Задача 1. (10 т.) Булевата функция $f(x, y, z)$ е дефинирана в таблицата по-долу.

а) Напишете Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма на $f(x, y, z)$ и я опростете (4 т.)

б) Напишете полиномът на Жегалкин на $f(x, y, z)$ (6 т.).

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Решение.

а) Очевидно $f \neq \tilde{0}$. Следователно, формулата получена от теоремата на Бул:

$$f(x, y, z) = \bigvee_{\substack{\forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1}} x^{\sigma_1} y^{\sigma_2} z^{\sigma_3}$$

наричаме Съвършена Дизюнктивна Нормална Форма (СъвДНФ) на f където сме дефинирали функцията $f(x, \sigma) = x^\sigma$ по следния начин:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{ако } \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \text{ако } \sigma = 0 \end{cases}$$

СъвДНФ на всяка различна от константата $\tilde{0}$ функция се състои само от пълни елементарни конюнкции. Формули, аналогични на СъвДНФ, в които могат да се съдържат и непълни елементарни конюнкции, наричаме Дизюнктивни Нормални Форми (ДНФ). Константата $\tilde{0}$ няма нито една ДНФ. Всяка една от останалите булеви функции има точно една СъвДНФ, а може да има и повече ДНФ.

Да построим СъвДНФ на функцията f от условието. Имаме 5 вектора от аргументи, при които f има стойност 1. Затова

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^0 \vee x^1 y^0 z^1 \\ &= \underbrace{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}}_{(1)} \vee \underbrace{\overline{x}\,\overline{y} z}_{(2)} \vee \overline{x} y z \vee \underbrace{x \overline{y}\,\overline{z}}_{(1)} \vee \underbrace{x \overline{y} z}_{(2)} = \\ &= (\overline{x} \vee x)\overline{y}\,\overline{z} \vee (\overline{x} \vee x)\overline{y} z \vee \overline{x} y z = \\ &= \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{y} z \vee \overline{x} y z = \\ &= \overline{y}(\overline{z} \vee z) \vee \overline{x} y z = \\ &= \overline{y} \vee \overline{x} y z \end{aligned}$$

Последният израз лесно се проверява, че е еквивалентен на функцията f. За всички стойности, за които $y = 0$, f ще е равно на 1. Ако $y = 1$, то тогава за да бъде f отново равно на 1 е необходимо $x = 0$ и $z = 1$. Във всички останали случаи f е равно на 0.

б) Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин. Търсим полином от вида:

$$f(x,y,z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_{12}xy \oplus a_{23}yz \oplus a_{13}xz \oplus a_{123}xyz$$

Имаме:

$f(0{,}0{,}0) = 1 = a_0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$

$f(0{,}0{,}1) = 1 = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 \quad \Rightarrow a_3 = 0$

$f(0{,}1{,}0) = 0 = a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 \quad \Rightarrow a_2 = 1$

$f(0{,}1{,}1) = 1 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{23} = a_{23} \quad \Rightarrow a_{23} = 1$

$f(1{,}0{,}0) = 1 = a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 \quad \Rightarrow a_1 = 0$

$f(1{,}0{,}1) = 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1 \oplus a_{13} \quad \Rightarrow a_{13} = 0$

$f(1{,}1{,}0) = 0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12} \quad \Rightarrow a_{12} = 0$

$f(1{,}1{,}1,) = 0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_{123} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123} = 1 \oplus a_{123} \quad \Rightarrow a_{123} = 1$

Следователно $f(x,y,z) = 1 \oplus y \oplus yz \oplus xyz$, което е търсеният полином на Жегалкин за f.

$\square$

Алтернативен алгоритъм за намиране на полинома на Жегалкин:

000	001	010	011	100	101	110	111
1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	–
0	1	1	1	0	1	–	–
1	0	0	1	1	–	–	–
1	0	1	0	–	–	–	–
1	1	1	–	–	–	–	–
0	0	–	–	–	–	–	–
0	–	–	–	–	–	–	–