25. Базис, размерност, координати. Системи линейни уравнения. Теорема на Руше. Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система линейни уравнения.

Анотация: Определения за базис, размерност и координати. Всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство V над F притежават равен брой вектори. V е n-мерно линейно пространство над F, тогава и само тогава когато във V съществуват n на брой линейно независими вектора и всеки n+1 на брой вектора са линейно зависими. Всяка линейно независима система вектори в крайнометно пространство може да се допълни до базис. Системи линейни уравнения. Теорема на Руше. Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система линейни уравнения.

Дефинираме няколко понятия, които ще използваме по-късно в изложението.

Дефиниция (линейно пространство). Абстрактна алгебрична структура с въведени в нея операции, подчинени на определени свойства наричаме линейно пространство и ще го бележим най-често с $\mathbb{V}$.

Дефиниция (линейна обвивка). Нека A е произволно непразно подмножество на линейното пространство $\mathbb{V}$ над числовото поле $\mathbb{F}$. Множеството $\ell(A)$, състоящо се от всички линейни комбинации на елементи от A с коефициенти от $\mathbb{F}$ наричаме линейна обвивка на множеството A.

Дефиниция (ЛНЗ). Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са вектори от линейното пространство $\mathbb{V}$ над полето $\mathbb{F}$. Казваме, че тези вектори са линейно независими над $\mathbb{F}$ (или още, че системата вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е линейно независима – съкращаваме ЛНЗ), ако от това, че някоя линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с коефициенти от $\mathbb{F}$ е равна на нулевия вектор следва, че всички коефициенти в тази линейна комбинация са равни на нула.

За една безкрайна система от вектори от $\mathbb{V}$ ще казваме, че е ЛНЗ над $\mathbb{F}$, ако всяка нейна подсистема е ЛНЗ над $\mathbb{F}$.

Дефиниция (ЛЗ). Казваме, че системата вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ от $\mathbb{V}$ е линейно зависима над $\mathbb{F}$ (или векторите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно зависими – съкращаваме ЛЗ), ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ от $\mathbb{F}$, поне едно от които е различно от нула и такива, че $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$.

Всяка система от вектори е или ЛЗ или ЛНЗ.

Лема (ОЛЛА). Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство и са дадени две системи вектори от $\mathbb{V}$: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Нека всеки вектор от B е линейна комбинация на векторите от A. Тогава, ако $k > n$, то векторите от системата B са линейно зависими. Това твърдение наричаме основна лема на линейната алгебра. Казано на кратко, тя гласи, че ако повече на брой вектори се изразяват линейно чрез по-малко на брой вектори, то повечето на брой вектори са линейно зависими.

Базис

Нека $\mathbb{V}$ е ненулево линейно пространство над полето $\mathbb{F}$ и B е непразно подмножество на $\mathbb{V}$. Казваме, че B е базис на $\mathbb{V}$ над $\mathbb{F}$ (или само базис на $\mathbb{V}$, ако $\mathbb{F}$ се подразбира), ако:

1) B е ЛНЗ система от вектори;
2) Всеки вектор от $\mathbb{V}$ е линейна комбинация на векторите от B с коефициенти от $\mathbb{F}$, т.е. $\mathbb{V} = \ell(B)$.

Забележете, че при така дефинирания базис, нулевото пространство $\{\vec{0}\}$ няма базис. Ако B е базис на $\mathbb{V}$ казваме, че B поражда $\mathbb{V}$.

Размерност

Дефиниция (Крайномерност и безкрайномерност). Едно ненулево линейно пространство $\mathbb{V}$ наричаме крайномерно над $\mathbb{F}$ (или само крайномерно, ако $\mathbb{F}$ се подразбира), ако $\mathbb{V}$ притежава краен базис (базис, съставен от краен брой вектори). В противен случай ще казваме, че $\mathbb{V}$ е безкрайномерно над $\mathbb{F}$.

Теорема 1. Всеки два базиса на ненулевото крайномерно пространство $\mathbb{V}$ над $\mathbb{F}$ съдържат равен брой вектори

Доказателство. Нека $B_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ са два базиса на $\mathbb{V}$. Тогава всеки вектор от B_2 се изразява чрез векторите на B_1. Тъй като $b_1, \ldots, b_k$ са ЛНЗ, то от ОЛЛА следва, че векторите от B_2 са НЕ повече от тези на B_1, т.е. $k \leq n$. Аналогично $a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ и от ОЛЛА следва, че $n \geq k \Rightarrow n = k$.

Дефиниция (Размерност). Броят на векторите в кой да е базис на ненулевото крайномерно пространство $\mathbb{V}$ над полето $\mathbb{F}$ ще наричаме размерност на $\mathbb{V}$ над $\mathbb{F}$ и ще го бележим с $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{V}$ или само $\dim\mathbb{V}$, ако $\mathbb{F}$ се подразбира.

По дефиниция, размерността на нулевото пространство е равна на нула, а ако $\mathbb{V}$ е безкрайномерно пространство, пишем $\dim\mathbb{V} = \infty$.

Ще формулираме и докажем помощна лема, чрез която ще докажем представената по-долу Теорема 2.

Лема 1. Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство и $a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ вектори от $\mathbb{V}$. Ако a е вектор от $\mathbb{V}$, който не принадлежи на $\ell(a_1, \ldots, a_n)$, то векторите $a_1, \ldots, a_n, a$ отново са ЛНЗ.

Доказателство. Да допуснем, че системата от вектори $a_1, \ldots, a_n, a$ е ЛЗ и нека $\lambda a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$, където поне един от коефициентите $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda$ е различен от нула. Ако $\lambda = 0$, получаваме, че векторите $a_1, \ldots, a_n$ са ЛЗ, което е противоречие с условието и следователно $\lambda \neq 0$. Но ако $\lambda \neq 0$, то може да изразим a по следния начин:

$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i$, т.е. $a \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$, което отново е противоречие. Следователно системата вектори $a_1, \ldots, a_n, a$ е ЛНЗ.

$\square$

Теорема 2. Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Тогава:

а) **$\mathbb{V}$ е крайномерно и $\dim\mathbb{V} = n \Leftrightarrow$ във $\mathbb{V}$ съществуват n на брой ЛНЗ и всеки $n+1$ на брой вектора са ЛЗ.**
   В този случай, всеки n на брой ЛНЗ вектора от $\mathbb{V}$ са базис на $\mathbb{V}$ $(*)$

б) **$\mathbb{V}$ е безкрайномерно $\Leftrightarrow$ за всяко естествено число n, във $\mathbb{V}$ има n на брой ЛНЗ вектора.**

Доказателство. а)

$(\Rightarrow)$ Нека $\mathbb{V}$ е крайномерно и нека $\dim\mathbb{V} = n$. Тогава $\mathbb{V}$ притежава базис $a_1, \ldots, a_n$, състоящ се от n на брой вектора. Нека $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ е произволна система от $n+1$ на брой вектора от $\mathbb{V}$. Тези вектори се изразяват линейно чрез базисните вектори $a_1, \ldots, a_n$. От ОЛЛА следва, че векторите $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ са ЛЗ.

($\Leftarrow$) Нека $a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ вектори от $\mathbb{V}$ и всеки $n+1$ на брой вектора от $\mathbb{V}$ са ЛЗ. Нека a е произволен вектор от $\mathbb{V}$. Ако $a \notin \ell(a_1, \ldots, a_n)$, съгласно Лема 1, векторите $\{a_1, \ldots, a_n, a\}$ ще са ЛНЗ, което е противоречие. Следователно $a \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$. Така векторите $a_1, \ldots, a_n$ са ЛНЗ и всеки вектор a от $\mathbb{V}$ е тяхна линейна комбинация. Следователно тези вектори са базис на $\mathbb{V}$ и значи $\mathbb{V}$ е крайномерно и $\dim\mathbb{V} = n$.

(*) Нека $\dim\mathbb{V} = n$ и $b_1, \ldots, b_n$ е произволна система от n на брой ЛНЗ вектори от $\mathbb{V}$. Ако съществува вектор от $\mathbb{V}$ извън $\ell(b_1, \ldots, b_n)$, прилагайки Лема 1, ще получим $n+1$ на брой ЛНЗ вектора във $\mathbb{V}$, което противоречи с $\dim\mathbb{V} = n$. Следователно $\mathbb{V} = \ell(b_1, \ldots, b_n)$ и значи тези вектори са базис на $\mathbb{V}$. С това доказахме, е всеки n на брой ЛНЗ вектора от $\mathbb{V}$ са базис на $\mathbb{V}$.

б)
($\Rightarrow$) Нека $\mathbb{V}$ е безкрайномерно и n е произволно естествено число. Да допуснем, че във $\mathbb{V}$ няма n ЛНЗ вектора (т.е. всеки n вектора във $\mathbb{V}$ са ЛЗ). Тогава от а) следва, че $\dim\mathbb{V} < n$. Това противоречи с допускането.

($\Leftarrow$) Ако за всяко естествено число n във $\mathbb{V}$ има n на брой ЛНЗ вектора, отново от подусловие а) следва, че НЕ е възможно $\mathbb{V}$ да е крайномерно пространство. Следователно $\mathbb{V}$ е безкрайномерно.

$\square$

Твърдение 1. Всяка ЛНЗ система вектори в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ може да се допълни до базис на $\mathbb{V}$

Доказателство. Нека $b_1, \ldots, b_s$ са ЛНЗ вектори от $\mathbb{V}$ с $\dim\mathbb{V} = n \geq s$. Ако $\mathbb{V} = \ell(b_1, \ldots, b_s)$ (т.е. ако $s = n$), то тези вектори са базис на $\mathbb{V}$. В противен случай съществува вектор b_{s+1} от $\mathbb{V}$, такъв че $b_{s+1} \notin \ell(b_1, \ldots, b_s)$. Според Лема 1, векторите $b_1, \ldots, b_s, b_{s+1}$ са ЛНЗ. Ако $\mathbb{V} = \ell(b_1, \ldots, b_s, b_{s+1})$, т.е. ако $s+1 = n$, то тези вектори са базис на $\mathbb{V}$. В противен слузай съществува вектор b_{s+2} от $\mathbb{V}$, такъв че $b_{s+2} \notin \ell(b_1, \ldots, b_s, b_{s+1})$. Продължавайки по този начин (процесът не може да бъде безкраен, тъй като $\dim\mathbb{V} = n < \infty$. Достигаме до система от вектори $b_1, \ldots, b_s, \ldots, b_n$, които са ЛНЗ и $\mathbb{V} = \ell(b_1, b_2, \ldots, b_s, b_{s+1}, \ldots, b_n)$. Следователно тези вектори са базис на $\mathbb{V}$.

$\square$

Твърдение 2. Нека $\mathbb{V}$ е ненулево крайномерно пространство над полето $\mathbb{F}$. Една система вектори от $\mathbb{V}$ е базис на $\mathbb{V}$ $\Leftrightarrow$ всеки вектор от $\mathbb{V}$ се представя по единствен начин като линейна комбинация от векторите от тази система.

Доказателство.
($\Rightarrow$) Нека $b_1, \ldots, b_n$ е базис на $\mathbb{V}$ и $v \in \mathbb{V}$.
$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_n b_n$.
Като извадим горните две неравенства получаваме, че:
$0 = (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) b_n$.
От линейната независимост на векторите $b_1, b_2, \ldots, b_n$ получаваме, че: $\lambda_i = \mu_i$, за $i = \overline{1, n}$.
Следователно векторът v се записва по единствен начин като линейна комбинация на векторите $b_1, \ldots, b_n$.

(⇐) Нека векторите $b_1, \ldots, b_n$ са такива, че всеки вектор от $\mathbb{V}$ се представя по единвствен начин като тяхна линейна комбинация. Тогава $\mathbb{V} = \ell(b_1, \ldots, b_n)$ и за да докажем, че тези вектори образуват базис на $\mathbb{V}$, остава да покажем, че те са линейно независими. Нека разгледаме $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, където $\lambda_i \in \mathbb{F}$ за $i = \overline{1, n}$. Очевидно нулевият вектор може да се представи по следния начин: $0 \times b_1 + \ldots + 0 \times b_n = 0$. Но тъй като нулевият вектор се представя по единствен начин като линейна комбинация на векторите $b_1, \ldots, b_n$, то той се получава само при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ и следователно векторите $b_1, \ldots, b_n$ са ЛНЗ и образуват базис на $\mathbb{V}$.

$\square$

Координати

Дефиниция. Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$ и $\mathbb{V}$ е с размерност dim$\mathbb{V} = n$. Фиксираме базис $b_1, \ldots, b_n$ на $\mathbb{V}$. Нека $v \in \mathbb{V}$ и $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, където $\lambda_i \in \mathbb{F}$ за всяко $i = \overline{1, n}$. Еднозначно определените (от базиса) числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ наричаме координати на v в базиса $b_1, \ldots, b_n$.

Системи линейни уравнения

Системи линейни уравнения наричаме системи уравнения от първа степен с няколко неизвестни. Те имат следния вид:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Системата (1) е с m уравнения и n неизвестни. Неизвестните са $x_1, x_2, \ldots, x_n$, коефициентите са $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{mn}$, а свободни членове са $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Както коефициентите, така и свободните членове принадлежат на фиксирано поле $\mathbb{F}$.

Матрица на системата наричаме следната таблица:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, M \in \mathbb{F}_{m \times n}$$

Разширена матрица на система наричаме матрицата, която се получава като добавим към M още един стълб, съставен от свободните членове на системата.

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Една система наричаме несъвместима, ако не притежава нито 1 решение и съвместима, ако притежава поне едно решение. Една съвместима система наричаме определена, ако притежава точно едно решение и неопределена, ако притежава повече от едно решение – в този случай системата има безбройно много решения.
Казваме, че две системи са еквивалентни, ако и двете са несъвместими или и двете са съвместими и множествата от решенията им съвпадат.

Под елементарно преобразуване на системата ще разбираме:
- Умножение на ред от системата с число, рачлично от нула;
- Прибавяне на ред от системата, умножен по произволно число към друг ред.

Методът на Гаус, използващ такива елементарни преобразувания, предлага начин за решаване на произволна система линейни уравнения.

Хомогенна система линейни уравнения наричаме система от вида:

$$(1x)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \qquad \qquad \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Тоест свободните членове са равни на нула. Такива системи винги са съвместими, тъй като притежават нулевото решение $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$. Ако броят на ЛНЗ уравнения е по-малък от броя на неизвестните, системата притежава безброй много ненулеви решения.

Дефиниция (Минор). Ако фиксираме произволни k реда и произволни k стълба на матрицата M, елементите, които стоят на пресечните им точки образуват квадратна матрица от ред k. Детерминантата на всяка такава матрица ще наричаме минор на M от ред k. С други думи минор от ред k на M е всяка детерминанта от вида:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ & \ldots & \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Където $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leq n$.

Дефиниция (Ранг на матрица). Казваме, че матрица M има ранг r и записваме $r(M) = r$, ако M притежава различен от нула минор от ред r и всички минори от ред $r_1 > r$ са равни на нула. По дефиниция нулевата матрица има ранг 0.

$$r(M) \leq \min(m, n)$$

Ако всички минори от $r + 1$-ви ред са равни на нула, то и всички минори от ред, по-голям от $r + 1$ също са равни на нула.

Дефиниция (Ранг на система от вектори). Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство и $c_1, \ldots, c_n$ е система вектори от $\mathbb{V}$. Ще казваме, че тази система има ранг R и ще записваме $r(c_1, \ldots, c_n) = r$, ако съществуват R линейно независими вектора от тази система и всеки друг вектор от системата е тяхна линейна комбинация.

Теорема 3 (Ранг по колони и ранг по редове). Ако $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}^n$ са векторите редове на матрицата M, а $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}^m$ са векторите стълбове на M, то е в сила равенството: $r(a_1, \ldots, a_m) = r(b_1 \ldots, b_n) = r(M)$.

Теорема на Руше
Системата (1) е съвместима $\Leftrightarrow r(M) = r(\overline{M})$.

Доказателство. Означаваме с $b_1, \dots, b_n$ векторите стълбове на матрицата M, а с b – стълба от свободни членове. Имаме $r(M) = r(b_1, \dots, b_n) \le r(b_1, \dots, b_n, b) = r(\overline{M})$. $r(M) = r(\overline{M}) \Leftrightarrow b$ е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$, т.е. съществуват числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, такива че $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = b$. Но това е еквивалентно на това n-орката $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ да е решение на системата (1).

Теоремата на Руше е критерий за съвместимост на дадена система, но не показва как да намерим решенията ѝ.

Една съвместима система има единствено решение точно когато рангът на матрицата на системата е равен на броя на неизвестните и има безброй много решения, ако този ранг е по-малък от броя на неизвестните.

$\square$

Дефиниция (Подпространство). Нека W е непразно подмножество на линейното пространство $\mathbb{V}$. Ще казваме, че W е подпространство на $\mathbb{V}$, ако всяка линейна комбинация на вектори от W също принадлежи на W.

Директно от определенията се проверява, че всяка линейна комбинация от решения на една хомогенна система също е решение на тази система. Следователно множеството от решенията на хомогенната система (1х) е подпространство на линейното пространство $\mathbb{F}^n$.

Дефиниция (ФСР). Всеки базис на пространството от решения (ако то е ненулево) на хомогенната система (1х) наричаме фундаментална система решения (ФСР) на тази система. Така всяка ФСР се състои от ЛНЗ вектори от $\mathbb{F}^n$, които са решения на хомогенната система и всяко друго решение е тяхна линейна комбинация.

Твърдение 3. Нека $\mathbb{U}$ е пространство от решенията на хомогенната система (1х). Тогава, ако $r(M) = r$, то $\dim\mathbb{U} = n - r$. Тоест, всяка фундаментална система решения на системата (1х) се състои от $n - r$ на брой решения.

Доказателство. Ако $r(M) = 0$, т.е. ако $M = 0$, то $\mathbb{U} = \mathbb{F}^n$ и $\dim\mathbb{U} = n$. Ако M не е нулева матрица и първите r реда за ЛНЗ, то може да преобразуваме (1х) във вида:

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r & = - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ & \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r & = - a_{r,r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \text{, където } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ & \dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Неизвестните $x_{r+1}, \dots, x_n$ наричаме свободни неизвестни и им даваме последователно следните стойности:

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

Във всеки от тези случаи, намираме еднозначно определени стойности за неизвестните x_1, $x_2, \dots, x_r$. Така получаваме $n - r$ решения на хомогенната система (2).

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{c_1} &= (k_{11}, \dots, k_{1r};\ 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{c_2} &= (k_{21}, \dots, k_{2r};\ 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \mathbf{c_{n-r}} &= (k_{n-r,1}, \dots, k_{n-r,r};\ 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Ще докажем, че системата вектори (3) е ФСР на (2), с което твърдението ще бъде доказано.

Системата вектори (3) е ЛНЗ, защото матрицата, съставена от елементите им има ранг, равен на $n - r$, което е минорът от ред $n - r$, съставен от нули и единици и стоящ в дясната част на матрицата и равен на $1 \neq 0$.

Остава да проверим, че всяко решение на (2) е линейна комбинация на системата от вектори (3). Нека $\mathbf{c} = (k_1, \ldots, k_r;\ k_{r+1}, \ldots, k_n)$ е произволно решение на системата (2). Да разгледаме вектора $\mathbf{c}' = (\,*\,, \ldots, *\,;\ k_{r+1}, \ldots, k_n)$ (няма да изписваме първите r елемента на c'). k_{r+1}, k_{r+2}, $\ldots$, k_n определят еднозначно стойностите на $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и следователно $c = c'$. Следователно c е линейна комбинация на $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$, т.е. $c \in \ell(c_1, \ldots, c_{n-r})$.

Следователно $c_1, \ldots, c_{n-r}$ е ФСР на хомогенната система.

$\square$

Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система линейни уравнения

Всяко решение x на системата (1) е от вида $x = x_0 + u$, където x_0 е фиксирано решение на системата (1), а u е произволно решение на системата (1х). С други думи, всяко решение на системата (1) се записва във вида $x = x_0 + \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_{n-r} c_{n-r}$, където $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ е фиксирана ФСР на системата (1х).