Задача 7. На всеки опит хвърляме три пъти последователно зар. Дефинираме събитие A = {точките при някое хвърляне са равни на сумата от точките на другите две хвърляния}.

а) Да се определи вероятността на A при извършване на един опит.
б) Извършваме опити докато събитието A се изпълни. Нека X е броят на хвърлянията на зар, които сме направили при това. Да се намери математическото очакване $\mathbb{E}X$ и дисперсията $\mathbb{D}X$.
в) Колко опита трябва да бъдат направени, така че да е по-вероятно събитието A да се сбъдне поне веднъж, отколкото да не се сбъдне нито веднъж?

Решение.

а) Нека резултатите от трите последователни хвърляния представим чрез наредената тройка (a, b, c), където $1 \leq a, b, c \leq 6$. Тогава имаме, че пространството от елементарни събития е следното:

$\Omega = \{(a, b, c) \in I^3\}$, където $I = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Броят на всички наредени тройки в Ω е $6^3 = 216$, т.е. $|\Omega| = 216$.

Да разгледаме наредените тройки, които отговарят на събитието A:

$\{2, 1, 1\}$ – от тази тройка получаваме **3** наредени тройки чрез пермутиране на 2;
$\{3, 1, 2\}$ – от тази тройка получаваме **6** наредени тройки чрез пермутиране на 3 и 2;
$\{4, 1, 3\}$ – **6** наредени тройки;
$\{4, 2, 2\}$ – **3** наредени тройки;
$\{5, 1, 4\}$ – **6** наредени тройки;
$\{5, 2, 3\}$ – **6** наредени тройки;
$\{6, 1, 5\}$ – **6** наредени тройки;
$\{6, 2, 4\}$ – **6** наредени тройки;
$\{6, 3, 3\}$ – **3** наредени тройки.

Така броят на благоприятните наредени тройки е: $6 \times 6 + 3 \times 3 = 36 + 9 = 45$. Следователно $\mathbb{P}(A) = \dfrac{45}{216} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{24}}$.

б) $X = \{\#$ на хвърлянията на зар, до изпълняване на A без $A\}$. Нека $Y = \{\#$ проведени опити до настъпване на A без $A\}$.
Тогава $X = 3Y \Rightarrow \mathbb{E}X = 3\mathbb{E}Y$, $\mathbb{D}X = \mathbb{D}3Y = 3^2\mathbb{D}Y = 9\mathbb{D}Y$.

Но $Y \sim Ge\left(p = \dfrac{5}{24}\right)$.

$$g_Y(s) = \mathbb{E}s^Y = \sum_{k=0}^{\infty} s^k(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} s^k(1-p)^k \overset{|(1-p)s|<1}{=} \frac{p}{1-(1-p)s} = \frac{p}{1-s+ps} \quad .$$

Следователно $\mathbb{E}Y = g'_X(1) = \left.\dfrac{-p(-1+p)}{(1-s+ps)^2}\right|_{s=1} = \dfrac{1-p}{p}$ и $\mathbb{E}Y_1 = \dfrac{1-p}{p} + 1 = \dfrac{1}{p} = \dfrac{24}{5}$,

където $Y_1 = \{\#$ проведени опити до настъпване на A включително с $A\}$.

$$\mathbb{D}Y = g_Y''(1) + g_Y'(1) - \left(g_Y'(1)\right)^2 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p(1-p)}{(1-s+ps)^2}\right)\Bigg|_{s=1} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} =$$

$$= \frac{-p(1-p)2(1-s+ps)(-1+p)}{(1-s+ps)^4}\Bigg|_{s=1} + \frac{(1-p)p}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{456}{25}$$

Следователно за X получаваме:

$$\mathbb{E}X = 3\mathbb{E}Y = 3 \times \frac{24}{5} = \mathbf{\frac{72}{5}} \text{ и } \mathbb{D}X = 9\mathbb{D}Y = \frac{9 \times 456}{25} = \mathbf{\frac{4104}{25}}.$$

в) Нека $T = \{$събитие A се сбъдва поне веднъж от n опита$\}$ и $Q = \{$събитие A не се сбъдва от n опита$\}$. Тогава искаме да намерим това n, за което е изпълнено:

$$\mathbb{P}(T) > \mathbb{P}(Q)$$
$$\mathbb{P}(Q) = \left(1 - \mathbb{P}(A)\right)^n = \left(1 - \frac{5}{24}\right)^n = \left(\frac{19}{24}\right)^n$$
$$\mathbb{P}(T) = 1 - \mathbb{P}(Q) = 1 - \left(\frac{19}{24}\right)^n \Rightarrow 1 - \left(\frac{19}{24}\right)^n > \left(\frac{19}{24}\right)^n \Leftrightarrow 2\left(\frac{19}{24}\right)^n < 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{19}{24}\right)^n < \frac{1}{2} \Big| \log_2;$$

$$n \times \log_2 \frac{19}{24} < \log_2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \times (-0.337...) < -1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{0.337...} \Leftrightarrow n > 2.96;$$

Следователно е необходимо да направи **поне** 3 опита, за да имаме по-голяма вероятност за случването на събитието A поне веднъж, отколкото никога от общо n опита.

$\square$