реценирования сложной функции, если их аргументы, как и в (39.3), линейно зависятот t. Поэтому приведенное выше доказательство формулы Тейлора полностью сохраняется и для этого случая.

Формулу Тейлора (39.1) можно доказать и при еще более слабых ограничениях, однако это потребовало бы более тонкого доказательства, и мы не будем на этом останавливаться (для случая одной пере- менной см. упражнение 1 в §13).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить и в другом смысле: не требовать, чтобы функция f была определена во всех точках не которой окрестности точки $(x_0,\, y_0)$, а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно если функция f определена и имеет дифференцируемые частные производные до порядка $m - 1$ включительно в каждой точке отрезка с концами в точках $(x_0,\, y_0)$ и $(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$, то формула (39.1) также остается спра- ведливой вместе с доказательством.

Из всего сказанного следует, что если функция f определена в вы- пуклой области G (см. п. 18.2) и имеет G дифференцируемые част- ные производные порядка $m - 1$, то для любых двух точек $(x_0,\, y_0) \in$ G и $(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$ $\in$ G имеет место формула Тейлора (39.1)

Для справедливости же формулы Тейлора (39.9), кроме дифференцируемости производных порядка $m - 1$ в окрестности точки $(x_0,\, y_0)$, достаточно лишь потребовать, чтобы производные порядка m были непрерывны только в точке $(x_0,\, y_0)$.

Мы не стали всего этого сразу оговаривать для простоты форму лировок и доказательств теоремы 1 и ее следствия.

Подчеркнем еще, что в формуле (39.9) $r_m(\Delta x,\, \Delta y) = o(p^m)$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а вболее сильном смысле, в смысле предела в точке $(x_0,\, y_0)$ (почему?).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со свомими частными проивзодными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $(x_0,\, y_0)$. Доказать, что ее многочлен Тейлора порядка m, т. е. многочлен

$$P(\mathrm{x},\, \mathrm{y}) = \sum_{k=0}^{m} \tfrac{1}{k!}\left[(x - x_0)\tfrac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\tfrac{\partial}{\partial y}\right]^{\{k\}} f(x_0, y_0),$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x, y)$ "в бесконечно малой окрестности точки $(x_0,\, y_0)$". Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x, y)$ степени не больше m (в каждом его члене сумма показателей степени у переменных x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(\mathrm{x},\, \mathrm{y}) = Q(\mathrm{x},\, \mathrm{y}) + o(p^m),\ n \geq m,$$

где

$$p = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

он совпадает с узказанным многолченом Тейлора $P(x, y)$ функции $f(x, y)$.