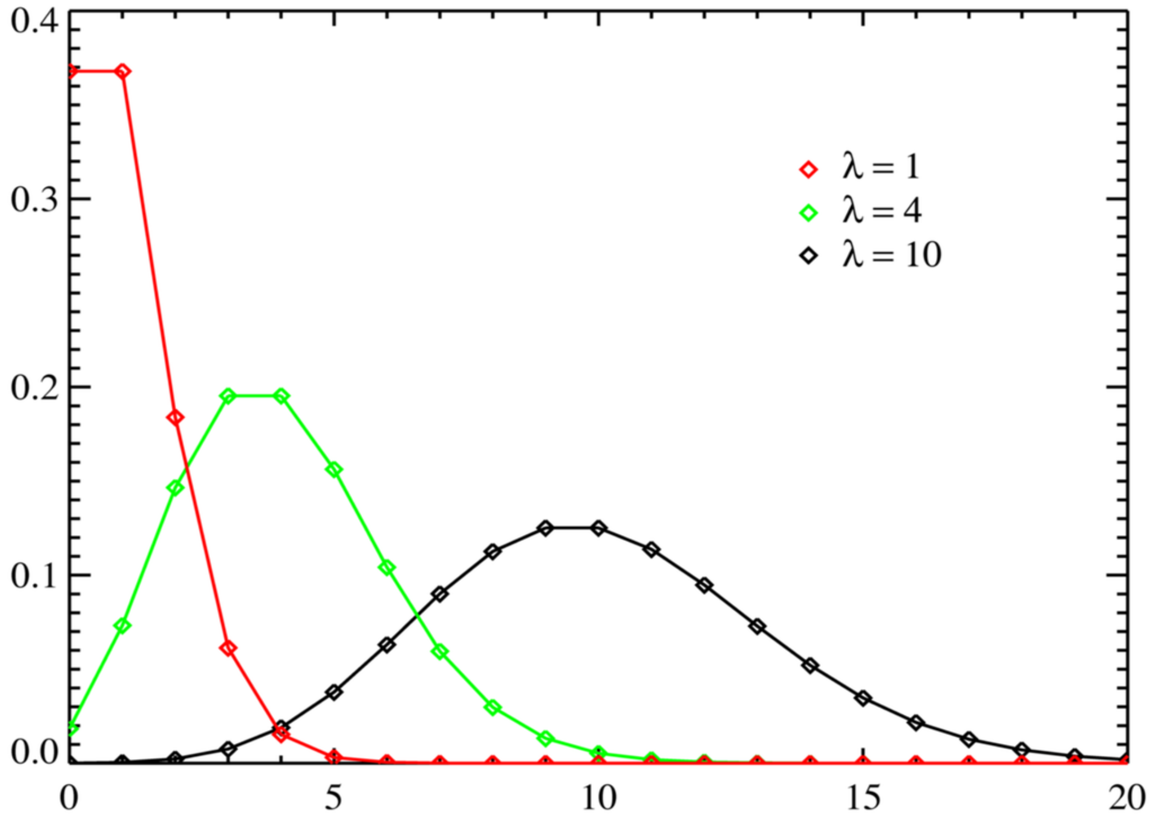
# Распределение Пуассона (с параметром λ )

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,\ldots.$$




Распределение редких событий

λ – параметр интенсивности (среднее число событий в единицу времени/в заданной области пространства)

# Геометрическая вероятность

Пусть Ω – область в $R^k$ (прямая, плоскость, пространство)

Случайный эксперимент: наудачу бросается точка в Ω. Тогда

$$P(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(\Omega)}$$

Где $\rho(A)$ – мера множества *A* (длина, площадь, объём)

*Равномерное распределение координат наудачу брошенной точки*

# Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

**Дискретное**

($\Omega$ – не более чем счётно)

**Непрерывное**

- Любое подмножество $\Omega$ является случайным событием

- Не любое подмножество является случайным событием!

## Сигма-алгебра событий $\mathscr{F}$

- Совокупность всех подмножеств $\Omega$

*Свойства замкнутости относительно счётного объединения подмножеств и дополнения выполняются автоматически*

- Сигма-алгебра подмножеств $\Omega$

*Свойства замкнутости относительно счётного объединения подмножеств $\Omega$ и дополнения **НЕ** выполняются автоматически*

# Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

**Дискретное**

**Непрерывное**

## Вероятность *P*

Вероятностная мера на $(\Omega, \mathscr{F})$ – функция $P : \mathscr{F} \to R$

- **(P1)** $p_i = p(\omega_i) \geq 0 \quad для\ \forall \omega_i \in \Omega$
- **(P1)** $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathscr{F}$

*Аксиома существования вероятности*

- **(P2)** $P(\Omega) = 1$
- **(P2)** $P(\Omega) = 1$

*Условие нормировки*

- **P(3)** выполняется автоматически
- **(P3)** $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

*Аксиома счётной аддитивности*

# Борелевская σ-алгебра

Минимальной сигма-алгеброй, содержащей набор множеств $S$, называется пересечение всех сигма-алгебр, содержащих $S$

Минимальная сигма-алгебра, содержащая множество всех интервалов на вещественной прямой, называется борелевской сигма-алгеброй в R и обозначается $\mathscr{B}(R)$

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

**Определение 1** Функция $\xi : \Omega \to R$ называется *случайной величиной*, если для любого борелевского множества $B \in \mathscr{B}(R)$ множество $\xi^{-1}(B)$ является событием, т. е. принадлежит сигма-алгебре $\mathscr{F}$ ($\xi$ – измеримая функция)

**Определение 2** Функция $\xi : \Omega \to R$ называется *случайной величиной*, если для любого $x \in R$, множество $\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$ является событием, т. е. принадлежит сигма-алгебре $\mathscr{F}$

# Функция распределения

*Функцией распределения* случайной величины $\xi$ называется функция $F_\xi : R \to [0,1]$ при каждом *x* равная следующей вероятности:

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \le x) = P(\xi \le x)$$

# Свойства функции распределения

Любая функция распределения обладает следующими свойствами

1) $\exists \quad \textit{пределы} \quad \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$

2) $F_\xi$ не убывает: $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2) \quad \textit{для} \quad \forall\, x_1 \le x_2$

3) $F_\xi$ непрерывна справа: $\lim\limits_{x\to x_0+} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

Замечание Если функция $F: R \to [0,1]$ удовлетворяет свойствам (1)-(3), то она является функцией распределения некоторой случайной величины, то есть найдётся вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ и определённая на нём случайная величина $\xi$ такая, что

$$F(x) = F_{\xi}(x) \quad \textit{для} \quad \forall x \in R$$

## Дискретное распределение

Случайная величина $\xi$ имеет *дискретное* распределение, если множество её значений конечно или счётно, т.е. существует набор чисел $a_1, a_2, \ldots$ такой, что

$$\forall i \quad P(\xi = a_i) > 0, \quad \sum_i P(\xi = a_i) = 1$$

## Непрерывное распределение

Случайная величина $\xi$ имеет *непрерывное* распределение, если её функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна

# Абсолютно непрерывное распределение. Функция плотности

Случайная величина $\xi$ имеет *абсолютно непрерывное* распределение, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ такая, что:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

Функция $f_\xi(x)$ называется *функцией плотности распределения (плотностью вероятности)* с.в. $\xi$

# Свойства функции плотности

1) $f_\xi(x) \geq 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

<u>Замечание</u> Свойства (1)-(2) характеризуют класс плотностей, т.е. если функция $g(x)$ удовлетворяет свойствам (1)-(2), то она является функцией плотности распределения некоторой случайной величины, т.е. найдётся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и определённая на нём случайная величина $\xi$ такая, что $g(x) = f_\xi(x)$