



NIVELAMENTO DE **MATEMÁTICA**

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Professor:

Me. Luciano Xavier de Azevedo

DIREÇÃO

Reitor Wilson de Matos Silva

Vice-Reitor Wilson de Matos Silva Filho

Pró-Reitor de Administração Wilson de Matos Silva Filho

Pró-Reitor de EAD William Victor Kendrick de Matos Silva

Presidente da Mantenedora Cláudio Ferdinandi

NEAD - NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Diretoria Operacional de Ensino Kátia Coelho

Diretoria de Planejamento de Ensino Fabrício Lazilha

Head de Planejamento de Ensino Camilla Cocchia

Gerência de Produção de Conteúdos Gabriel Araújo

Supervisão do Núcleo de Produção de Materiais Nádila de Almeida Toledo

Supervisão de Projetos Especiais Daniel F. Hey

Projeto Gráfico Thayla Guimarães

Designer Educacional Yasminn Talyta Tavares Zagonel

Editoração Isabela Mezzaroba Belido

Qualidade Textual Meyre Aparecida Barbosa

C397 **CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ.** Núcleo de Educação a Distância; **SOBRENOME1**, Nome1;

Nome do Livro. Autor1;
Maringá-Pr.: UniCesumar, 2017.
33 p.

"Pós-graduação Universo - EaD".

1. xxxxxxx. 2. xxxxxxxxxxxx. 3. EaD. I. Título.

CDD - 22 ed. xxxxx
CIP - NBR 12899 - AACR/2

As imagens utilizadas neste livro foram
obtidas a partir do site **shutterstock.com**

NEAD - Núcleo de Educação a Distância
Av. Guedner, 1610, Bloco 4 - Jardim Aclimação - Cep 87050-900
Maringá - Paraná | unicesumar.edu.br | **0800 600 6360**

sumário

01

05| POTENCIAÇÃO

02

11| RADICIAÇÃO

03

19| PORCENTAGEM

04

22| REGRA DE TRÊS

05

28| RAZÃO E PROPORÇÃO

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Aprender os conceitos básicos e as propriedades da potenciação.
- Utilizar a decomposição de fatores primos para representar números.
- Compreender, identificar e utilizar a simplificação de radicais com a extração de fatores do radicando; entender e realizar as operações básicas com radicais.
- Resolver situações problemas que envolvam o cálculo de porcentagem bem como problemas que envolvam variações de grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais.
- Construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.

PLANO DE ESTUDO

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- Potenciação
- Radiciação
- Porcentagem
- Regra de três
- Razão e proporção

Aluno(a), os ícones a seguir tem funções específicas dentro do seu livro, veja a explicação sobre cada um deles:



Selecionando este ícone na entrada de cada tópico, você terá acesso a vídeos com explicações gerais a respeito do conteúdo apresentado no tópico em questão. Nestes vídeos são exibidos o que de mais importante e essencial você vai estudar. Fique atento!



Selecionando este ícone, você terá acesso a vídeos de resolução de exemplos. Importante lembrar que as resoluções são inéditas, não sendo as mesma dispostas no livro, assim você terá uma experiência ainda maior a respeito do assunto abordado.

$$\sin d + \cos d = \tan d$$



$$p^n = \frac{n}{p} \quad (x+y)^2 =$$



$$\frac{(6 \times 10^0)}{2} = 0$$



$$10^0/2 = 5^{1-0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$10 = \pi^2 - 10^0$$

POTENCIAÇÃO

Caro (a) aluno (a), no decorrer de sua vida estudantil, seja no Ensino Fundamental seja no Médio, você estudou as quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e a divisão. Nesta Unidade, além de trabalhar com potenciação, também trataremos da radiciação, ambas operações úteis em várias situações do nosso dia a dia, seja para fazermos representações numéricas, seja para conseguirmos efetuar cálculos de forma mais rápida.

Para começarmos a falar sobre potenciação, analise o seguinte caso: Uma pessoa fica sabendo de certo boato, conta-o para mais três amigos e gasta, para isso, 10 minutos. Suponhamos que cada um dos três amigos resolve fazer a mesma coisa e, 10 minutos depois, contam o boato para outros três colegas que ainda não a conheciam. Assim, cada um que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados, gastando, assim, 10 minutos.

A Tabela 1 mostra o número de pessoas novas que ouvem o boato, observe que temos um produto com fatores iguais:

Tabela 1: Evolução do número de pessoas que ouvem o boato

Tempo (minutos)	Novas pessoas que ouvem os boatos
10	3
20	3×3
30	$3 \times 3 \times 3$
40	$3 \times 3 \times 3 \times 3$
50	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
60	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Fonte: o autor.

Nesse caso, a disseminação do boato mostra uma situação em que a potenciação pode ser útil, pois auxilia na representação de números grandes, bem como facilita os cálculos com esses números. Além disso, em situações problemas, podem apresentar a evolução de certas grandezas.

Potenciação

Para iniciarmos nosso estudo sobre potenciação, indicaremos multiplicações de fatores iguais. Usamos o símbolo a^n , sendo a um número inteiro e n um número natural maior que 1 para indicar o produto de n fatores iguais a a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ fatores}}$$

Definiremos, ainda:

a é a **base**;

n é o **expoente**;

o resultado é a **potência**.

Por exemplo, o produto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ pode ser indicado na forma 3^4 , que tem como resultado 81. Ainda, por definição, temos que: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo a diferente de zero, e $a^1 = a$ para todo a .

De forma geral, definimos que potenciação ou exponenciação é a operação de elevar um número ou expressão a um dado valor.

+₋ %_x exemplos resolvidos

01. Resolva cada uma das seguintes potências:

a) 5^3

b) $(-2)^2$

c) $(-3)^3$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

RESOLUÇÃO:

01. Pela definição, devemos ter um produto com três fatores iguais a 5, assim, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Observe que devemos fazer o produto com dois fatores iguais e negativos, logo, somos levados a fazer o produto dos sinais, assim: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

Semelhantemente ao exemplo anterior, temos $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Façamos um produto de dois fatores, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

+₋[%]_x exemplos resolvidos



02. Calcule $3^5 - (-5)^2 + 3^1 + 4^0 + 2^{-1}$

RESOLUÇÃO:

02. Apenas para facilitar a visualização da resolução das potências, calcularemos, separadamente, cada termo da expressão:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

$$3^1 = 3$$

$$4^0 = 1$$

$$2^{-1} = 1/2 = 0,5$$

Agora, montamos novamente a expressão com os resultados obtidos:

$$243 - 25 + 3 + 1 + 0,5 = 222,5$$

Propriedades Operatórias de Potências

A humanidade demorou milhares de anos para traçar o caminho da contagem até os cálculos de potenciação. No século 3 a.C., Arquimedes desenvolveu uma importante etapa no estudo de potenciação, fazendo importantes contribuições tanto na parte teórica como no desenvolvimento prático da matemática. Entre as contribuições de Arquimedes, foi a formulação de algumas propriedades das potências com que, a partir de agora, você terá contato. Enunciaremos algumas delas a seguir.

Produto de potência de mesma base

Para enunciarmos a primeira propriedade, utilizaremos um exemplo bem simples com expoentes naturais. Os casos de não naturais, a propriedade vale de mesma forma. Suponha que precisemos resolver o produto $2^2 \cdot 2^3$, assim, resolveríamos separadas as duas potências e, em seguida, faríamos a multiplicação entre esses resultados. Também podemos fazer o seguinte:

$$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

Agora, se tivermos fatores naturais grandes, ou mesmo racionais, já poderia apresentar problemas. Para esse tipo de produto de fatores com bases iguais, aplicaremos a seguinte propriedade:

Para efetuarmos potência de fatores com mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Quociente de potência de mesma base

Um raciocínio semelhante apresentado para a multiplicação pode ser aplicado para a divisão. Para divisão de fatores com bases iguais aplicaremos a seguinte propriedade:

Para efetuarmos a divisão com fatores de mesma base, conserva-se a base e diminuem-se os expoentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Potência de um Produto

Ao se deparar com potência do produto de dois fatores elevado a certo expoente, procedemos assim:

A potência do produto de dois ou mais fatores é igual ao produto de cada um destes fatores elevados ao expoente em questão.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potência de um Quociente

Outra propriedade importante das potências é a potência do quociente. Podemos proceder de forma análoga ao que fizemos no caso da multiplicação, mas, neste caso, os divisores não podem ser iguais a zero pela condição de existência da divisão.

A potência do quociente de dois ou mais fatores é igual ao quociente de cada um destes fatores elevados ao expoente em questão.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ com } b \neq 0$$

Potência de uma Potência

Aluno (a), ainda dando continuidade ao nosso conjunto de propriedade, trataremos da potência de uma potência, que nada mais é do que uma potência elevada a certo número. Para uma base diferente de zero, quando temos uma potência de potência, podemos expressar a seguinte igualdade:

$$(a^n)^m = a^{mn}$$

+₋[%]_x exemplos resolvidos

03. Determine o valor numérico para a expressão $[2^9 : (2^2 \cdot 2)^3]^{-3}$

04. Seja $5^{3a} = 64$. Usando esse fator, obtenha o valor de 5^{-a}

RESOLUÇÃO:

03. Primeiramente, resolveremos os parênteses fazendo uma multiplicação com fatores de mesma base e, em seguida, uma potência de potência. Depois, resolveremos a operação indicada nos colchetes, assim:

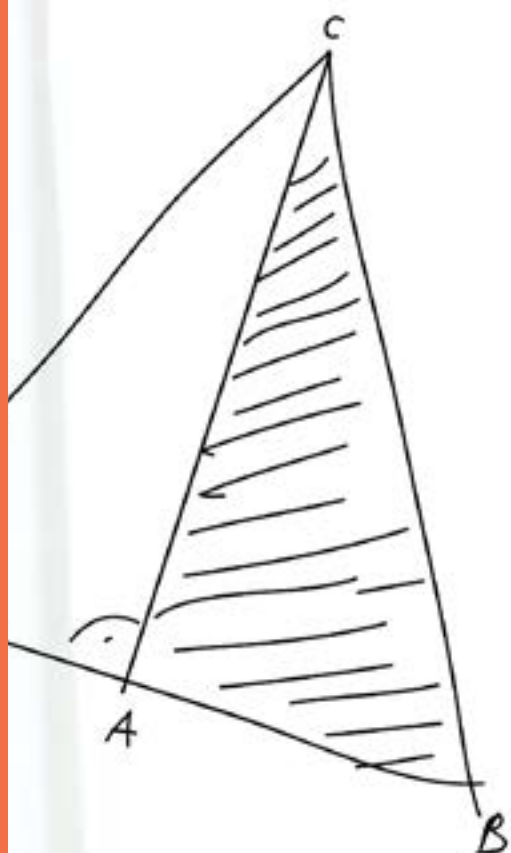
$$\begin{aligned} [2^9 : (2^2 \cdot 2)^3]^{-3} &= [2^9 : (2^3)^3]^{-3} \\ [2^9 : 2^9]^{-3} &= [1]^{-3} = 1 \end{aligned}$$

04. Usando fatoração, temos $64 = 4^3$, assim, $5^{3a} = 4^3$, o que implica $5^a = 4$. Então, 5^{-a} , por ter um expoente negativo indica a inversão de 5^a . Logo, a resposta é $1/4$

$$2+2=4$$

$$\sqrt{3}$$

$$2 \times 2 = 4$$



RADICIAÇÃO

No tópico I, você desenvolveu situações que tratavam de potenciação. Neste tópico II, trataremos de conceitos envolvendo as operações com radicais, em especial as extrações, simplificações e operações com radicais bem como a racionalização que, na Matemática, tem uma grande utilidade.

Seja um número real a e o natural n maior ou igual a 2, diremos que a expressão representa o único número real x que verifica e tem o mesmo sinal que a (quando existe). Quando n é omitido, significa que temos $n = 2$ e o símbolo de radical refere-se ao que chamamos de raiz quadrada. O número x é o resultado da raiz, n o **índice**, e o radicando e o símbolo $\sqrt{}$ o radical.

A radiciação é uma operação matemática, sendo a raiz uma maneira de se representar a potenciação com expoente fracionário. Muitos acreditam que o símbolo origina-se de erro de grafia da letra r , que é a primeira letra da palavra radix em expressões como “*radix quadratum 16 aequalis 4*”, que significa, em latim, lado de um quadrado de área 16 é igual a 4.

$+\frac{\%}{-x}$ exemplos

- a) 7 é a raiz quadrada de 49, pois $7^2 = 49$
- b) 3 é a raiz cúbica de 27, pois $3^3 = 27$

Observe algumas consequências que envolvem radiciação sendo n , natural e $n > 1$:

1. $\sqrt[n]{a}$ sempre existe se n for ímpar
2. $\sqrt[n]{a}$ existe apenas para $a \geq 0$ se n for par

$+\frac{\%}{-x}$ exemplos

- a) $\sqrt[4]{-5}$ não existe nos números reais
- b) $\sqrt[3]{-8} = -2$

Propriedades da radiciação

Algumas operações envolvendo radiciação exigem o conhecimento que envolve radicais, e a seguir listaremos algumas. Obedecendo às condições de existência indicadas nas consequências 1 e 2, vale as seguintes propriedades:

Multiplicação e Divisão

Para fazermos multiplicação ou divisão envolvendo radicais, devem-se ter índices iguais. Observado isso, o resultado será um radical de mesmo índice dos fatores e radicando igual ao produto ou quociente dos radicandos dos fatores, ou seja:

$${}^n\sqrt{a} \cdot {}^n\sqrt{b} = {}^n\sqrt{a \cdot b}$$

$${}^n\sqrt{a} : {}^n\sqrt{b} = {}^n\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Se os índices forem diferentes, proceda primeiro conforme a propriedade que será comentada na sequência do texto e, em seguida, use essa:

${}_{+}_{-}_{\times}$ exemplos

$$\text{a) } {}^3\sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{7} = {}^3\sqrt{14}$$

$$\text{b) } \sqrt{18} : \sqrt{6} = \sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}$$

Radical de uma raiz

Para reduzir uma raiz de outra raiz a um só radical, faremos o produto entre os índices, resultando em outra raiz com o índice resultante desse produto e repetimos o radicando, ou seja: ${}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}} = {}^{m \cdot n}\sqrt{a}$

${}_{+}_{-}_{\times}$ exemplos

$$\text{a) } \sqrt{{}^3\sqrt{10}} = {}^6\sqrt{10}$$

Expoente Fracionário

O expoente fracionário indica um radical. O denominador dessa fração é o índice do radical, e o numerador é o expoente da potência cuja base é o radicando, ou seja:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ainda, como extensão dessa propriedade tem-se que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$.

+₋ x exemplos

a) $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3}$

b) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^4} = \sqrt[12]{16}$

Soma algébrica

Podemos efetuar a adição algébrica com radicais, colocando os radicais em evidência (radicais de mesmo índice e mesmo radicando), depois disso, somamos, algebricamente, os fatores externos:

$$a^n \sqrt[n]{c} \pm b^n \sqrt[n]{c} = (a \pm b) \sqrt[n]{c}$$

+₋ x exemplos resolvidos

01. Calcule:

a) $4^3 \sqrt[3]{7} + 5^3 \sqrt[3]{7} - 3^3 \sqrt[3]{7}$

RESOLUÇÃO:

a) Notamos que todos os radicais são semelhantes ($\sqrt[3]{7}$). Então, faremos as operações com os números que aparecem externamente a essa raiz, multiplicando-as:

$$4^3 \sqrt[3]{7} + 5^3 \sqrt[3]{7} - 3^3 \sqrt[3]{7} = (4 + 5 - 3) \sqrt[3]{7} = 6^3 \sqrt[3]{7}$$

+₋[%]_x exemplos resolvidos

01. Calcule:

b) $\sqrt{54} + \sqrt{96} + 8\sqrt{6}$

c) $\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$

Resolução:

RESOLUÇÃO:

b) Neste caso, não temos, aparentemente, radicais semelhantes, então, podemos fatorar os números dentro da raiz para verificar se existe possibilidade de simplificação do radical:

$$\begin{array}{r|l}
 54 & 2 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \underline{2.3.3^2} \\
 & 2.3.3^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 96 & 2 \\
 48 & 2 \\
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \underline{2^2.2^2.2.3}
 \end{array}$$

Assim,

$$\sqrt{54} = \sqrt{2.3.3^2} = 3\sqrt{2.3} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{2^2.2^2.2.3} = 2.2\sqrt{2.3} = 4\sqrt{6}$$

Observe que, agora, temos radicais semelhantes. Daí:

$$\sqrt{54} = \sqrt{96} + 8\sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 8\sqrt{6}$$

$$\sqrt{54} + \sqrt{96} + 8\sqrt{6} = (3 + 4 + 8)\sqrt{6} = 15\sqrt{6}$$

c) A operação de soma algébrica entre radicais só pode ser realizada se os radicais forem semelhantes, neste caso, note que isso não ocorre. Então, devemos operar apenas nos termos semelhantes que aparecem na expressão:

$$\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (1 + 5)\sqrt{3} + (-7 + 4)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

Potência de uma raiz

Para obtermos a potência de uma raiz n -ésima de um elemento a , devemos obter a raiz n -ésima de a elevada ao expoente da potência, ou seja,

$$\left({}^n\sqrt{a}\right)^m = {}^n\sqrt{a^m}$$

Para n natural maior ou igual a dois e a não negativo.

$\pm_{\times}^{\%}$ exemplos

$$\text{a) } \left({}^5\sqrt{2}\right)^4 = {}^5\sqrt{2^4} = {}^5\sqrt{16}$$

$$\text{b) } \left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$$

Racionalização

O processo apresentado a seguir consiste em obter frações equivalentes a partir de uma indicada que apresenta uma raiz no denominador. Racionalização de denominadores consiste, portanto, na obtenção de uma fração com denominador racional equivalente a uma anterior, que possuía um ou mais radicais em seu denominador. A ideia da racionalização de denominadores é fazer um produto do numerador e do denominador por certo fator de forma que a raiz que aparece no denominador não esteja mais lá e não altere a fração original, ou seja, obteremos uma fração equivalente com denominador racional para substituir a original com denominador irracional.

Para facilitar nossos estudos, veremos três casos de racionalização:

Caso 1: Fração com raiz quadrada no denominador

O numerador e o denominador da fração devem ser multiplicados pelo radical que se encontra no denominador.

Note que não alteramos a fração original, pois estamos multiplicando por 1.

+₋ %_x exemplos resolvidos

02. Racionalize cada um dos números abaixo:

a) $\frac{10}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

RESOLUÇÃO:

02. Nas duas situações, usaremos o exposto no caso 1, ou seja, multiplicaremos por uma fração com numerador e denominador iguais à raiz que aparece no denominador da fração original:

a) $\frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

Caso 2: Fração com raiz com índice diferente de dois no denominador

O numerador e o denominador da fração devem ser multiplicados pelo radical de mesmo índice e de mesmo radicando, mas com expoente que complementa para se igualar ao índice.

+₋ %_x exemplos resolvidos

03. Faça a racionalização das seguintes expressões:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2^2}}$

b) $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$

RESOLUÇÃO:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^1}}{\sqrt[3]{2^1}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$

b) $\frac{6}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{6\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{6\sqrt[4]{27}}{3} = 2\sqrt[4]{27}$

Caso 3: Fração cujo denominador é um binômio de forma que, pelo menos, um dos termos é raiz quadrada irracional

Para resolvermos esse caso, devemos multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo binômio conjugado do denominador. Desta forma, usaremos o produto notável:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

+₋ x exemplos resolvidos

04. Racionalize cada uma das expressões:

a) $\frac{3}{3 + \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

RESOLUÇÃO:

04. Em cada um dos casos, devemos multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, desta forma:

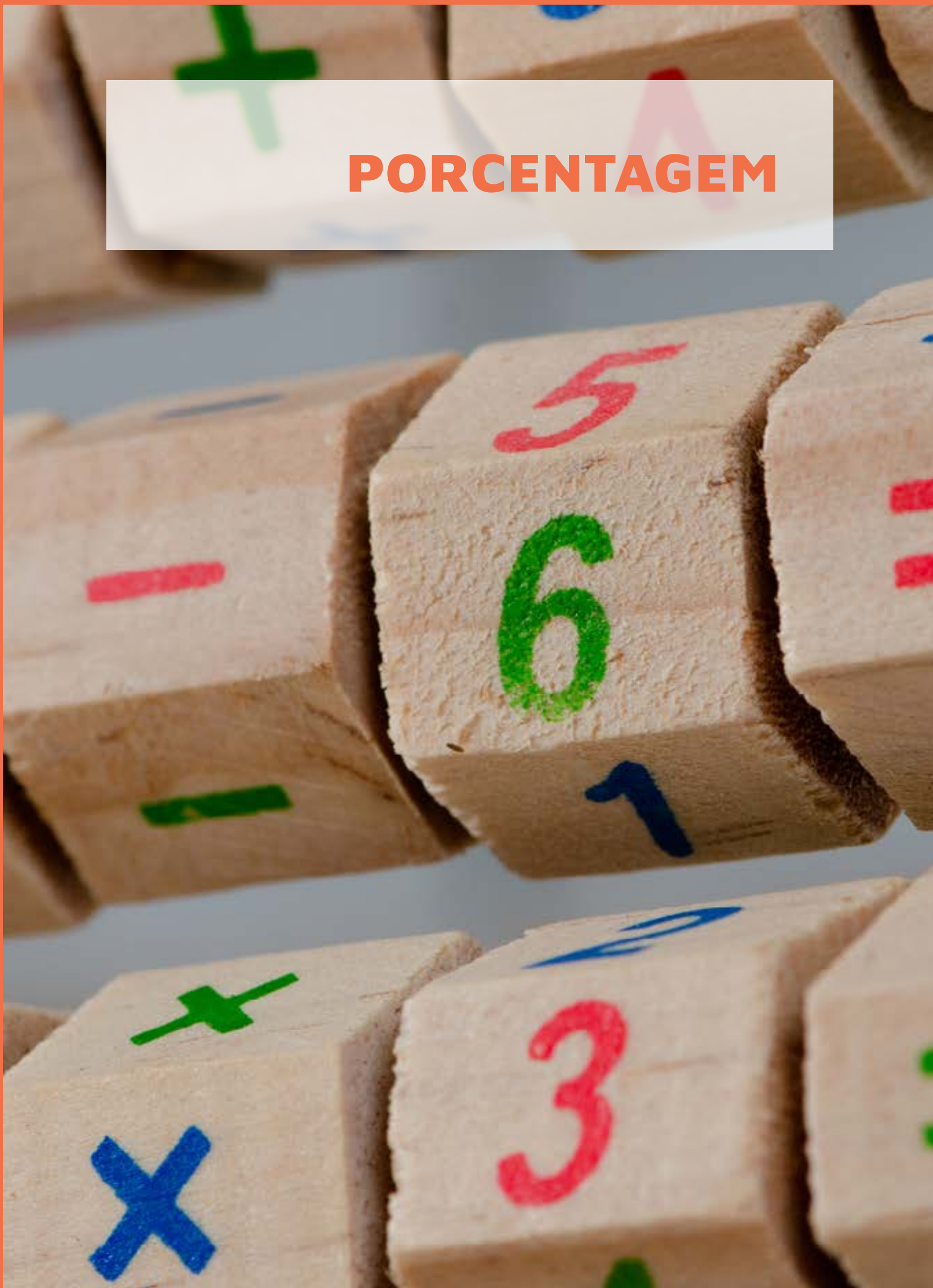
a)
$$\frac{3}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{(3 - \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})} = \frac{3.(3 - \sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3.(3 - \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{3.(3 - \sqrt{2})}{7}$$

ou
$$\frac{9 - 3\sqrt{2}}{7}$$

b)
$$\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4 - 3} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

c)
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

PORCENTAGEM



Quando estamos em shoppings, vemos, com frequência, anúncios sobre queda de preços, liquidações e outros tipos de argumentos para chamar a nossa atenção. Esses anúncios, em sua maioria, informam desconto em porcentagem, que está diretamente ligada à nossa vida, não só nesses anúncios, mas nos indicadores, como inflação, crescimento demográfico etc. Mas o que é porcentagem?

Neste tópico, responderemos esta pergunta. A palavra porcentagem origina-se do latim *per centum*, que significa por cem ou por cento, ou seja, é uma razão cujo denominador é **100**. Usamos o símbolo % para representar porcentagem, assim, quando dizemos $x\%$ estamos indicando a fração $\frac{x}{100}$. Isso significa que dividimos algo em 100 partes e tomamos x dessas partes.

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Para representarmos porcentagem, podemos usar uma fração centesimal (denominador igual a cem) ou um número decimal. A seguir estão algumas representações que são equivalentes:

$$23\% = \frac{23}{100} = 0,23$$

$$7\% = \frac{7}{100} = 0,07$$

$$98\% = \frac{98}{100} = 0,98$$

A porcentagem é vastamente utilizada no mercado financeiro, sendo aplicada para capitalizar empréstimos e aplicações, expressar índices inflacionários e deflacionários, descontos, aumentos, taxas de juros, entre outros. Em estatística possui participação ativa na organização e apresentação de dados.

$\pm\%$ exemplos resolvidos

01. No início deste tópico, comentamos que é comum vermos lojas em shopping anunciarem descontos em promoções. Imagine que em certa loja havia uma promoção oferecendo descontos de até 60%. Uma pessoa que nela fosse comprar uma calça, que antes da promoção custava R\$ 90,00, e na liquidação estava com desconto máximo, quanto pagaria pela calça?

RESOLUÇÃO:

01. Devemos calcular o desconto que essa calça tem. Para se obter 60% de R\$ 90,00, uma forma é dividir o valor em reais por 100 e multiplicar por 60. Assim, $R\$90,00:100=0,9.60=R\$54,00$. Logo, o desconto será de R\$ 54,00, e ela pagará $R\$ 90,00 - R\$ 54,00 = R\$ 36,00$.

+₋_x exemplos resolvidos

02. Um artigo que custava x reais teve dois descontos sucessivos, um de 12% e outro de 20%. Que percentual de x representa o novo preço em relação ao antigo, ou seja, antes dos descontos?

03. Em uma sala de 40 alunos do 2º ano do Ensino Médio, sabe-se que 35% gostam de Matemática, 50% gostam de História e 25% gostam das duas disciplinas. Quantos alunos não gostam de Matemática nem de História?

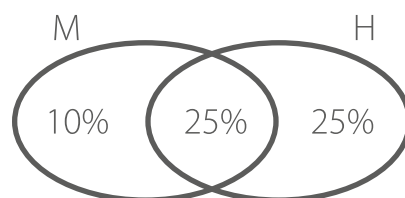
RESOLUÇÃO:

02. Se um artigo tem desconto de 12%, então, estaremos pagando $100\% - 12\% = 88\%$. Da mesma forma, se houver um desconto de 20%, então, a fração correspondente a ser paga é $100\% - 20\% = 80\%$. Uma forma de se calcular os valores com os descontos sucessivos é multiplicar esses valores:

$$\frac{88}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{7040}{10000} = \frac{70,40}{100} = 70,4\%$$

Logo, o preço novo corresponde a 70,4% do preço antigo.

03. Consideramos que 100% são o grupo de todos os alunos dessa sala. Como estamos nos referindo a dois subconjuntos, os que gostam de Matemática (M) e os que gostam de História (H), podemos usar um diagrama de Venn.



Então, a porcentagem dos que não gostam de Matemática nem História é dada por $100\% - (10\% + 25\% + 25\%) = 40\%$. Basta calcular 40% de 40 alunos. Uma forma de fazer isso é usar uma regra de três direta (sempre), pois quanto maior a porcentagem, maior a quantidade de alunos.

porcentagem	nº de aluno
$\frac{100\%}{40\%} \downarrow$	$\frac{40}{x} \downarrow$
$\frac{100}{40} = \frac{40}{x} \Rightarrow 100x = 1600 \Rightarrow x = 16$	

Concluimos que 16 alunos não gostam de Matemática nem de História. Observe que nos três exemplos dados foi enfatizada, em negrito, a expressão uma forma, isso pelo fato de que centralizando a ideia de que porcentagem é parte proporcional quando o todo é dividido em 100 partes iguais, a maneira que você fizer esta divisão não importa, ficando a critério de cada um.



**REGRA
DE TRÊS**

Neste tópico, comentaremos a Regra de três, que é um processo destinado a obter soluções de problemas que envolvem grandezas tanto diretamente quanto inversamente proporcionais. Uma relação numérica estabelecida com um objeto é chamada de grandeza. Assim, a altura de um poste, o volume de um tanque, o peso de uma pessoa, a velocidade, entre outros são grandezas. Podemos considerar como grandeza tudo que você pode contar, medir, pesar, enfim, enumerar. Assim, se em um dado problema temos grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, podemos utilizar regra de três simples ou composta para resolver o problema dado. Mas o que são grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais? A seguir responderemos esta pergunta.

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando o aumento de uma acarreta no aumento da outra, de mesma forma, quando ocorre a redução de uma ocorre a redução da outra, ou seja, o que você fizer com uma ocorrerá o mesmo com a outra, sempre em relação a uma constante.

$\pm \frac{\%}{x}$ exemplos

Se para uma receita de pudim usam-se duas latas de leite condensado, 6 ovos e duas latas de leite, terei que triplicar a quantidade de cada ingrediente se quiser fazer três pudins, ou reduzir a metade cada quantidade de ingredientes se quiser, apenas meia receita.

Formalmente, seja k um número real não nulo, duas grandezas são diretamente proporcionais se os valores de x e y correspondentes são tais que:

$$\frac{x}{y} = k$$

+_{-x} exemplos resolvidos

01. Três trabalhadores devem dividir R\$ 1.500,00 referentes ao pagamento por um serviço realizado. Eles trabalharam, respectivamente, 2, 3 e 5 dias e devem receber uma quantidade diretamente proporcional ao número de dias trabalhados. Quanto deverá receber cada um?

RESOLUÇÃO:

01. Seja x , y e z os valores proporcionais a 2, 3 e 5, respectivamente, que cada um receberá. Pela definição e uso de propriedade de proporções, temos que:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{1500}{10} = 150$$

Assim, tem-se a razão de integração sendo 150, logo $\frac{x}{2} = 150$, $\frac{y}{3} = 150$ e

$\frac{z}{5} = 150$. Logo $x = \text{R\$ } 300,00$, $y = \text{R\$ } 450,00$ e $z = \text{R\$ } 750,00$.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são ditas inversamente proporcionais quando o aumento de uma acarreta na diminuição da outra. Da mesma forma, quando ocorre a redução de uma ocorre o aumento da outra, ou seja, o que você fizer com uma ocorrerá o inverso com a outra, sempre em uma constante.

De maneira formal, seja k um número real não nulo, duas grandezas são inversamente proporcionais se os valores de x e y correspondentes são tais que:

$$x \cdot y = k$$

+₋[%]_x exemplos resolvidos

02. Em um campeonato de futebol, os três jogadores mais disciplinados receberão um prêmio de R\$ 3.340,00, rateados em partes inversamente proporcionais ao número de faltas cometidas em todo o campeonato. Os jogadores que receberão tais prêmios cometeram 5, 7 e 11 faltas. Qual a premiação que se refere a cada um deles, respectivamente?

RESOLUÇÃO:

02. Sejam x , y e z os valores que cada um dos três jogadores receberá. Note que aquele que fez 5 faltas receberá um prêmio maior e, evidentemente aquele que fez 11 faltas receberá um prêmio menor. Usando a definição, divisão de frações e proporções temos que:

$$5x = 7y = 11z = \frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{7}} = \frac{z}{\frac{1}{11}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}} = \frac{3340}{\frac{167}{385}}$$

$$5x = 7y = 11z = 3340 \cdot \frac{385}{167} = 7700$$

Então, temos que $5x = 7700$, $7y = 7700$ e $11z = 7700$ que gera $x = \text{R\$ } 1540,00$, $y = \text{R\$ } 1100,00$ e $z = \text{R\$ } 700,00$.

Regra de Três

A regra de três, como mencionamos na introdução desse tópico, é a maneira de se descobrir uma quantidade que tenha para outra conhecida uma relação, diretamente ou inversamente proporcional, a mesma relação que têm entre si outros dois valores numéricos também conhecidos. Existem dois tipos de regra de três: simples e composta.

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos. Regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas.

A seguir, para exemplificar a regra de três simples e também a composta, observe os dois exemplos resolvidos.

+₋_x exemplos resolvidos

03. Para percorrer certo trajeto, um carro, à velocidade de 60km/h, faz um percurso em 4 horas. Se a velocidade desse carro fosse de 80km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso?

RESOLUÇÃO:

03. Observe que a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quanto maior a velocidade, menor o tempo, ele diminui em razão inversa. Então, podemos nos guiar pelo esquema de flechas, lembrando que sentidos iguais nos informam que as grandezas são diretas, e sentidos opostos, grandezas inversas:

velocidade (km/h)	tempo (horas)
↑ 60	↑ 4
80	x

Assim, temos que:

$$\frac{4}{x} = \frac{80}{60} \Rightarrow 80x = 240$$

$$x = \frac{240}{80} \Rightarrow x = 3$$

Note que a grandeza da velocidade teve seus valores invertidos pelo fato de termos um problema de situação inversamente proporcional, ou seja, quanto maior a velocidade, menor é o tempo gasto, e vice-versa. Logo, o tempo que ele gastará é 3 horas.

Concluimos que serão necessários 25 caminhões.

+₋[%]_x exemplos resolvidos

04. Em um tempo de 6 horas, 10 caminhões descarregam 60m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125m³?

RESOLUÇÃO:

04. Devemos analisar as grandezas número de caminhões com horas e também com volume, de forma separada. Observamos que, diminuindo o número de horas de trabalho, aumentaremos o número de caminhões, logo, teremos grandezas inversamente proporcionais. Agora, aumentando o volume, devemos ter mais caminhões, então, temos grandezas diretamente proporcionais. Assim, guiando-nos pelo esquema de flechas:

horas	caminhões	volume (m ³)
$\uparrow \frac{6}{5}$	$\frac{10}{x} \downarrow$	$\frac{60}{125} \downarrow$
$\frac{10}{x} = \frac{60}{125} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{300}{750} = \frac{2}{5}$		
$\frac{10}{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$		

Concluimos que serão necessários 25 caminhões.



A hand-drawn diagram of a pulley system is shown on graph paper. The diagram includes a horizontal rope at the top, a pulley on the right, and a vertical rope with a weight. A green pencil is placed diagonally across the diagram. A ruler is at the bottom. The text 'RAZÃO E PROPORÇÃO' is overlaid on the ruler.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Caro (a) aluno (a), trataremos, aqui, de dois assuntos de relevância dentro da Matemática Básica. Inicialmente, falaremos da razão entre números, que nada mais é do que uma indicação de divisão. Veremos também a proporção que é um conceito importante, uma igualdade entre razões e, por fim, no tópico V, os problemas que envolvem grandezas diretas e inversas, chamados de regra de três.

Quando olhamos uma imagem e notamos padrões diferentes do habitual, partes muito pequenas em relação a outras, dizemos que a figura é desproporcional ou, simplesmente, que suas medidas não são proporcionais. Um exemplo clássico disto é o quadro de Tarsília do Amaral, Abaporu, quando observado com os padrões normais de uma pessoa. Nesta obra, é clara a não proporcionalidade quando comparamos as medidas de algumas partes com outras dessa mesma imagem.

Razão

Para começarmos nosso estudo, você deve ter uma boa base sobre razão, que é referência no prosseguimento da unidade. Definimos razão como uma relação entre dois objetos que suas medidas podem ser adicionadas, subtraídas ou divididas. Essa relação é feita por um quociente dos números que expressam as suas medidas. Desta forma, o conceito de razão nos permite fazer comparações de grandeza entre dois números. Por exemplo, se quisermos saber quantas vezes o número 200 é maior do que o número 5, basta fazer uma divisão da seguinte forma:

$$200:5 = 40$$

Logo, concluímos que o número 200 é equivalente a 40 vezes o número 5, ou em outras palavras, a razão entre 200 e 5 é 40.

Formalmente, dados dois números reais a e b , com $b \neq 0$, chama-se razão entre a e b , nesta ordem, a divisão ou quociente entre a e b e representamos:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a:b$$

A palavra razão vem do latim *ratio* e envolve a ideia de relação de Euclides (um matemático grego). A aplicação do conceito de razão é algo constante no nosso cotidiano.

Observe estas proposições:

- Cinco entre dez brasileiros comem carne todos os dias.
- A cada dez telespectadores entrevistados, quatro assistem a futebol.
- O modelo de um avião foi feito na escala 1:90.

Estas situações são casos em que estão se referindo a razões.

+₋[%]/_x exemplos resolvidos

01. Em uma sala de aula, temos 50 alunos, dos quais 20 são do sexo masculino. Determine a razão entre os alunos de sexo masculino e do sexo feminino.

RESOLUÇÃO:

01. Note que a sala tem 50 alunos, destes 20 são do sexo masculino, então 30 são do sexo feminino. Logo, a razão entre o número de alunos do sexo masculino para feminino é:

$$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Proporção

Quando comparamos duas razões e podemos notar que elas têm o mesmo valor, dizemos que temos uma proporção, que é a base para a compreensão de conceitos diversos, como fração, porcentagem, densidade, velocidade etc. A palavra proporção vem do latim *proportione*, significa uma relação entre as partes de uma grandeza e consiste em relacionar duas razões dentro de uma igualdade, criando, assim, um elo entre elas.

Dados os números reais *a*, *b*, *c* e *d*, todos diferentes de zero, dizemos que eles formam uma proporção, nesta ordem, se e somente se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Propriedades das proporções:

P1: Em qualquer proporção da forma $a:b = c:d$, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Essa propriedade é chamada propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c$$

P2: Em uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu respectivo consequente, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

+₋[%]_x exemplos resolvidos

02. Determine o valor de x na expressão:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{1}{3}$$

03. Uma escala de 1: 5.000.000 de um determinado mapa tem uma distância gráfica entre duas cidades de 5 cm. Determine, em km, a distância real destas duas cidades.

RESOLUÇÃO:

02. Pela primeira propriedade das proporções, tem-se $3(x-1) = 1.6$.

Assim, $3x - 3 = 6$, logo $3x = 9$, então $x = 3$.

03. A escala cartográfica apresentada na questão diz que cada 1 cm no mapa corresponde a 5.000.000 de cm no real assim, basta multiplicar por 5 o valor 5.000.000 cm, logo, temos $25.000.000 \text{ cm} = 250.000 \text{ m} = 250 \text{ km}$.



resumo

Neste estudo, tratamos de vários assuntos importantes dentro de nosso nivelamento. Iniciamos a nossa unidade tratando da ideia de potenciações bem como discutimos sobre suas propriedades. Na sequência, definimos a radiciação, que é, com algumas restrições, a operação inversa da potenciação.

Em seguida começamos a nossa análise sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, discutimos os conceitos de razão e proporção e, por fim, resolvemos problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais.

Para melhor compreensão, fizemos, além da abordagem teórica, uma gama de exemplos resolvidos com o intuito de oferecer a você a potencialização de seus estudos. Ainda sim, sugiro uma leitura referente aos tópicos nas bibliografias.



referências

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

AZEVEDO, Luciano. **Matemática Básica**. Maringá: Sapiens Editora, 2012.

BONAFINI, F. C. **Matemática**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2002, v. 2.

CASTRUCCI, Giovanni. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2012.

SOUZA, Joamir. **Matemática**. São Paulo: FTD, 2015.

