реценирования сложной функции, если их аргументы, как и в (39.3), линейно зависят от t. Поэтому приведенное выше доказательство формулы Тейлора полностью сохраняется и для этого случая.

Формулу Тейлора (39.1) можно доказать и при еще более слабых ограничениях, однако это потребовало бы более тонкого доказательства, и мы не будем на этом останавливаться (для случая одной переменной см. упражнение 1 в §13).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить и в другом смысле: не требовать, чтобы функция f была определена во всех точках некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно если функция f определена и имеет дифференцируемые частные производные до порядка $m-1$ включительно в каждой точке отрезка с концами в точках $(x_0,\ y_0)$ и $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с доказательством.

Из всего сказанного следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 18.2) и имеет G дифференцируемые частные производные порядка $m-1$, то для любых двух точек $(x_0,\ y_0)\in G$ и $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in G$ имеет место формула Тейлора (39.1).

Для справедливости же формулы Тейлора (39.9), кроме дифференцируемости производных порядка $m-1$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, достаточно лишь потребовать, чтобы производные порядка m были непрерывны только в точке $(x_0,\ y_0)$.

Мы не стали всего этого сразу оговаривать для простоты формулировок и доказательств теоремы 1 и ее следствия.

Подчеркнем еще, что в формуле (39.9) $r_m(\Delta x,\ \Delta y)=o(p^m)$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле, в смысле предела в точке $(x_0,\ y_0)$ (почему?).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$. Доказать, что ее *многочлен Тейлора* порядка m, т. е. многочлен

$$P(x,\ y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\big[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\big]^{\{k\}}f(x_0,y_0),$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x,y)$ «в бесконечно малой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x,y)$ степени не больше m (в каждом его члене сумма показателей степени у переменных x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(x,\ y)=Q(x,\ y)+o(p^m),\quad n\geqslant m,$$

где

$$p=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

он совпадает с узказанным многолченом Тейлора $P(x,y)$ функции $f(x,y)$.

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1′. *Если функция n переменных $y=f(x_1,...,x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_i^{(0)})$*), то справедлива формула*

$$\Delta y=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,...,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\Big)^{\{k\}}f(x^{(0)})+r_{m-1}(\Delta x),\qquad(39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\Big)^{\{m\}}f(x_1^{(0)}+\theta\Delta x_1,...,x_n^{(0)}+\theta\Delta x_n)$$

$$0<\theta<1,\quad \Delta x=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)\qquad(39.19)$$

а также формула

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\Big)^{\{k\}}f(x^{(0)})+r_m(\Delta x),\qquad(39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов:

либо

$$r_m(\Delta x)=\sum_{m_1+...+m_n=m}\varepsilon_{m_1...m_n}(\Delta x)\Delta x_1^{m_1}...\Delta x_n^{m_n},\qquad(39.21)$$

где

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_{m_1,...,m_n}(\Delta x)=0,\quad \rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2},$$

либо

$$r_m(\Delta x)=\varepsilon(\Delta x)\rho^m,\quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0,\qquad(39.22)$$

т.е.

$$r_m(\Delta x)=o(\rho^m),\quad \rho\to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) можно записать в виде

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kf(x^{(0)})+r_m(\Delta x).\qquad(39.23)$$

*) Эти ограничения можно несколько ослабить аналогично тому, как это было указано выше в случае функций двух переменных.