## 24. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции. Теорема на Нютон-Лайбниц.

Анотация: Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, диаметър на разбиване, риманова сума и риманов интеграл. Да се покаже, че всяка интегруема по Риман функция е ограничена.

Да се дефинират големи и малки суми на Дарбу. Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала, големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж).
Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват голяма сума на Дарбу $S$ и малка сума на Дарбу $s$ такива, че $S - s < \varepsilon$. Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман. Да се изброят (без доказателство) основните свойства на римановия интеграл. Като се приложи свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция приема всички стойности между максимума и минимума си, да се докаже, че ако $f$ е непрекъсната върху $[a, b]$, то съществува $c \in [a, b]$ за което

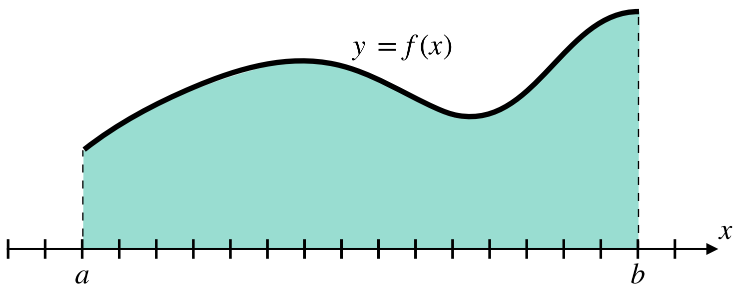
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = f(c)(b-a).$$

Да се докаже теоремата на Нютон-Лайбниц, т.е. ако $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, то за всяко $x \in [a, b]$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t = f(x)$$

да се покаже как теоремата се използва за изчисляване на определен интеграл.

Нека да разгледаме една неотрицателна функция $f(x)$, дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Нека тя е и ограничена в този интервал. Да начертаем нейната графика:




Искаме да намерим площта между графиката на функцията и абсцисната ос в интервала $[a, b]$. За целта първо трябва да дефинираме няколко понятия:

**Дефиниция (Разбиване на интервал).** Разбиване $P$ на интервал $[a, b]$ се нарича системата от точки $\{x_i\}_{i=0}^n$ такива, че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Това означава да разделим интервала $[a, b]$ на $n$ подинтервала:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b],$$

като дължина на интервала $i$ (бележим с $\Delta x_i$) е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

**Дефиниция (Диаметър на разбиване).** Дължината на най-дългия интервал $\delta_P = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ наричаме диаметър на разбиването $P$.

**Определение (Изфиняване на деление).** Казваме, че делението $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ е по-фино (по-грануларно) от делението $Q = \{y_i\}_{i=0}^n$ (или делението $P$ следва делението $Q$), ако всички точки $y_i$ са точки от делението $P$. Бележим $P \succ Q$ ($P$ има повече точки от $Q$).

**Определение (Набор от междинни точки).** Набор от точки отговарящ на разбиването $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ наричаме система от точки $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=0}^n$ такива, че $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, за $i = \overline{1, n}$. Простичко, набор от точки е да вземем от всеки подинтервал $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots,$ $[x_{n-1}, b]$ по една точка $\zeta_i$.

**Дефиниция (Риманова сума).** Римановата сума на функцията $f(x)$, съответстваща на разбиването $P$ на интервала $[a, b]$ и на избраните междинни точки $\{\zeta_i\}_{i=1}^n$, се определя от формулата: $R = R(f;\ P;\ \{\zeta_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$.

**Дефиниция (Риманов интеграл).** Стойността $I$ наричаме границата на римановите суми $R$ на функцията $f$ при $\delta_P \to 0$, ако $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\eta > 0$, такова че за всяко разбиване $P$ на интервала $[a, b]$ с $\delta_P < \eta$ е изпълнено $|R - I| < \varepsilon$ (при произволен избор на междинни точки). Всяка функция $f$, за която съществува такава граница на римановите суми в $[a, b]$, се нарича интегруема (по Риман) в $[a, b]$, а границата $I$ се нарича определен интеграл от $f$ в интервала $[a, b]$ и се бележи с $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$.

**Всяка интегруема по Риман функция е ограничена**

Нека функцията $f$ е интегруема по Риман в интервала $[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$. Ще докажем, че $f$ е ограничена в $[a, b]$.

Доказателство.

Избираме $\varepsilon = 1 > 0$. Тогава съществува $\eta > 0$, такова че за всяко разбиване $P$ на интервала $[a, b]$ с $\delta_P < \eta$ е изпълнено че $|R - I| < 1$, т.е. $I - 1 < R < I + 1$. От което следва, че множеството от римановите суми на функцията $f$ е ограничено когато $\delta_P < \eta$. Остана да докажем, че $f$ е ограничена в интервала $[a, b]$. Да ДОПУСНЕМ, че $f$ НЕ е ограничена в $[a, b]$. Тогава съществува поне един интервал от разбиването $P$, в който $f$ е неограничена – нека такъв интервал е например $[x_{j-1}, x_j]$. Нека в този интервал вземем редица от точки $\{\zeta_j^{(k)}\}_k : |f(\zeta_j^{(k)})| > k,\ \forall k \in [0, \infty]$, следователно $\lim_{k\to\infty} f(\zeta_j^{(k)}) = \infty$. Нека за останалите интервали фиксираме произволни междинни точки $\{\zeta_i\}_{i=1,\ i\neq j}^n : \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и тогава $\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ е с фиксирана стойност.

Добавяйки към тази сума събираемото $f(\zeta_j^{(k)})(x_j - x_{j-1})$ получаваме римановата сума на $f$ в $[a, b] : R(f;\ P;\ \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_j^{(k)}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n)$. Тогава е изпълнено, че

$$\lim_{x\to\infty} R(f;\ P;\ \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_j^{(k)}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n) = \lim_{x\to\infty} \Big(f(\zeta_j^{(k)})(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})\Big) = \infty$$

Това означава, че множеството от риманови суми на $f$ в $[a, b]$ е неограничено, включително когато $\delta_P < \eta$, което е противоречие с допускането. Следователно $f$ е ограничена в $[a, b]$.

$\square$

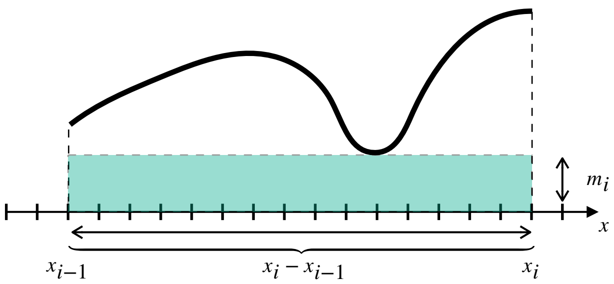
Сега да се върнем към нашата задача за намирането на лицето на фигурата. За целта ще вземем някакво разбиване $P$ на интервала $[a, b]$. Означаваме

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \text{и} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i+1}, x_i]\}$$

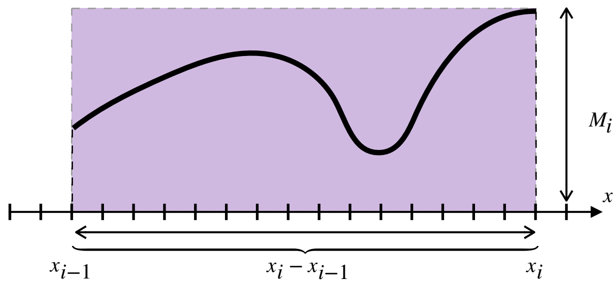
Тъй като функцията е ограничена върху $[a, b]$, то тя е ограничена и върху $[x_{i-1}, x_i]$ и следователно достига и инфимума и супремума си върху всеки от подинтервалите (Вайерщрас). Да образуваме сумите:

$$s = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{и} \qquad S = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Тези суми се наричат съответно малка и голяма сума на Дарбу. Всяка една от тези суми може да бъде изтълкувана геометрично. Всяко едно събираемо от малката или голямата сума на Дарбу може да се разглежда като лице на правоъгълник.



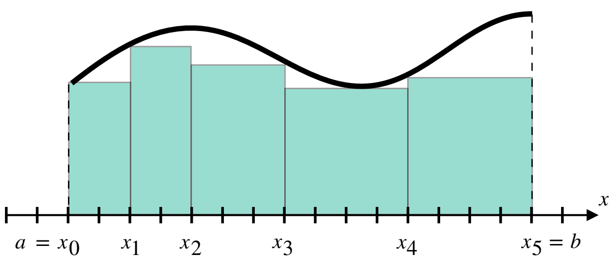
събираемо от малка сума на Дарбу

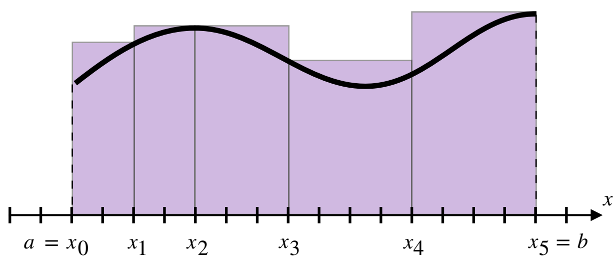


събираемо от голяма сума на Дарбу

Събираемо от малка сума на Дарбу е лице на правоъгълник, който се „вписва“ във фигурата, чието лице търсим и е с не по-голямо лице от нейното, а събираемо от голяма сума на Дарбу е лице на правоъгълник, който се „описва“ около фигурата, чието лице търсим и е с не по-малко лице от нейното.

Пример за разбиване с 5 точки:

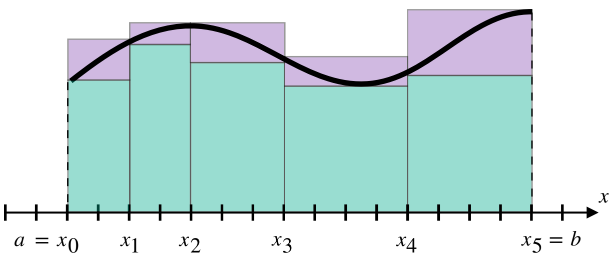


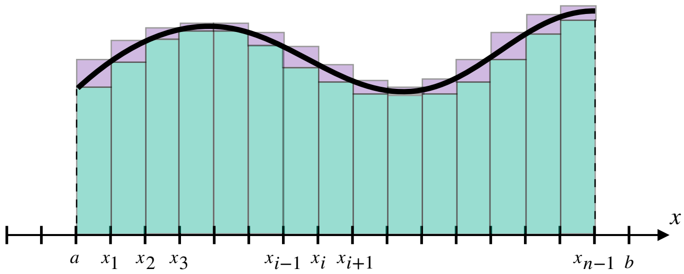

Ако работим с едно и също разбиване на интервала на подинтервали е ясно, че:

$$s = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S$$

Да се върнем на задачата за намирането на лицето $I$ на фигурата. Какво от тези размисли ни помага да се доближим до това лице? Ясно е, че ако $I$ съществува, то тогава големината на това лице би трябвало да се намира между големините на лицата на вписаната и описаната фигура, т.е. $s < I < S$.



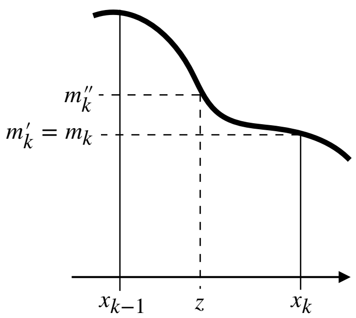

По какъв начин ни помага това? Изглежда логично при изфиняване на делението, малката сума на Дарбу (лицето на вписания многоъгълник) да не намалява, а голямата сума на Дарбу (лицето на описания многоъгълник) да не нараства и тъй като имаме неравенството $s \leq I \leq S$, то би трябвало да достигнем до $I$ при много малки подинтервалчета.

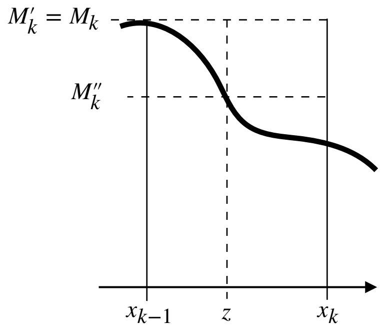



**Твърдение (Големите суми на Дарбу не нарастват, а малките суми на Дарбу не намаляват)**. Нека $P$ и $Q$ са две разбивания на даден затворен интервал. Ако $P \succ Q$, то $s_P \geq s_Q$ и $S_P \leq S_Q$.

Доказателство.

Да разгледаме какво се случва, когато добавим една точка $z$ в някакъв подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ от $Q$.




Първо се фокусираме върху малките суми на Дарбу.

Имаме $m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - z) + m_k(z - x_{k-1}) \leq m_k'(x_k - z) + m_k''(z - x_{k-1})$, където $m_k' = \inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$ и $m_k'' = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}$ и двете са не по-малки от $m_k$. По индукция относно броя на точките, които принадлежат на $P$, но не принадлежат на $Q$ стигаме до извода, че $s_P \geq s_Q$.

Аналогично и за големите суми на Дарбу ще имаме:
$M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k(x_k - z) + M_k(z - x_{k-1}) \geq M_k''(x_k - z) + M_k'(z - x_{k-1})$, където
$M_k' = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}$ и $M_k'' = \sup\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$. $\square$

**Дефиниция (Горен и долен интеграл).** Нека $\mathscr{P}$ е колекцията от всички възможни разбивания на интервала $[a, b]$. Горния интеграл на $f$ дефинираме с $U(f) = \inf\{U(f, P) : P \in \mathscr{P}\}$. По същия начин дефинираме долен интеграл на $f$ с $L(f) = \sup\{L(f, P) : P \in \mathscr{P}\}$

**Дефиниция (Интегруемост по Риман).** Ограничена функция $f$ дефинирана върху интервал $[a, b]$ е интегруема по Риман, ако $U(f) = L(f)$. В този случай дефинираме $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$ да е тази стойност. Тоест, $\int_a^b f = U(f) = L(f)$.

**Теорема (Критерии за интегруемост по Риман).** Дадена ограничена функция $f$ е интегруема върху $[a, b]$ по Риман тогава и само тогава, когато $\forall \varepsilon > 0$ съществува разбиване $P_\varepsilon$ на $[a, b]$ такова, че $\underbrace{U(f, P_\varepsilon)}_{S} - \underbrace{L(f, P_\varepsilon)}_{s} < \varepsilon$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$. Ако такова разбиване $P_\varepsilon$ съществува, то $U(f) - L(f) \leq$ $\leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Тъй като $\varepsilon$ е произволно, то $U(f) = L(f)$ ( * ) и следователно $f$ е интегруема по Риман.

Забележка: в ( * ) реферирахме една от основните теореми на анализа, а именно, че две реални числа $a$ и $b$ са равни, тогава и само тогава, когато за всяко реално число $\varepsilon > 0$ е изпълнено, че $|a - b| < \varepsilon$.

Трябва да докажем две твърдения

($\Rightarrow$) Ако $a = b$, то за всяко реално число $\varepsilon > 0$ е изпълнено, че $|a - b| < \varepsilon$, което е очевидно, тъй като $|a - b| = 0$.

($\Leftarrow$) Ако за всяко реално число $\varepsilon > 0$ е изпълнено, че $|a - b| < \varepsilon$, то $a = b$. За това твърдение ще използваме доказателство чрез допускане на обратното и стигане до противоречие. Заключението на твърдението е, че $a = b$ и за това допускаме, че $a \neq b$. Нека тогава $\varepsilon_0 = |a - b| > 0$. Имаме, че за всяко $\varepsilon > 0 : |a - b| < \varepsilon$ е изпълнено и следователно ще е изпълнено и за $\varepsilon_0$. Но твърденията $|a - b| < \varepsilon_0$ и $|a - b| = \varepsilon_0$ не могат да бъдат изпълнени едновременно, което води до противоречие с допускането, че $a \neq b$. Следователно $a = b$ и доказателството е завършено. $\square$

($\Rightarrow$) Нека $f$ е интегрувема по Риман. Тъй като $U(f)$ е най-голямата долна граница на големите суми на Дарбу, то знаем, че за дадено $\varepsilon > 0$ съществува разбиване $P_1$, за което е изпълнено $U(f, P_1) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, съществува рабиване $P_2$, за което $L(f, P_2) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Нека сега вземем $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ да е общото изфиняване. Занейки, че интегруема по Риман означава $U(f) = L(f)$ получаваме че:

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq U(f, P_1) - L(f, P_2) < \left(U(f) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

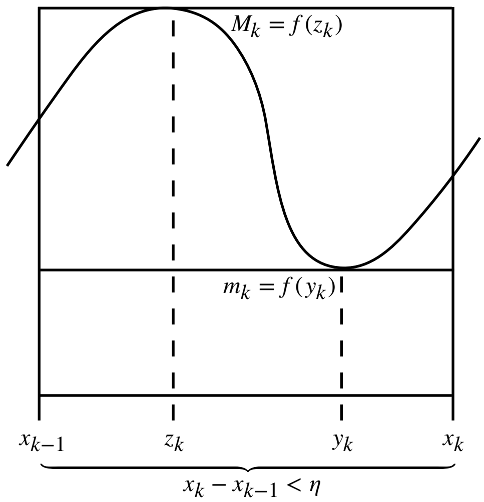
$\square$

Интегрируемостта е тясно свързана с концепцията за непрекъснатост. За да направим това наблюдение по-прецизно, нека $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е произволно разбиване на $[a, b]$ и дефинираме $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Тогава $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k-1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$, където $M_k$ и $m_k$ са съответно супремума и инфимума на функцията в интервала $[x_{k-1}, x_k]$. Възможността ни да контролираме размера на $U(f, P) - L(f, P)$ се крепи на разликата $M_k - m_k$, което може да интерпретираме като вариацията на $f$ над интервала $[x_{k-1}, x_k]$. Ограничаването на варияцията на $f$ над произволно малки интервали в $[a, b]$ е същото като да се каже, е $f$ е равномерно непрекъсната върху това множество.

**Всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман**

Доказателство.
Нека $f$ е непрекъсната в $[a, b]$. Тъй като $f$ е непрекъсната в компактно множество, то $f$ трябва да е ограничена. Поради същата причина е и равномерно непрекъсната. Това означава, че за дадено $\varepsilon > 0$ съществува $\eta > 0$, такова, че за $|x - y| < \eta$ гарантира, че $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$.

Нека $P$ е разбиване на $[a, b]$, където $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ е по-малко от $\eta$ за всеки подинтервал на $P$.




Разглеждаме произволен подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ от $P$. От Вайерщрас знаем, че супремума $M_k = f(z_k)$ се достига за някое $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и инфумума $m_k$ се достига за някоя точка $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Но това означава, че $|z_k - y_k| < \eta$ и следователно

$$M_k - m_k = f(z_k) - f(y_k) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Тогава, $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$, което означава, че $U(f, P) = L(f, P)$ и следователно $f$ е интегруема по Риман. □

**Основни свойства на Римановия интеграл**

1. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}\,x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}\,x$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$
4. Ако $c \in [a, b]$, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$
5. Ако $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \geq 0$
6. Ако $f(x) \leq g(x)$ за $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}\,x$
7. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}\,x$
8. За $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}\,x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$
9. Ако $f(x)$ е интегруема, то и $|f(x)|$ е интегруема с $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}\,x \geq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x\right|$
10. Ако $m \leq f(x) \leq M$ върху $[a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \leq M(b-a)$
11. Ако $(f_n)$ е редица от интегруеми функции върху $[a, b]$ и $f_n \to f$, тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$
12. Ако $g(x)$ е диференцируема, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}\,x$
13. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$
14. $\int_a^b f\left(g(x)\right)\mathrm{d}\,g(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}\,x$

**Теорема за средните стойности**

Ако функцията $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, тогава съществува точка $c \in [a, b]$, за която е изпълнено $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = f(c)(b-a)$.

Доказателство.

Тъй като $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, то от Вайерщрас знаем, че $m \leq f(x) \leq M$, където $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ и $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Освен това $f$ е и интегруема в $[a, b]$ от непрекъснатостта и следователно (свойство 10):

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x}{b-a} \leq M$$

Но всяка непрекъсната функция $f$ в $[a, b]$ приема всички стойности от минимума $m$ до максимума $M$ в този интервал (Болцано).

$\square$

**Теорема на Лайбниц-Нютон**

Нека $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, тогава за всяко $x \in [a, b]$ е изпълнено $\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t = f(x)$

Доказателство.

Искаме да докаже, че ако $f$ е непрекъсната в $[a, b]$ и $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t$, то $F(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : F'(x) = f(x)$.

От това, че $f$ е непрекъсната в $[a, b]$ следва, че $f$ е непрекъсната в $[a, x]$, $x \in [a, b]$ и от тук, че $f$ е интегруема в $[a, x]$. Нека $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t$ и нека вземем числото $h : x + h \in [a, b]$. Да разгледаме диферентното частно $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}\,t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}\,t + \int_x^a f(T)\mathrm{d}\,t}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}\,t}{h}.$$

От теоремата за средните стойности следва, че съществува $c \in [x, x+h]$, за което $f(c)h = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}\,t$. Следователно $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c)$. Понеже $c \in [x, x+h]$, то при $h \to 0 \Rightarrow c \to 0$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Слефователно $F'(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : F'(x) = f(x)$.

$\square$

**Използване на теоремата на Лайбниц-Нютон за изчисляване на определен интеграл**

Нека $f$ е непрекъсната в $[a, b]$ и $\Phi(x)$ е нейна примитивна в $[a, b]$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$ за всяко $x \in [a, b]$. Тогава е изпълнено, че $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Доказателство.

Нека $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t$. От теоремата на Лайбниц-Нютон следва, че $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тогава $F'(x) = \Phi'(x)$, $\forall x \in [a, b]$ и следователно $F(x) = \Phi(x) + C$, $C = const$.

$$x = a \Rightarrow 0 = \int_a^a f(t)\mathrm{d}\, t = F(a) = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\,\Phi(a)$$

$$x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}\, t = F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$\square$

**Пример за прилагане на Формулата на Лайбниц-Нютон**

Искаме да решим интеграла $\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}\,x$. Функцията $3x^2$ е непрекъсната в $[1, 2]$ и примитивната и функция е $\Phi(x) = x^3$. Следователно използвайки формулата на Лайбниц-Нютон получаваме, че $\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}\,x = \Phi(2) - \Phi(1) = 8 - 1 = 7$.