Задача 6. Кое от множествата от булеви функции

$$\mathscr{F}_1 = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L) \text{ и } \mathscr{F}_2 = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$$

е пълно? Обосновете отговора си!

Решение.

А) $\mathscr{F}_1 = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$

От критерия на Пост-Яблонски знаем, че едно множество F от двоични функции е пълно, ако $F \notin T_0 \cup T_1 \cup S \cup M \cup L$.

Да разгледаме първо функцията NOR (отрицанието на логическото „ИЛИ" известна още като стрелка на Пиърс). NOR може да се използва последователно без друг логически оператор, за да се състави логическа формална система (правейки NOR пълно множество от булеви функции). Да се убедим, че това е така.

x	y	$x \downarrow y$ NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

От таблицата на истинността виждаме, че $NOR \notin T_0 \cup T_1 \cup S \cup M$. Остана да видим защо $NOR \notin L$.

$$NOR(x, y) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_{12} x y$$

$$NOR(0,0) = 1 = a_0 \qquad \Rightarrow a_0 = 1$$
$$NOR(0,1) = 0 = a_0 \oplus a_2 y = 1 \oplus a_2 \qquad \Rightarrow a_2 = 1$$
$$NOR(1,0) = 0 = a_0 \oplus a_1 x = 1 \oplus a_1 \qquad \Rightarrow a_1 = 1$$
$$NOR(1,1) = 0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12} \qquad \Rightarrow a_{12} = 1$$

Следователно $NOR(x, y) = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy \notin L$.

$\{NOR\}$ самостоятелно образува пълно множество от булеви функции.

Теорема. Нека F, G са множества от булеви функции. Нека F е пълно и $F \subseteq [G]$ (т.е. $\forall f_i \in F : f_i \in [G]$). Тогава G е пълно.

Да разгледаме функцията $g(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx \oplus 1$.

x	y	z	$g(x,y,z)$	x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0

$g \notin M \cup L$ и $g \in S$. Следователно $g \in \mathscr{F}_1$. Тоест $\mathscr{F}_1 = \{g(x, y, z), \ldots\}$. Но $NOR(x, y) = g(x, y, \tilde{1})$ и следователно $NOR \subseteq [\mathscr{F}_1] \Rightarrow \mathscr{F}_1$ е пълно.

Б) $\mathscr{F}_2 = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$
$M \setminus T_0 = \{\tilde{1}\}$, тъй като $M \setminus T_0$ са функции, които не запазват нулата ($f(0,...,0) = 1$) и за всяко $\beta : 00...0 \preceq \beta \Rightarrow f(0,...,0) = 1 \preceq f(\beta) \Rightarrow \forall \beta, f(\beta) = 1 \Rightarrow M \setminus T_0 = \{\tilde{1}\}$.

$\mathscr{F}_2 = \{\tilde{1}\} \cup (L \setminus S)$, $\tilde{1} \in L$, $\tilde{1} \notin S \Rightarrow \tilde{1} \in L \setminus S \Rightarrow \mathscr{F}_2 = L \setminus S$.

$\mathscr{F}_2 \subseteq L \Rightarrow$ по критерия на Пост-Яблонски, $\mathscr{F}_2$ не е пълно.