27. Дискретни разпределения. Биномно, геометрично и поасоново разпределение. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия. Равномерно непрекъснато разпределение.

Анотация: На изпита комисията дава две разпределения, върху които се развива въпросът. Дефиниция на дискретно вероятностно разпределение на случайна величина. Свойства на вероятностите (неотрицателност и нормираност, монотонност и адитивност). За всяко от дадените две разпределения да се посочи пример, при който то възниква. Да се пресметне математическото очакване и дисперсията на всяко от тези разпределения. При пресмятанията може да се използва пораждаща функция или пораждаща моментите функция, но тя трябва да се дефинира и да се покажат основните ѝ свойства (без доказателство).

Свойства на ветоятностите (неотрицателност и нормираност, монотонност и адитивност)

Дефиниция (Вероятност). Нека $\mathscr{A}$ е σ-алгебра (затворено множество относно операциите **допълнение** и **обединение**, а като следствие от законите на де Морган и относно сечение) върху множество от елементарни събития Ω. Тогава нормираното изображение $\mathbb{P}:\mathscr{A}\to[0,1]$ се нарича вероятност, ако са изпълнени следните три условия:

1) $\mathbb{P}(\Omega)=1$;
2) Ако $A\in\mathscr{A}$ и $A^c=\Omega\backslash A$, то $\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$;
3) Ако $A_1, A_2, \ldots\in\mathscr{A}$ и $A_i\cap A_j=\emptyset$ за $i\neq j$, то $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$ (т.е. ако имаме редица от непресичащи се (дизюнктни) събития, то вероятността поне едно от тях да се случи (операцията „или“) е равна на сумата от индивидуалните им вероятности. В този смисъл вероятността е мярка, тъй като това е най-класическото свойство на мярката).

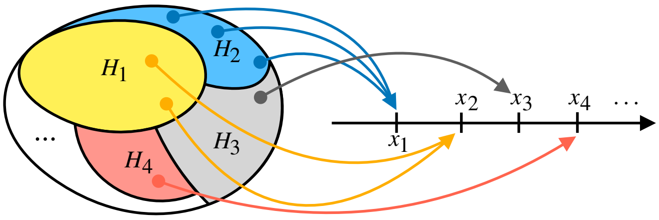
Следствия (Свойства). Нека $\mathbb{P}:\mathscr{A}\to[0,\,1]$ е вероятност. Тогава са изпълнени следните свойства ($A,\,B\in\mathscr{A}$):

а) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$
б) $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A^c\cap B),\ \forall A\in\mathscr{A}$
в) Ако $A\subseteq B$, то $\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$ (монотонност)
г) $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ (принцип за включване и изключване за две събития)
д) Ако $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$ (непрекъснатост)
е) Ако имаме събитията $A_1, A_2, \ldots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$. Това свойство е изпълнено и за всяко крайно обединение на събития. Равенство се достига при дизюнктни събития (3) от дефиницията за вероятност).

Дефиниция (Случайна величина). Нека $V=(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Тогава $X:\Omega\to\mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}\left((a,b)\right)\in\mathscr{A}$, където $X^{-1}(\underset{B\subseteq\mathbb{R}}{B})=\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\in B\}$. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността X да е между a и b за всяко a и b.

Всички елементарни събития, към които, като приложим изображението X отиват в интервала (a,b) са множеството B.

Дефиниция (Дискретна случайна величина). Отново имаме вероятностното пространство V и пълна група от събития $\mathscr{H}$ във V. Тогава изображението $X = \sum_{i=1}^{n \text{ или } \infty} x_i 1_{H_i}$ се нарича дискретна случайна величина, където H_i са най-много „изброимо много“ на брой непресичащи се събития от $\mathscr{H}$, а 1_{H_i} е съответната им индикаторна функция. Очевидно и x_i ще са най-много „изброимо много“ реални числа, за които $H_i = \{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\}$.



Дефиниция (Разпределение на дискретна случайна величина). Нека $X = \sum_i x_i 1_{H_i}$ е дискретна случайна величина (ДСВ). Тогава таблицата

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

където $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i = \mathbb{P}(H_i)$ и $\sum_i p_i = 1$ се нарича разпределение на X.

Пораждаща функция

Пораждащата функция е функция, която е дефинирана за целочислена, неотрицателна и дискретна случайна величина $X \in \mathbb{N}_0$.

Пораждащата функция прилича на торбичка, в която сме събрали всички индивидуални вероятности за $X = k$, както и друга информация, като сме я компресирали (кодирали) по начин, по който да може да изваждаме от торбичката само това което ни е обходимо – като за всяка информация ще заплатим с цената на извършването на някаква операция.

Дефиниция (Пораждаща функция). Нека $X \in \mathbb{N}_0$ е ДСВ. Тогава функцията $g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$, за $|s| < 1$, се нарича пораждаща функция на X.

Основни свойства на пораждащата функция

а) $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$

б) $\mathbb{E}X = g'_X(1)$

в) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2$

Тук е интересно да се покаже защо $\mathbb{E}X^2 = g''_X(1) + g'_X(1)$. Това е така, тъй като $g'_X(1) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$, а $g''_X(1) = \sum_k k(k-1)\mathbb{P}(X = k)$ и следователно като ги съберем ще получим $g'_X(1) + g''_X(1) = \sum_k k^2\mathbb{P}(X = k)$, което е точно втората централна точка $\mathbb{E}X^2$ на ДСВ X.

$\square$

г) Ако X и Y са независими ДСВ ($X \perp\!\!\!\perp Y$), то $g_{X+Y}(s) = g_X(s) \times g_Y(s)$
Доказателство.

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^{j+i}\mathbb{P}(X = j \cap Y = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s^i\mathbb{P}(Y = i)\sum_{j=0}^{\infty} s^j\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{E}s^Y\mathbb{E}s^X = g_Y(s)g_X(s)$$

$\square$

Фунцкия на моментите
Дуално на пораждащата функция, но обхващаща и непрекъснати случайни величини (НСВ) имаме функция на моментите. Това е по-силна кодировка, която може да използваме и за НСВ.

Дефиниция (Функция на моментите). Нека X е СВ. Ако $\mathbb{E}e^{tX}$ съществува за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и някое $\varepsilon > 0$, то $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$ е функция на моментите на X.

Тук искаме $\mathbb{E}e^{tX}$ да съществува, защото при безкраен брой стойности $X = x_i$ тази сума няма да схожда и ще отива към безкрайност.

Но $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_X(x)\mathrm{d}\,x$ може да съществува само за някаква част от t, но е достатъчно да съществува за някаква малка околност на нулата, т.е. за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, за да може да го наречем функция на моментите (това изискване ще ни даде и възможността да развием тази функция в ред на Маклорен).

Основни свойства на функция на моментите
Развиваме e^{tX} в ред на Маклорен и получаваме, че $e^{tX} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kX^k}{k!} = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2} + \ldots,$
но ние знаем, че математическото очакване $\mathbb{E}$ е линеен функционал и като заместим във формулата за $M_X(t)$ ще получим, че

$$M_X(t) = 1 + t\mathbb{E}X + \frac{t^2\mathbb{E}X^2}{2} + \ldots + \frac{t^k\mathbb{E}X^k}{k!} + \ldots$$

От тук директно следват основните свойства на функцията на моментите на СВ X.

а) $M_X(0) = 1$
б) $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}X^k$, за $k \geq 1$
в) Ако X и Y са независими НСВ ($X \perp\!\!\!\perp Y$) и M_X и M_Y са добре дефинирани за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{t(X+Y)} = \mathbb{E}e^{tX}e^{tY} \overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}e^{tX}\mathbb{E}e^{tY} = M_X(t)M_Y(t)$
г) Ако $M_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_X(t)$, за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, където $(X_n)_n$ е редица от случайни величини, то $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$;
д) $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$ (ако две СВ имат еднакви разпределения, то имат и еднакви функции на моментите и обратно)

Дискретни разпределения

а) Биномно разпределение

Случайната величина X е биномно разпределена, ако $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, където X_i са бернулиево разпределени случайни величини, т.е. X_i са случайни експерименти с еднаква вероятност за успех p.

X отразява броя успехи измежду n еднакви експеримента. Бележим $X \sim Bin(n, p)$.

$$g_X(s) = g_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \left(s^0(1-p) + s^1 p\right) = (1-p+ps)^n$$

Сега лесно се пресмята:

$$\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{\partial}{\partial s}(1-p+ps)^n\Big|_{s=1} = n(1-p+ps)^{n-1}p\Big|_{s=1} = np$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 = \frac{\partial}{\partial s}\left(n(1-p+ps)^{n-1}p\right) + np - (np)^2 =$$

$$= np(n-1)(1-p+ps)^{n-2}p + np - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$$

$$= p^2(\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2}) + np = np(1-p)$$

⊕ Моделираме вероятността определен брой транзакции с кредитни карти да са измамни чрез биномно разпределение. Например, да предположим, че е известно, че 2% от всички транзакции с кредитни карти в определен регион са измамни. Ако има 50 транзакции на ден в този регион, то може да моделираме с биномно разпределена СВ $X \in Bin(50,\, 0.02)$ броя на измамните транзакции (тук неинтуитивно считаме измамна операция за успех). По този начин, например, ще може да калкулираме вероятността да имаме повече от k измамни транзакции за деня.

б) Геометрично разпределение

Случайната величина X е геометрично разпределена, ако

$X = \min\left\{ i \geq 1 \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} X_i = 1 \right\} - 1$, където X_i са бернулиево разпределени СВ с вероятност за успех p. Тоест най-малкото k, за което сумата $\sum_{i=1}^{k} X_i$ става единица, като от нея изваждаме тази единица, за да извадим последната стъпка, която е успешната. Тази случайна величина моделира броя неуспехи преди настъпването на успех. Бележим $X \sim Ge(p)$.

Чисто комбинаторно получаваме, че $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$. Следователно

$$g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} s^k(1-p)^k \overset{|(1-p)s|<1}{=} \frac{p}{1-(1-p)s} = \frac{p}{1-s+ps}$$

Сега вече лесно се вижда, че $\mathbb{E}X = g_X'(1) = \dfrac{-p(-1+p)}{(1-s+ps)^2}\Big|_{s=1} = \dfrac{1-p}{p}$ и

$$\mathbb{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p(1-p)}{(1-s+ps)^2}\right)\Bigg|_{s=1} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} =$$

$$= \frac{-p(1-p)2(1-s+ps)(-1+p)}{(1-s+ps)^4}\Bigg|_{s=1} + \frac{(1-p)p}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$\oplus$ Вероятността батер (от спорта бейсбол) да направи успешен удар преди три удара може да се оцени вероятностно чрез $\mathbb{P}(X \leq 3)$, където със случайната величина $X \in Ge(p)$ сме моделирали броя пропуснати удари (неуспехи) преди удар (успех).

Геометричното разпределение има интересното свойство „безпаметност". Тоест $\forall n \geq 0$ и $k \geq 0$: $\mathbb{P}(X \geq m + k \,|\, X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq k) = (1-p)^k$. Тоест ако батера пропусне първия удар, то вероятността да удари втория път е грубо казано същата, като вероятността да е ударил първия път. Наличието на някаква информация за отминало събитие не променя модела.

в) Отрицателно биномно разпределение

Случайната величина X е геометрично разпределена, ако

$$X = \min\left\{ i \geq 1 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} X_i = r \right\} - r$$

Това разпределение се конструира от няколко геометрично разпределени случайни величини. Т.е. тук ще моделираме броя на неуспехите, но не до първия успех, а до r-тия успех. Бележим $X \sim NB(r, p)$.

$X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$, където Y_i са геометрично разпределени СВ с вероятност p, т.е. $Y_i \in Ge(p)$ и независими – $Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j$, за $i \neq j$.

$$g_X(s) = \prod_{i=1}^{r} g_{Y_i}(s) \underset{\text{незав.}}{\overset{\perp\!\!\!\perp}{=}} \prod_{i=1}^{r} \frac{p}{1-qs} = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{r} \underbrace{Y_j}_{\substack{\text{геом.}\\ \text{незав.}}} = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}Y_j = r\frac{q}{p}; \qquad \mathbb{D}X = \mathbb{D}\sum_{j=1}^{r} Y_j \overset{\text{незав.}}{=} \sum_{j=1}^{r} \mathbb{D}Y_j = r \times \frac{q}{p^2};$$

г) Поасоново разпределение

Нека $\lambda > 0$. Казваме, че X е поасоново разпределена случайна величина с параметър λ и бележим с $X \sim Pois(\lambda)$, ако $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k \geq 0$. Забележете, че тук дефинираме разпределението като заявяваме каква е вероятността за всеки възможен елементарен изход.

$$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \times \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\substack{\text{развитие в ред}\\ \text{на Тейлър на}\\ \text{експонентата}}} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$ тази проверка ни показва че сме дефинирали добре разпределението.

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s}$$

$$\mathbb{E}X = g'_X(1) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda s}\Big|_{s=1} = \lambda; \qquad g''_X(1) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda s}\right) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda s}\Big|_{s=1} = \lambda^2$$

$$\mathbb{D}X = g'_X(1) + g''_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda = \mathbb{E}X.$$

⊕ Брой постъпили заявки към сървър за 1-ца време ;
⊕ Брой катастрофи за 1-ца време на дадена територия/кръстовище ;
⊕ Брой голове за 1-ца време;
⊕ Брой звезди в някакъв небесен регион (тъй като региона е фиксиран в момента, в който погледа ни пада върху него, а звездите се движат, то тук отново имаме скрит параметърът време).

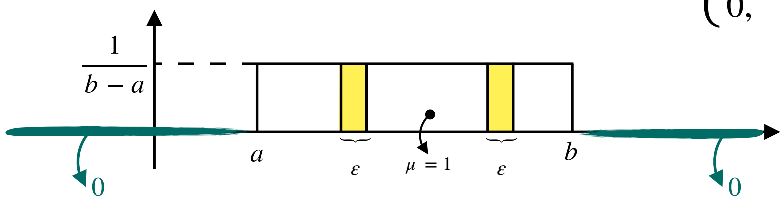
Обобщрно: броя на събития, които може да допуснем, че се случват непрекъснато във времето са поасоново разпределени.

Теорема на Поасон. Нека p_n е редица от реални числа от интервала $[0,\ 1]$, такива че редицата np_n схожда до крайна граница λ. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Това напрактика означава, че с поасоновото разпределение може много добре да приближаваме биномното разпределение, когато имаме много на брой опити.

Непрекъснати разпределения

а) Равномерно разпределение

За $a,\, b \in \mathbb{R}$ с $a < b$ казваме, че $X \in Unif(a, b)$, ако $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$.



Удобно е да нормализираме равномерното разпределение като въведем друга случайна величина Y, по следния начин: $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$. Тогава $Y \in Unif(0,\ 1)$. Сега, след като сме направили това нормализиране, ще намерим математическото очакване и дисперсията на СВ Y и чрез тях ще се върнем обратно, за да намерим тези на X.

Нека $g(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$, тогава $g(x) \uparrow$ е растяща функция и следователно $h(y) = g^{-1}(y) = (b-a)y + a$. От теоремата за смяна на променливите, следва, че

$$f_Y(y) = f_X\big(h(y)\big) \times h'(y) = f_X\Big(\underbrace{\overbrace{(b-a)y+a}^{=x}}_{y\in(0,\ 1)\Leftrightarrow x\in(a,\ b)}\Big)(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1, y \in (0{,}1) \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad y \notin (0{,}1) \end{cases}$$

Сега вече, имайки плътностната функция на Y може да изразим:

$\mathbb{E}Y = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{E}(X-a) = \dfrac{1}{b-a}(\mathbb{E}X - a)$ и $\mathbb{D}Y = \left(\dfrac{1}{b-a}\right)^2 \mathbb{D}(X-a) = \dfrac{\mathbb{D}X}{(b-a)^2}$, но

$\mathbb{E}Y = \displaystyle\int_0^1 y \times 1\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2}$ и

$$\mathbb{D}Y = \int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \times 1 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \mathbb{D}X = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

⊕ Вероятността снежинка или капка дъжд да падне в даден участък от региона, в който вали е равномерно разпределена.

b) Нормално разпределение

Казваме, че $X \in \mathcal{N}orm(\mu, \sigma^2)$ или $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ако

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Тук както при поасоновото разпределение на ДСВ дефинираме СВ на обратно като първо дефинираме плътностната функция (при поасоновото първо дефинирахме функцията на разпределение). Това което се изисква е да докажем, че тя е коректно дефинирана. За целта пресмятаме интеграла $F_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ числено и се използват таблици за приближението му, тъй като няма явен вид.

Ако $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $Y = \dfrac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$ (линейно транслиране) и се нарича стандартно нормално разпределение.

$g(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ е $\uparrow$. $h(y) = \sigma y + \mu$, $h'(y) = \sigma$. Тогава ,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}.\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{y^2}{2}}, \forall y \in (-\infty, \infty).$$

Сега вече лесно пресмятаме,

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow \mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y e^{-\frac{y^2}{2}}}_{\text{нечетна}} \,\mathrm{d}y = 0.$$

Следователно $0 = \mathbb{E}Y = \dfrac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \dfrac{\mu}{\sigma}$ или $\mathbb{E}X = \mu$.

$$\mathbb{D}Y = \mathbb{E}Y^2 - (\underbrace{\mathbb{E}Y}_{=0})^2 = \mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}X \left(\text{т.к. } Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ и от свойства на } \mathbb{D}\right)$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y}_{J} = 1. \text{ Следователно,}$$

$$\mathbb{D}Y = 1 = \frac{\mathbb{D}X}{\sigma^2} \Rightarrow \mathbb{D}X = \sigma^2.$$

Сега, за интеграла J: знаем, че $1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}y$ за $\forall \sigma > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}y \,\Big|\, \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}\, y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}\, y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}\, y \overset{\sigma=1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}\, y$$

Този метод е известен като метода на физика Ричард Файнман. Друга алтернатива за пресмятане на интеграла I е чрез интегриране по части.