

Apuntes Lógica

Oskar Denis Siodmok

25 de octubre de 2020

Parte I

Lógica Bloque 2 - Tema 1

1. Definiciones Generales

- Objetivo: Estudio de la sintaxis de la lógica proposicional para poder analizar fórmulas.
- Alfabeto A : Conjunto de símbolos.
- Palabras sobre A : Secuencia finita de símbolos de A .
- A^* : Todas las posibles palabras de A .
- Lenguaje sobre A : Subconjunto de A^* .
- Reglas de formación: Las que permiten obtener nuevas expresiones en un lenguaje a partir de expresiones básicas.

2. Elementos Básicos de la Lógica proposicional

- Propositiones atómicas: Oraciones declarativas que pueden ser verdaderas o falsas y que no pueden descomponerse en proposiciones más simples. Se suelen denotar con p, q, r, s, t, \dots , símbolos que se denominan *signatura*.
- Conectores lógicos:
 - Constantes (de aridad 0): \top o \perp (\top de True).
 - Conectores unarios (de aridad 1): \neg (negación).
 - Conectores binarios (de aridad 2): denotados de forma general con \circ
 - \wedge (y).
 - \vee (ó).
 - \rightarrow (implicación).
 - \leftrightarrow (doble implicación).
- Símbolos de puntuación: Paréntesis abiertos y cerrados.

De esta forma, por ejemplo $(\neg p \wedge \vee)q \rightarrow$ sería una palabra sobre el alfabeto de la lógica proposicional pero no seguiría las reglas de formación del lenguaje. Se denominaría fórmula no bien construida.

3. Definición Recursiva de las Fórmulas Proposicionales

Las fórmulas proposicionales, fbc (fórmulas bien construidas) son palabras sobre el alfabeto de la lógica proposicional que se pueden construir recursivamente en un número finito de pasos mediante las siguientes reglas de formación:

- Paso Base, (At): \top , \perp y cualquier proposición atómica son fórmulas.
- Pasos recursivos:

- (\neg) : Si φ es fórmula $\rightarrow \neg \varphi$ es fórmula.
- (\circ) : Si φ y ψ son fórmulas $\rightarrow (\varphi \circ \psi)$ es fórmula.

Así, si una palabra no se puede obtener mediante estas tres reglas no es una fórmula de la lógica proposicional. Notar que para representar fórmulas se usan letras del alfabeto griego $\varphi, \psi, \chi, \dots$. Al conjunto de todas las fórmulas bien construidas posibles de la lógica proposicional se le da nota como **F** o como **L** y hace referencia al lenguaje de la lógica proposicional.

Además, se dice que ψ es subfórmula de φ si ψ está formada a partir de φ y conectivos de la lógica proposicional de forma correcta. Se cumple que cada fórmula es subfórmula de si misma.

4. Representación de fórmulas

4.1. Forma Usual

Seguirá las reglas de formación establecidas anteriormente. Se usarán paréntesis para evitar la ambigüedad.

4.2. Forma Abreviada

Consistirá en quitar paréntesis innecesarios según una serie de criterios:

1. Se pueden omitir los paréntesis externos
2. Se introducen reglas de precedencia (prioridad):
 - Nivel 1: \neg .
 - Nivel 2: \vee y \wedge .
 - Nivel 3: \rightarrow y \leftrightarrow .
3. Se admite la asociatividad por la derecha de \vee , \wedge , \rightarrow y \leftrightarrow .

4.3. Principio de Unicidad

Toda fórmula φ pertenece a solo una de las siguientes categorías:

- (At): φ es atómica.
- (\neg) : φ es $\neg \varphi_1$ para cierta fórmula φ_1 .
- (\circ) : φ es $(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ para cierto conectivo \circ y ciertas fórmulas φ_1 y φ_2 .

Estas reglas implican que cada fórmula solo se puede analizar sintácticamente de una única fórmula.

4.4. Árboles Sintácticos

Una consecuencia directa de del principio de unicidad es la posibilidad de representar fórmulas mediante árboles.