4.Hafta Algoritmaların Analizi

Yinelemelerin çözümü

Yinelemelerin çözümü

- Yinelemeler entegral, türev, v.s. denklemlerinin çözümlerine benzer. Yinelemeleri çözmek konusunda kullanacağımız 3 ana yöntem vardır. Bu yöntemler;

  - **Yerine koyma metodu (substitution)**
  - **İterasyon (Yineleme) metodu (iteration metod)**
    - **Özyineleme ağacı (recursion tree)**
  - **Ana Metot (Master metod)**
  - Ana yöntemlerin dışında tekrarlı bağıntılar **Karakteristik denklemler kullanarak** çözülebilir.

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- Bazı tekrarlı bağıntıların çözümü yapılmadan çözümünün nasıl olabileceği hakkında tahmin yapılabilir. Çözüm tahmini yapılır ve yerine konulur. Yerine koyma (tahminler) metodu bir sınırdır ve tahmini ispatlamak için tümevarım yöntemi kullanılır.
- En genel yöntem:
  - **1. Çözümün şeklini tahmin edin.**
  - **2. Tümevarım ile doğrulayın.**
  - **3. Sabitleri çözün.**
- Örnek: $T(n)=T(n/2)+c$, $n \geq 2$, ve $T(1)=1$.
- $T(2)=1+c$, $T(4)=1+2c$, $T(8)=1+3c$, …
- $T(2^k)=1+kc$, burada $n=2^k$, $T(n)=1+c\log n$ olur.

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- **Tümevarım ile İspat:**
- Temel durum: $n=1$, $T(1)=1$ verildi.
- Tümevarım hipotezi: $n=2^k$, $T(2^k)=1+kc$, burada $n=2^k$, $T(n)=T(n/2)+c$ için doğrudur.
- Tümevarım adımı: $n= 2^{k+1}$, $T(n+1)=1+(k+1)*c= (1+ kc)+c$
- İspat (proof):
- $T(n+1)=T(2^{k+1})=T(2^{k+1}/2)+c$
- $T(n+1)= T(2^k*2/2)+c)$
- $=T(2^k) + c= 1+ kc +c$, olur. Tümevarım adımı ispatlanmış olunur.
- Burada, $n=2^k$ için, $T(n)=1+c\log n$ ve
- $T(n)\in O(\log n)$ dir.

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- Örnek: $T(n)=3T(n/2)+cn$, $n\geq 2$, ve $T(1)=1$.
- $T(2)=3+2c$
- $T(4)=3(T(2))+4c=3(3+2c)+4c=9+10c=3^2+[3^1 2^1 c]+3^0 2^2 c$
- $T(8)=27+38c=3^3+[3^2 2^1 c+3^1 2^2 c]+3^0 2^3 c$
- $T(16)=81+130c$

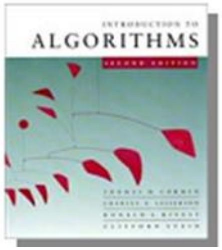
$$f(n) = \sum_{0\leq i\leq n} x^i = (x^{n+1}-1) / (x-1)$$

- …
- $T(2^k)=3^k+[3^{k-1}2^1c+3^{k-2}2^2c+\ldots+3^1 2^{k-1}c]+3^0 2^k c$, $2^k c$ parantezine alalım
- $T(2^k)=3^k+2^k c[(3/2)^{k-1}+(3/2)^{k-2}+\ldots+(3/2)]$, serisinin genel denklemi
- $T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$, burada $n=2^k$ ve $k=\log n$
- $T(n)=3^{\log n}+cn[((3^{\log n}/n-1)/(1/2)]$, burada $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$
- $T(n)=n^{\log 3}+2cn(n^{\log 3-1}-1) = n^{1,59}+2cn(n^{0,59}-1)$
- $T(n)=n^{1,59}(1+2c)-2cn$
- $T(n)\in O(n^{1,59})$ dır.

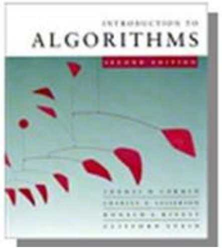
Yerine koyma metodu (yöntemi)

- **İspat:** $T(n)=3T(n/2)+cn$, $n\geq 2$, ve $T(1)=1$. (1)
- $T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$, burada $n=2^k$ ve $k=\log n$ (2)
- Temel durum: $n=1$, $T(1)=1$ ve $n=2 \rightarrow T(2)=3+2c$
- Tümevarım hipotezi: $n=2^k \rightarrow T(2^k)=3^k+2^k c[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)]$
- Tümevarım adımı: $n=2^{k+1} \rightarrow T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+1} c[((3/2)^{k+1}-1)/((3/2)-1)]$ veya
  $\rightarrow T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+2} c[(3/2)^{k+1}2-2]$ (3)
- Şimdi (1) nolu denklemi kullanarak (3) nolu denklemi ispatlayalım
- $T(2^k)=3^k.T(2^{k-1})+c2^k \rightarrow n=2^k$ için
- $T(2^{k+1})=3.T(2^k)+c2^{k+1} = 3.(3^k+c2^k[((3/2)^k-1)/((3/2)-1)])+c2^{k+1}$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^k c[3.(3/2)^k-3)/(1/2)] +2^{k+1}c= 3^{k+1}+2^{k+1} c[3.(3/2)^k-3] +2^{k+1}c$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+1} c([3.(3/2)^k-3] +1) = 3^{k+1}+2^{k+1} c[(3/2)^{k+1}.2-2]$
- $T(2^{k+1})=3^{k+1}+2^{k+2} c[(3/2)^{k+1}2-2]$, (3) nolu denklemi ispatlamış oluyoruz.
- $T(n)\epsilon O(n^{1,59})$ dır.

Yerine koyma metodu (yöntemi)
Üst sınırı tahmin ederek çözüm



- **Örnek: $T(n) = 4T(n/2) + n$**, ise
  - [**$T(1) = \Theta(1)$** olduğunu varsayın.]
  - **$O(n^3)$**'ü tahmin edin. (O ve Ω ayrı ayrı kanıtlayın.)
  - **$k < n$** için **$T(k) \le ck^3$** olduğunu varsayın.
  - **$T(n) \le cn^3$**'ü tümevarımla kanıtlayın.



Yerine koyma örneği

$$T(n) \le cn^3$$

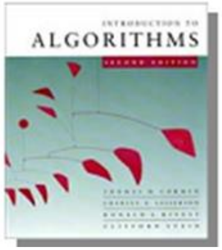
$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n \\ &\le 4c(n/2)^3 + n \\ &= (c/2)n^3 + n \\ &= cn^3 - ((c/2)n^3 - n) \longleftarrow \textit{istenen –kalan} \\ &\le cn^3 \longleftarrow \textit{istenen} \end{aligned}$$

ne zaman ki $(c/2)n^3 - n \ge 0$, örneğin,

eğer $c \ge 2$ ve $n \ge 1$.

kalan

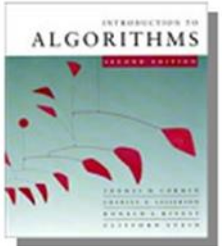
Yerine koyma örneği



- Başlangıç koşullarını da ele almalı, yani, tümevarımı taban şıklarına (base cases) dayandırmalıyız.
- **Taban:** $T(n) = \Theta(1)$ tüm $n < n_0$ için, ki n_0 uygun bir sabittir.
- $1 \leq n < n_0$ için, elimizde "$\Theta(1)$" $\leq cn^3$, olur; yeterince büyük bir c değeri seçersek.

Bu, sıkı bir sınır değildir !

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır?

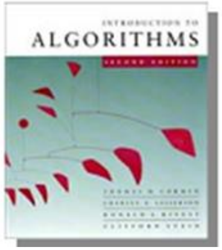


$T(n) = O(n^2)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Varsayın ki $T(k) \le ck^2$, $k < n$ için olsun :

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\le 4c(n/2)^2 + n \\
&= cn^2 + n \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır?



$T(n) = O(n^2)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Varsayın ki $T(k) \leq ck^2$; $k < n$: için

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\leq 4c(n/2)^2 + n \\
&= cn^2 + n \\
&= \cancel{O(n^2)}
\end{aligned}
$$

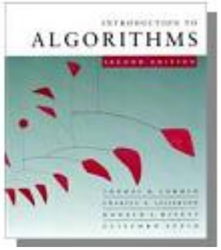
Yanlış! I.H.(tümevarım hipotezini) kanıtlamalıyız.

$$
\begin{aligned}
&= cn^2 - (-n) \quad [\text{ istenen} - \text{kalan }] \\
&\leq cn^2
\end{aligned}
$$

seçeneksiz durum $c > 0$. Kaybettik!

-n >= 0 sağlanmaz (n değeri negatif olamaz)

Yerine koyma örneği-Daha sıkı bir üst sınır?



Fikir: Varsayım hipotezini güçlendirin.

- Düşük-düzeyli bir terimi ***çıkartın***.

Varsayım hipotezi: $T(k) \le c_1 k^2 - c_2 k$; $k < n$ için.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&= 4(c_1(n/2)^2 - c_2(n/2)) + n \\
&= c_1 n^2 - 2c_2 n + n \\
&= c_1 n^2 - c_2 n - (c_2 n - n) \\
&\le c_1 n^2 - c_2 n \text{ eğer } c_2 \ge 1.
\end{aligned}
$$

c_1'i başlangıç koşullarını karşılayacak kadar büyük seçin.

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- $T(n)=3T(n/2)+cn$,
- **Tahminimiz** $=T(k)\epsilon\, O(n^{1,59})$, $n\geq 2$, ve $T(1)=1$.
- İspatı yapabilmek için tahminimizi T(n) de yerine yazıp istediğimizi elde etmeye çalışmak. **İstenen –kalan**. Kalan, 0'a eşit yada büyük olmalı
- $T(n)\leq c_1.n^{1,59}$ olması
- $T(n)=3.\ (c_1 n^{1,59}/2^{1,59})+cn$
- $T(n)=c_1 n^{1,59}-\ c_1 n^{1,59}(2^{1,59}+3)/2^{1,59}+cn$
- **İstenen=**$cn^{1,59}$**, Kalan=** $-\ c_1 n^{1,59}(2^{1,59}+3)/2^{1,59}+cn$
- **İstenen –kalan=**$c_1 n^{1,59}-(c_1 n^{1,59}(2^{1,59}+3)/2^{1,59}-cn)$
- **Kalan→** $c_1 n^{1,59}(2^{1,59}+3)/2^{1,59}-cn\geq \mathbf{0}$ **sağlayacak c, ve n değeri var mı?**
- **n=1 için,** $c_1(2^{1,59}+3)/2^{1,59}-c\geq \mathbf{0}$**, $c\geq 1$,ve $c_1\geq 2$, için sağlarız**

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- Hanoi kulesi

```
void hanoi(int n, char source, char dest, char spare) {      Cost
  if (n > 0) {                                                 c1
    hanoi(n-1, source, spare, dest);                           c2
    cout << "Move top disk from pole " << source               c3
         << " to pole " << dest << endl;
    hanoi(n-1, spare, dest, source);                           c4
  }}
```

when n=0

$T(0) = c1$

when n>0

$T(n) = c1 + c2 + T(n-1) + c3 + c4 + T(n-1)$

$= 2*T(n-1) + (c1+c2+c3+c4)$

$\mathbf{= 2*T(n-1) + c}$ ← recurrence equation for the growth-rate function of hanoi-towers algorithm

Yerine koyma metodu (yöntemi)

- Hanoi kulesi
- $T(n) = 2T(n - 1) + 1$ kabul edersek en iyi durumda $T(0)=0$ dır.
- $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 7$, $T(4) = 15$, $T(5) = 31$, $T(6) = 63$, …
- $T(0)=0$
- $T(1)=2T(0)+1=1$
- $T(2)=2T(1)+1=2+1$
- $T(3)=2T(2)+1=2.(2+1)+1=1+2+2^2$
- $T(4)=2T(3)+1=1+2+2^2+2^3$
- $T(n)=2T(n-1)+1=1+2+\ldots 2^{n-1}$ $\quad f(n) = \sum_{0\leq i\leq n} 2^i = (2^{n+1}-1) / (2-1) = 2^{n+1}-1$
- $T(n)=2^n-1$
- olur

İterasyon metodu (Tümden gelim)

- Bu yöntemde verilen bağıntının çözümünü bulmak için büyük endeksli terimin yerine küçük endeksli terim yazılarak, genel terimin çözümü için bir yargıya varılıncaya kadar bu işleme devam edilir veya başlangıç şartlarına kadar devam edilir.
- İterasyon metodu, bir toplam içerisine yinelemeleri dönüştürür ve yinelemeleri çözmek için toplamları sınırlayıcı teknikleri kullanır.
  - Yineleme işlemini açık hale getir
  - Matematiksel işlemlerle göster
  - Toplamı hesapla.

T(n)=
- **denemeyle çözülür, n=1**
- **Alt problem sayısı * T(n/alt problem boyutu)+bölme+birleşim, n=1**

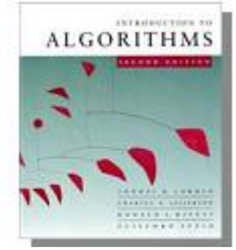
- Örnek

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & \text{if } n>1\end{cases}$$

İterasyon metodu

- Örnek: Merge Sort, $T(n)=2*T(n/2)+n$, $n>1$, ve $T(1)=1$ için yinelemeyi çözünüz
- **$n= 2^k \rightarrow k = \log n$ hatırlayın,**
  - $T(n)=2*T(n/2)+n$ substitute (yerine kullan)
  - $T(n)=2*(2*T(n/4)+n/2)+n$ expand
  - $T(n)=2^2*T(n/4)+2*n$ substitute
  - $T(n)=2^2*(2*T(n/8)+n/4)+2n =8*T(n/8)+3*n$ expand
  - $T(n)=2^3*T(n/2^3)+3*n$ observe
  - ….
  - $T(n)=2^k*T(n/n)+k*n$
  - $T(n)=2^k * T(1)+k*n$
  - $T(n)=\theta(n)+ \theta(n\log n)$
  - $T(n) \in \theta(n\log n)$

İterasyon metodu

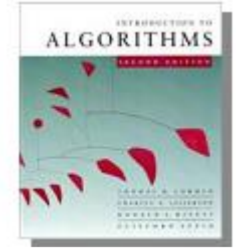


- Merge sort için daha kesin çalışma süresi bulma (bazı b değerleri için **n=2^b** olduğunu varsayalım).

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + 2n + 3 & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 5n + 2nlgn - 3$$

İterasyon metodu



$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T(n/2) + 2n + 3 \\
&= 2\,(2\,T(n/4) + n + 3) + 2n + 3 \\
&= 2^2\,T(n/4) + 4n + 2\,.\,3 + 3 \\
&= 2^2\,T(n/2^2) + 2^2 n + 2^1\,.\,3 + 2^0.3 \\
&= 2^2\,(2\,T(n/8) + n/2 + 3) + 4n + 2.3 + 3 \\
&= 2^3(T(n/2^3) + 2.3n + (2^2 + 2^1 + 2^0).3 \\
&= 2^b\,T(n/2^b) + 2.bn + 3\sum_{j=0}^{b-1} 2^j \\
&= n\,T(n/n) + 2n\lg n + 3(2^b - 1) \\
&= 2n + 2n\lg n + 3n - 3 \\
&= 5n + 2n\lg n - 3
\end{aligned}
$$

İterasyon metodu

- Örnek: T(n)=T(n-1)+n, n>1, ve T(1)=1; için yinelemeyi çözünüz?
-
- T(n)=T(n-1) + n
- T(n)=T(n-2) + n-1+ n
- T(n)=T(n-3) + n-2+ n-1+ n
- …
- T(n)=T(1) + 2+ …. n-2+ n-1+ n
- T(n)=1 + 2+ …. n-2+ n-1+ n $\longrightarrow$ $f(n) = \sum_{1 \le i \le n} i = n(n+1)/2$
- T(n)=n*(n+1)/2
- $T(n) \in \theta(n^2)$

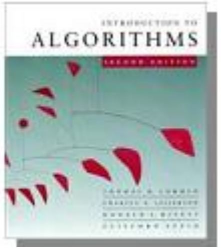
İterasyon metodu

- Hanoi Kulesi
- $T(n)=2*T(n-1)+1$, $n>1$, ve $T(1)=1$; için yinelemeyi çözünüz?
- Her bir hareket $O(1)$ zaman gerektirir.
-
- $T(n)=2*T(n-1)+1= 2^2 * T(n-2)+2+1 = ...$
- $T(n)=2^{n-1} * T(1)+2^{n-2}+....+2+1$
- $T(n)=2^n-1$
- $T(n) \in \theta(2^n-1)$

$$f(n) = \sum_{0\leq i\leq n} 2^i = (2^{n+1}-1) / (2-1) = 2^{n+1}-1$$

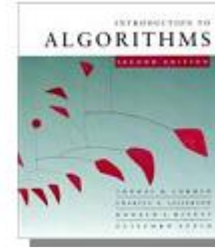
- n=64 için, her 1000 taşımanın 1 sn olduğu düşünülürse çözümü $584*10^6$ yıl alır.

Özyineleme-ağacı metodu

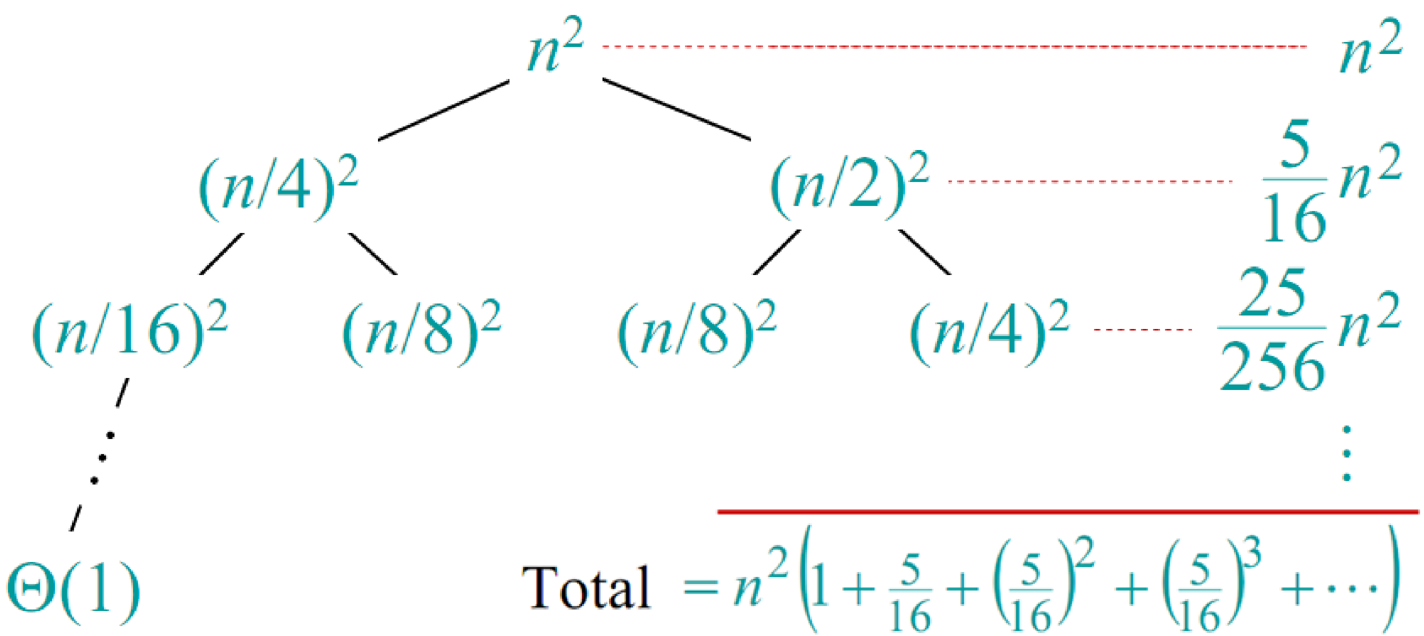


- İterasyon yönteminin çözüm adımları ağaç şeklinde gösterilebilir ve elde edilen ağaca **Özyineleme-ağacı** denir
- Özyineleme-ağacı, bir algoritmadaki özyineleme uygulamasının maliyetini (zamanı) modeller.
- Özyineleme-ağacı metodu, diğer yöntemler gibi, güvenilir olmayabilir.
- Öte yandan özyineleme-ağacı metodu "öngörü" olgusunu geliştirir.
- Özyineleme-ağacı metodu "yerine koyma metodu" için gerekli tahminlerinde yararlıdır.

Özyineleme-ağacı örneği



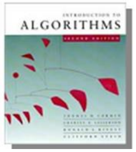
$$T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2:$$



$$\text{Total} = n^2\left(1 + \frac{5}{16} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$= \Theta(n^2)$$

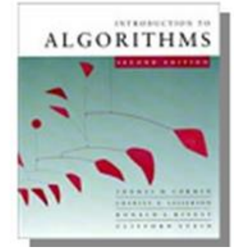
Geometrik seri

Birleştirme sıralamasının çözümlenmesi



	$T(n)$	**BİRLEŞTİRME-SIRALAMASI** $A[1\ ..\ n]$
	$\Theta(1)$	1. Eğer $n = 1$'se, bitir.
Suistimal	$2T(n/2)$	2. Yinelemeli olarak $A[\ 1\ ..\ \lceil n/2 \rceil\ ]$ ve $A[\ \lceil n/2 \rceil + 1\ ..\ n\ ]$'yi sırala.
	$\Theta(n)$	***3.*** ***2*** sıralı listeyi ***"Birleştir"***

Özensizlik: $T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$ olması gerekir, ama asimptotik açıdan bu önemli değildir.



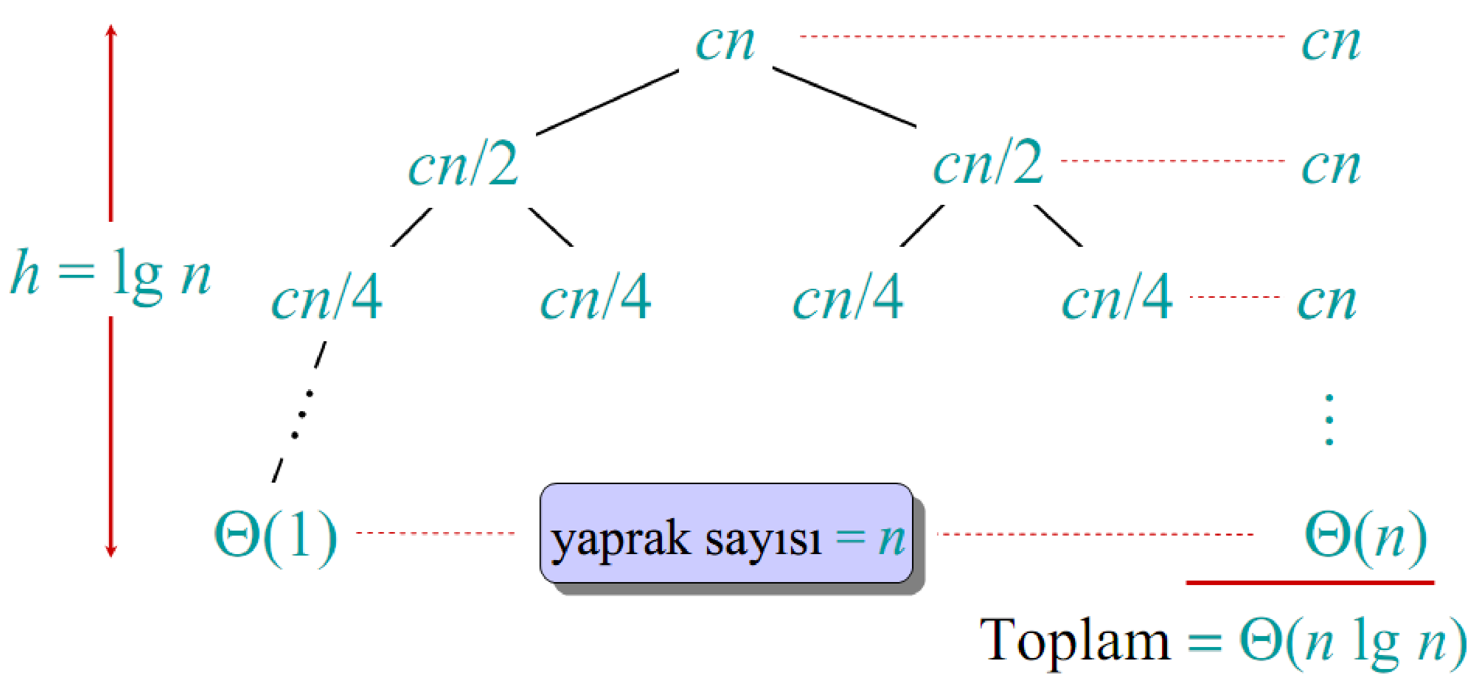
Birleştirme sıralaması için yineleme

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) \text{ eğer } n = 1 \text{ise;} \\ 2T(n/2) + \Theta(n) \text{ eğer } n > 1 \text{ise.} \end{cases}$$

- Genellikle n'nin küçük değerleri için taban durumu (base case) olan T(n) = Θ(1) 'i hesaplara katmayacağız; ama bunu sadece yinelemenin asimptotik çözümünü etkilemiyorsa yapacağız.

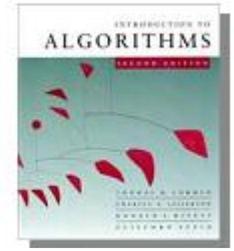
Yineleme ağacı

- T(n) = 2T(n/2) + cn'yi çözün; burada c > 0 bir sabittir.



Sonuçlar- Insert Sort –Merge Sort

- Θ(n lg n)’ nin, büyüme oranı $\Theta(n^2)$'den daha yavaştır (yani küçüktür).
- En kötü durumda, birleştirme sıralaması asimptotik olarak araya yerleştirme sıralamasından daha iyidir.
- Pratikte, birleştirme sıralaması(Merge Sort) araya yerleştirme sıralamasını (Insert Sort) $n > 30$ değerlerinde geçer.



Yinelemelerin çözümü için değişken değiştirme

- Reküranslar değişken değiştirme ile daha basit hale dönüştürülebilir.
- $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + logn.$

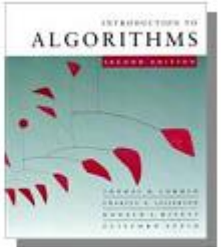
$$m = \log n \Rightarrow 2^m = n \Rightarrow \sqrt{n} = 2^{m/2}$$

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n \Rightarrow T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

$$S(m) = T(2^m)$$

$$\begin{aligned} T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m &\Rightarrow S(m) = 2S(m/2) + m \\ &\Rightarrow S(m) = O(m \log m) \\ &\Rightarrow T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n) \end{aligned}$$

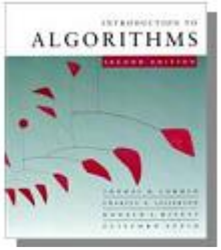
Master Teorem



Ana Metod (The Master Method)

- Ana method aşağıda belirtilen yapıdaki yinelemelere uygulanır:
- ***$T(n) = aT(n/b) + f(n)$*** , burada ***$a \geq 1$**, **$b > 1$***, ve ***f*** asimptotik olarak pozitiftir.

- *$T(n)$* bir algoritmanın çalışma süresidir.
  - ***n/b*** boyutunda ***a*** tane alt problem recursive olarak çözülür ve her biri ***$T(n/b)$*** süresindedir.
  - ***$f(n)$*** problemin bölünmesi ve sonuçların birleştirilmesi için geçen süredir.
  - **Örnek:** Merge-sort için *$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$* yazılabilir.



Ana Metod (The Master Method)
Üç yaygın uygulama

$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

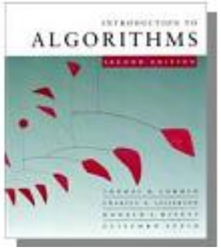
1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ göre daha yavaş büyür(n^{ε} faktörü oranında).

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ $k \geq 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ ve $n^{\log_b a}$ benzer oranlarda büyürler.

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Ana Metod (The Master Method) Üç yaygın uygulama



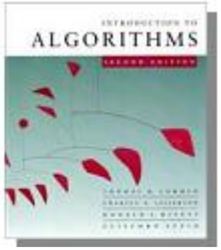
$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ 'ye göre daha hızlı büyür (n^{ε} faktörü oranında),

ve $f(n)$, ***düzenlilik koşulunu*** $af(n/b) \leq cf(n)$ durumunda, $c < 1$ olmak kaydıyla karşılar.

Çözüm: $T(n) = \Theta(f(n))$.

c=(1-ε), ε >0



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n.$

Durum 1: $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için.

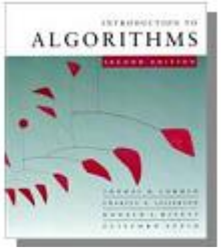
$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2).$

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2.$

Durum 2: $f(n) = \Theta(n^2 \lg^0 n)$, yani, $k = 0$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2 \lg n).$



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^3.$

DURUM 3: $f(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için

ve $4(n/2)^3 \le cn^3$ (düz. koş.) $c = 1/2$ için

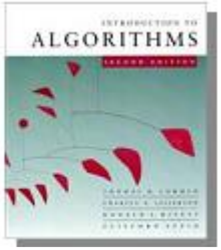
$\therefore\ T(n) = \Theta(n^3).$

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

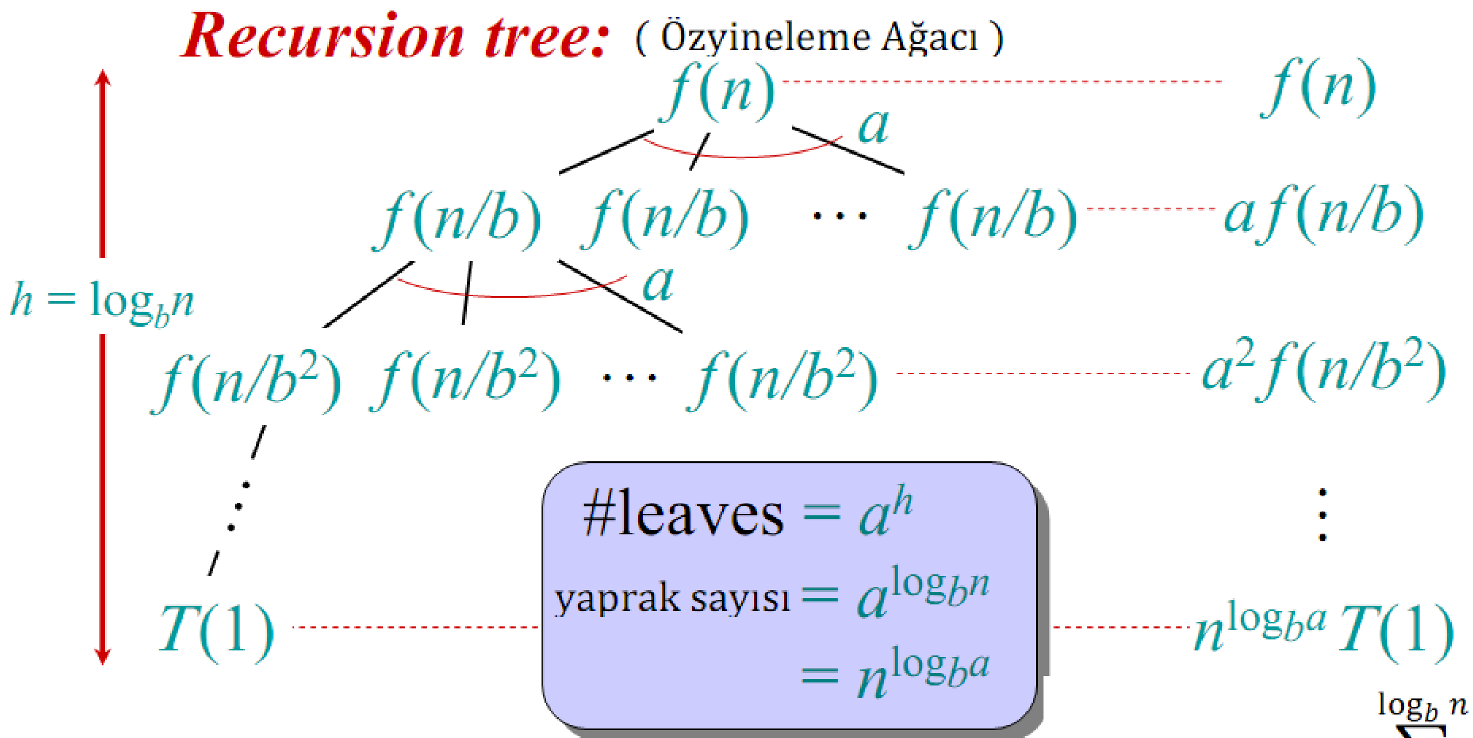
$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2/\lg n.$

Ana metod geçerli değil. Özellikle,

$\varepsilon > 0$ olan sabitler için $n^{\varepsilon} = \omega(\lg n)$ elde edilir.

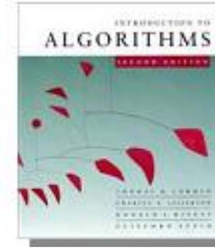


Master teoremdeki düşünce



$$T(n) = n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

Master teoremdeki düşünce



Yineleme Ağacı:

$f(n)$ .... $f(n)$

a

$f(n/b) \quad f(n/b) \quad \cdots \quad f(n/b)$ .... $a f(n/b)$

a

$h = \log_b n$

$f(n/b^2) \quad f(n/b^2) \quad \cdots \quad f(n/b^2)$ .... $a^2 f(n/b^2)$

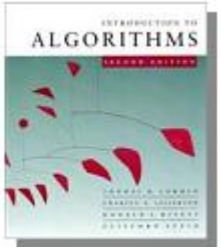
$\vdots$

$T(1)$ .... $n^{\log_b a} T(1)$

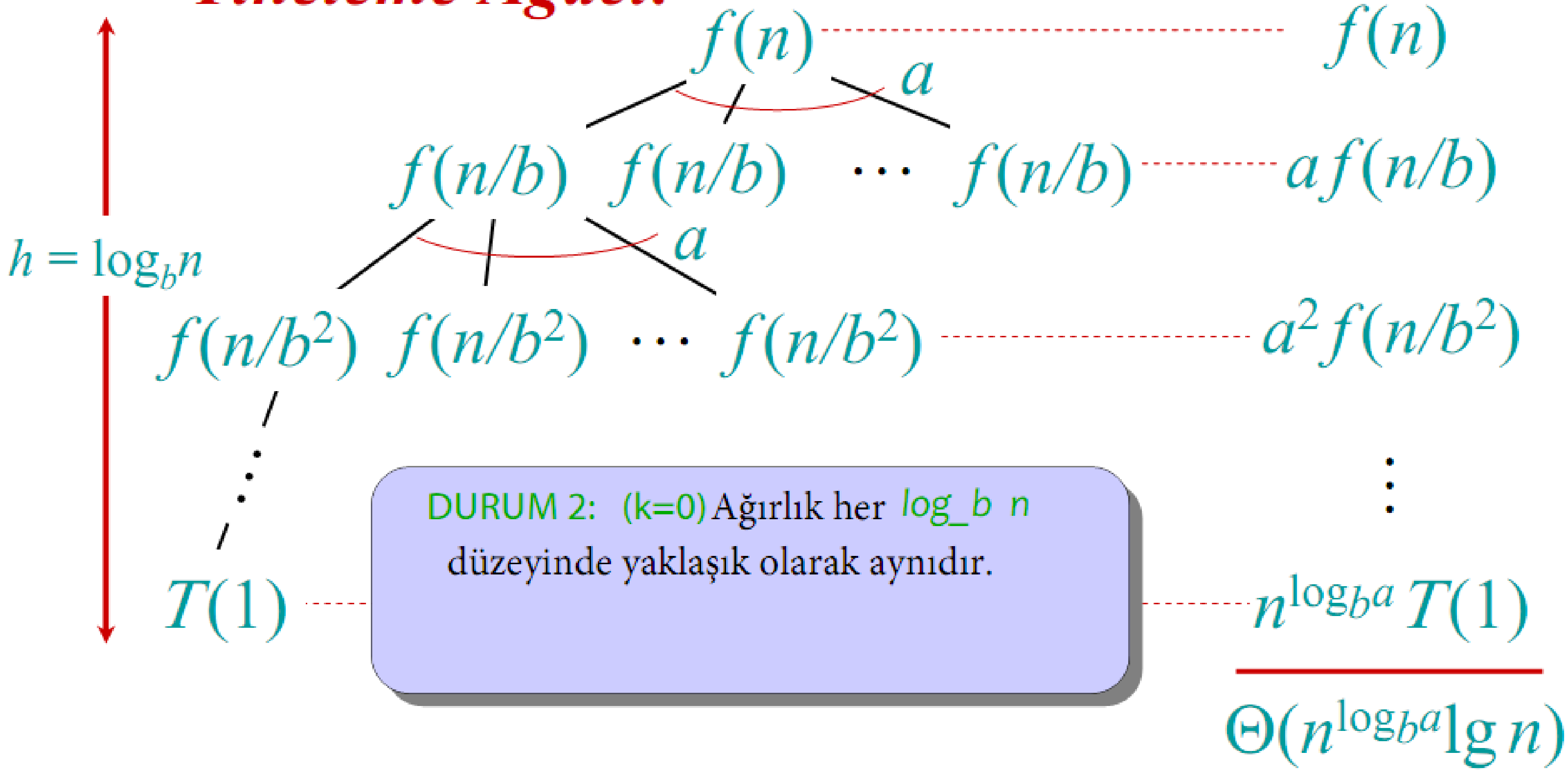
$\Theta(n^{\log_b a})$

DURUM 1: Ağırlık (weight) kökten yapraklara doğru geometrik olarak artar. Yapraklar toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

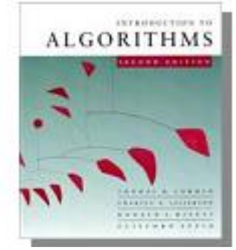
Master teoremdeki düşünce



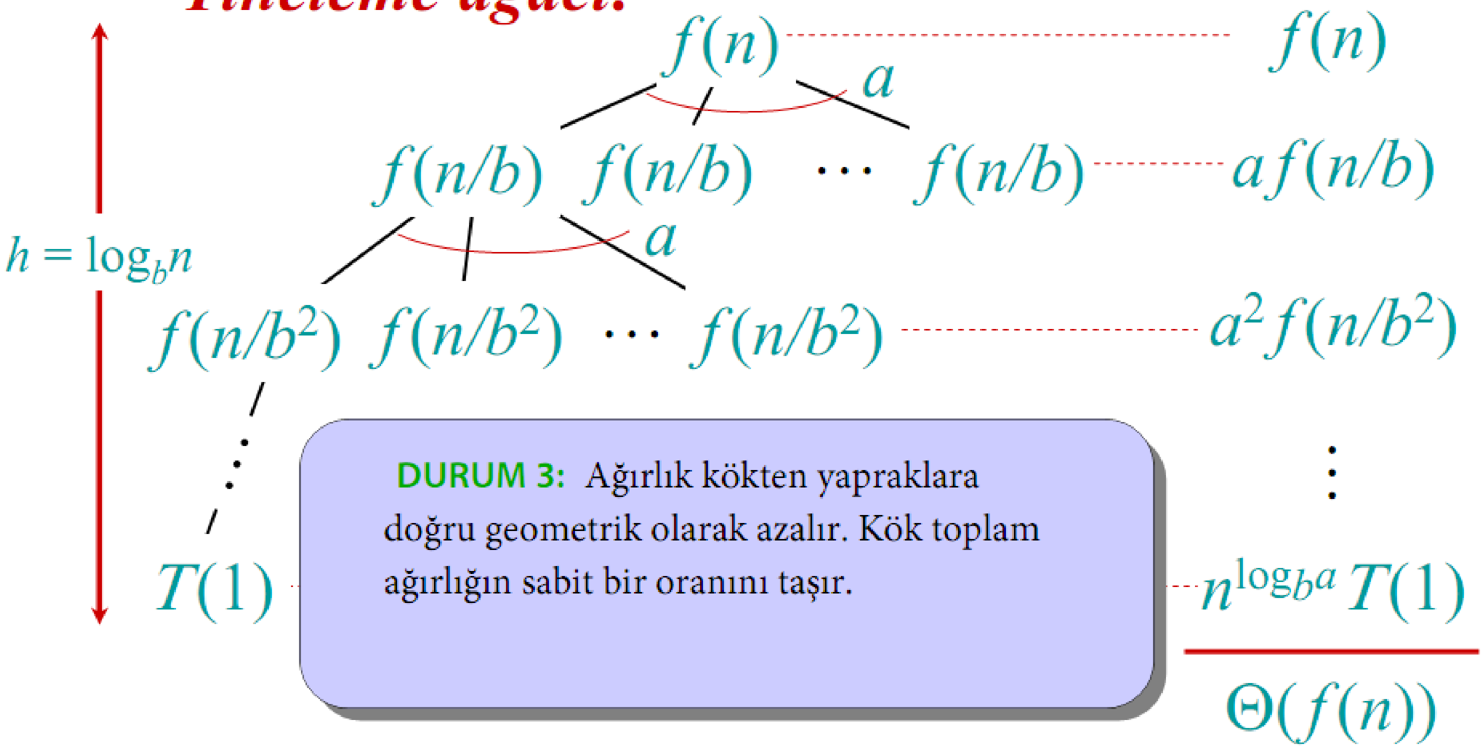
Yineleme Ağacı:



Master teoremdeki düşünce

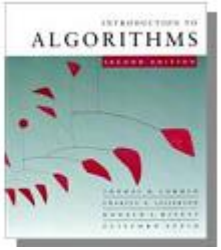


Yineleme ağacı:



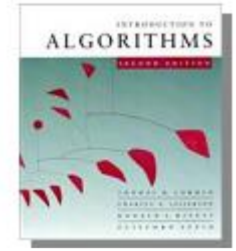
DURUM 3: Ağırlık kökten yapraklara doğru geometrik olarak azalır. Kök toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

Master teoremi ispat



- **Durum 2:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), ise\ T(n) = \theta\left(n^{log_b a} log n\right)$
- **İspat:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), o\ zaman\ f(n) \leq cn^{log_b a}\ olur$

- $T(n) = n^{log_b a} + \sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$
- $\leq n^{log_b a} + c\sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{log_b a}$
- $= n^{log_b a} + cn^{log_b a}\sum_{\boxed{j=0}}^{log_b n-1} a^j \left(\frac{1}{b^{log_b a}}\right)^j$ a
- $= n^{log_b a} + cn^{log_b a}\sum_{j=0}^{log_b{}^{n-1}} 1 = n^{log_b a} + cn^{log_b a} log_b n$
- $\leq cn^{log_b a} \log n$
- Bu yüzden, $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right)\ ise\ T(n) = O\left(n^{log_b a} log n\right)$ dir.
- Durum 1 ve Durum 3 te benzerdir.(Önerilen ders kitabını inceleyiniz)



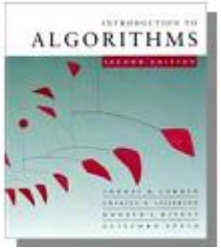
Master teoremi

- **Örnek:** $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n, n \geq 3 \; ve \; T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=9, b=3, $f(n) = n$ ve $n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \theta(n^2)$

- **Durum 1:** $f(n) = O(n^{log_3 9-\varepsilon})$, $\varepsilon = 1$ için

- $T(n) = \theta(n^{log_3 9}) = \theta(n^2)$



Master teoremi

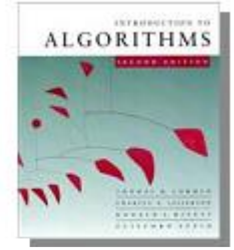
- **Örnek:** $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1, n \geq 3 \; ve \; T(2) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=1, b=3/2 , $f(n) = 1$ ve

  $n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = \theta(n^0)$

- **Durum 2:** $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n) \quad k \geq 0$

  $T(n) = \theta(logn)$



Master teoremi

- **Örnek:** $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn, n \geq 4\ ve\ T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=3, b=4 , $f(n) = nlogn$ ve

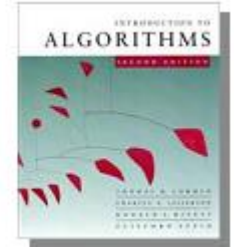
  $$n^{log_b a} = n^{log_4 3} = O(n^{0.793})$$

- **Durum 3:** $f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\varepsilon})$, burada $\varepsilon \approx 0.2$ için düzenlilik koşulu, *a*f(n/b)≤c*f(n),* büyük *n* değerleri ve *c<1* olmak koşuluyla

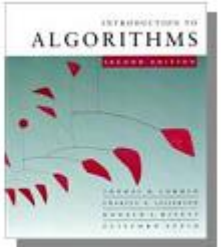
- *3(n/4)log(n/4) ≤ (3/4) nlogn, c=3/4<1* için

$T(n) = \theta(nlogn)$

Master teoremi ispat



- **Örnek**: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlogn$ için master-metot durumları uygulanmaz?
- Burada *a=2, b=2,* $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = O(n)\ ve\ f(n) = nlogn$ dir.
- *f(n),* polinomsal olarak $n^{log_b a}$ göre hızlı büyüdüğünden **Durum 3** uygulanır.
- Büyüme oranı, asimptotik olarak çok büyük olmasına rağmen polinomsal olarak çok ta büyük değildir.
- Büyüme oranı ***f(n)/*** $\boldsymbol{n^{log_b a}}$***=(n logn)/n=logn'*** dir. Bu oran herhangi bir pozitif ε sabiti için n^{ε}' den asimptotik olarak azdır.
- Sonuç olarak çözüm Durum2 ve Durum3 arasına düşer.

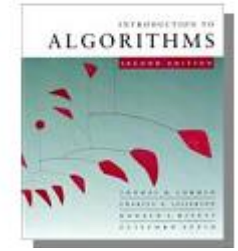


Sorular

- 1-$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n} + \sqrt{6046}$ çözünüz.
- 2-$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + \theta(n)$ özyineleme ağacı kullanarak çözünüz.

- 3- Asimptotik notasyonlardan hangilerinin geçişme özelliği (transitivity) vardır.

$1\text{-}\ T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n} + \sqrt{6046}\quad O(\sqrt{n})$

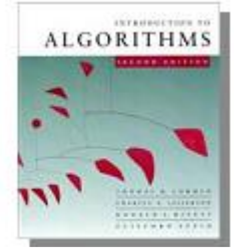


Sorular

- 4- Aşağıdaki tekrarlı bağıntıların asimptotik davranışlarını inceleyiniz.($T(0)=1$, $T(1)=1$)
  - a) $T(n)=2T(n-1)-T(n-2)+\Theta(n)$
  - b) $T(n)=3T(n-1)-2T(n-2)+\Theta(n2^n)$
  - c) $T(n)=4T(n/2)-4T(n/4)+\Theta(n\lg n)$
  - d) $T(n)=5T(n/2)-6T(n/4)+\Theta(n)$

- 5- $T(n)=T(\lceil n/2 \rceil)+1$ tekrarlı bağıntısı için $T(n)=O(\lg n)$ olduğunu gösteriniz.

- 6- $T(n)=T(n/2)+T(n/4)+T(n/8)+n$ öz yineleme ağacı ile çözünüz

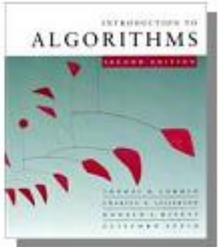


Sorular

- 7- $T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$ tekrarlı bağıntısı için $T(n)=\Omega(n\lg n)$ ve $T(n)=O(n\lg n)$ olduğunu gösteriniz. Son olarak $T(n)=\Theta(n\lg n)$ asimptotik davranışı gösterip göstermediğini açıklayınız.
- 8- Aşağıdaki tekrarlı bağıntıyı çözünüz. $(0<p<=q<1)$
  - $T(n)=T(pn)+T(qn)+\Theta(n)$
  - $T(1)=\Theta(1)$
- 9- i değişkeni 1 ile n-1 arasında değer alan düzenli dağıtık bir gelişigüzel değişken olsun.
- $f(n)=(i+1)f(i)$ ve $f(1)=1$

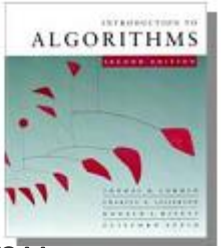
  tekrarlı bağıntısı için f(n) nin mümkün olan değerleri nelerdir ve ortalama değeri nedir?
- 10- $T(n) = 2\ T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$ tekrarlı bağıntısının çözümünün $O(n\lg n)$ olduğunu gösteriniz.

5.Hafta Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



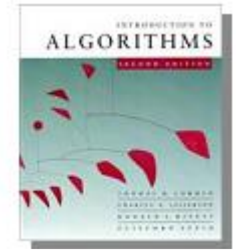
Sorular

- 1-$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n} + \sqrt{6046}$ çözünüz.
- 2-$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + \theta(n)$ özyineleme ağacı kullanarak çözünüz.
- 3-Aşağıdaki tekrarlı bağıntıların asimptotik davranışlarını inceleyiniz.(T(0)=1, T(1)=1)
  - a) $T(n)=2T(n-1)-T(n-2)+\Theta(n)$
  - b) $T(n)=3T(n-1)-2T(n-2)+\Theta(n2^n)$
  - c) $T(n)=4T(n/2)-4T(n/4)+\Theta(n\lg n)$
  - d) $T(n)=5T(n/2)-6T(n/4)+\Theta(n)$



Sorular

- 4- $T(n)=T(\lceil n/2 \rceil)+1$ tekrarlı bağıntısı için $T(n)=O(\lg n)$ olduğunu gösteriniz.
- 5- $T(n)=T(n/2)+T(n/4)+T(n/8)+n$ öz yineleme ağacı ile çözünüz
- 6- $T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$ tekrarlı bağıntısı için $T(n)=\Omega(n\lg n)$ ve $T(n)=O(n\lg n)$ olduğunu gösteriniz. Son olarak $T(n)=\Theta(n\lg n)$ asimptotik davranışı gösterip göstermediğini açıklayınız.



Sorular

- 7- Aşağıdaki tekrarlı bağıntıyı çözünüz. $(0<p<=q<1)$
  - $T(n)=T(pn)+T(qn)+\Theta(n)$
  - $T(1)=\Theta(1)$
- 8- i değişkeni 1 ile n-1 arasında değer alan düzenli dağıtık bir gelişigüzel değişken olsun.
- $f(n)=(i+1)f(i)$ ve $f(1)=1$

  tekrarlı bağıntısı için f(n) nin mümkün olan değerleri nelerdir ve ortalama değeri nedir?
- 9- $T(n) = 2\,T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$ tekrarlı bağıntısının çözümünün $O(n\lg n)$ olduğunu gösteriniz.

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; x\neq 1 \text{ için}$$

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x} \quad ; |x|<1 \text{ için}$$

Bazı Matematiksel İfadeler

S(N) = 1 + 2 + 3 + 4 + … N = $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$

Karelerin Toplamı: $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N*(N+1)*(2n+1)}{6} \approx \frac{N^3}{3}$

Geometrik Seriler: $\sum_{i=0}^{N} A^i = \frac{A^{N+1}-1}{A-1}$ A > 1

$$\sum_{i=0}^{N} A^i = \frac{1-A^{N+1}}{1-A} = \Theta(1)$$ |A| < 1

Bazı Matematiksel İfadeler

- İki sınır arasındaki sayıların toplamı: $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=0}^{b} f(i) - \sum_{i=0}^{a-1} f(i)$

$$\sum_{i=1}^{n} (4i^2 - 6i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} i$$

- Combinatorics

1. Number of permutations of an n-element set: $P(n) = n!$
2. Number of k-combinations of an n-element set: $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
3. Number of subsets of an n-element set: 2^n

Bazı Matematiksel İfadeler

- Properties of Logarithms

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a x^y = y \log_a x$

4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

6. $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x$

Bazı Önemli Matematiksel İfadeler

- Important Summation Formulas

1. $\sum_{i=l}^{u} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{u-l+1 \text{ times}} = u - l + 1$ (l, u are integer limits, $l \le u$); $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}n^2$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \approx \frac{1}{k+1}n^{k+1}$

5. $\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ $(a \ne 1)$; $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

6. $\sum_{i=1}^{n} i2^i = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$ $\quad \sum_{i=0}^{n-1} ix^i = x + 2x^2 + 3x^3 \cdots + nx^n = \frac{(n-1)x^{(n+1)} - nx^n + x}{(x-1)^2}.$

7. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$, where $\gamma \approx 0.5772\ldots$ (Euler's constant)

8. $\sum_{i=1}^{n} \lg i \approx n \lg n$

Bazı Önemli Matematiksel İfadeler

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+...+2n = n(n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1+r+r^2+r^3+...+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}, \ (r \neq 1)$

7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

8. $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$

Bazı Matematiksel İfadeler

- Sum Manipulation Rules

1. $\sum_{i=l}^{u} ca_i = c \sum_{i=l}^{u} a_i$

2. $\sum_{i=l}^{u} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=l}^{u} a_i \pm \sum_{i=l}^{u} b_i$

3. $\sum_{i=l}^{u} a_i = \sum_{i=l}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{u} a_i$, where $l \leq m < u$

4. $\sum_{i=l}^{u} (a_i - a_{i-1}) = a_u - a_{l-1}$

Approximation of a Sum by a Definite Integral

$$\int_{l-1}^{u} f(x)dx \le \sum_{i=l}^{u} f(i) \le \int_{l}^{u+1} f(x)dx \quad \text{for a nondecreasing } f(x)$$

$$\int_{l}^{u+1} f(x)dx \le \sum_{i=l}^{u} f(i) \le \int_{l-1}^{u} f(x)dx \quad \text{for a nonincreasing } f(x)$$

Floor and Ceiling Formulas

The *floor* of a real number x, denoted $\lfloor x \rfloor$, is defined as the greatest integer not larger than x (e.g., $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$). The *ceiling* of a real number x, denoted $\lceil x \rceil$, is defined as the smallest integer not smaller than x (e.g., $\lceil 3.8 \rceil = 4$, $\lceil -3.8 \rceil = -3$, $\lceil 3 \rceil = 3$).

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$

2. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ and $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ for real x and integer n

3. $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$

4. $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

Miscellaneous

1. $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ as $n \to \infty$ (Stirling's formula)

2. Modular arithmetic (n, m are integers, p is a positive integer)

$$(n + m) \bmod p = (n \bmod p + m \bmod p) \bmod p$$

$$(nm) \bmod p = ((n \bmod p)(m \bmod p)) \bmod p$$