

ренцирования сложной функции, если их аргументы, как и в (39.3), линейно зависят от t . Поэтому приведенное выше доказательство формулы Тейлора полностью сохраняется и для этого случая.

Формулу Тейлора (39.1) можно доказать и при еще более слабых ограничениях, однако это потребовало бы более тонкого доказательства, и мы не будем на этом останавливаться (для случая одной переменной см. упражнение 1 в §13).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить и в другом смысле: не требовать, чтобы функция f была определена во всех точках некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy . Именно если функция f определена и имеет дифференцируемые частные производные до порядка $m - 1$ включительно в каждой точке отрезка с концами в точках (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с доказательством.

Из всего сказанного следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 18.2) и имеет в G дифференцируемые частные производные порядка $m - 1$, то для любых двух точек $(x_0, y_0) \in G$ и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$ имеет место формула Тейлора (39.1).

Для справедливости же формулы Тейлора (39.9), кроме дифференцируемости производных порядка $m - 1$ в окрестности точки (x_0, y_0) , достаточно лишь потребовать, чтобы производные порядка m были непрерывны только в точке (x_0, y_0) .

Мы не стали всего этого сразу оговаривать для простоты формулировок и доказательств теоремы 1 и ее следствия.

Подчеркнем еще, что в формуле (39.9) $r_m(\Delta x, \Delta y) = o(p^m)$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле, в смысле предела в точке (x_0, y_0) (почему?).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Доказать, что ее *многочлен Тейлора* порядка m , т. е. многочлен

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} [(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y}]^{\{k\}} f(x_0, y_0),$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x, y)$ «в бесконечно малой окрестности точки (x_0, y_0) ». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x, y)$ степени не больше m (в каждом его члене сумма показателей степени x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(x, y) = Q(x, y) + o(p^n), \quad n \geq m,$$

где

$$p = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

он совпадает с указанным многочленом Тейлора $P(x, y)$ функции $f(x, y)$.

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1'. Если функция n переменных $y = f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)})^*$, то справедлива формула

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \end{aligned} \quad (39.18)$$

где

$$\begin{aligned} r_{m-1}(\Delta x) &= \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{\{m\}} f(x_1^{(0)} + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \theta \Delta x_n), \\ &0 < \theta < 1, \quad \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \end{aligned} \quad (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x), \quad (39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов:

либо

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(\Delta x) \Delta x_1^{m_1} \dots \Delta x_n^{m_n}, \quad (39.21)$$

где

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_{m_1, \dots, m_n}(\Delta x) = 0, \quad \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2},$$

либо

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x) \rho^m, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \quad (39.22)$$

т. е.

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) можно записать в виде

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x). \quad (39.23)$$

*) Эти ограничения можно несколько ослабить аналогично тому, как это было указано выше в случае функций двух переменных.