Задача 6. За всеки два езика $L, M \subseteq \{0, 1\}^*$ означаваме $L^M = \{\omega \in L^{|u|} \mid u \in M\}$. Вярно ли е, че винаги, когато L и M са регулярни, то L^M е регулярен език? Отговорът да се обоснове.

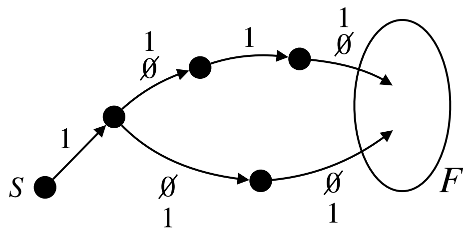
Решение.

$\omega \in L^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L^k$, тъй като думата $u \in M$ може да е с всякаква дължина.

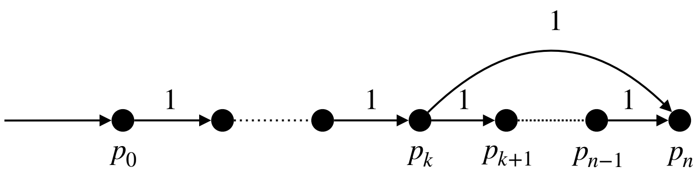
$L^M = \{\omega \in L^{|u|} \mid u \in M\} = \{\omega \in L^k \mid k \text{ е дължина на дума от } M\} = \bigcup\limits_{\substack{k \text{ е дължина} \\ \text{на дума от } M}} L^k.$

Нека $\mathscr{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ е КДА за M. Заместваме всички етикети с 0 в $\mathscr{A}$ с 1. Получаваме НДКА $\mathscr{A}_1 = \langle \Sigma_1, Q, s, \Delta, F \rangle$.

$\mathscr{L}(\mathscr{A}_1) = \{1^k \mid k \text{ е дължина на някоя дума от } \mathscr{L}(\mathscr{A}) = M\}$.



Сега $\mathscr{A}_1$ е над азбуката $\{1\} \Rightarrow$ след детерминизация от всяко състояние на получения $\mathscr{D} = \langle \{1\}, A_{\mathscr{D}}, s_{\mathscr{D}}, \delta_{\mathscr{D}}, F_{\mathscr{D}} \rangle$ излиза точно 1 стрелка.



Разбиваме финалните състояния на новополучения детерминиран автомат $\mathscr{D}$ на две множества:

$F_0 = \{p_i \in F_{\mathscr{D}} \mid i < k\}$ и $F_1 = \{p_i \in F_{\mathscr{D}} \mid i \geq k\}$

$\mathscr{L}(\mathscr{A}_{\mathscr{D}}) = \{1^i \mid p_i \in F_0\} \cup \{1^{i+(n-k+1)d} \mid p_i \in F_1, d \in \mathbb{N}\}$. Следователно,

$L^M = \bigcup\limits_{p_i \in F_0} L^i \cup \bigcup\limits_{p_i \in F_1} L^i \bullet \left(L^{(n-k+1)}\right)^* \Rightarrow L^M$ е регулярен език, тъй като $k \leq n < \infty$.

$\square$