Задача 7. В урна има 5 бели, 7 зелени и 3 червени топки. На всеки опит вадим от урната едновременно две топки, записваме цвета им, след което връщаме топките обратно в урната. Дефинираме събитие

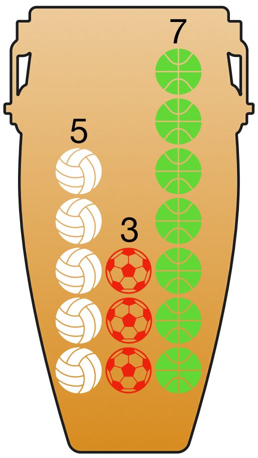
$$A = \{\text{Изтеглени са една бяла и една зелена топка}\}.$$

а) Да се определи вероятността на A при извършване на един опит.

б) Нека X е броят на сбъдванията на събитието A при провеждане на 5 опита, да се пресметнат: $\mathbb{P}(X=3)$, математическото очакване $\mathbb{E}X$ и дисперсията $\mathbb{D}X$.

в) Нека белите топки са 5, зелените 7, но броят на червените е Z. Каква трябва да бъде стойността на Z, така че средният брой на неуспешните опити до първото сбъдване на събитието A да бъде точно пет? Отговорът да се обоснове.

Решение.



а) Понятието едновременно е много трудно издържано в статистиката. В случая ще го разбием на две събития: $W = \{\text{Първо сме изтеглили бяла и после зелена топка}\}$ и $G = \{\text{Първо сме изтеглили зелена и после бяла топка}\}$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(W \cup G) = \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(G) = \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{3}.$$

Естествено може да подходим и директно по следния начин:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{всички благоприятни двойки топки}}{\text{всички възможни двойки топки}} = \frac{|W| \times |G|}{\binom{15}{2}} = \frac{5 \times 7}{\frac{15 \times 14}{2}} = \frac{1}{3}.$$

б) Събитието A вече може да го разглеждаме като бернулиев експеримент с вероятност за успех $p = \dfrac{1}{3}$ и съответно вероятност за неуспех $q = 1 - p = \dfrac{2}{3}$. Нека дефинираме събитието $A_i = \{\text{Изтеглени са една бяла и една зелена топка на } i\text{-тото теглене}\}$.

$X = \{\text{броя на случванията на } A \text{ при проведени 5 опита}\}$. Тъй като X брой успехите на даден бернулиев експеримент, то X е биномно разпределена случайна величина и $X \sim Bin\left(n = 5, p = \dfrac{1}{3}\right)$.

Пораждащата функция на X е

$$g_X(s) = g_{\sum_{i=1}^5 A_i}(s) \overset{A_i \perp\!\!\!\perp A_j}{\underset{i\neq j}{=}} \prod_{i=1}^{5} \left(s^0(1-p) + s^1 p\right) = (1-p+sp)^5$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{g_X^{(3)}(0)}{3!} = \frac{(1-p+ps)^5}{3!} = \frac{\left(5(1-p+ps)^4 p\right)^{(2)}}{3!} = \frac{\left(5\times 4(1-p+ps)^3 \times p^2\right)}{3!} =$$
$$= \frac{\left(5\times 4\times 3(1-p+ps)^2 \times p^3\right)}{3!}\Bigg|_{s=0} = \binom{5}{3} p^3 q^2 = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{40}{243}}.$$

$$\mathbb{E}X = g_X'(1) = 5(1-p+sp)^4 p\Big|_{s=1} = 5p = \mathbf{\frac{5}{3}}.$$

$$\mathbb{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 = g_X''(1) + \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$$
$$= \left(5(1-p+sp)^4 p\right)'\Big|_{s=1} + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 5 \times 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{10}{9}}.$$

в) Нека $Y = \{$брой неуспешни опити до първото сбъдване на събитието $A\}$. Тъй като Y брой неуспехите до настъпването на успех на бернулиевото събитие A, то Y е геометрично разпределена случайна величина и $Y \sim Ge\left(p = \frac{1}{3}\right)$.

$$g_Y(s) = \mathbb{E}s^Y = \sum_{k=0}^{\infty} s^k (1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} \left(s(1-p)\right)^k \overset{|s(1-p)|<1}{=} \frac{p}{1-s(1-p)} = \frac{p}{1-s-ps}.$$

$$\mathbb{E}Y = g_Y'(1) = \frac{p'(1-s+ps) - p(1-s+ps)'}{(1-s+ps)^2}\Bigg|_{s=1} = \frac{-p(-1+p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

Искаме $\mathbb{E}Y = 5 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$.

Но $p = \mathbb{P}(A) = \dfrac{5\times 7}{\binom{12+Z}{2}} = \dfrac{5\times 7}{\frac{(12+z)(11+Z)}{2}} = \dfrac{70}{(12+Z)(11+Z)}$.

$\dfrac{70}{132+23Z+Z^2} = \dfrac{1}{6}$; $\quad 420 = 132 + 23Z + Z^2 \quad$; $\quad Z^2 + 23Z + 288 = 0 \quad$; $D = 23^2 + 4 \times 288 = 529 + 1151 = 1681 = 41^2$. Следователно

$z_{1,2} = \dfrac{-23 \pm 1}{2}$, т.е. $z_1 = -\dfrac{64}{2} = -32$ и $z_2 = \dfrac{18}{2} = 9$. Но Z трябва да е естествено число, тъй като репрезентира бройка. Следователно $\mathbf{Z = 9}$.