Prolog e Logica

Per arrivare al legame tra Prolog e la logica è necessario introdurre il linguaggio della logica dei predicati (o logica di primo ordine).

Il linguaggio della logica dei predicati può essere costruito dalla signature: $\langle P, C, F, V \rangle$ dove:

- $P \neq \emptyset$ è un insieme di simboli di predicato;
- $C \neq \emptyset$ è un insieme di simboli di costante;
- F è un insieme di simboli di funzione;
- $V \neq \emptyset$ è un insieme di simboli di variabile.

Partendo dalla signature è possibile costruire il linguaggio della logica dei predicati mediante una struttura a 2 livelli:

1. Il primo livello definisce la forma dei termini come segue:
    - Ogni simbolo di variabile è un termine;
    - Ogni simbolo di costante è un termine;
    - Se $t_1, t_2, ..., t_n$ sono termini e f è un simbolo di funzione, allora $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ è un termine.

    Per un termine t è definita la funzione $vars(t)$ che costruisce l'insieme delle variabili contenute nel termine nel seguente modo:

    - Se t è una variabile, allora $vars(t) = \{t\}$;
    - Se t è una costante, allora $vars(t) = \varnothing$;
    - Se $t = f(t_1, t_2, ..., t_n)$, con $f \in F$, allora $vars(t) = vars(t_1) \cup vars(t_2) \cup ... \cup vars(t_n)$;

    Un termine t viene detto chiuso (*ground*) se $vars(t) = \varnothing$.

2. Il secondo livello definisce le formule ben formate (chiamate proposizioni);

- Se $t_1, t_2, ..., t_n$ sono termini e p è un simbolo di predicato, allora $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ è una proposizione detta letterale affermato;
- I simboli $\top$ e $\bot$ sono proposizioni;
- Se A è una proposizione, allora $\neg(A)$ è una proposizione e se A è un letterale affermato, allora $\neg(A)$ è un letterale negato.
- Se A e B sono proposizioni, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \implies B)$ e $(A \iff B)$ sono proposizioni;
- Se A è una proposizione e $x \in V$ è una variabile, allora $\exists x.(A)$ e $\forall x.(A)$ sono proposizioni;
- Nient'altro è una proposizione.

> *Nota*:
>
> Si chiama ***proposizione*** o ***enunciato*** una frase per la quale si possa stabilire con certezza se è vera o falsa.
>
> Un ***predicato*** è invece una proposizione che dipende da una variabile (o più variabili) appartenenti a un certo insieme *D*, detto ***dominio.***

I quantificatori definiscono un campo d'azione per una variabile.

Dato un insieme $D \neq \emptyset$ detto dominio del linguaggio e una signature $\langle P, C, F, V \rangle$ è possibile associare un valore di verità alle proposizioni scegliendo una funzione di interpretazione I con le caratteristiche:

1. Per ogni $c \in C$ esiste un elemento $I(c)$ chiamato interpretazione del simbolo di costante c.
2. Per ogni $f \in F$ esiste una funzione $I(f)$ chiamato interpretazione del simbolo di funzione f.

3. Per ogni $p \in P$ esiste una relazione $I(p)$ chiamato interpretazione del simbolo di predicato p.

> La funzione di interpretazione assegna un significato ai termini.

Fissata una funzione di interpretazione I e un'assegnazione s è possibile associare un'interpretazione ai termini come segue:

1. L'interpretazione di un simbolo di costante $c \in C$ per l'assegnazione s è $I_s(c) = I(c)$. *(una costante va solo interpretata)*.
2. L'interpretazione di un simbolo di variabile $x \in V$ per l'assegnazione s è $I_s(x) = s(x)$.
3. L'interpretazione di un termine strutturato $t = f(t_1, t_2, ..., t_n)$ per un'assegnazione s è $I_s(t) = I(f)(I_s(t_1), I_s(t_2), ..., I_s(t_n))$.

Fissato un interpretazione I e un'assegnazione s, è possibile dire quando l'interpretazione I soddisfa una proposizione A secondo l'assegnazione s, $(I, s) \models A$

I viene detta modello di A se A è vera in I per ogni sostituzione s, altrimenti prende il nome di contromodello di A.

Una teoria T non è un altro che un insieme di proposizioni.

Date una teoria T e una proposizione A, è possibile studiare quando se $T \models A$ mediante il metodo di risoluzione che non è altro che un tipo particolare del metodo di refutazione.
I metodi di refutazione si basano sul fatto che $T \models A$ se e soltanto se non esistono un'interpretazione I e una sostituzione s tale che $(I, s) \models T \cup \{\neg A\}$.

Il metodo di risoluzione può essere applicato per studiare la soddisfacibilità di un insieme generico di proposizioni mediante il metodo dovuto ad Albert Thoralf Skolen. Però nell'ambito della programmazione logica, si prevede che le teorie siano formate unicamente da proposizioni di un particolare tipo detto clausole di Horn, dal nome Alfred Horn. Una clausola di Horn è una proposizione in cui:

1. Non sono ammessi quantificatori esistenziali;
2. I quantificatori universali, se presenti, sono unicamente nella parte iniziale della proposizione;
3. La parte della proposizione che segue i quantificatori è formata unicamente da una disgiunzione di letterali.
4. Non più di un letterale può essere positivo.