23. Теорема на Ферма. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър

Анотация: Необходимо е да се докажат следните, формулирани общо, теореми: Нека f е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b). Да се докаже, че:

а) ако $f(a) = f(b)$, то съществува такова $c \in (a, b)$, че $f'(c) = 0$ (**Рол**);

б) съществува такова $c \in (a, b)$, че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (**Лагранж**);

в) ако g е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b), $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$, то съществува такова $c \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ (**Коши**)

За доказателството на теоремата на Рол да се използва (без доказателство) теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал достига своя максимум и минимум.
Необходимо е още да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж.

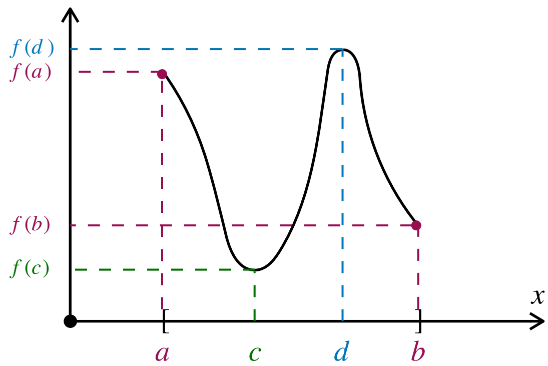
Дефиниция (Производна)

Производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 наричаме границата $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Аналогично може да запишем производната $f'(x)$ като $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, където сме положили $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Теорема на Вайерщрас

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a, b]$, то съществуват абсолютен максимум и абсолютен минимум на f върху $[a, b]$. Тоест $\exists c, d \in [a, b] : f(c) \leq f(x) \leq f(d), \forall x \in [a, b]$.



Теорема на Ферма (Теорема за вътрешния екстремум)

Ако f е диференцируема в отворения интервал (a, b) и достига максимум в някаква точка $c \in (a, b)$ (т.е., $f(c) \geq f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$), то $f'(c) = 0$. Дуално, твърдението е вярно и когато $f(c)$ е мимнимум.

Доказателство. Тъй като c е в отворения интервал (a, b), може да построим две редици (x_n) и (y_n), които схождат към c и изпълняват неравенствата $x_n < c < y_n$ (т.е. x_n клони към c отляво, а y_n клони към c отдясно), за всяко $n \in \mathbb{N}$. От това, че $f(c)$ е максимум следва, че $f(y_n) - f(c) \leq 0$ за всяко n и следователно $f'(c) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0$. Аналогично,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0$ за всяко x_n, тъй като и числителят и знаменателят са отрицателни. Следователно $f'(c) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0$. Единствената възможност, при която са удовлетворени и двете неравенства за $f'(c)$ е когато $f'(c) = 0$, което искахме да докажем.

$\square$

Теорема на Рол
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува точка $c \in (a, b)$, където $f'(c) = 0$.

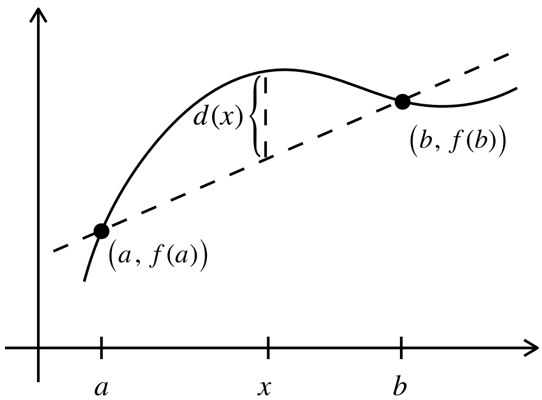
Доказателство. Тъй като f е непрекъсната в компактно множество, то f има максимум и минимум в това множество (от теоремата на Вайерщрас). Ако И максимума И минимума са в крайна точка на интервала, то тогава със сигурност f е константа и $f'(x) = 0$ за всяко x от интервала (a, b). В този случай може да си изберем c да е която и да е точка от (a, b). От друга страна, ако поне максимума ИЛИ минимума е в някаква точка c вътрешна за интервала (a, b), то от теоремата за вътрешния екстремум (Ферма) следва, че $f'(c) = 0$.

$\square$

Теорема на Лагранж
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава съществува $c \in (a, b)$, такова, че $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказателство. Забележете, че теоремата на Лагранж се редуцира до теоремата на Рол, в случая когато $f(a) = f(b)$. Стратегията на доказателството е да редуцираме още по-генерално твърдение до теоремата на Лагранж.

Уравнението на правата през $\big(a, f(a)\big)$ и $\big(b, f(b)\big)$ е $y = \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a)$.



Искаме да разгледаме разстоянието от тази права до $f(x)$. За тази цел нека

$$d(x) = f(x) - y = f(x) - \left[\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a)\right]$$

Забележете, че d е непрекъсната в $[a, b]$, диференцируема върху (a, b) и изпълнява условието $d(a) = 0 = d(b)$. Следователно, от теоремата на Рол, съществува $c \in (a, b)$, за което $d'(c) = 0$. Но $d'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ откъдето $0 = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (Рол).

$\square$

Теорема на Коши

Ако f и g са непрекъснати в интервала $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b), то съществува точка $c \in (a, b)$, за която $\big[f(b) - f(a)\big]g'(c) = \big[g(b) - g(a)\big]f'(c)$.

Ако g' никога не се нулира в (a, b), то твърдението може да се запише като

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказателство. Резултатът следва след директно прилагане на теоремата на Лагранж за

$$h(x) = \big[f(b) - f(a)\big]g(x) - \big[g(b) - g(a)\big]f(x).$$

$h(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b) и следователно (от Лагранж) съществува $c \in (a, b)$, за което $h'(c) = \dfrac{h(b) - h(a)}{b - a} \quad (*)$

Какво всъщност е това? Нека проверим.

$$\begin{aligned} h(b) &= \big[f(b) - f(a)\big]g(b) - \big[g(b) - g(a)\big]f(b) \\ h(a) &= \big[f(b) - f(a)\big]g(a) - \big[g(b) - g(a)\big]f(a) \end{aligned}$$

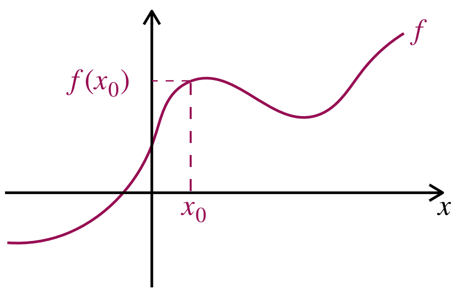
Заместваме с тези резултати в $(*)$ и полуаваме, че

$$\begin{aligned} h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} &= \frac{\big[f(b) - f(a)\big]\big(g(b) - g(a)\big) - \big[g(b) - g(a)\big]\big(f(b) - f(a)\big)}{b - a} = \\ &= \frac{\cancel{f(b)g(b)} - \cancel{f(b)g(a)} - \cancel{f(a)g(b)} + \cancel{f(a)g(a)} - \cancel{f(b)g(b)} + \cancel{f(a)g(b)} + \cancel{f(b)g(a)} - \cancel{g(a)g(a)}}{b - a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Но $h'(c) = \big[f(b) - f(a)\big]g'(c) - \big[g(b) - g(a)\big]f'(c)$ и това приравнено на 0 дава точно търсения резултат. $\square$

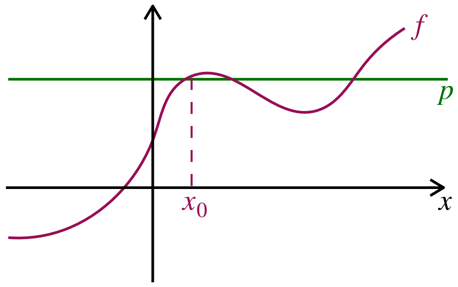
Формула на Тейлър

Идеята на формулата на Тейлър е следната: за дадена функция $f(x)$, диференцируема достатъчен брой пъти в точка x_0, вътрешна за дефиниционната ѝ област, да се намери полином от степен n, който „приближава добре“ функцията $f(x)$ в малка околност на x_0.



Нека имаме някаква произволна функция f, която е достатъчно на брой пъти диференцируема в точка x_0 от дефиниционната област на f. Да допуснем, че знаем $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f^{(3)}(x_0)$, $\cdots$, тоест това за нас са константи, които знаем. Искаме да апроксимираме f в околност на x_0 с полином от n-та степен.

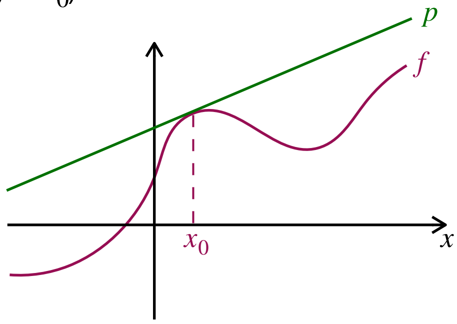
Първо ще вземем възможно най-грубото приближение – полином от нулева степен. След като ще имаме единствен член, който е константа, то поне да го вземем да е равен на f в точката x_0, за да сме сигурни, че поне там сме апроксимирали правилно (и ако извадим късмет и на още няколко други места). Тоест искаме $p(x_0) = f(x_0)$, където p е полиномът, който искаме да построим. Нека тогава вземем $p(x) = f(x_0) = \text{const}$.



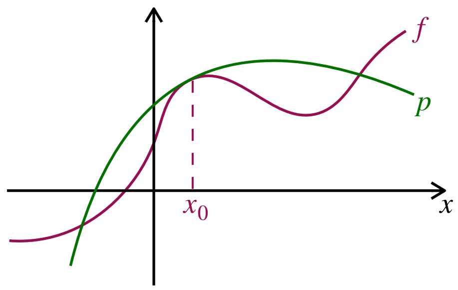
Това е най-доброто, което може да направим с полином от нулева степен в общия случай за f, която може да е всякаква. Но това е твърде ужасно приближение.

Нека добавим още ограничения. Искаме още $p'(x_0) = f'(x_0)$. Тогава може да вземем $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Проверяваме, че са в сила $p(x_0) = f(x_0)$ и $p'(x_0) = f'(x_0)$.

Сега, p освен, че е равна на f в x_0 има и същия наклон като f в x_0. Тоест ще изглежда по подобен начин (тангента към f в x_0):



Постигнахме по-добра апроксиация, но все още е твърде ужасна. Може би ще се справим по-добре, ако подсигурим равенство и на втората производна на p с тази на f. Искаме $p''(x_0) = f''(x_0)$ като запазим равенствата $p(x_0) = f(x_0)$ и $p'(x_0) = f'(x_0)$. Тогава нека $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$.



Ако продължим по този начин ще приближим f в някаква околност на x_0 с p_n, където $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, което може да се разглежда като парциална сума на

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

p_n наричаме полином на Тейлър, q наричаме развиване в ред на Тейлър, а в частния случай при $x_0 = 0$ получаваме съответно полином и развиване в ред на Маклорен.

За да се оцени колко се различават стоиностите на полиномите на Тейлър в дадена точка x от стойността на функцията в същата точка, се въвежда величината $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, наречена остатъчен член. Тогава може да запишем формулата $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$, наричана обикновено формула на Тейлър. Очевидно остатъчният член $R_n(x)$ представлява грешката във формулата $f(x) \approx p_n(x)$. Ето защо е необходимо да се изледва и оцени остатъчния член $R_n(x)$.

Нека да предположим, че функцията f притежава производни до $(n+1)$-ви ред включително в околност на точката x_0. Да фиксираме точка x от тази околност и да разгледаме в затворения интервал, определен от точките x_0 и x, помощната функция

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k \right) \\
&= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n .
\end{aligned}$$

Това е същата формула като тази за R_n, но константата x_0 е заместена с променливата t. Оттук получаваме $\varphi(x_0) = R_n(x)$ и $\varphi(x) = 0$.

Диференцирайки функцията $\varphi(t)$, имаме

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = -f'(t) &- \left(\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - f'(t) \right) \\
&- \left(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right) \\
&- \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x - t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 \right) \\
&\ldots \\
&- \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

След като съкратим всички двойки събираеми с противоположни знаци, получаваме

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Да положим $\psi(t) = (x-t)^p$, където p е естествено число, което ще изберем по-късно. За функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ прилагаме теоремата на Коши за интервала $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$, в зависимост от положението на x спрямо x_0) и виждаме, че в интервала (x_0, x) (или съответно (x, x_0)) съществува точка c, за която е изпълнено

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)},$$

откъдето, използвайки стойностите за $\varphi(x_0)$ и $\varphi(x)$ и израза за $\varphi'(t)$, намерени по-горе, получаваме

$$R_n(x) = \varphi(x_0) = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\big(\psi(x_0) - \psi(x)\big) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n . \frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n . \frac{(x-x_0)^p - (x-x)^p}{((x-c)^p)'} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}(x-x_0)^p$$

Тази обща формула за остатъчния член се нарича формула на Шлемилх и Рош.

При $p = n+1$ получаваме формула на Лагранж за остатъчния член.

$\square$