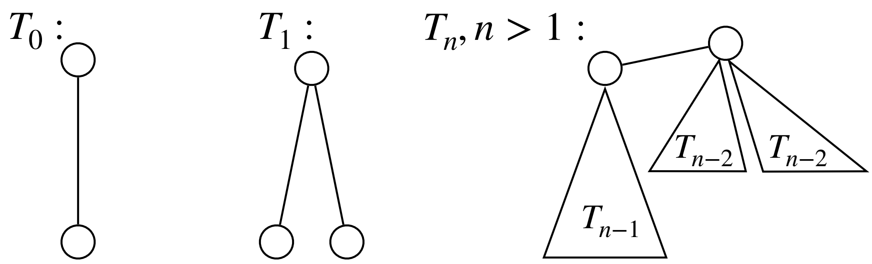
Задача 1. (2008-07-05 КН) Дадена е рекурсивно дефинираната редица от коренови дървета:



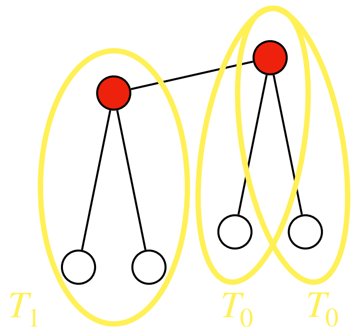
Намерете формула в явен вид за броя на вътрешните върхове (нелиста) на дървото T_n.

Решение.

Без ограничение на общността, нека изберем корена на дървото T_n да е този от дясно – с двете поддървета, които са дърветата от две итерации назад. Нека броят на нелистата на дървото T_k е равен на $N(k)$.

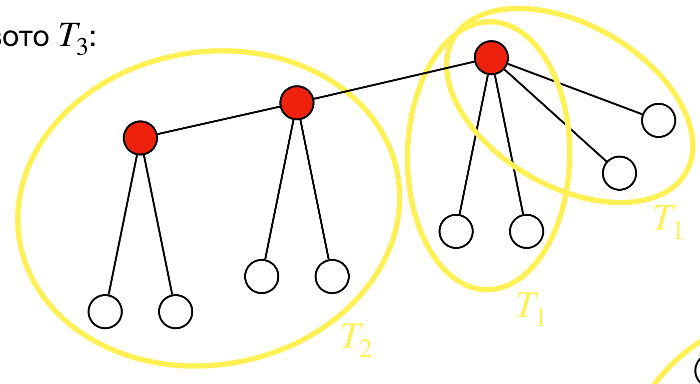
Да генерираме дървото T_2:

$N(2) = 2$



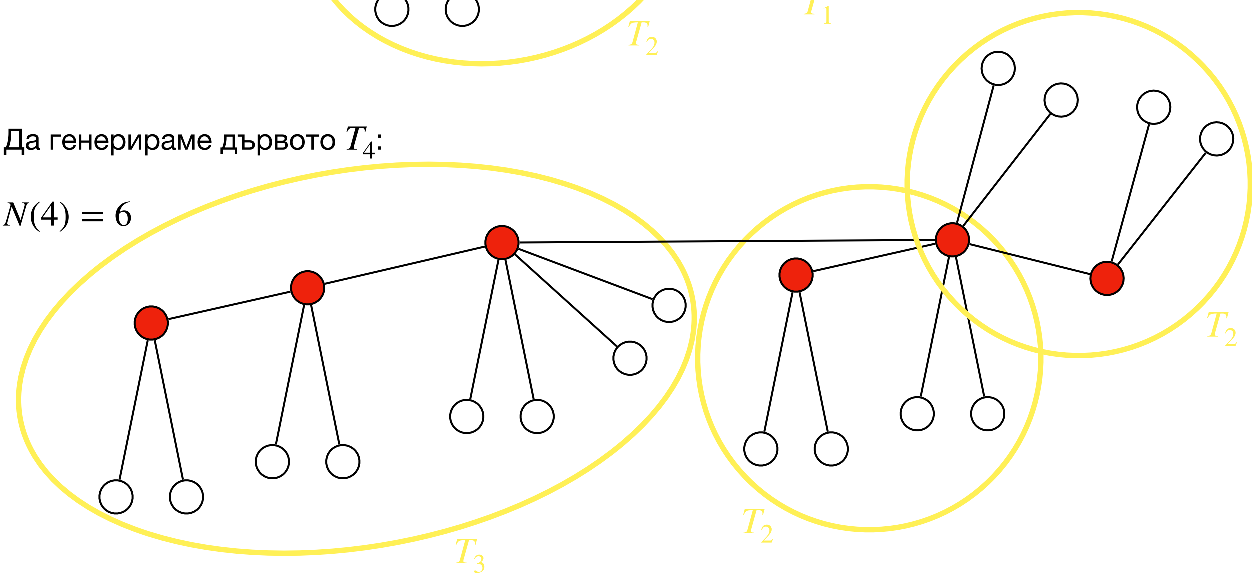
Да генерираме дървото T_3:

$N(3) = 3$



Да генерираме дървото T_4:

$N(4) = 6$



1. Индукционна база: $N(0) = N(1) = 1$;
2. Индукционна хипотеза: $N(n) = N(n-1) + 2N(n-2) - 1$;
3. Индукционен преход: $N(n+1) = N(n) + 2N(n-1) - 1$, което е аналогично на индукционната хипотеза но за аргумент $n+1$ вместо n.

Проверка:
$N(0) = N(1) = 1$
$N(2) = N(1) + 2N(0) - 1 = 1 + 2.1 - 1 = 2$
$N(3) = N(2) - 2N(1) = 2 + 2.1 - 1 = 3$
$N(4) = N(3) + 2N(2) = 3 + 2.2 - 1 = 6$

Трябва да отстраним свободния член, за да приведем рекурентното уравнение в хомогенен вид:

$$N(n+1) - N(n) = N(n) + 2N(n-1) - 1 - N(n-1) - 2N(n-2) + 1 =$$
$$= N(n) + N(n-1) - 2N(n-2)$$

Следователно, $N(n + 1 - 2N(n) - N(n-1) + 2N(n-2) = 0$. Полагаме $n = t + 2 \Rightarrow N(t+3) - 2N(t+2) - N(t+1) + 2N(t) = 0$.

Създаваме характеристичното уравнение на получената рекурентна зависимост:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-2) - (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$.

$N(n) = A\,.(-1)^n + B.1^n + C.2^n$

$$\begin{cases} N(0) = A + B + C = 1, & (1) \\ N(1) = -A + B + 2C = 1, & (2) \\ N(2) = A + B + 4C = 2 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) : 2B + 3C = 2 \qquad (4)$
$(2) + (3) : 2B + 6C = 3 \qquad (5)$

$(5) - (4) : 3C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$

$(4) : 2B = 2 - 3C = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$

$(1) : A = 1 - B - C = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}}$

Окончателно, $N(n) = \frac{1}{6} \times (-1)^n + \frac{1}{2} \times 1^n + \frac{1}{3} \times 2^n = \frac{(-1)^n + 3 + 2^{n+1}}{6}$.

$\square$