Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1'. *Если функция n переменных $y = f(x_1, ..., x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$*), то справедлива формула*

$$\Delta y = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \tfrac{1}{k!}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \tfrac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\big)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \ (39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x) =$$

$$= \tfrac{1}{m!}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \tfrac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\big)^{\{m\}} f(x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, ..., x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n)$$

$$0 < \theta < 1, \Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \ (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{k!}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \tfrac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\big)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x), \ (39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов:

либо

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1+...+m_n=m} \varepsilon_{m_1...m_n}(\Delta x)\Delta x_1^{m_1}...\Delta x_n^{m_n}, \ (39.21)$$

где

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_{m_1,...,m_n}(\Delta x) = 0, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2},$$

либо

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\rho^m, \lim_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \qquad (39.22)$$

т.е.

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \rho \to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) можно записать в виде

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x). \ (39.23)$$

---

*) Эти ограничения можно несколько ослабить аналогично тому, как это было указано выше в случае функций двух переменных.