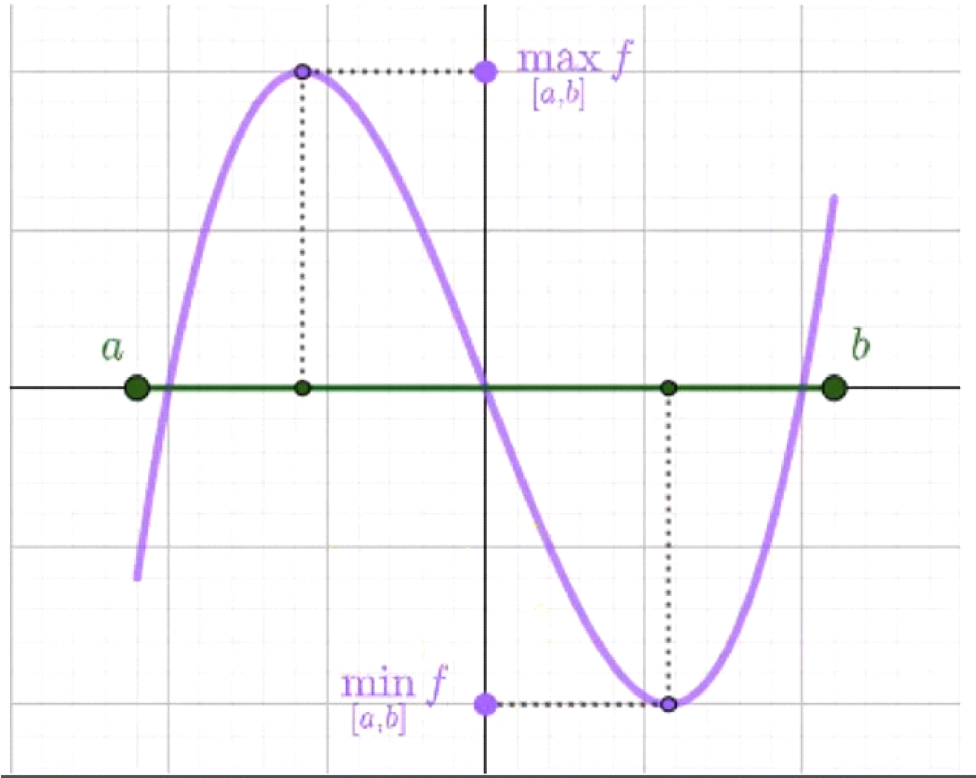
Teorema di Weistrass

mercoledì 12 aprile 2023 21:55

ENUNCIATO:

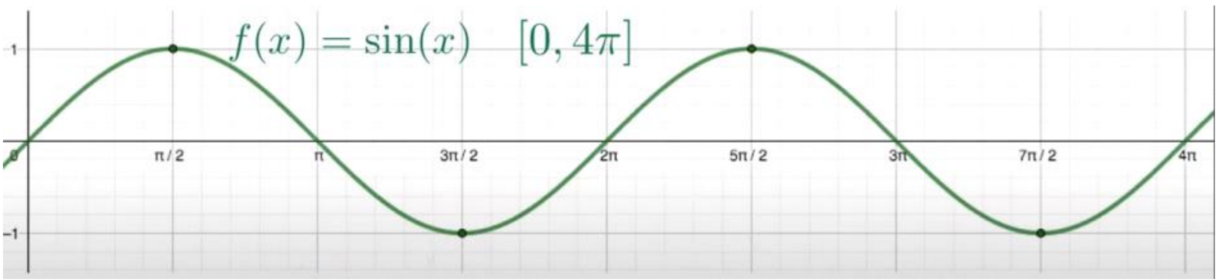
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono:

$$M = \max_{[a,b]} f \qquad m = \min_{[a,b]} f$$



ATTENZIONE!! i punti di massimo e minimo possono non essere unici.

↳ ad esempio, con la funzione:



$\max \operatorname{sen}(x) = 1$ in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{5}{2}\pi$

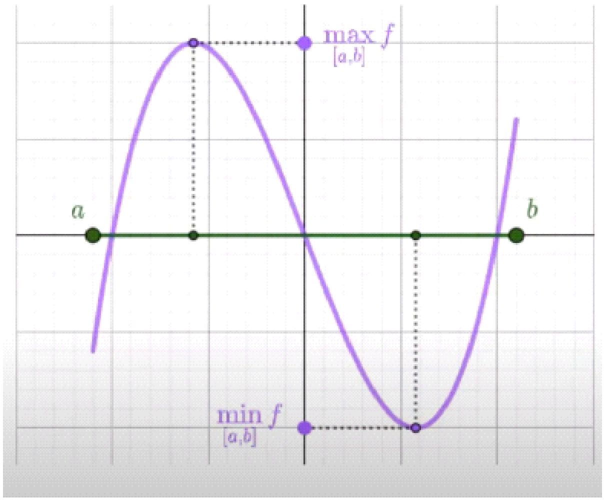
$\min \operatorname{sen}(x) = -1$ in $x = \frac{3}{2}\pi$ e $x = \frac{7}{2}\pi$

DOVE POSSONO ESSERE I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO?

- PUNTI STAZIONARI

$x_0 \in (a,b)$ tale che
$f'(x_0) = 0$

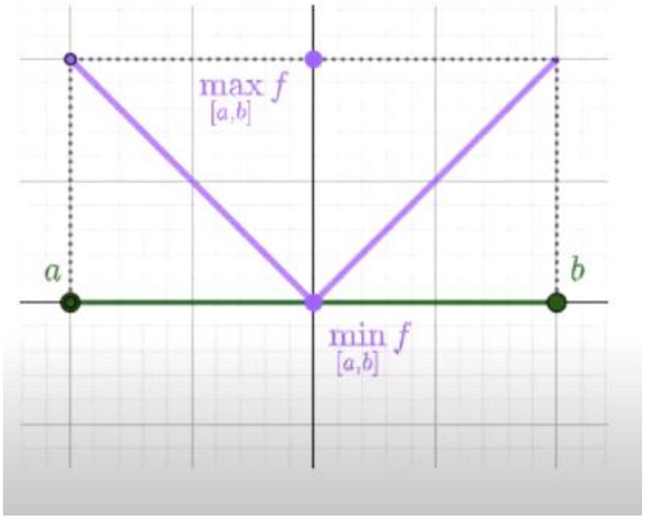
punti nell'intervallo (a,b) in cui la derivata fa 0



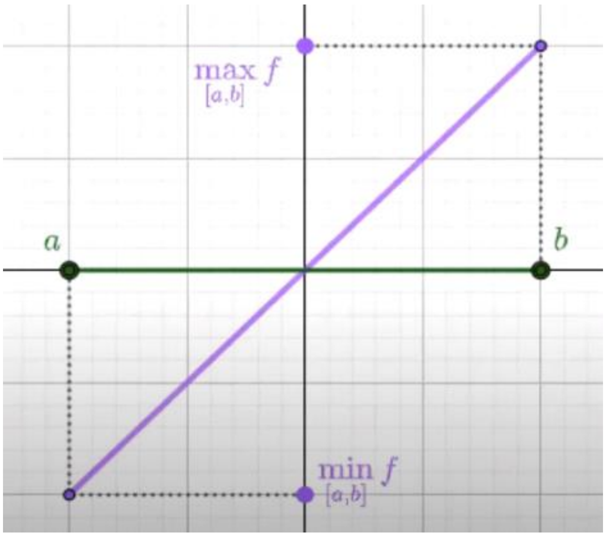
- PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$x_0 \in (a,b)$ tale che
$\nexists\ f'(x_0)$

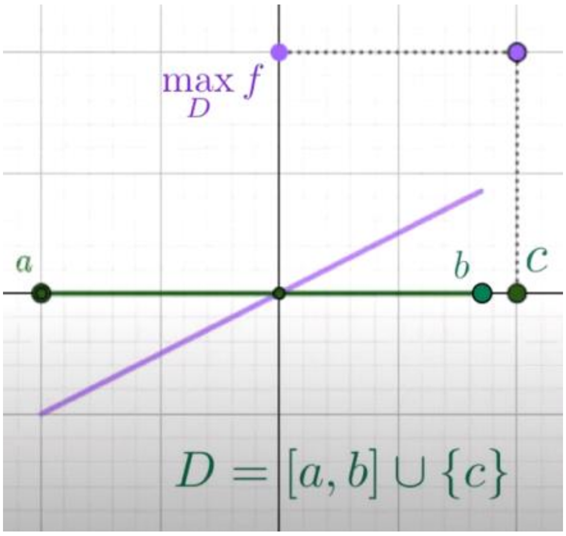
punti interni all'intervallo (a,b) in cui la derivata non esiste



- ESTREMI DEL DOMINIO



- PUNTI ISOLATI



IPOTESI DEL TEOREMA

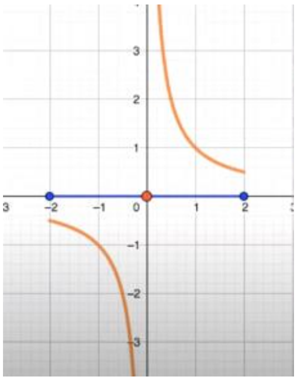
IPOTESI DEL TEOREMA

- intervallo chiuso e limitato.
- funzione continua.

Se le ipotesi non sono rispettate, massimo e minimo potrebbero non esistere.

esempio 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad [-2, 2]$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

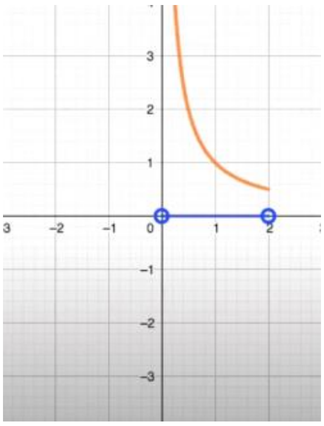
DISCONTINUITÀ IN $x_0 = 0$

quindi non esistono i massimi e i minimi

esempio 2

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (0, 2)$$

INTERVALLO NON È CHIUSO E LIMITATO



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

LA FUNZIONE NON È CONTINUA

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2^-} = \frac{1}{2}$$

non esistono i massimi e minimi