"Geometría Analítica"

Deniso Xocuis

26 de marzo de 2023

1 Operaciones con vectores

1.1 Vectores en 2D

Los *vectores* se pueden multiplicar, sumar o restar, pueden crearse nuevos vectores dependiendo la operación necesaria. En muchas aplicaciones de los vectores es útil *encontrar un vector que tenga la misma dirección que un vector dado.* Los **vectores unitarios** tienen longitud 1 y la misma dirección que $\vec{v}$, ayudan a darle **dirección** (θ) a un punto. El proceso de multiplicar $\vec{v}$ por $1/\|\vec{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización de** $\vec{v}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \textbf{\textit{(vector unitario en la dirección de v)}}$$

Fórmulas generales para vectores:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{V_n}{\|\vec{V}\|}\right)$$
$$\textbf{\textit{(cálculo del ángulo)}}$$

$$V_x = \|V\| \cos\theta;\ V_y = \|V| \sin\theta$$
$$\textbf{\textit{(descomposición o combinación lineal de un vector en componentes unitarios)}}$$

1.2 Vectores unitarios canónicos o estándar

A los vectores unitarios $< 1, 0 >$ y $< 0, 1 >$ se les llama vectores unitarios canónicos o estándar en el plano y se denotan por: $\hat{i} =< 1, 0 >$ y $\hat{j} =< 0, 1 >$.

$$u = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \ \textbf{\textit{(vector unitario)}}$$

Al vector $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j}$ se le llama **combinación lineal** de $\hat{i}$ y $\hat{j}$. A los escalares v_1 y v_2 se les llama **componentes horizontal y vertical** de v. **La magnitud debe ser igual a 1.**

$$\mathrm{v} = \|v\|\mu$$
$$\textbf{\textit{(descomposición de un vector por vector unitario)}}$$

1.3 Vectores en 3D

En el espacio los vectores se denotan mediante ternas ordenadas $\vec{v}$ = ¡v_1, v_2, v_3¿. Usando los vectores unitarios $\hat{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \hat{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\hat{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, la notación empleando los vectores unitarios canónicos o estándar para $\vec{v}$ es muy similar a la notación en el plano.

$$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$$

Los ***cosenos directores*** se obtienen mediante el uso de funciones trigonométricas.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{x_2 - x_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_x}{\|\vec{v}\|}$$
$$\beta = \cos^{-1}\frac{y_2 - y_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_y}{\|\vec{v}\|}$$
$$\gamma = \cos^{-1}\frac{z_2 - z_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

Estos ángulos directores poseen las siguiente propiedad:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2 Fuerzas

2.1 Fuerzas en 3D

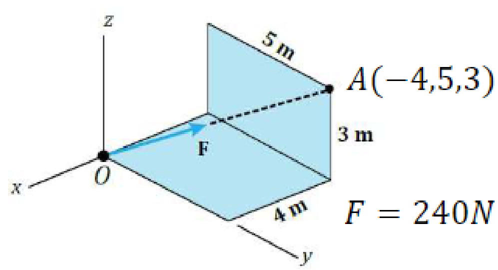
$$\vec{F} = \|F\|\mu \ (\textbf{\textit{descomposición de una fuerza}})$$

$$\mu_{MN} = \frac{MN}{\|MN\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{T_{MNx}}{\|T_{MN}\|} \ ; \cos\beta = \frac{T_{MNy}}{\|T_{MN}\|} \ ; \cos\gamma = \frac{T_{MNz}}{\|T_{MN}\|}$$

Para **tensiones**, las fórmulas son las mismas ya que estamos hablando de fuerzas.

EJEMPLO 1: Determine la representación vectorial de la fuerza de 240 N en compontentes rectangulares.



La representación vectorial de una fuerza significa representarla por ordenadas usando los vectores unitarios teniendo en cuenta su dirección, para eso lo que hacemos es multiplicar la magnitud por el vector unitario.

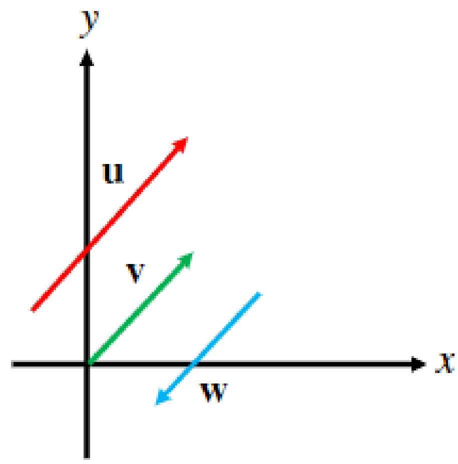
$$\|A\| = 5\sqrt{2} \therefore \mu = \frac{-4\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}}{5\sqrt{2}}$$

$$\vec{F} = 240(\frac{-4\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}}{5\sqrt{2}})$$

$$\therefore \text{la representación vectorial es: } \vec{F} = (135.8\hat{i} + 169.7\hat{j} + 101.82\hat{k})N$$

3 Vectores paralelos

Los múltiplos escalares positivos de un vector $\vec{v}$ tienen la misma dirección que $\vec{v}$, los múltiplos negativos tienen la dirección opuesta.
Dos vectores son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\vec{u}$= c$\vec{v}$, simbólicamente se representa como $\vec{u}\|\vec{v}$.
Los vectores **paralelos** forman un ángulo de 0°. Los vectores **antiparalelos** forman un ángulo de 180°.



De acuerdo a la figura, se concluye lo siguiente:

- Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **paralelos entre sí**, si $\vec{u}\|\vec{v}$ (ángulo de 0°)
- Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **antiparalelos entre sí**, si $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$ (ángulo de 180°), pasa lo mismo con $\vec{u}$ y $\vec{w}$

EJEMPLO:
El vector $\vec{w}$ tiene punto inicial (2,-1,3) y punto final (-4,7,5). ¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a $\vec{w}$?
Iniciamos sacando la distancia total del vector $\vec{w}$, es decir, la distancia del punto A y el punto B.

$$\vec{AB} = <(-4-2),(7+1),(5-3)> = -6,8,2$$

$$¿\vec{u} =< 3,-4,-1 > \text{ es } \| \text{ a } \vec{w}?$$

$$\frac{-6}{3} = \frac{8}{-4} = \frac{2}{-1}$$

∴ -2 = -2 = -2, la constante es "-2", eso quiere decir que son **antiparalelos**

4 Producto punto o escalar

Combinación de dos vectores, la expresión es un escalar, también es llamado producto interno.
Ejemplo:
dados $\vec{\mu} =< 2,-2 >$, $\vec{v} =< 5,8 >$, encontrar su producto punto.
= (2)(5) + (-2)(8) = 10-16=-6
Gracias a esto se puede saber si **dos vectores son ortogonales(perpendiculares) si su producto punto es igual a cero.**

4.1 Forma alternativa

También se puede sacar el producto escalar de dos vectores de la siguiente manera:

$$\text{u}\cdot\text{v} = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

5 Ángulo entre dos vectores

La fórmula es la siguiente:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{v}}{\|\vec{\mu}\|\|\vec{v}\|}$$

6 Trabajo: Aplicaciones del producto punto

El producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento.

$$W = \|proy_{\vec{PQ}}\mathbf{F}\|\|\vec{PQ}\| \ (\textbf{\textit{en forma de proyección}})$$

$$W = \mathbf{F}\cdot\vec{PQ} \ (\textbf{\textit{en forma de producto escalar}})$$

6.1 Ejemplo 1

Una fuerza $\vec{F}$= $(6\hat{i}$ - $2\hat{j})$N actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (3\hat{i}$ + $\hat{j})$ m. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula y el ángulo entre la fuerza y el incremento del desplazamiento.

$\vec{F}$= $(6\hat{i}$ - $2\hat{j})$N ; $\|\vec{F}\| = \sqrt{40}$

$\vec{r} = (3\hat{i} + \hat{j})$ m ; $\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{10}$

$\therefore W = \vec{F}\cdot\vec{r} = 16$ J

6.2 Ejemplo 2

La fuerza tiene una magnitud de $\vec{F_p}$=100 N y forma un ángulo de 37° con el suelo. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza cuando el cajón se jala 40m a lo largo del suelo.

$\|\vec{F_p}\|$=100 N

$\vec{F_p} = (100\cos 37° + 100\sin 37°)$ N

$\vec{F_p} = (79.86\hat{i} + 60.18\hat{j})N$

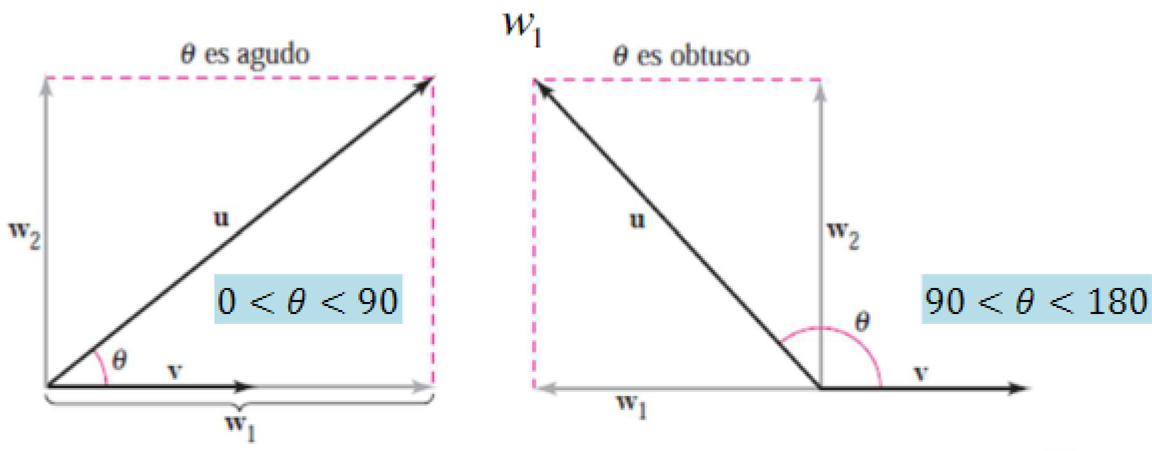
W= 3.194kJ

7 Proyección de vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores distintos de cero. Sea $\vec{u} = w_1 + w_2$ **donde w_1 es paralelo a $\vec{v}$ y w_2 es ortogonal a $\vec{v}$.**

1. A w_1 se le llama la ***proyección de $\vec{u}$ en $\vec{v}$*** o la componente vectorial de $\vec{u}$ a lo largo de $\vec{v}$ y se denota por $w_1 = proy_{\vec{v}}\vec{u}$

2. A $w_2 = \vec{u} - \vec{w_1}$, se le llama la ***componente vectorial de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$***



Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:
$Proy_v\vec{u}$
Se puede entender como la sombra que proyecta el vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$

$$proy_v\vec{u} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}v$$

$$proy_u\vec{v} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2}u$$

8 Producto vectorial de vectores en el espacio

Es necesario encontrar un vector en el espacio **ortogonal (perpendicular)** a dos vectores dados que forman un plano.
El producto vectorial de dos vectores en el espacio se define y calcula utilizando los vectores unitarios canónimos por medio de PRODUCTO CRUZ. La manera de calcular u x v es con la ***Regla de Laplace***

8.1 Aplicación: Cálculo del área

Es necesario conocer dos longitudes de un paralelogramo para calcular su área

8.2 Aplicación: Física/Estática

El producto vectorial puede utilizarse para medir el **momento(torque) M de una Fuerza F respecto a un punto P**. Si el punto de aplicación de la fuerza es Q, el momento de **F** respecto a P está dado por:

M = PQ x F (momento de F respecto a P)

9 Triple producto escalar (o producto mixto)

La fórmula es:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

El triple producto escalar puede usarse para determinar el volumen del paralelepípedo con u,v y w como aristas.

10 Coordenadas cilíndricas

Para ver primero lo que son coordenadas cilíndricas hay que primero ver que son las coordenadas polares.

10.1 Coordenadas polares

Acá ya no tenemos proyecciones en el eje x o en el eje y, tenemos lo que se llama un polo de origen y un eje llamado ”eje polar”

11 Maple

Siempre se debe comenzar de la siguiente forma:

> restart; *(nota: siempre se termina con un punto y coma)*
> with(linalg); *(esto sirve para las librerías)*

Para definir un vector usamos los intervalos, sirve para 2D y 3D, ejemplo:

> u:=vector([1,2,3]);

u:=([1,2,3])

FORMULARIO

Vectores en 2D

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \textit{ (vector unitario en la dirección de v)}$$

$$\vec{\mu} =< \cos\theta, \sin\theta > = \cos\theta\hat{\imath}, \sin\theta\hat{\jmath} \textit{ (vector unitario)}$$

$$\vec{v} = \|v\|\cos\theta\hat{\imath} + \|v\|\sin\theta\hat{\jmath} \textit{ (descomponer un vector)}$$

Es lo mismo que decir:

$$v_x = \|v\|\cos\theta \qquad v_y = \|v\|\cos\theta$$

Vectores en 3D

cosenos directores:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{x_2 - x_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_x}{\|\vec{v}\|}$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{y_2 - y_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_y}{\|\vec{v}\|}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{z_2 - z_1}{\|\vec{v}\|} = \cos^{-1}\frac{v_z}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \textit{ (propiedad)}$$

$$\vec{v} = \|v\|\mu \textit{ (descomponer un vector 3D)}$$

Fuerza resultante en 2D

$$F_n = \|F\| < \cos\theta, \sin\theta > \textit{ (descomponer una fuerza en 2D)}$$

$$F_R = F_1 + F_2 \textit{ (fuerza resultante)}$$

Fuerza resultante en 3D

nota: la fuerza también es llamada "tensión", el peso es independiente

$$F = \|F\|\mu \textit{ (descomponer una fuerza en 3D)}$$

$$\vec{T_{AB}} = \|\vec{T_{AB}}\|\mu_{AB} \textit{ (descomponer la tensión)}$$

Producto punto : forma alternativa

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

Ángulo entre vectores

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

Trabajo

$$W = \|proy_{PQ}\mathbf{F}\|\|\vec{PQ}\|$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \vec{PQ}$$

Proyección de vectores

$$\vec{u} = w_1 + w_2$$

$$w_1 = proy_v\vec{u}$$

$$w_2 = \vec{u} - w_1$$

$$proy_v\vec{u} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}v$$

Momento(torque)

$$M_o = \vec{r} \times F \text{ o } M_o = \vec{PQ} \times F$$

Reglas generales de los sistemas

sin mecanizar los pasos

Encontrar un vector con magnitud y dirección dada en 3D

1. Sacar vector unitario a el vector de dirección
2. Multiplicar la magnitud por esa dirección siguiendo las fórmulas de descomposición de vectores

Encontrar los componentes de un vector con magnitud y ángulo en 3D

1. Descomponer el ángulo por coseno y seno
2. Multiplicar la magnitud por las direcciones siguiendo las fórmulas de descomposición de vectores

Hallar las componentes de un vector unitario por magnitud dada

1. Sacar las componentes del vector de dirección
2. Seguir los pasos de "encontrar un vector con magnitud y dirección dada en 3D"

Fuerzas/tensiones en 3D

1. Ubicar las componentes de cada punto
2. Sacar distancias de cada punto correspondiente que nos pidan
3. Sacar el vector unitario de la longitud de el punto de tensión que nos pidan
4. Multiplicar la magnitud de la fuerza de tensión por el vector unitario

En caso de que nos den el peso y no la fuerza de tensión, para encontrar las tensiones es lo siguiente:

1. Multiplicar cada tensión por el vector unitario dado
2. Realizar un sistema de ecuaciones
3. Resolver por "sustitución"

Momento

1. Ubicar las componentes de la fuerza, si la fuerza es al rededor de una distancia, es necesario descomponer esa fuerza.
2. Sacar la distancia del vector $\vec{PQ}$ con las fórmulas de descomposición de vectores, si nos piden determinar el momento de fuerza al rededor de x ejercida desde el punto y, será un vector $\vec{xy}$
3. Realizar producto vectorial