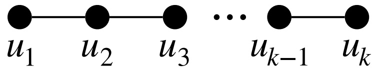
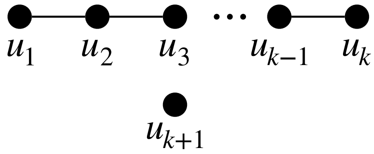
Задача 5. (2017-09-09 КН) Даден е свързан граф $G = (V, E)$ с $|V| = n$.
Под „път в G“ разбираме прост път – такъв, в който няма повтаряне на върхове. Докажете, че ако $p = u_1u_2\ldots u_k$ е произволен най-дълъг път в G и $k < n$, то u_1 и u_k НЕ са съседи.

Решение.

$p = u_1u_2\ldots u_k$

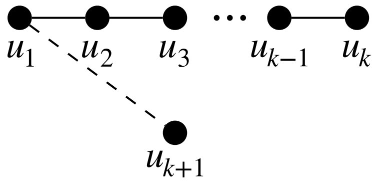


От $k < n \Rightarrow \exists$ поне един връх, който не е от p. Нека един от тези върхове е u_{k+1}.



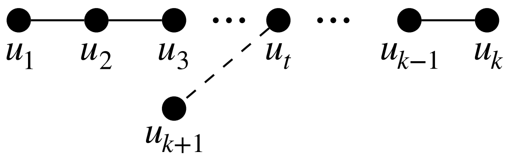
От това, че G е свързан $\Rightarrow \exists$ връх, който не е от p и е съсед на връх от p. Без ограничение на общността нека u_{k+1} е такъв връх.

I сл. Нека u_{k+1} е свързан с някой от краищата на p (или с u_1 или с u_k).

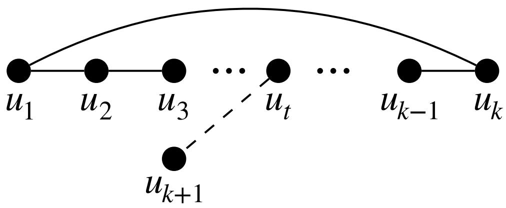


Без ограничение на общността нека $(u_{k+1}, u_1) \in E$ (или аналогично $(u_{k+1}, u_k) \in E$). Тогава $p_1 = u_{k+1}u_1u_2\ldots u_{k-1}u_k$ (или аналогично $p_2 = u_1u_2\ldots u_{k-1}u_ku_{k+1}$) е прост път в G с дължина $|p_1| = k + 1 > k = |p|$, което е противоречие с това, че p е с най-голяма дължина.

II сл. Нека u_{k+1} е свързан с някой от междинните върхове от p.
Нека $(u_{k+1}, u_t) \in E, 1 < t < k$.



Допускаме, че u_1 и u_k са съседи, тоест $(u_1, u_k) \in E$.



Тогава в G има прост път $p_t = u_{k+1}u_tu_{t+1}\ldots u_ku_1\ldots u_{t-1}$ с дължина $|p_t| = k + 1 > k = |p|$. Последното е противоречие с това, че p е с най-голяма дължина. Следователно $(u_1, u_k) \notin E$ и u_1 и u_k не са съседи.

$\square$