Задача 1. (2014-07-15 КН) Даден е неориентиран граф $G(V, E)$, в който всеки връх има степен поне $d \geq 2$.

а) Докажете, че в G има цикъл.

б) Докажете по-силното твърдение: в G има цикъл с дължина поне $d + 1$.

Решение.

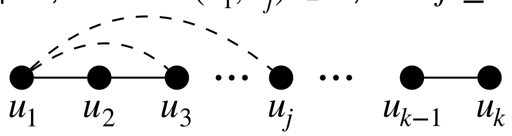
а) Нека $p = u_1 \ldots u_k$ е произволен най-дълъг прост път в G с дължина $|p| = k$. Нека ω е един от краищата му (тоест $\omega = u_1$ или $\omega = u_k$). Той има един известен съсед (предхождащия или следващия го в p).

От $d \geq 2 \Rightarrow$ има поне още един съсед. Нека един такъв съсед е u.

1) Ако $u \in p$ (и е различен връх от вече известния съсед – предхождащия или следващия), то имаме цикъл.
2) Ако $u \notin p$, то имаме по-дълъг прост път $p' = u_1 u_2 \ldots u_k u$ с дължина $|p'| = k + 1$, което е противоречие с избора на p като най-дълъг прост път. Следователно само 1) е валидно и има цикъл в G.

б) Нека p е произволен най-дълъг прост път в G: $p = u_1 u_2 \ldots u_k$. Тъй като $\deg(u_1) \geq 2$, то u_1 има поне един съсед различен от u_2. Всички тези съседи на u_1 трябва да са в p (от избора на u за най-дълъг прост път – това следва от разсъжденията в а)). Тоест u_1 има поне d съседа, които са от p.

Нека j е най-големия индекс, за който $(u_1, u_j) \in E$, като $j \geq d + 1$.



Следователно имаме цикъл от вида $q = u_1 u_2 u_3 \ldots u_j u_1$. Дължината на q е $|q| = j \geq d + 1$, което искахме да докажем.

$\square$