2. Булеви функции. Пълнота.

Анотация: Дефиниция на булева функция (БФ) и формула над множество БФ. БФ с 1 и 2 променливи. Свойства. Дефиниция на пълно множество БФ. Формулировка и доказателства на теоремата за разбиване на БФ по част от променливите и теоремата на Бул. Теорема на Пост.

Нека A е крайно множество и $n \in \mathbb{N}$. Всяка функция $f : A^n \to A$ наричаме n-местна дискретна функция. Нека $|A| = m$. Броят на различните n-местни дискретни функции е $|A|^{|A^n|} = |A|^{|A|^n} = m^{m^n}$.

Булева функция

Булевата функция е двоична дискретна функция, при която множеството A е $J_2 = \{0, 1\}$.
Множеството на n-местните булеви функции означаваме с $\mathscr{F}_2^n = \left\{f \,|\, f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}\right\}$.
Множеството на всички булеви функции означаваме с $\mathscr{F}_2 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_2^n$. Така $|\mathscr{F}_2^n| = 2^{2^n}$.

Формула над множество булеви функции

Нека $F = \{f_i \,|\, i \in I\} \subseteq \mathscr{F}_2$ е множество от булеви функции. Формула над множеството от булеви функции F са всички функции, които се получават от F чрез операциите:
а) идентитет;
б) композиция;
в) самите функции от F.
Например, ако $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1)$ са функции от F, то функциите $f_1(f_2(x_1), x_2)$ и $f_1(f_1(x_3, x_2), f_2(x_1))$ са формули над F.

Булева функции с една променлива (общо $2^{2^1} = 4$)

$g_0(x) = \tilde{0}(x) = 0$ – константа нула;
$g_1(x) = I_1^1(x) = x$ – идентитет;
$g_2(x) = \overline{x}$ – отрицание на x;
$g_3(x) = \tilde{1}(x) = 1$ – константа единица.

x	g_0	g_1	g_2	g_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Булева функции с две променлива (общо $2^{2^2} = 16$)

		$\tilde{0}$	$x \wedge y$	$\overline{x \to y}$	x	$\overline{y \to x}$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$\overline{y}$	$x \to y$	$\overline{x}$	$y \to x$	$x \,|\, y$	$\tilde{1}$
x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	**1**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	**0**	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x, y) = \tilde{0}(x, y) = \tilde{0}$ – константа нула, но този път като функция на два аргумента;

$f_{15}(x, y) = \tilde{1}(x, y) = \tilde{1}$ – константа единица, но този път като функция на два аргумента;

$f_3(x, y) = I_1^2(x, y) = x$ – проектираща функция на x;
$f_5(x, y) = I_2^2(x, y) = y$ – проектираща функция на y;
Тук говорим за проектираща функция, тъй като имаме два аргумента и не е удобно да говорим за идентитет. Проектиращата функция може да я дефинираме за произволен брой аргументи:

Определение (проектираща функция). Нека $1 \leq k \leq n$. Функцията $I_k^n : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, дефинираме чрез: $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ и я наричаме проектираща функция.

$f_{10}(x, y) = \overline{y}$ – отрицание на y;
$f_{12}(x, y) = \overline{x}$ – отрицание на x;

$f_1(x, y) = x \wedge y = x \,.\, y = xy$ – конюнкция на x и y (лог. **и**), $\min(x_1, x_2)$, $x_1 \times x_2 (\bmod 2)$;
$f_7(x, y) = x \vee y$ – дизюнкция на x и y (логическо **или**), $\max(x_1, x_2)$;

$f_6(x, y) = x \oplus y$ – изключващо или (събиране по модул от 2), XOR, $x_1 + x_2 (\bmod 2)$
$f_9(x, y) = x \leftrightarrow y$ – еквивалентност на x и y (отрицание на XOR), $x \equiv y$, XNOR

$f_{11}(x, y) = x \to y$ – импликация от x към y (If x then y), x implies y, $x \geq y$
$f_{13}(x, y) = y \to x$ – импликация от y към x (If y then x), y implies x, $y \geq x$

$f_8(x, y) = x \downarrow y$ – функция (стрелка) на Пиърс (отрицание на логическо или), NOR
$f_{14}(x, y) = x \,|\, y$ – функция (черта) на Шефер (отрицание на логическо и), NAND

$f_2(x, y)$ – A inhibits B (отрицание на импликацията от x към y : $\overline{x \to y}$)
$f_4(x, y)$ – B inhibits A (отрицание на импликацията от y към x : $\overline{y \to x}$)

Свойства
Освен чрез описание на всички техни стойности в таблица, булевите функции могат да се представят по множество различни начини с помощта на суперпозиция на други функции.

Определение (суперпозиция). Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Нека $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ е n-местна функция и $g_1, \ldots, g_n : \{0, 1\}^k \to \{0, 1\}$ са k-местни функции. Тогава функцията $h : \{0, 1\}^k \to \{0, 1\}$, дефинирана чрез

$$h(x_1, \ldots, x_k) = f\big(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)\big),$$

наричаме суперпозиция на h с $g_1, \ldots, g_n$.

Примери: $f_2(x, y) = \overline{x \to y} = g_2\left(f_{13}(I_1^2(x, y), I_2^2(x, y))\right)$;
$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ (инфиксен запис на горното).

В сила са следните свойства:
1. Константи: $x \vee 1 = x \to 1 = 0 \to x = x \vee \overline{x} = 1, x \wedge 0 = x \wedge \overline{x} = 0,$
   $x \vee 0 = x \wedge 1 = 1 \leftrightarrow x = x \oplus 0 = x, x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \oplus 1 = \overline{x}.$
2. Комутативност: $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x, x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$;
3. Асоциативност: $(xy)z = x(yz), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;

4. Отрицание: $\overline{\overline{x}} = x, \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ (**закони на де Морган**);
5. Дистрибутивност: $x(y \vee z) = xy \vee xz, x(y \oplus z) = xy \oplus xz, x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$;
6. Идемпотентност: $x \wedge x = x, x \vee x = x, x \oplus x = \tilde{0}$;
7. Поглъщане: $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$;
8. Представяне чрез конюнкция, дизюнкция и отрицание: $x \to y = \overline{x} \vee y, \overline{x \to y} = x \wedge \overline{y}$, $x \leftrightarrow y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}, x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y, x \,|\, y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}, x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$;
9. Представяне чрез конюнкция, изключващо или и констанатата 1:
   $x \vee y = (x \wedge y) \oplus x \oplus y, \overline{x} = x \oplus 1, x \to y = xy \oplus x \oplus 1, x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1,$
   $x \,|\, y = xy \oplus 1, x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1.$

Всяко от равенствата по-горе може да се докаже чрез директна проверка.

Затваряне на множество от булеви функции

$[F]$ е затваряне на F – това е най-малкото множество по включване, за което:

а) $F \subseteq [F]$;

б) $I_k^n \in F$;

в) $f \in [F]$ е k-местна, $g_1, \ldots, g_k$ са n-местни, то и суперпозицията h с $g_1, \ldots, g_n$:
$h(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)\right) \in [F]$.

Всяко друго множество, имащо същите свойства, съдържа F.

Пълно множество

Нека $F \subseteq \mathscr{F}^2$ е множество от булеви функции. F е пълно множество или базис, ако $[F] = \mathscr{F}^2$.

Дефиниция (x^σ). Дефинираме булевата функция $f(x, \sigma) = x^\sigma = \begin{cases} x \leftrightarrow \sigma, & \text{ако } \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \text{ако } \sigma = 0 \end{cases}$.

Освен това, ние знаем, че еквивалентността може да се представи чрез конюнкция, дизюнкция и отрицание: $x \leftrightarrow y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

Лема 1. $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. Верността на тази лема може да се покаже, чрез описание на всички възможно стойности на функцията:

x	σ	x^σ
0	**0**	1
0	**1**	0
1	**0**	0
1	**1**	1

Дефиниция (елементарна конюнкция). Формули от вида $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$, където $i_j \neq i_s$ при $j \neq s, \sigma_i \in \{0, 1\}$, наричаме елементарни конюнкции.

Теорема за разбиване на булева функция по част от променливите

Разглеждаме n-местна булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{F}_2^n$. Избираме i на брой от променливите на функцията, за $1 \leq i \leq n$ и нека без ограничение на общността това са първите i променливи. Тогава:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_i^{\sigma_i} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Доказателство. Да означим с $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцията, определена от дясната част на равенството. Да пресметнем стойностите на функциите f и g за произволен вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in J_2^n$ (от нули или единици). Вляво получаваме $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. От Лема 1 следва, че от всички 2^i елементарни конюнкции $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_i^{\sigma_i}$, участващи в дясната част, само една има стойност 1-ца – тази, при която $\sigma_j = a_j$, за $j = 1, 2, \ldots, i$. Останалите елементарни конюнкции имат стойност 0 и анулират съответните членове на многократната дизюнкция. Така за стойността на дясната част получаваме:

$$\begin{aligned} & g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ &= a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_i^{a_i} f(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \vee \tilde{0} = \\ &= \tilde{1} f(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,. \end{aligned}$$

Следователно, функциите от двете части на равенството съвпадат.

Теорема на Бул
Множество $\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}$ е пълно.

Доказателство. Ще покажем, че $\forall f \in \mathscr{F}_2$ е в сила $f \in \left[\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}\right]$, т.е. можем да представим f с формула над $\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}$.

а) Нека $f = \tilde{0}$. Тогава $f(x) = x\bar{x}$ и следователно f се представя с формула над $\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}$.

б) Нека $f \neq \tilde{0}$. Разлагаме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по всичките n променливи и получаваме

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Ако $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, съответният член в дясната част се анулира и съгласно свойствата, доказани по-горе, може да не участва във формулата. Ако пък $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, то $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}$. Така получаваме

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\forall(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \{0, 1\}^n \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n},$$

което е формула над $\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}$.

Тероемата на Бул не само доказва пълнотата на множеството $\{x \vee y,\, xy,\, \bar{x}\}$, но ни дава в явен вид съответната формула. Когато $f \neq \tilde{0}$, формулата получена от Теоремата на Бул наричаме *Съвършена Дизюнктивна Нормална Форма (СъвДНФ)* на f. СъвДНФ на всяка различна от $\tilde{0}$ функция се състои само от пълни елементарни конюнкции. Формули, аналогични на СъвДНФ, в които могат да се съдържат и непълни елементарни конюнкции, наричаме *Дизюнктивни Нормални Форми (ДНФ)*. Константата $\tilde{0}$ няма нито една ДНФ. Всяка една от останалите булеви функции има само една СъвДНФ, а може да има и повече от една ДНФ.

Като пример, нека построим СъвДНФ на дизюнкцията. Имаме три вектора – $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$, при които дизюнкцията има стойност 1. Затова $x \vee y = x^0y^1 \vee x^1y^0 \vee x^1y^1 =$
$= \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xy$.

От законите на де Морган знаем, че $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ и следователно малко по-силно от теоремата на Бул е да заявим, че множеството $\{xy, \overline{x}\}$ е пълно.

От друга страна, $\{x \oplus y, xy, \tilde{1}\}$ също е пълно, защото $\overline{x} = x \oplus \tilde{1}$ и $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$. Това множество задава друг вид представяне на булевите функции.

Дефиниция (Полином на Жегалкин). Функция от вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_{1 \le i \le n} a_i x_i \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \oplus \ldots \oplus a_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

където $a_i \in \{0, 1\}$, наричаме полином на Жегалкин.

Всяка функция може да се представи чрез полином на Жегалкин, защото множеството $\{x \oplus y, xy, \tilde{1}\}$ е пълно. Например полиномите на Жегалкин за основните функции са:

$\tilde{0}$	0
$\tilde{1}$	1
x	x
$\overline{x}$	$1 \oplus x$
xy	xy
$x \vee y$	$x \oplus y \oplus xy$
$x \rightarrow y$	$1 \oplus x \oplus xy$
$x \leftrightarrow y$	$1 \oplus x \oplus y$
$x \oplus y$	$x \oplus y$
$x \mid y$	$1 \oplus xy$
$x \downarrow y$	$1 \oplus x \oplus y \oplus xy$

Теорема на Жегалкин
Всяка булева функция може да се представи по единствен начин като полином на Жегалкин. Лесно може да се докаже по комбинаторен път, като се използва теоремата на Нютон, $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} = 2^n$.

Булеви функции запазващи константите
Нека $f \in \mathscr{F}_2^n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n}$ е стандартната (лексикографска) подредба на булевите вектори. Казваме, че f запазва константата нула, ако $f(\alpha_1) = f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Множеството на всички булеви функции, които запазват нулата означаваме с T_0.

Казваме, че f запазва константата единица, ако $f(\alpha_{2^n}) = f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Множеството на всички булеви функции, които запазват единицата означаваме с T_1.

Например: $xy, x \vee y \in T_0 \cap T_1$; $x \oplus y \in T_0 \backslash T_1$; $x \leftrightarrow y \in T_1 \backslash T_0$, $x \mid y, x \downarrow y \notin T_0 \cup T_1$.

Самодвойнствени булеви функции

Нека $f \in \mathscr{F}_2^n$. Двойнствена на f наричаме функцията:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}$$

Множеството от всички самодвойнствени функции означаваме с S.

В следващата таблица са изброени някои основни примери за двойки функция и нейната двойнствена.

f	f^*
$\tilde{0}$	1
$\tilde{1}$	0
x	x
$\overline{x}$	$\overline{x}$
xy	$x \vee y$
$x \vee y$	xy
$x \oplus y$	$x \leftrightarrow y$
$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$
$x \mid y$	$x \downarrow y$
$x \downarrow y$	$x \mid y$

Линейни булеви функции

Нека $f \in \mathscr{F}_2^n$. Казваме, че f е линейна, ако f има линеен полином на Жегалкин. Т.е. f може да се представи по следния начин:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

където $a_i \in \{0, 1\}$. С L означаваме множеството на всички линейни функции.

Например $x, \overline{x} = x \oplus 1, x \oplus y, x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1 \in L$; $xy, x \vee y = xy \oplus x \oplus y \notin L$.

Монотонни булеви функции

За да дефинираме монотонните булеви функции, дефинираме наредба между n-мерните вектори. Обърнете внимание, че наредбата е частична, не е линейна.

Нека $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ са n-мерни булеви вектори.

$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n} : a_i \leq b_i$. Нека $f \in \mathscr{F}_2^n$. Казваме, че f е монотонна, ако за всяка двойка аргументи $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$: $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$. С M означаваме множеството на всички монотонни функции.

Теорема на Пост-Яблонски

Нека $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_2^n$. Множеството F е пълно, тогава и само тогава когато не е подмножество на нито едно от множествата T_0, T_1, S, M, L.