Задача 6. Нека L е регулярен език над азбуката Σ. Вярно ли е, че езикът $L' = \{uv \,|\, u, v \in \Sigma^*$ и $vu \in L\}$ е регулярен? Обосновете отговора си!

Решение.

ДА, вярно е! Много често очевидните неща са най-трудни за доказване. Това е едно от тях.

Тъй като L е регулярен език, то съществува краен автомат $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, s, F \rangle$, с език $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = L$.

Нека $vu \in L \Rightarrow \delta^*(s, vu) \in F \Rightarrow (\exists p \in Q)\big[\delta^*(s, v) = p \wedge \delta^*(p, u) \in F\big]$.

Дефинираме **езика на състоянието** p по следния начин:

$$W(p) = \{uv \,|\, \delta^*(s, v) = p \wedge \delta^*(p, u) \in F\}.$$ Тогава,

$$L' = \underbrace{\bigcup_{p \in Q} W(p)}_{\text{крайно множество}}$$

Остава да докажем, че $W(p)$ е регулярен език ($W(p)$ е език, тъй като дефинира множество от думи).

1) Нека $\mathscr{A}_p = \langle Q, \Sigma, \delta, s, \{p\} \rangle$. $v \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_p) \Leftrightarrow \delta^*(s, v) = p$
2) Нека $\mathscr{A}'_p = \langle Q, \Sigma, \delta, p, F \rangle$. $u \in \mathscr{L}(\mathscr{A}'_p) \Leftrightarrow \delta^*(p, u) \in F$

$$\begin{aligned} W(p) &= \{uv \,|\, \delta^*(s, v) = p \wedge \delta^*(p, u) \in F\} = \\ &= \{uv \,|\, v \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_p) \wedge u \in \mathscr{L}(\mathscr{A}'_p)\} = \\ &= \mathscr{L}(\mathscr{A}'_p) \bullet \mathscr{L}(\mathscr{A}_p). \end{aligned}$$

Но $\mathscr{L}(\mathscr{A}'_p)$ и $\mathscr{L}(\mathscr{A}_p)$ са регулярни и следователно и $W(p)$ е регулярен, от затвореността на регулярните езици спрямо операцията конкатенация.

Следователно и L' е регулярен от затвореността на регулярните езици спрямо операцията обединение, което искахме да докажем.

$\square$