Determina si la función $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ satisface la ecuación de laplace en el plano: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \emptyset$

Solución para que una función satisfaga la ecuación de laplace es necesario que la sumatoria de la 2da derivada de la función con respecto a x y la 2da derivada parcial de la función con respecto a y sea igual a $\emptyset$, por lo tanto comenzamos a calcular la 2da derivada parcial de la función respecto a x

(1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$ y es constante

Derivada $\ln = 1/x$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}x\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$ Derivada $\sqrt{x^2+y^2}$ = chain rule

$$= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(1)\underbrace{(x^2+y^2)-(2x)(x)}_{x^2-2x^2=-x^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 2da derivada parcial con $= \frac{f'g - g'f}{g^2}$

(2) Ahora procedemos a realizar la 2da derivada parcial de la función respecto a y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$ x es constante

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}y\right) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$ Derivada de $\ln = 1/x$ Derivada $\sqrt{x^2+y^2}$ = chain Rule

$$= \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(1)\underbrace{(x^2+y^2)-(2y)(y)}_{y^2-2y^2=-y^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 2 derivada parcial $f'g - g'f / g^2$

R = ya que tenemos nuestros resultados y acoplarlos a la ecuación de laplace nos damos cuenta que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \emptyset \rightarrow \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \neq \emptyset$$ la función $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ NO satisface la ecuación de laplace.