DENNIS, 14/10/2016

RUFFINI

Se il polinomio non è un prodotto notevole e se è di grado ≥ 2, per scomporre il polinomio uso la REGOLA DI RUFFINI. Questo procedimento permette di scomporre un polinomio di grado n nel prodotto di un polinomio n-1 e un polinomio di 1° grado.

Esempio: Consideriamo il polinomio di 4^ grado $(n=4)$:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$$

L'obiettivo è quello di scomporre $P(x)$ in due polinomi (uno di 3° grado e uno di 1° grado) utilizzando la regola di Ruffini.

Procedimento:

1) Cerchiamo un numero tale che, una volta sostituito al posto di x, faccia diventare il polinomio uguale a zero; cioè vogliamo un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che $P(a) = 0$.

Nella regola di Ruffini, il "trucco" che si applica per trovare questo numero è: cercare all'interno di tutti i numeri della forma $\frac{a}{b}$, con a divisore del termine noto del polinomio preso in considerazione e b divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

Nel nostro esempio il termine noto è 6 e il coefficiente del termine di grado massimo è 2. Quindi abbiamo:

$$a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}, \quad b \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

e dunque, considerando tutte le combinazioni di a e b, abbiamo:

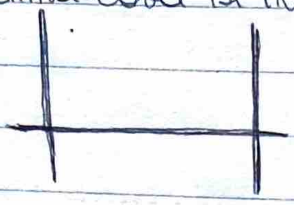
$$\frac{a}{b} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$$

Adesso proviamo a scegliere il numero -1 per vedere se $P(-1) = 0$. Si ha:

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 8(-1)^2 - (-1) + 6 = 2 - 1 - 8 + 1 + 6 = 0$$

e quindi -1 è il numero che fa al caso nostro.

2) Costruiamo uno schema che ci sarà utile per il nostro procedimento. Per prima cosa si tracciano due linee verticali e una orizzontale:



Nella prima riga dello schema, a partire dalla destra della prima linea verticale, si scrivono i coefficienti del polinomio $P(x)$ in ORDINE DISCENDENTE RISPETTO AL GRADO DELLA VARIABILE X; a destra della seconda linea verticale si scrive il termine noto. Seguendo l'esempio, abbiamo:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Per ultima cosa, scriviamo il numero a che annulla $P(x)$ appena sopra la linea orizzontale, a sinistra della prima linea verticale. Nel nostro esempio:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

3) Eseguiamo il seguente ALGORITMO, cioè questo procedimento "ripetitivo" costituito da un numero finito di passi. Dopo aver spiegato ogni passo lo applicheremo direttamente all'esempio proposto.

1. Prendiamo il coefficiente del termine di grado più alto del polinomio e riscriviamolo sotto la linea orizzontale

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

2. Moltiplichiamo questo numero per a (nell'esempio $a=-1$), che abbiamo scritto a sinistra della prima linea verticale. Scriviamo il risultato nella colonna immediatamente più a destra, sotto al secondo coefficiente del polinomio:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

$-1 \cdot 2 = -2 \Rightarrow$ scriviamo -2 sotto a 1

3. Sommiamo i numeri presenti nella colonna dove abbiamo appena scritto il nuovo numero e scriviamo il risultato sotto la linea orizzontale, nella stessa colonna:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & & & \\ \hline & 2 & -1 & & & \end{array}$$

$1+(-2)=-1$

4. Ripetiamo le operazioni fatte precedentemente a partire dalla seconda colonna, fino a quando non arriviamo a determinare il risultato sotto la linea orizzontale che sia più vicino alla linea verticale di destra:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & 1 & 6 \\ -1 & & & 1 & & \\ \hline & 2 & -1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & & 1 & & \\ \hline & 2 & -1 & -7 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 1 & 7 & \\ \hline & 2 & -1 & -7 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 1 & -7 & \\ \hline & 2 & -1 & -7 & 6 & \end{array}$$

5. A questo punto moltiplichiamo l'ultimo numero per a e scriviamo il risultato sotto al termine noto (a destra della seconda linea verticale). Se il procedimento è stato eseguito correttamente, la somma tra questo numero e il termine noto DEVE ESSERE UGUALE A ZERO:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 1 & 7 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -7 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Il procedimento è giusto perché: $-1\cdot 6=-6$ e $6+(-6)=\boxed{0}$

6) Prendiamo i numeri scritti <u>SOTTO</u> la linea orizzontale e li interpretiamo come i coefficienti di un polinomio $Q(x)$. Nel nostro esempio, i numeri ottenuti sono nell'ordine $2,-1,-7,6$ e quindi abbiamo: $Q(x)=2x^3-x^2-7x+6$

La regola di Ruffini garantisce che: $P(x)=Q(x)\cdot(x-a)$

Dato che $a=-1$, abbiamo $(x-a)=(x+1)$ e quindi:

$$P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6=(2x^3-x^2-7x+6)(x+1)$$

Siamo riusciti a scomporre il polinomio di partenza $P(x)$ in due polinomi diversi, uno di 1° grado $(x+1)$ e l'altro di 3° grado $(Q(x))$.

ATTENZIONE!!

Quando nel polinomio da scomporre $P(x)$ mancano dei termini di grado minore al grado n di $P(x)$, nello schema NON SI DEVONO SALTARE LE COLONNE CORRISPONDENTI A ESSI, ma bisogna posizionare degli "0" al loro posto.

Per esempio, prendiamo il polinomio $P(x)=x^4-2x+1$. Si verifica facilmente che $P(1)=0$, e dunque nel costruire lo schema al punto 2 del procedimento possiamo scegliere $a=1$. Lo schema risulta quindi:

	1	0	0	-2	1
-1					

dato che in questo polinomio mancano i termini di grado 3 e 2.
In altre parole, se il polinomio da scomporre è di grado n allora nello schema della regola di Ruffini ci devono essere sempre n colonne di numeri tra le righe verticali, e le colonne mancanti si generano mettendo uno 0 dove necessario.

UTILIZZO RIPETUTO DELLA REGOLA DI RUFFINI PER SCOMPORRE UN POLINOMIO

Ritorniamo al polinomio $P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$. Applicando la regola di Ruffini, siamo riusciti a ottenere la scomposizione $P(x)=Q(x)\cdot(x+1)$, con $Q(x)=2x^3-x^2-7x+6$. Ma $Q(x)$ si può scomporre utilizzando di nuovo la regola di Ruffini?
Provando, seguendo lo stesso procedimento mostrato prima, otteniamo $Q(x)=2x^3-x^2-7x+6=(2x^2+x-6)(x-1)$. E in particolare $P(x)=Q(x)(x+1)=(2x^2+x-6)(x-1)(x+1)$. Possiamo ancora andare avanti: il polinomio $Q_1(x)=2x^2+x-6$ è di 2° grado, quindi possiamo scomporlo provando a vedere se è un trinomio notevole o utilizzando per la terza volta Ruffini. E risulta $Q_1(x)=(2x-3)(x+2)$

$$P(x)=\underbrace{(2x^3-x^2-7x+6)}_{Q(x)}(x+1)=\underbrace{(2x^2+x-6)}_{Q_1(x)}(x-1)(x+1)$$
$$=(2x-3)(x+2)(x-1)(x+1)$$