Обозначения

Обозначение	Интерпретация в теории вероятностей	Интерпретация в теории множеств
Ω	Пространство элементарных событий (множество возможных исходов случайного эксперимента)	Универсальное множество
$\omega \in \Omega$	Элементарное событие (исход вероятностного эксперимента)	Элемент множества Ω
$A \subseteq \Omega$	Случайное событие	Подмножество множества Ω

Обозначения

Обозначение	Интерпретация в теории вероятностей	Интерпретация в теории множеств
$A \cup B$	Событие, состоящее в том, что произошло по крайней мере одно из событий *A* или *B*	Объединение множеств *A* и *B*
$A \cap B$	Событие, состоящее в том, что произошли оба события *A* и *B*	Пересечение множеств *A* и *B*
$A \backslash B$	Событие, состоящее в том, что произошло *A*, но не произошло *B*	Разность множеств *A* и *B*

Обозначения

Обозначение	Интерпретация в теории вероятностей	Интерпретация в теории множеств
$\bar{A} = A^c = \Omega \backslash \mathrm{A}$	Событие, состоящее в том, что не произошло событие *A*	Дополнение к множеству *A*
$\emptyset$	Невозможное событие	Пустое множество
$A \cap B = \emptyset$	События *A* и *B* несовместны, т.е. не могут произойти одновременно	Множества *A* и *B* не пересекаются

Дискретное вероятностное пространство

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

$\mathscr{F}$ – совокупность всех подмножеств Ω

(замкнута относительно: объединения $\cup$, пересечения $\cap$, дополнения – *σ-алгебра событий*)

P – вероятность $(p_i = p(\omega_i) \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \ldots = 1)$

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$$

дискретное вероятностное пространство

σ-алгебра событий

Множество $\mathscr{F}$, элементами которого являются подмножества Ω называется *σ-алгеброй событий*, если

1. $\Omega \in \mathscr{F}$

содержит достоверное событие

2. Если $A \in \mathscr{F}$, то $\bar{A} \in \mathscr{F}$

вместе с любым событием содержит противоположное=замкнута относительно дополнения

3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, то $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathscr{F}$

замкнута относительно счётного объединения

Теорема сложения

для двух событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$\text{если } A \cap B = \varnothing, \quad \text{то} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

формула включения/исключения для k событий

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + \ldots + P(A_k) -$$
$$-\sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<m} P(A_i \cap A_j \cap A_m) -$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

Условная вероятность

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0$$

Теорема умножения

для двух событий

$$P(A\cap B)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A),\quad \text{если } P(A)>0,\ P(B)>0$$

для k событий

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\ldots P(A_k\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}),$$
$$\text{если } P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)>0$$

Независимость двух событий (попарная)

События A и B называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Независимость в совокупности

События $A_1, A_2, \ldots A_k$ называются *независимыми в совокупности* если для любого $1 \leq s \leq k$ и любой последовательности индексов $i_1, \ldots, i_s$ имеет место равенство

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_s})$$

Формула полной вероятности

Пусть дана полная группа несовместных событий $H_1, H_2, \ldots$

$(т.е. \quad H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \quad и \quad H_1 \cup H_2 \cup \ldots = \Omega)$

Тогда вероятность любого события *A* может быть вычислена по формуле

$$P(A) = \sum_i P(A \mid H_i) P(H_i)$$

Формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ полная группа несовместных событий

$$(т.е. \quad H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \quad и \quad H_1 \cup H_2 \cup \ldots = \Omega)$$

Тогда для любого события *A*, такого что $P(A) > 0$, условная вероятность того, что имело место событие H_s $(s = 1, 2, \ldots)$, если в результате эксперимента наблюдалось событие *A*, может быть вычислена по формуле

$$\underbrace{P(H_s \mid A)}_{\textit{апостериорная вероятность}} = \frac{P(A \mid H_s) P(H_s)}{\sum_i P(A \mid H_i) P(H_i)}$$

Схема Бернулли

Последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода – «успех» и «неудача», при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью p , а неудача с вероятностью $q = 1 - p$

Формула Бернулли

При любом *k=0,1,…,n* имеет место равенство

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

где μ_n – число успехов в *n* испытаниях Бернулли

Биномиальное распределение вероятностей

Распределение числа успехов в *n* испытаниях Бернулли

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Теорема о вероятности первого успеха

Пусть τ – номер первого успешного испытания в схеме Бернулли, тогда

$$P(\tau = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Геометрическое распределение вероятностей

Распределение числа неудач, предшествующих первому успеху

$$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Схема серий

Серии испытаний Бернулли. Внутри серии *i* вероятность успеха p_i , *i=1,2,….*

Теорема Пуассона

Пусть в схеме серий $n \to \infty$, $p_n \to 0$, так что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вероятность получить *k* успехов в *n* испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p_n стремится к величине $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Уточнённая теорема Пуассона

Пусть Z – произвольное множество целых неотрицательных чисел, μ_n – число успехов в *n* испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p, $\lambda = np$. Тогда справедливо равенство

$$\left| P(\mu_n \in \mathrm{Z}) - \sum_{k \in \mathrm{Z}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| =$$

$$\left| \sum_{k \in \mathrm{Z}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k \in \mathrm{Z}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \le \min(p, np^2)$$

Распределение Пуассона

Распределение числа событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью λ и независимы друг от друга

$$P(\nu = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots$$

«Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах», 1837 год

Серии испытаний Бернулли. Внутри серии *i* вероятность успеха p_i , *i=1,2,….*

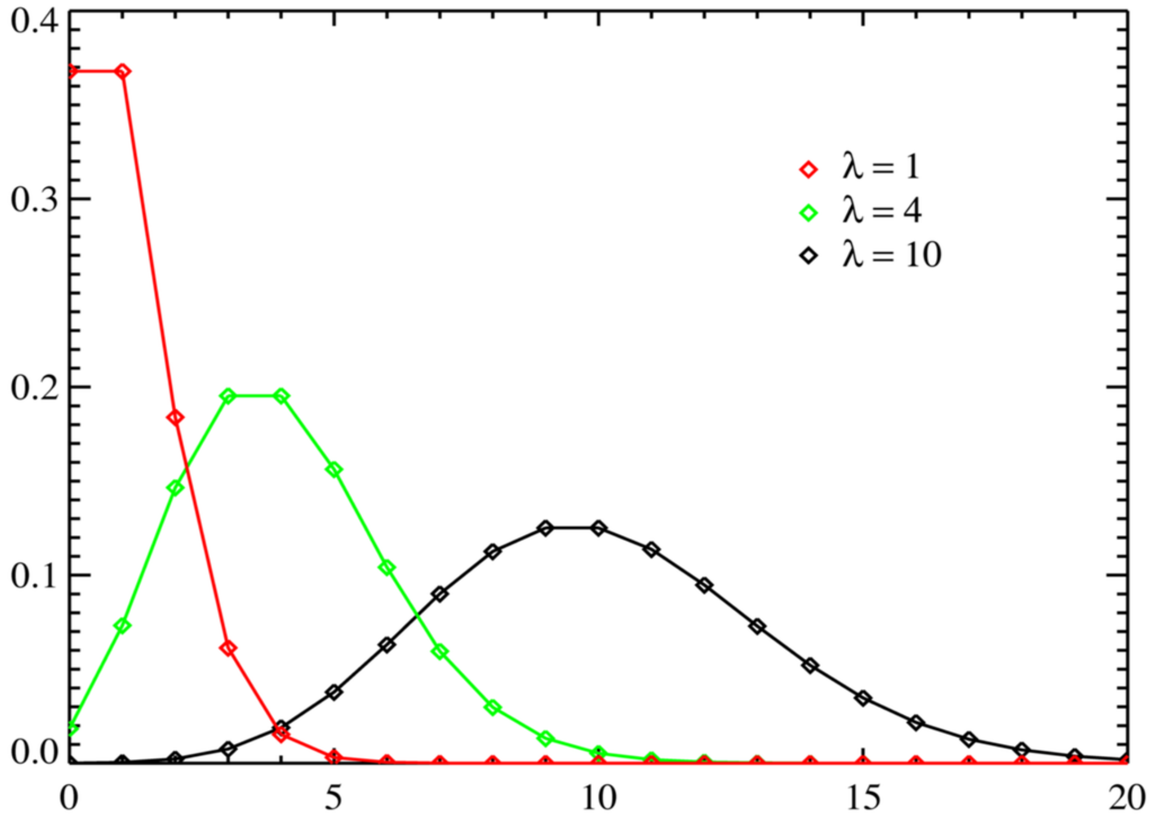
Теорема Пуассона

Пусть в схеме серий $n \to \infty$, $p_n \to 0$, так что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вероятность «получить *k* успехов в *n* испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p_n» стремится к величине $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Распределение Пуассона (с параметром λ)

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0,1,\ldots.$$



Распределение редких событий

λ – параметр интенсивности (среднее число событий в единицу времени/в заданной области пространства)

Геометрическая вероятность

Пусть Ω – область в R^k (прямая, плоскость, пространство)

Случайный эксперимент: наудачу бросается точка в Ω. Тогда

$$P(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(\Omega)}$$

Где $\rho(A)$ – мера множества *A* (длина, площадь, объём)

Равномерное распределение координат наудачу брошенной точки

$0.5 \times 0.05 \times 0.01 \quad 4.4 \cdot 10^{-9}$

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

Дискретное

(Ω – не более чем счётно)

- Любое подмножество Ω является случайным событием

Непрерывное

- Не любое подмножество является случайным событием!

Сигма-алгебра событий $\mathscr{F}$

- Совокупность всех подмножеств Ω

Свойства замкнутости относительно счётного объединения подмножеств и дополнения выполняются автоматически

- Сигма-алгебра подмножеств Ω

Свойства замкнутости относительно счётного объединения подмножеств Ω и дополнения ***НЕ*** *выполняются автоматически*

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

Дискретное **Непрерывное**

Вероятность *P*

Вероятностная мера на $(\Omega, \mathscr{F})$ – функция $P : \mathscr{F} \to R$

Дискретное:

- **(P1)** $p_i = p(\omega_i) \geq 0 \quad для\ \forall\, \omega_i \in \Omega$
- **(P2)** $P(\Omega) = 1$
- **P(3)** выполняется автоматически

Непрерывное:

- **(P1)** $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathscr{F}$
- **(P2)** $P(\Omega) = 1$
- **(P3)** $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

Аксиома существования вероятности

Условие нормировки

Аксиома счётной аддитивности

σ-алгебра событий

Множество $\mathscr{F}$, элементами которого являются подмножества Ω называется *σ-алгеброй событий*, если

1. $\Omega \in \mathscr{F}$

содержит достоверное событие

2. Если $A \in \mathscr{F}$, то $\overline{A} \in \mathscr{F}$

вместе с любым событием содержит противоположное=замкнута относительно дополнения

3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, то $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathscr{F}$

замкнута относительно счётного объединения

Борелевская σ-алгебра

Минимальной сигма-алгеброй, содержащей набор множеств S, называется пересечение всех сигма-алгебр, содержащих S

Минимальная сигма-алгебра, содержащая множество всех интервалов на вещественной прямой, называется борелевской сигма-алгеброй в R и обозначается $\mathscr{B}(R)$

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

Определение 1 Функция $\xi : \Omega \to R$ называется *случайной величиной*, если для любого борелевского множества В $\in \mathscr{B}(R)$ множество $\xi^{-1}(B)$ является событием, т. е. принадлежит сигма-алгебре $\mathscr{F}$ (ξ – измеримая функция)

Определение 2 Функция $\xi : \Omega \to R$ называется *случайной величиной*, если для любого $x \in R$, множество $\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$ является событием, т. е. принадлежит сигма-алгебре $\mathscr{F}$

Функция распределения

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi : R \to [0,1]$ при каждом *x* равная следующей вероятности:

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \le x) = P(\xi \le x)$$

Свойства функции распределения

Любая функция распределения обладает следующими свойствами

1) $\exists \quad \textit{пределы} \quad \lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$

2) F_ξ не убывает: $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2) \quad \textit{для} \quad \forall\, x_1 \le x_2$

3) F_ξ непрерывна справа: $\lim_{x\to x_0+} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

Замечание Если функция $F : R \to [0,1]$ удовлетворяет свойствам (1)-(3), то она является функцией распределения некоторой случайной величины, то есть найдётся вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и определённая на нём случайная величина ξ такая, что

$$F(x) = F_{\xi}(x) \quad \text{для} \quad \forall x \in R$$

Дискретное распределение

Случайная величина ξ имеет *дискретное* распределение, если множество её значений конечно или счётно, т.е. существует набор чисел $a_1, a_2, \ldots$ такой, что

$$\forall i \quad P(\xi = a_i) > 0, \quad \sum_i P(\xi = a_i) = 1$$

Непрерывное распределение

Случайная величина ξ имеет *непрерывное* распределение, если её функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна

Абсолютно непрерывное распределение. Функция плотности

Случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное* распределение, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ такая, что:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

Функция $f_\xi(x)$ называется *функцией плотности распределения (плотностью вероятности)* с.в. ξ

Свойства функции плотности

1) $f_\xi(x) \geq 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

<u>Замечание</u> Свойства (1)-(2) характеризуют класс плотностей, т.е. если функция $g(x)$ удовлетворяет свойствам (1)-(2), то она является функцией плотности распределения некоторой случайной величины, т.е. найдётся вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ и определённая на нём случайная величина ξ такая, что $g(x) = f_\xi(x)$

Свойства функции плотности и распределения

$для \quad \forall a, b \in R$

1) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ *для любых распределений*

2) $P(a \le \xi < b) = \int_a^b f_\xi(t)dt$ *для абсолютно непрерывных распределений*

3) *Если с.в.* ξ *имеет абсолютно непрерывное распределение, то* $F_\xi(x)$ *непрерывна*

Преобразование случайных величин

Пусть ξ абсолютно непрерывная с.в. и g(x) – монотонная и дифференцируемая функция, тогда с.в. $\eta = g(\xi)$ имеет абсолютно непрерывное распределение с функцией плотности

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(g^{-1}(y))}{|g'(y)|}$$

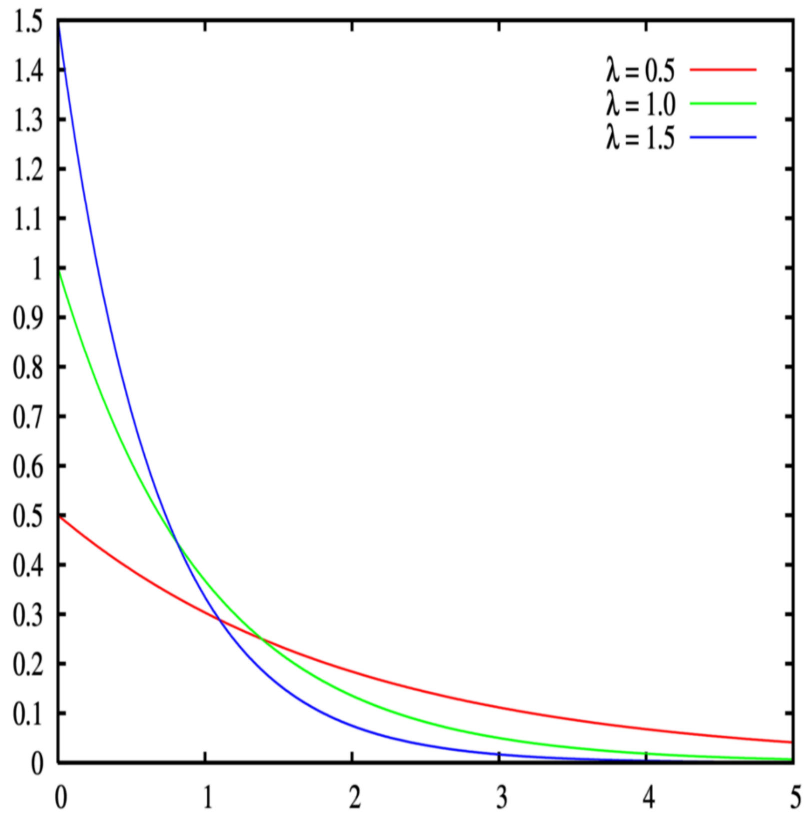
Показательное распределение

С.В. ξ имеет показательное $\xi \sim E(\lambda)$ (экспоненциальное) распределение с параметром λ>0, если её функция плотности имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Свойство отсутствия памяти (нестарение)

График функции плотности



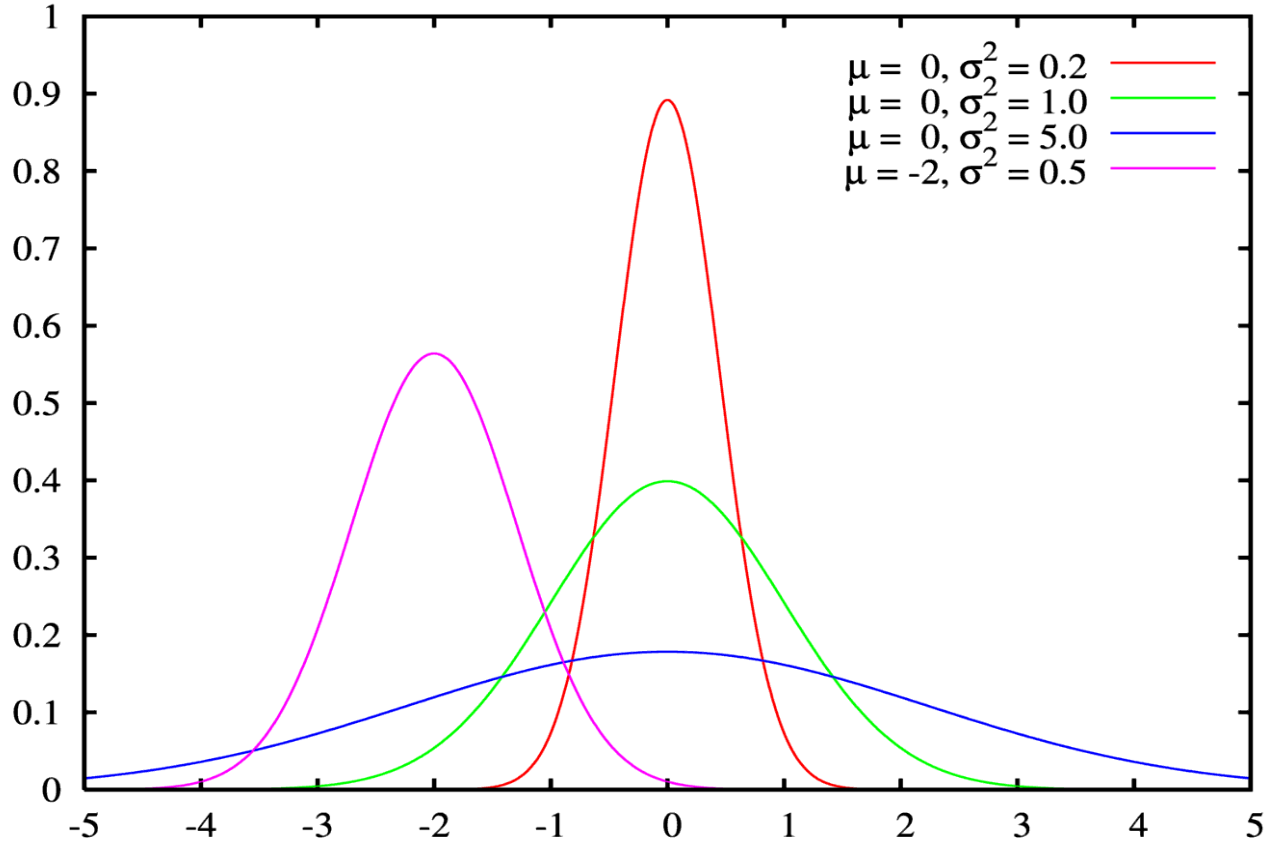
Нормальное распределение

График функции плотности

С.В. ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ

$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, если её функция плотности имеет вид: $\forall x \in R$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

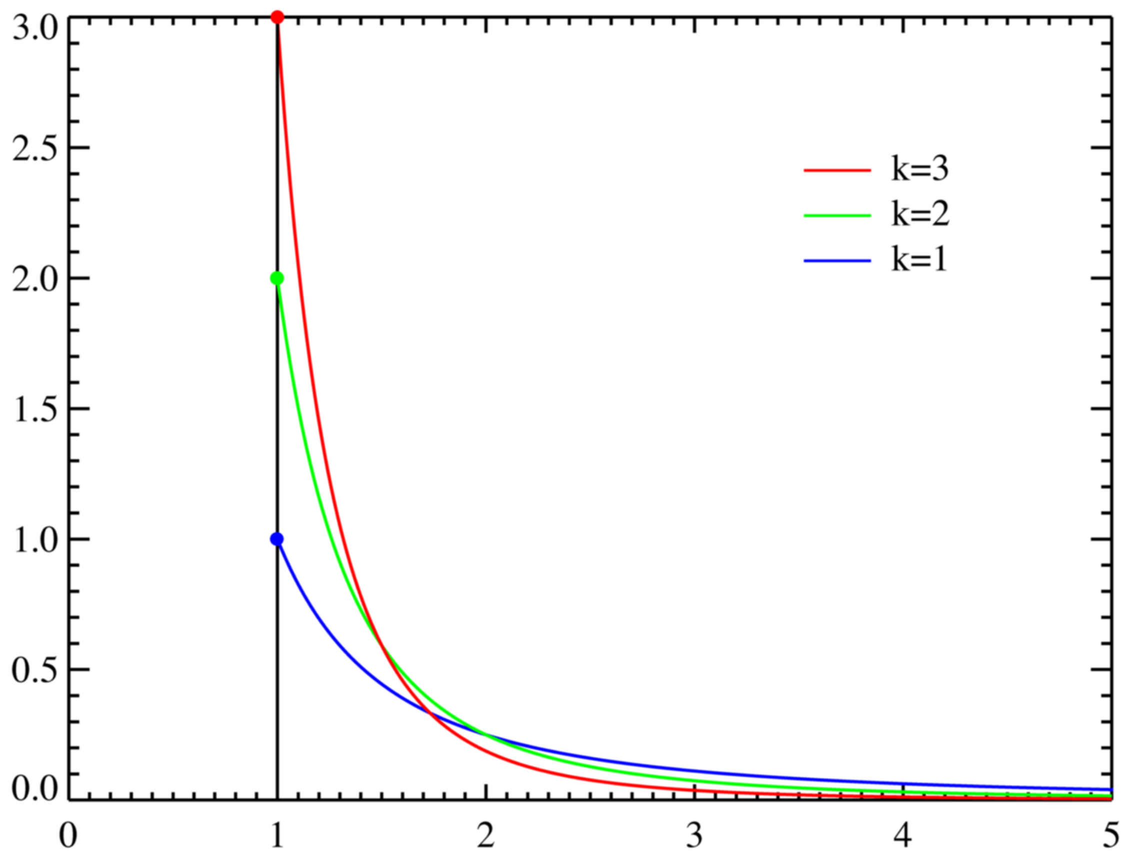


Распределение Парето

С.В. ξ имеет распределение Парето с параметром k>0, если её функция плотности имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^{k+1}}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

График функции плотности



Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной с.в ξ

называется число

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k),$$

если этот ряд сходится абсолютно,

т.е. $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(\xi = x_k) < \infty$$

Математическим ожиданием абс. непрерывной с.в ξ *с функцией плотности*

.$f_\xi(x)$ называется число

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно,

т.е. $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$$

Свойства математических ожиданий

для $\forall a, b \in R$ *и с.в.* ξ *и* η, *определённых на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$

1) $E(a\xi + b\eta + c) = aE(\xi) + bE(\eta) + c$

2) *Если* $\xi \geq 0$ *почти наверное* (*п.н.*), *т.е.* $P(\xi \geq 0) = 1$, *то*

$$E(\xi) \geq 0$$

3) *Если* $\xi \geq 0$ *п.н. и* $E(\xi) = 0$, *то* $\xi = 0$ *п.н.*

4) *Если* $\xi \geq \eta$ *п.н.*, *то* $E(\xi) \geq E(\eta)$

5) *Если* $a \leq \xi \leq b$ *п.н.*, *то* $a \leq E(\xi) \leq b$

Свойства математических ожиданий

Для произвольной борелевской функции $g(x): R \to R$

$$E(g(\xi)) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k) P(\xi = x_k), & \text{если распределение дискретно и ряд абсолютно сходится} \\ \int g(x) f_\xi(x) dx, & \text{если распределение абс.непрерывно с плотностью } f_\xi(x) \text{ и} \\ & \text{интеграл абсолютно сходится} \end{cases}$$

Теорема. Неравенство Йенсена

Пусть функция $g(x): R \to R$ *выпукла (выпуклой вниз), тогда для* $\forall$ *с.в.* ξ, *такой что* $E(\xi) < \infty$, *верно*

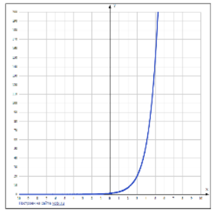
$$E(g(\xi)) \geq g(E(\xi))$$

Для вогнутых функций $g(x): R \to R$

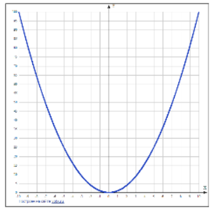
$$E(g(\xi)) \leq g(E(\xi)).$$

Некоторые следствия неравенства Йенсена

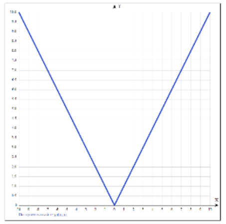
$$E(e^{\xi}) \ge e^{E(\xi)},$$

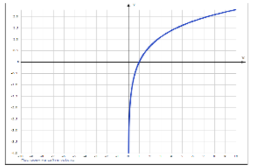


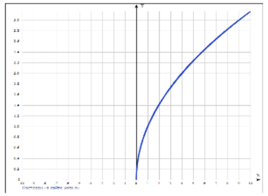
$$E(\xi^2) \ge \left(E(\xi)\right)^2,$$

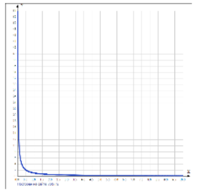


$$E(|\xi|) \ge |E(\xi)|$$









$$\underbrace{E(\ln \xi) \le \ln(E(\xi)), \quad E(\sqrt{\xi}) \le \sqrt{E(\xi)}, \quad E\left(\frac{1}{x}\right) \ge \frac{1}{E(\xi)}}_{\text{для положительных } \xi}$$

Дисперсия и стандартное отклонение

Дисперсией с.в ξ называется число

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$$

Среднеквадратическим отклонением с.в. ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)}$$

Свойства дисперсий

для $\forall a, b \in R$ *и с.в.* ξ *и* η, *определённых на* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

1) $D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$

2) $D(a\xi) = a^2 D(\xi)$

3) $D(\xi) \geq 0, \quad D(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ *п.н.*

4) $D(\xi + a) = D(\xi)$

5) *Если* ξ *и* η *независимы, то* $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$

с.в. ξ *и* η *независимы, если независимы любые события, связанные с этими с.в.*

Совместная функция распределения

Пусть с.в $\xi_1, \dots, \xi_n$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

Функция

$$F_\xi(x) = P(\xi_1 \le x_1, \dots, \xi_n \le x_n), \quad \text{где} \quad x = (x_1, \dots, x_n)'$$

называется *функцией распределения случайного вектора*

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$ или *совместной функцией распределения*

случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Свойства совместной функции распределения

для $\forall x_1, x_2 \in R$ *и с.в.* ξ_1 *и* ξ_2*, определённых на* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

1) $0 \le F_\xi(x_1, x_2) \le 1$

2) $F_\xi(x_1, x_2)$ *не убывает по каждому аргументу*

3) $\forall i \quad \exists$ *пределы* $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_\xi(x_1, x_2) = 0,$

$$\lim_{x_1 \to +\infty, x_2 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2) = 1$$

4) $F_\xi(x_1, x_2)$ *непрерывна справа по каждому аргументу*

5) $F_{\xi_1}(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2), \quad F_{\xi_1}(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2)$

Совместная плотность распределения

Случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если существует $f_\xi(x_1, x_2) \geq 0$ такая, что для любого борелевского множества $B \in \mathscr{B}(R^2)$ имеет место равенство

$$P(\xi \in B) = \iint_B f_\xi(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

Если такая функция $f_\xi(x_1, x_2)$ существует, она называется *плотностью совместного распределения* случайных величин ξ_1, ξ_2

Свойства совместной функции плотности

1) $f_{\xi}(x_1, x_2) \geq 0$

2) $\iint\limits_{R^2} f_{\xi}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$

<u>Замечание</u> Свойства (1)-(2) характеризуют класс плотностей, т.е. если функция $g(x)$ удовлетворяет свойствам (1)-(2), то она является совместной функцией плотности распределения для некоторой пары случайных величин

Если с.в. ξ_1, ξ_2 имеют совместное абсолютно непрерывное распределение, то

$$F_\xi(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} f_\xi(u_1, u_2) du_1 du_2$$

Теорема

Если с.в. ξ_1, ξ_2 имеют совместное абсолютно непрерывное распределение, то каждая компонента также имеет абсолютно непрерывное распределение, причём

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x_1, u_2) du_2, \quad f_{\xi_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u_1, x_2) du_1$$

Независимость случайных величин

С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ называются ***независимыми*** (в совокупности), если для любого набора борелевских множеств $B_1,\ldots,B_n \in \mathscr{B}(R)$ имеет место равенство

$$P(\xi_1 \in B_1,\ldots,\xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)\bullet\ldots\bullet P(\xi_n \in B_n)$$

С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ называются ***независимыми*** (в совокупности), если для любых $x_1,\ldots,x_n$

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1}(x_1)\bullet\ldots\bullet F_{\xi_n}(x_n), \quad где \quad x = (x_1,\ldots,x_n)'$$

Теорема

С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с абсолютно непрерывными распределениями независимы тогда и только тогда, когда плотность их совместного распределения существует и равна произведению частных функций плотности, т.е. для любых $x_1,\ldots,x_n$

$$f_{\xi}(x) = f_{\xi_1}(x_1) \bullet \ldots \bullet f_{\xi_n}(x_n), \quad где \quad x = (x_1,\ldots,x_n)'$$

Функции от двух случайных величин

Пусть с.в. ξ_1, ξ_2 имеют совместную плотность распределения $f_\xi(x_1, x_2)$. Тогда с.в. $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ имеет функцию распределения

$$F_\eta(x) = \iint\limits_{D_x = \{(u_1, u_2): g(u_1, u_2) \le x\}} f_\xi(u_1, u_2)\, du_1 du_2$$

Формула свёртки

Если с.в. ξ_1, ξ_2 независимы и абсолютно непрерывны, то их сумма имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-u)\, f_{\xi_2}(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(x-u)\, f_{\xi_1}(u)\,du$$

Математическое ожидание случайного вектора

$$E(\xi) = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)'$$

Ковариационная матрица случайного вектора

$$Cov(\xi) = E\left((\xi - E\xi)(\xi - E\xi)'\right)$$

Свойства ковариационной матрицы:

1) Симметричность

2) Неотрицательная определённость

Преобразования случайного вектора

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)'$

$\eta = A_1 \xi A_2 + A_3,$ где A_1, A_2, A_3 детерминированные матрицы соответствующих размеров

$$E(\eta) = A_1 (E\xi) A_2 + A_3,$$

$$E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, ..., x_n) f_\xi (x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

$$Cov(A\xi + b) = ACov(\xi) A'$$

Числовые характеристики зависимости: ковариация

$$cov(\xi_1,\xi_2)=E\big((\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)\big)$$

Свойства ковариации:

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1)$$

$$\operatorname{cov}(a\xi_1+b,\xi_2)=a\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$$

$$\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2,\xi_3)=\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_3)+\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_3)$$

$$\boxed{D(a\xi_1+b\xi_2)=a^2D(\xi_1)+b^2D(\xi_2)+2ab\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)}$$

если ξ_1,ξ_2 *независимы,* *то* $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$

Числовые характеристики: корреляция

$$corr(\xi_1, \xi_2) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\operatorname{var}(\xi_1)}\sqrt{\operatorname{var}(\xi_2)}}$$

Свойства корреляции:

$$-1 \le corr(\xi_1, \xi_2) \le 1$$

$$|corr(\xi_1, \xi_2)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, b \in R \quad \xi_1 = a\xi_2 + b$$

$$corr(a\xi_1 + b, c\xi_2 + d) = sign(ac) corr(\xi_1, \xi_2)$$

Моменты распределений

Пусть $E|\xi|^k < \infty$.

$E\xi^k$ называется (начальным) моментом порядка k или k-м моментом с.в. ξ

$E|\xi|^k$ называется абсолютным k-м моментом

$E(\xi - E\xi)^k$ называется k-м центральным моментом

$E|\xi - E\xi|^k$ называется абсолютным k-м центральным моментом

Условное распределение

дискретное совместное распределение

$$P(\xi_1 = a_i \mid \xi_2 = b_j) = \frac{P(\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j)}{P(\xi_2 = b_j)}$$

абсолютно непрерывное совместное распределение

$$f_{\xi_1|\xi_2=y}(x \mid y) = \frac{f_\xi(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}, \; f_{\xi_2}(y) > 0$$

Условное математическое ожидание

при фиксированном условии

$$E(\xi_1 \mid \xi_2 = b_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(\xi_1 = a_i \mid \xi_2 = b_j)$$

существует, если ряд сходится абсолютно

$$E(\xi_1 \mid \xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1|\xi_2=y}(x \mid y)\,dx,$$

существует, если интеграл сходится абсолютно

Условное математическое ожидание

$$E(\xi_1 \mid \xi_2)$$

случайная величина

Свойства

$$E(E(\xi_1 \mid \xi_2)) = E(\xi_1)$$

$$E(\xi_1 \mid \xi_2) = E(\xi_1) \text{ п.в.}, \quad \text{если} \quad \xi_1, \xi_2 \text{ независимы}$$

Сходимость почти наверное (почти всюду)

Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ Сходится к с.в. ξ почти наверное при $n \to \infty$, если

$$P\{\omega : \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\}) = 1 \quad \textit{обозначение} \quad \xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$$

Сходимость по вероятности

Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ Сходится к с.в. ξ По вероятности при $n \to \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}) \to 0, \quad n \to \infty \quad \textit{обозначение} \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

Сходимость по распределению (слабая)

Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ сходится к с.в. ξ по распределению,

если для любой точки непрерывности функции $F_\xi(x)$, то есть

для $\forall x$ такого, что $F_\xi(x+\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}F_\xi(x)$, справедливо:

$$F_{\xi_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F_\xi(x)$$

обозначение $\qquad \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема Слуцкого

Пусть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi,\quad \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c \quad (\xi_n, \eta_n, \xi : \Omega \to R, c \in R)$.

Тогда $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + c,\quad \xi_n \bullet \eta_n \xrightarrow{d} c \bullet \xi,$

$g(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} g(\xi, c),$ где g() – непрерывная функция

Неравенство Маркова

Пусть $E|\xi| < \infty$, тогда для любого x>0

$$P(|\xi| \geq x) \leq \frac{E|\xi|}{x}$$

Обобщённое неравенство Чебышёва

Пусть $g(x) \ge 0$ *не убывает*, тогда для любого x>0

$$P(\xi \ge x) \le \frac{g(\xi)}{g(x)}$$

Неравенство Чебышёва

Если $D(\xi)$ существует, то для любого x>0

$$P(|\xi - E\xi| \ge x) \le \frac{D(\xi)}{x^2}$$

Закон больших чисел

Последовательность $\xi_1, \xi_2 \ldots$ с конечным первым моментом удовлетворяет закону больших чисел (ЗБЧ), если

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

Закон больших чисел (в форме Чебышёва)

Любая последовательность попарно независимых одинаково распределённых с.в. $\xi_1, \xi_2 \ldots$ с конечным вторым моментом моментом удовлетворяет ЗБЧ, т.е.

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1, \quad n \to \infty$$

Закон больших чисел (в форме Маркова)

Последовательность $\xi_1, \xi_2 \ldots$ с конечными вторыми моментами

удовлетворяет ЗБЧ, если $D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}\right) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$

Закон больших чисел (в форме Хинчина)

Последовательность независимых одинаково распределённых

с.в. $\xi_1, \xi_2 \ldots$ с конечным первым моментом моментом удовлетворяет

ЗБЧ, т.е. $\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1, \quad n \to \infty$

Закон больших чисел (в форме Бернулли)

Пусть μ_n число успехов в n независимых испытаниях Бернулли

с вероятностью успеха p. Тогда

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty$$

Причём,

$$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Центральная предельная теорема (Ляпунова)

Пусть $\xi_1, \xi_2 \dots$ – н.о.р.с.в. , $E(\xi_i) = \mu$, $D(\xi_i) = \sigma^2$. Тогда

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} z, \quad n \to \infty,$$

где

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ – функция плотности стандартного нормального распределения

или

$$\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} z, \quad n \to \infty.$$