Integrales

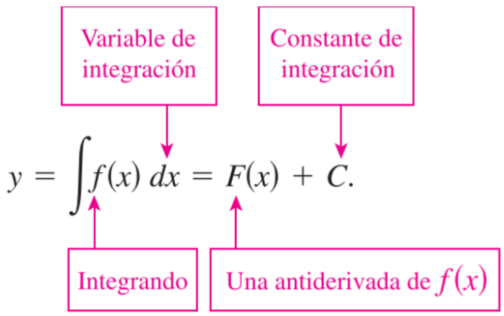
Notas importantes por Deniso Xocuis

12 de agosto de 2023

1 Definición

Dentro del **Cálculo** encontramos las integrales mejor conocidas como "el área bajo la curva".

Se dice que una función es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si F'(x) = f(x). Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente $dy = f(x)dx$.
La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina antiderivación (o integración indefinida) y se denota mediante un signo integral.



2 Integración indefinida

$\displaystyle\int \frac{1}{x^3}$ dx = $\int x^{-3}$ dx = $\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} = \dfrac{x^{-2}}{-2}$ + C = $-\dfrac{1}{2x^2}$ + C

$\int \sqrt{x}$ dx = $\int x^{\frac{1}{2}}$ dx = $\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ + C

$\int 2\sin x$ dx = 2 $\int \sin x$ dx = $-2\cos x$ + C

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ dx = $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$ dx = $\int \sec x \tan x$ dx = $\sec x$ + C

$\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ dx = $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}$ dx = $\int x \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx$ = $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x}$ = $2\sqrt{x}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$ = $2\sqrt{x}\left(\dfrac{x+3}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x}\,(x+3) + C$

3 Método de sustitución o cambio de variable

El papel de sustitución en la integración es comparable al de **regla de la cadena** en la derivación. La regla de la cadena establece que:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

De acuerdo con la definición de una antiderivada o primitiva, se sigue:

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Y si u = g(x) entonces du = g'(x) .... . .

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

A tomar en cuenta:

- elegir u (ecuación interior)
- derivar u
- despejar du
- reemplazar por u
- integrar
- reemplazar por variable original

Consejo: la u comúnmente es la ecuación más larga

4 Regla general de la potencia

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

5 Cambio de variable para integrales definidas

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\, dx$$

Solución. Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.
Límite inferior. Cuando x=0, u = 0^2 + 1 = 1.
Límite superior. Cuando x=1, u = 1^2 + 1 = 2.
Ahora, es posible sustituir para obtener.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[4 - \frac{1}{4}\right] = \frac{15}{8}$$

6 Integración por partes