Cálculo multivariable

Deniso Xocuis

10 de junio del 2023

1 Función de varias variables

Función de una variable *(1 variable de entrada, 1 de salida)*:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ donde } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Función de dos variables *(2 variables de entrada, 1 de salida)*:

$$f(x, y) = y^2 - x \text{ donde } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

1.1 Definición formal de una función de dos variables

Definición (en matemática)

Una función f de dos variables es una regla que le asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) un único número real que se denota con f(x,y) Aquellas funciones que contienen más de una variable independiente, la mayoría de los modelos matemáticos de sistemas físicos están en función de dos o más variables

*Los pares ordenados (x,y) pertenecen al **dominio** de la función. El conjunto de todos los valores que toma f(x,y) es el **rango** de la función*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Se acostumbra a indicar a los valores que toma la función con la variable z, es decir, z =

Ejemplos:

1. V(r,h) = $\pi r^2 h$

   $$\frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial h}$$

2. W(f,d) = F*d

   $$\frac{\partial W}{\partial F} \longrightarrow \frac{J}{N}; \frac{\partial W}{\partial d} \longrightarrow \frac{J}{m}$$

3. $E_c(m, v) = \frac{1}{2} m v^2$

   $$\frac{\partial E_c}{\partial m} \longrightarrow \frac{J}{kg}; \frac{\partial E_c}{\partial v} \longrightarrow \frac{J}{\frac{m}{s}} \longrightarrow \frac{J * s}{m}$$

4. W = $x^2 + y^2 + z^2$

   $$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x$$

   $$\frac{\partial w}{\partial y} = 2x$$

   $$\frac{\partial w}{\partial z} = 2x$$

1.2 Dominio de una función de dos variables

$$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$$

La función no existe si el denominador es cero, la única forma donde esto ocurra es si "x" y "y" son iguales, por lo tanto:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$$

1.3 Gráfica de una función de dos variables

$f(x,y) = y^2 - x$

$f(2,1) = -1$ donde (2,1,-1) es (x,y,z), esto quiere decir que se gráfica en 3D, también podemos concluir que z = f(x,y)

Definición:

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de puntos (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tales que, para cada (x,y,z):

(x,y) pertenece al dominio de la función, z es el valor del ***rango***

2 Trazas

Una traza es la curva que aparece tras hacer la intersección entre la superficie que necesitamos averiguar y planos.
En la siguiente superficie al intersectarla con un plano, aparece una parábola.

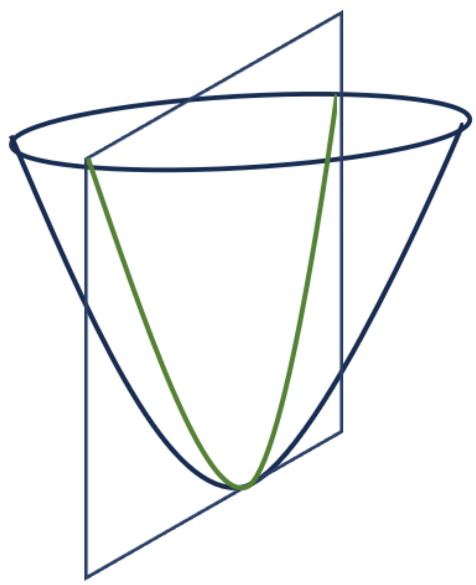


Figure 1: superficie con traza

2.1 Ecuación del plano xy

z tiene que ser cero, es decir, si tenemos un punto (x,y,z) y le agregamos esa condición, descubrimos la traza xy

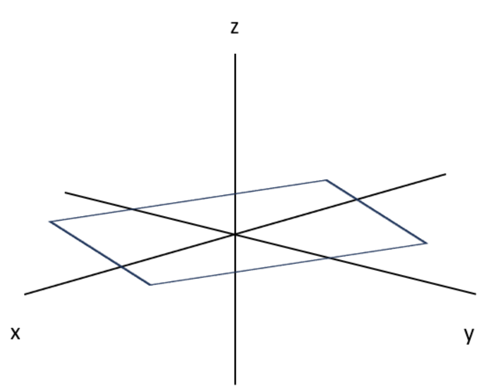


Figure 2: plano xy

2.2 Ecuación del plano yz

Existe la condición x=0, si por alguna razón este plano está un poco más atrás hasta un punto (-3, por ejemplo) x=-3

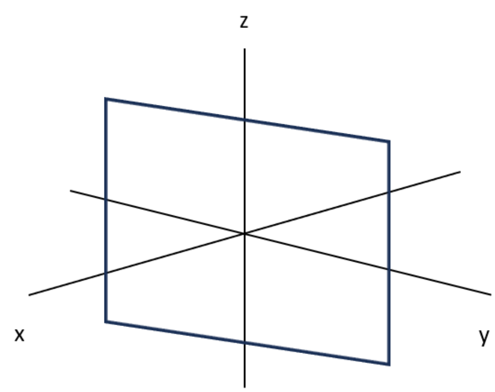


Figure 3: plano xy

2.3 Ecuación del plano xz

Tomando la lógica anterior de las otras ecuaciones, concluimos que existe la condición y=0

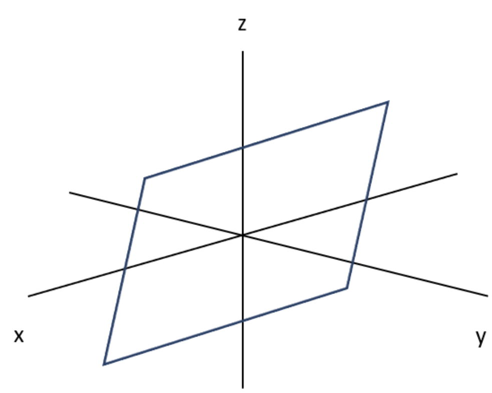
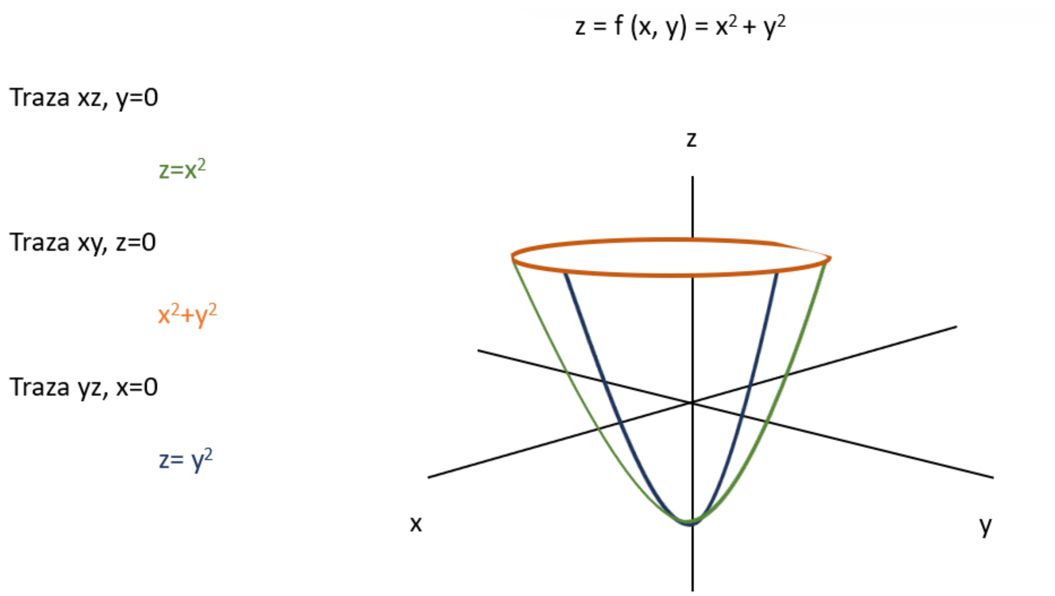


Figure 4: plano xz

3 Uso de trazas

$$\text{xz} \longrightarrow \text{y=0}$$
$$\text{xy} \longrightarrow \text{z=0}$$
$$\text{yz} \longrightarrow \text{x=0}$$

¿Para qué nos sirve entender esto?, si existe una función tal que z = f(x,y) = $x^2 + y^2$ podemos pensar que son dos parábolas pero ¿de qué forma y dirección están posicionadas? las trazas nos dice y nos refleja exactamente la forma de graficar en un plano 3D



4 Curvas de nivel

Intersección entre el plano y la superficie (función), comúnmente se acostumbra a abajarla en el plano xy Una curva de nivel es fijar la salida de la función a una constante, el resultado es la intersección con una superficie. Si las curvas están muy pegadas, la superficie crece abruptamente, del lado contrario sucede si las curvas están separadas

4.1 Función de tres variables

$$f(x, y, z) = x^2 - 3y + 2z - 1 \text{ donde } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

No se puede graficar una función que sea más de dos variables, se pueden estudiar analíticamente pero no representar en un plano.

4.2 Función de n-variables

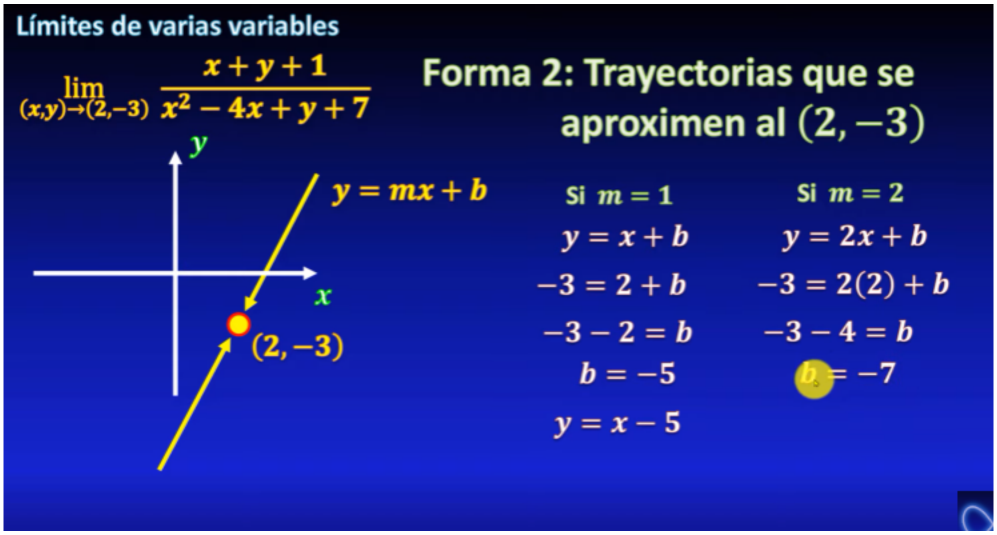
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ donde } f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

5 Límites y continuidad de funciones de dos o más variables

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = f(x, y) = L$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

y = mx
Si las variables de los puntos se acercan a un valor en concreto (dentro de la superficie), el límite existe. Existen infinitas formas de acercarnos a un valor, es decir, no podemos comprobar los infinitos laterales de un punto porque no se puede.
En casos prácticos, no vamos a comprobar la existencia, sino, la noexistencia.



5.1 Límites laterales

Hay muchas formas de aproximarse al punto donde (x,y) tiende, este debe ser el mismo para cualquier trayectoria. c:

5.2 Cambio de variable

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x+y+1}{x^2-4x+y+7}$$

u = x - 2 $\rightarrow$ u + 2 = x
v = y + 3 $\rightarrow$ v - 3 = y
sustituyendo y simplificando nos queda la expresión:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} = \frac{u+v}{u^2+v}$$

sacando los límites laterales:

$$\lim_{(u)\to(0)} = \frac{u+mu}{u^2+mu} = \frac{1+m}{m}$$

Este valor depende de m $\therefore$ el *límite no existe.*

5.3 Trayectorias que se aproximen al (x_0, y_0)

6 Derivadas parciales

$$z = 4x^2y^3 - 3x - 2y + 7$$

$\dfrac{dz}{dx} = f_x \longrightarrow f_x = 8xy^3 - 3$

$\dfrac{dz}{dy} = f_y \longrightarrow f_y = 12x^2y^2 - 2$

$f_{xx} = 8y^3$

$f_{yy} = 24x^2y$

$f_{xy} = 24xy^2 (derivando f_x)$

$f_{yx} = 24xy^2$ (tiene que ser igual que f_{xy})