Задача 6. Пълно ли е множеството от двоични функции $(L \cap T_1) \cup (S \backslash T_0)$? А множеството $(L \cap T_1) \cup (S \cap M)$? Обосновете отговорите си!

Решение. Нека $F = (L \cap T_1) \cup (S \backslash T_0)$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ е произволна двоична функция и $f \in F$. Ще докажем, че $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, $f \notin L$, $f \notin M$ и $f \notin S$. Това ще означава, че $F \nsubseteq T_0 \cup T_1 \cup L \cup M \cup S$ и следователно от критерия на Пост-Яблонски ще следва, че F е пълно множество.

а) Нека $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{1} \Rightarrow f_1 \in F$, тъй като $f_1 \in L \cap T_1$. Но $f_1 \notin T_0 \Rightarrow F \nsubseteq T_0$.

б) Нека $f_2(x) = \bar{x} \Rightarrow f_2 \in F$, тъй като $f_2 \in S \backslash T_0$. Но $f_2 \notin T_1 \Rightarrow F \nsubseteq T_1$.

в) Търсим такава $f_3 \in F$, която не е линейна, но е самодвойнствена и не запазва нулата, т.е. $f_3 \in S \backslash T_0$. Естествено е първо да видим дали има такава f_3, която е функция на два аргумента.

x	y	$1 \oplus xy$	$1 \oplus x \oplus xy$	$1 \oplus y \oplus xy$	$1 \oplus x \oplus y \oplus xy$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0

Очевидно нито една функция на два аргумента, която не е линейна не е самодвойнствена. Избираме функцията $f_3(x, y, z) = 1 + xy + yz + zx$.

x	y	z	$1 \oplus xy \oplus yz \oplus zx$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

г) Търсим такава $f_4 \in F$, която не е монотонна. Забележете, че $f_3(0, 0, 0) = 1$ и $f_3(1, 1, 1) = 0$. Това означава, че няма как да е монотонна. Следователно ще вземем f_3 и като пример за функция, която е от F, но не е монотонна.

д) Остана да намерим функция $f_5 \in F$, която не е самодвойнствена. Нека вземем $f_5 \in L \cap T_1$, за да си гарантираме, че $f_5 \in F$. Тогава $f_5(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_2 + \ldots + x_nx_n$ и $f_5(1, \ldots, 1) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$. Искаме да е изпълнено: $f_5(x_1, \ldots, x_n) = f_5(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, за да бъде f_5 самодвойнствена.

Но $\overline{x} = x + 1$, следователно

$$f_5(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = a_0 + a_1(x_1 + 1) + \ldots + a_n(x_n + 1) =$$
$$= \underbrace{a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}_{f_5(x_1, \ldots, x_n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Тоест, за да е изпълнено $f_5(x_1, \ldots, x_n) = f_5(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ е достатъчно да вземем функция f_5, за която $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ и това ще гарантира, че е самодвойнствена. Достатъчно е да е изпълнено $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ и n да е четно число.

А за да е изпълнено и това, че f_5 запазва единицата е необходимо и $a_0 = 1$.

$f_5(x, y) = 1 + x + y$; $f_5 \in F$ и $f_5 \notin S \Rightarrow F \nsubseteq S$.

Второто множество от условието, $(L \cap T_1) \cup (S \cap M)$ не е пълно, тъй като за дадена двоична функция $f \in F$ имаме две възможности: или $f \in L \cap T_1$ или $f \in S \cap M$. Ако $f \in L \cap T_1$, то $F \subseteq T_1$. Ако пък $f \in S \cap M$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \neq \tilde{0}$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \neq \tilde{1}$, за да може да бъде двойнствена. Но от друга страна е и монотонна. Следователно $f(1, \ldots, 1) = 1$, което отново означава, че $F \subseteq T_1$.

$\square$