0.37) - 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}; 1.04 - (-0.37) + 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}\right]$
6. $\left[0.45 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}; 0.45 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}\right]$
7. $\left[0.6 - 0.4 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}; 0.6 - 0.4 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}\right]$
8. $\left[2.5 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}; 2.5 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}\right]$
9. $\left[\frac{1}{0.52} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}; \frac{1}{0.52} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}\right]$
10. а) $\approx 0.02$
    б) $\approx 0.02$
    в) $\approx 0.98$

11. 0.2
12. $z_{obs} \approx -1.39$, $z_{crit} = 1.28$, нет оснований отвергать $H_0$.
13. $t_{obs} \approx -0.65$, $t_{crit} = 1.89$, нет оснований отвергать $H_0$.
14. $z_{obs} \approx 0.93$, $z_{crit} = -1.65$, нет оснований отвергать $H_0$.
15. $t_{obs} \approx 0.89$, $t_{crit} = -2.35$, нет оснований отвергать $H_0$.
16. $F_{obs} \approx 95.37$, $F_{crit} = 199.5$, нет оснований отвергать $H_0$.
17. $z_{obs} \approx 2.04$, $z_{crit} = 1.65$, основная гипотеза отвергается.
18. $z_{obs} \approx 4.16$, $z_{crit} = 1.96$, основная гипотеза отвергается.
19. $\gamma_{obs} \approx 0.26$, $\gamma_{crit} = 5.99$, нет оснований отвергать $H_0$.
20. $\gamma_{obs} \approx 139.4$, $\gamma_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.
21. $LR_{obs} \approx 5.5$, $LR_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.