Задача 6. Вярно ли е, че за всеки регулярен език $L \subseteq \{0, 1\}^*$, езикът:

$$\{\omega^{|\omega|} \,|\, \omega \in L\}$$

е регулярен? Отговорът да се обоснове.

Решение.

Нека $L = \underbrace{0...0}_{n \geq 0} 1 = 0^*1$. Избираме точно такъв език, за да имаме ясен индикатор за това кога дадена дума от него завършва. В случая буквата $1 \in \Sigma = \{0, 1\}$ играе ролята на разделител. Този разделител ще даде възможност да докажем, че езика не е регулярен (много е важно да уловим правилната интуиция, за това дали езика е регулярен или не преди да тръгнем да доказваме каквото и да било).

Следователно $M = \{(0^n 1)^{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Допускаме, че M е регулярен език. Тогава лемата за покачването (разширяването) на регулярни езици ни дава число N, такова че за $\omega = (0^N 1)^{N+1} \in M$ с очевидна дължина на $\omega : |\omega| > N$, $\exists\, x, y, z : \omega = xyz,\ y \neq \varepsilon,\ |xy| \leq N$ и $xy^iz \in M,\ \forall i \geq 0$.

От това, че $|xy| \leq N \Rightarrow x = 0^k$ и $y = 0^m$, където $k \geq 0$ и $m > 0$ (тук имаме строго неравенство, тъй като $y \neq \varepsilon$ – от лемата). Тогава $\omega = 0^k 0^m 0^{N-m-k} 1 (0^N 1)^N$. Но $xy^iz = 0^k 0^{im} 0^{N-m-k} 1 (0^N 1)^N \in M$, което не е вярно за $i = 0$ например, тъй като $0^k 0^{N-m-k} 1 (0^N 1)^N = 0^{N-m} 1 (0^N 1)^N \notin M$.

Следователно, допускането ни че M е регулярен е грешно и отговора е, че M не е регулярен език.

$\square$