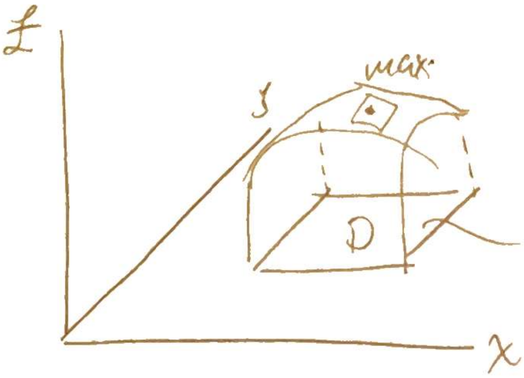
Lecture 2: Flerdim



$z = g(x, y)$ $\quad g: D \to R$, $D \subset R^2$

$D \subset R^2$

volym: $\iint_D g(x, y)\,dx\,dy$

$\iiint_K h(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ "massa" h-densitet.

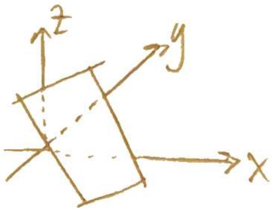
Def: Rotationssymmetri gäller för funktioner $R^3 \to R^3$

$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Metod: se skärning genom plan för axlar, eller plan paralella med dessa. $z = 0 \Rightarrow x, y$-plan osv...

Sammanfattning av första-/andragradsytor.

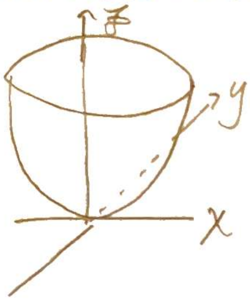
1. Plan



$$ax+by+cz+d=0$$

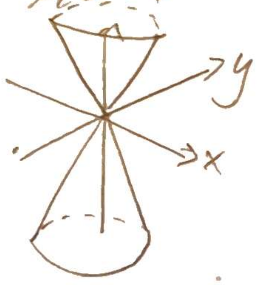
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=-d$$

2. Paraboloid



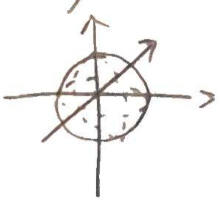
$$z=ax^2+by^2, \quad a,b>0$$

3. Kon

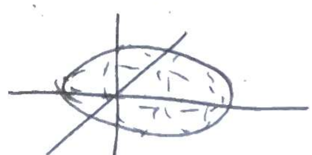


$$z^2=ax^2+by^2, \quad a,b>0$$

4. Sfär $x^2+y^2+z^2=r^2$

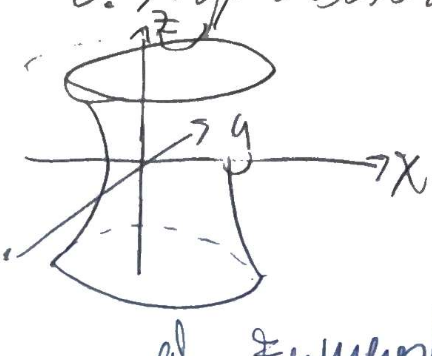


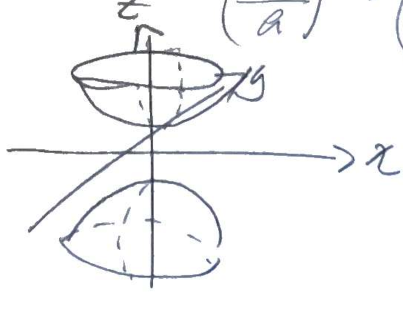
5. Ellipsoid



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

6. Hyperboloid





a) Enmantlad

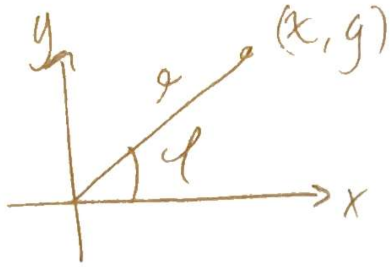
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

b) Tvåmantlad

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1$$

+ **Polära koordinater**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



(1) Ex $x^2+y^2=1 \iff r=1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$

(2) Ex $x^2+y^2 \le 1 \iff r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \le 1$
$\iff r^2 \le 1 \iff r \le 1$

(3) Ex $4x^2+9y^2 \le 1$

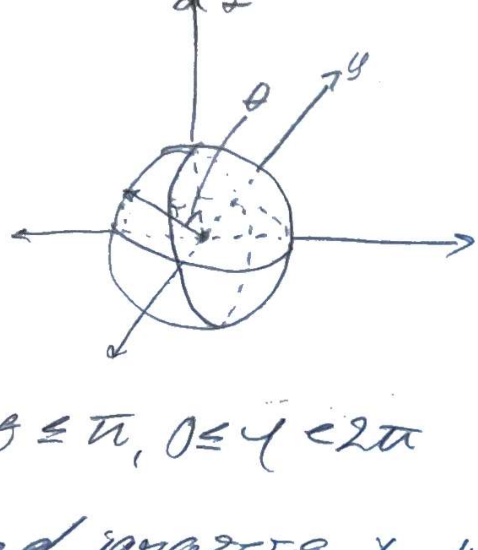
$\Rightarrow$ Ellipspolära koordinater.

$$\begin{cases} 2x = r\cos\varphi \\ 3y = r\sin\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} r\cos\varphi \\ y = \frac{1}{3} r\sin\varphi \end{cases}$$

+ **Förflyttade** (Ellips) polära koord

$$\begin{cases} x = x_0 + a r\cos\varphi \\ y = y_0 + a r\sin\varphi \end{cases}$$

+ **Rymdpolära koordinater**

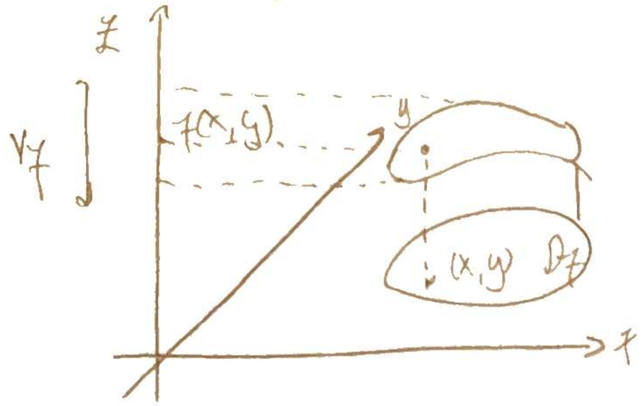


$$\begin{cases} x = x_0 + r\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + r\cos\theta \end{cases}$$

$0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$

Anm: Om origocentrerad ignorera x_0, y_0, z_0

∗ Reellvärd funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



för varje punkt (x,y) i D_f ersätter vi rakt ovanför en punkt i rummet med $z = f(x,y)$

grafen G_f till f menas följande delmängd i $\mathbb{R}^3$

: $G_f = \{ (x, y, f(x,y)) ; (x,y) \in D_f \}$

→ Blir vanligtvis yta ⇒ funktionsyta.

värde mängd

$V_f = \{ z ; z = f(x,y)$ för något $(x,y) \in D_f \}$

∗ Nivåkurva ges av $f(x,y) = c$ för $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Likaväl ges nivåyta av $f(x,y,z) = c$ för $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

∗ Vektorvärda funktioner

komponent funkt.

$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in D_r$

⇒ Beskrivningen av kurvor i planet

$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D_r$

⇒ Associeras till kurva i rummet, rymdkurva.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ytor på parameterform, $r(t,s)$.

Ex Rymdkurva

Den linje i rummet från $P=(2,2,3)$, riktning v.

$u=(1,-2,2)$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2-2t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Parametriseras: $\varphi(t)=(2+t, 2-2t, 3+2t)$

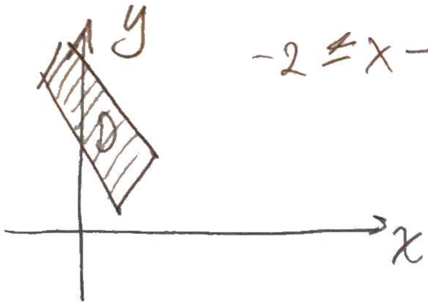
$\propto$ $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(s,t)=(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, $(s,t)\in D_\varphi$

(om vi trycker s/t, s/t=konst får vi kurvor i rum som rutnät.

$\propto$ Koordinatbyten $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

kallas även transformationer

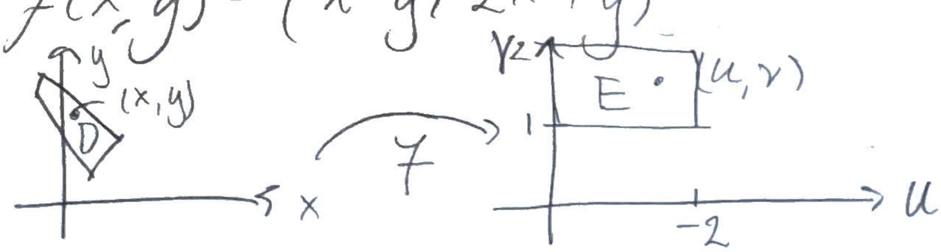
Ex



$-2 \le x-y \le 0$, $1 \le 2x+y \le 2$

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = 2x+y \end{cases}$$

$f(x,y)=(x-y, 2x+y)$



Alt: $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = -\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v \end{cases}$ $\quad f^{-1}(u,v)=(\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}v, -\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}v)$

- Injektiv: krav för invers

$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$

[tolkas funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som rektangulär / finns inget krav på (bi)injektivitet/]

- Sammansättning av funktioner

$f(u) = \sin u, \ g(x,y) = x^2 + y^2$

$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = \sin g(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f \circ g}$$

fungerar!

$(\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R})$

fungerar ej.

$f(u,v) = u^2 - v \cdot \sin u \qquad g(x,y) = (x+y, xe^y)$

$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x+y, xe^y) =$

$= (x+y)^2 - xe^y \cdot \sin(x+y)$

Def

Om f och g : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ resp $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $: V_g \subseteq D_f$

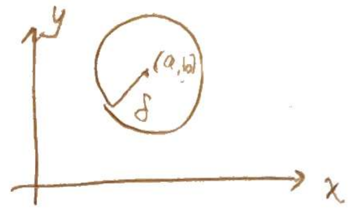
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

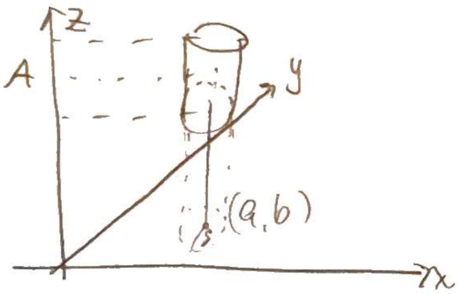
Föreläsning 3: Gränsvärde, kontinuitet

I f av typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $\quad \underbrace{|f(x)-A|}_{\text{ligger i } \mathbb{R}^p} \quad \underbrace{|x-a|}_{\text{i } \mathbb{R}^n}$

Ex $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad |f(x,y)-A| < \varepsilon$ då $|(x,y)-(a,b)| < \delta$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x) = A$$





Toolkit

- Gör en kvalificerad gissning, ansats, av vad gränsvärdet A bör vara.
- Bilda absolutbelopp $|f(x,y)-A|$, byt till polära koordinater, & försök göra $|f(x,y)-A|$ oberoende av θ genom lämplig uppskattning uppåt.
- Visa att uppskattning går mot 0 då $r \to 0$.

→ för att göra en bra ansats kan man se vad som händer om x eller $y \to 0$. Även $y = kx$, $x \to 0$.

* Polära koord $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ 

$(x,y)\to(a,b)$

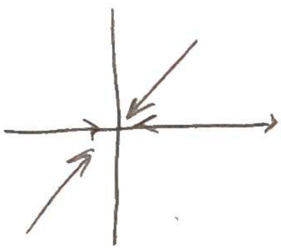
$r\to 0$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{r^2}\cos^2\varphi\, r\sin\varphi}{\cancel{r^2}(\cancel{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi})} = r\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$$

$$|f(x,y)-0| = r\cos^2\varphi\cdot|\sin\varphi| \le \underbrace{r\cdot 1 = r}_{\text{oberoende av } \varphi} \to 0$$

$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ VSV.

Ex $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\Big|$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$y=0: f(x,y) = \boxed{0}$

$x=0: f(x,y) = \boxed{0}$

$y=x: \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Olika lim ⇒ lim saknas enligt motsägelse

anm

om $(x,y)\to \underline{(a,b)} \neq (0,0)$ anv: $\begin{cases} x = \boxed{a} + r\cos\varphi \\ y = \boxed{b} + r\sin\varphi \end{cases}$

anm

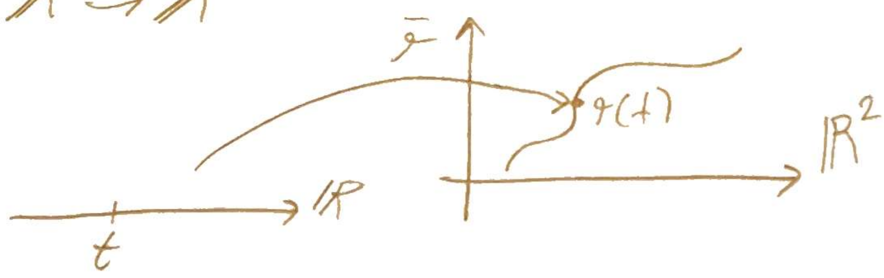
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$ ~ koordinatvis

$$= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = (A, B)$$

I Om något gränsvärde saknas för en/båda funk saknas gränsvärde överlag.

Vektorvärda funktioner

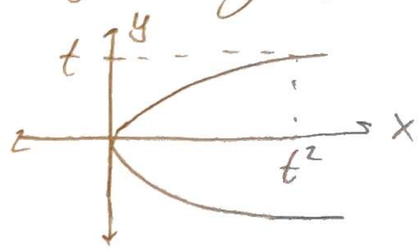
* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



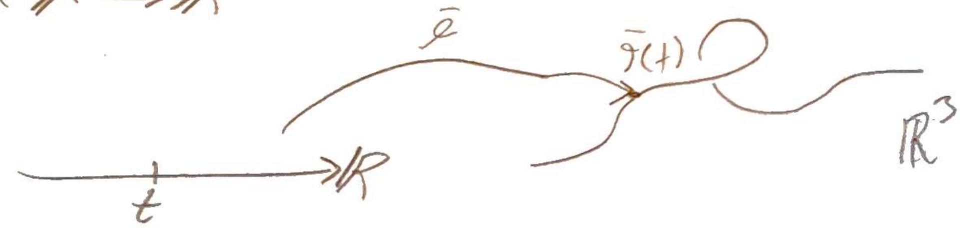
$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $x(t), y(t)$ komponentf.

Ex

$r(t) = (t^2, t)$



* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

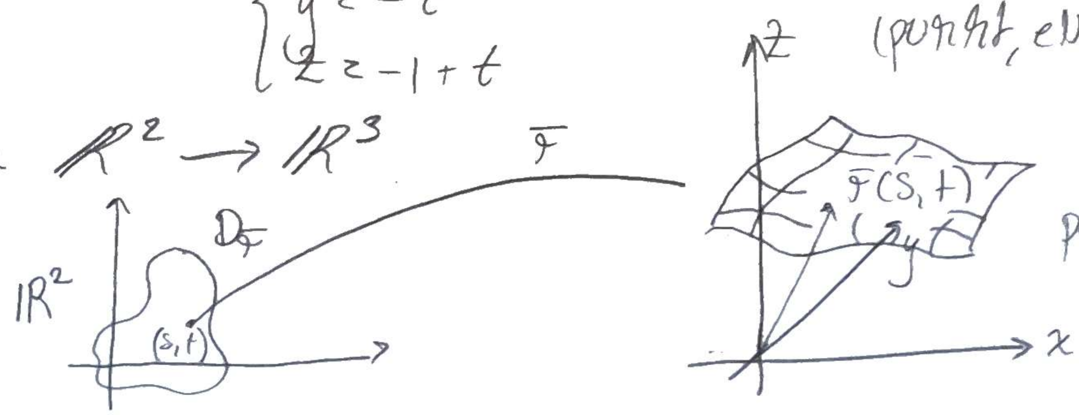


Ex $\bar{r}(t) = (2+2t, -t, -1+t) = \underset{P}{(2,0,-1)} + t\underset{\bar{v}}{(2,-1,1)}$

(punkt, eller ortsvektor)

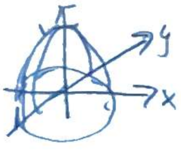
$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases}$$

* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



parametrisering

$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ kompf. av $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Ex Parametrisera reellvärd funktion

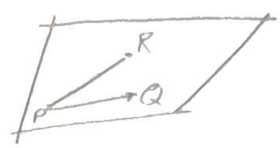
$f(x,y) = 1-(x^2+y^2) \to \bar{r}(s,t) = (s, t, 1-(s^2+t^2))$

$(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$

Ex 2 Plan π som går genom $P:(1,2,0)$, $Q:(-2,-1,1)$, $R:(1,3,1)$. har t.ex gibtringsr.

$\overline{PQ} = (-3,-3,1)$

$\overline{PR} = (0,1,1)$



$$\begin{cases} x = 1 - 3s \\ y = 2 - 3s + t \\ z = 0 + s + t \end{cases}$$

$$\underline{\bar{r}(s,t) = (1-3s, 2-3s+t, s+t)}$$

$s, t \in \mathbb{R}^2$

Ex Sfären med radie r & medelpunkt origo kan uttryckas

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\bar{r}(\theta, \varphi) = (r \cdot \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, r \cos\theta)$$

$0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

F8 Seminarieövning

PDE: $f''_{xx} - 4x f''_{xy} + 4x^2 f''_{yy} - 2f'_y = 0 \quad (*)$

$\tilde{f}(u,v) = f(x,y)$

$$\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = x \end{cases}$$

I

$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v$

$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u$

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (f'_u \cdot 2x + f'_v)'_x = (f'_u)'_x \cdot 2x + f'_u \cdot 2 + (f'_v)'_x =$

$= (f''_{uu} \cdot 2x + f''_{uv} \cdot 1) \cdot 2x + 2 \cdot f'_u + (f''_{vu} \cdot 2x + f''_{vv} \cdot 1)$

$= f''_{uu} \cdot 4x^2 + f''_{uv} \cdot 2x + 2 \cdot f'_u + f''_{uv} \cdot 2x + f''_{vv}$

$f''_{xy} = (f'_y)'_x = (f'_u)'_x = f''_{uu} \cdot 2x + f''_{uv}$

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (f'_u)'_y = f''_{uu}$

(Blev fel i ovanst uttryck)

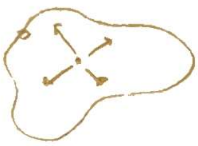
II $(*)$

$4x^2 \cdot f''_{uu} + 2x \cdot f''_{uv} + 2f'_u + f''_{uv} \cdot 2x + f''_{vv} - 4x \cdot (f''_{uu} \cdot 2x + f''_{uv}) + 4x^2 f''_{uu} - 2f'_u = 0$

$f''_{vv} = 0 \iff f'_v = \varphi(u)$ godtyckliga

$\iff f(u,v) = \varphi(u) \cdot v + \psi(u)$

$\iff f(x,y) = \varphi(x^2+y) \cdot x + \psi(x^2+y)$

4.57  $T(r,t):\quad T'_t = T''_{rr} - \frac{1}{r} T'_r$

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = T(r,t)$$

$r \xrightarrow{u'_r}$, $t \xrightarrow{u'_t}$ $\frac{r}{\sqrt{t}} = u - f(u) = T$, $f(u)$

I Transformera

$$T'_t = f'(u)\cdot u'_t = f'(u)\cdot\left(-\frac{1}{2} r\, t^{-3/2}\right) \qquad \left\{ u = \frac{r}{\sqrt{t}} \right.$$

$$T'_r = f'(u)\cdot u'_r = f'\cdot t^{-1/2}$$

$$T''_{rr} = (T'_r)'_r = (f')'_r \cdot t^{-1/2} = f''(u)\cdot u'_r \cdot t^{-1/2}$$

$$= f''(u)\cdot t^{-1/2}\cdot t^{-1/2} = f''\cdot\frac{1}{t}$$

II Insättning & förenkla

$$f'\cdot\left(-\frac{1}{2} r\, t^{-3/2}\right) = f''\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{r}\left(f'\cdot t^{-1/2}\right)$$

$$\overset{\cdot t}{\iff} -\frac{1}{2} f'\cdot r\cdot t^{-1/2} = f'' - \frac{\sqrt{t}}{r} f'$$

$$-\frac{1}{2} f'\cdot u = f'' - \frac{1}{u}\cdot f' \qquad f' = h$$

III Lös $f'' + \left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{u}\right)\cdot f' = 0$

$$\Rightarrow h' + \underbrace{\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{u}\right)}_{g(u)}\cdot h = 0$$

(III) $\text{IF} = e^{G(u)} = e^{u^2/4 - \ln u} = e^{u^2/4}\cdot\frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{u}\cdot e^{u^2/4}\right) f'\right)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{u}\cdot e^{u^2/4}\cdot f' = C$$

$$\Rightarrow f' = \frac{C}{\frac{1}{u}\cdot e^{u^2/4}} \Rightarrow \boxed{f = -2Ce^{-\frac{u^2}{4}} + D} \quad u = \frac{r}{\sqrt{t}}$$

Gradient & Riktningsderivata

I Riktningsderivata

givet $|\bar{v}|=1$, $\bar{v}=(v_1, v_2)$ ges Rd. i (a,b):

$$* \; f'_v(a,b) = \text{grad}\, f(a,b) \cdot \bar{v} = \nabla f(a,b) \cdot \bar{v}$$

$$(\text{grad}\, f(x,y,z) = (f'_x, f'_y, f'_z))$$

II Tillväxthastighet sats

Tillv.h. varieras mellan $-|\text{grad}\, f(a,b)|$ & $|\text{grad}\, f(a,b)|$

$\Rightarrow \; * \; -|\text{grad}\, f(a,b)| \leq f'_v(a,b) \leq |\text{grad}\, f(a,b)|$

$\Rightarrow f$ max tillväxth. $|\text{grad}\, f(a,b)|$ i gradientens riktning. (nabla) ∇f

III Vi kan finna normalvektor till given kurva eller yta i punkten (a,b) genom:
(a,b,c)

$\text{grad}\, f(a,b) = (v_1, v_2)$ ortogonal mot kurvan (nivåkurva)

$\text{grad}\, f(a,b,c) = (v_1, v_2, v_3)$ Normalvektor till yta

Ex Står $x^2+y^2+z=r$

$v_1 \cdot (x-a) + v_2(y-b) + v_3(z-c) = 0$ tangentplan

Samma sätt för tangent...

OBS
$z - f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

Feluppskattning & Differentierbarhet

- Differentierbarhet i (a,b) för $f(x,y)$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}\ \varphi(h,k)$$

$\hookrightarrow \varphi(h,k) \to 0 \ ; \ (h,k) \to (0,0)$

- Differential av f i (a,b) : df

$$df = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$

$$\Longleftrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad , \quad (h,k) = (dx, dy) \text{ tillskott}$$

- Fel kan uppskattas genom:

$$\underbrace{\left[f(a+h, b+k) - f(a,b)\right]}_{\text{Exakt skillnad}} - \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]}_{\text{Approx. skill.}}$$

Alt. $|\Delta f| \lessapprox |f'_x| \cdot |\Delta x| + |f'_y| \cdot |\Delta y|$

Högre ordningens Partiella Derivator.

- $$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y x}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y \iff \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Sats: Om $f(x,y)$ 2ggr deriverbar & kontin.

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \Big| \quad f^{(3)}_{xyy} = f^{(3)}_{yxy} = f^{(3)}_{yyx}$$

$\Rightarrow$ Matcha hur man vill

Ex

$$f(u,v) = \begin{cases} u = x \\ v = y/x \end{cases} \quad , \; f'_x = f'_u - \frac{y}{x^2} f'_v \; , \; f'_y = \frac{1}{x} f'_v$$

$$f''_{xx} = \left(f'_u - \frac{y}{x^2} f'_v\right)'_x = (f'_u)'_x - \left(\frac{y}{x^2} f'_v\right)'_x =$$

$$= (f'_u)'_x - \left(\left(\frac{y}{x^2}\right)'_x \cdot f'_v + \frac{y}{x^2} \cdot (f'_v)'_x\right) =$$

$$= (f''_{uu} \cdot u'_x + f''_{uv} \cdot v'_x) + \frac{2y}{x^3} \cdot f'_v - \frac{y}{x^2} \cdot (f''_{vu} \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot v'_x) =$$

$$= \left(f''_{uu} \cdot 1 + f''_{uv} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)\right) + \frac{2y}{x^3} f'_v - \frac{y}{x^2} \cdot \left(f''_{vu} \cdot 1 + f''_{vv} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) =$$

$$= f''_{uu} - \frac{y}{x^2} f''_{uv} + \frac{2y}{x^3} f'_v - \frac{y}{x^2} f''_{vu} + \frac{y^2}{x^4} f''_{vv}$$

$$= f''_{uu} - \frac{2y}{x^2} f''_{uv} + \frac{y^2}{x^4} f''_{vv} + \frac{2y}{x^3} f'_v$$

Kedjeregeln för olika funktioner

I Reellvärda f. $h(x,y) = f(g(x,y))$

$$h'_x = f'(g(x,y))\cdot g'_x(x,y)$$
$$h'_y = f'(g(x,y))\cdot g'_y(x,y)$$

$$\text{grad } h(x,y) = f'(x,y)\cdot \overbrace{\text{grad } g(x,y)}^{(g'_x(x,y),\, g'_y(x,y))}$$

II Vektorvärd, beroende av en var. $h(x) = f(\bar{g}(x))$

1. $h'(x) = f'_u(\bar{g}(x))\cdot g'_1(x) + f'_v(\bar{g}(x))\cdot \bar{g}'_2(x)$
2. $h'(x) = \underbrace{(f'_u(\bar{g}(x)), f'_v(\bar{g}(x)))\cdot(\bar{g}'_1(x), \bar{g}'_2(x))}_{\text{Skalärprodukt (vektorer)}}$

III Vektorvärda f, beroende 2 var, $h(x) = f(\bar{g}(x,y))$

$$h'_x(x,y) = f'_u(\bar{g}(x,y))\cdot g'_{1x}(x,y) + f'_v(\bar{g}(x,y))\cdot g'_{2x}(x,y)$$

$h'_y \dots$

<u>Ex</u> Vi har $f(u,v)$ med $\begin{cases} u = x \\ v = y/x \end{cases}$

$$f'_x = f'_u\cdot u'_x + f'_v\cdot v'_x = f'_u\cdot 1 + f'_v\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = f'_u - \frac{u}{x^2}f'_v$$
$$f'_y = f'_u\cdot u'_y + f'_v\cdot v'_y = f'_u\cdot 0 + f'_v\cdot\frac{1}{x} = f'_v\cdot\frac{1}{x}$$

ps. egentligen $f(x,y) = \tilde{f}(u,v)\ \dots$

Differentialekvationer | Partiella

I Forma ekvation sådan att $\begin{cases} f'_x \\ f'_y \end{cases}$ stämmer $f(x,y)$

1. integrera en av dem & lägg till godtycklig funktion $\varphi(x$ eller $y)$. (Vi löser $x \to \varphi(y)$)
2. Derivera med avseende på motsatt funktion (i detta fall y)
3. Jämför nyfunna f'_y med givna f'_y & ta fram $\varphi(y)$.
4. om φ bara beror av den givna variabeln, som ges som argument, är $f(x,y)$ funnen. annars saknas lösning.

Ex

II På given form $f(x,y) = g(xy)$ för $\underline{x f'_x + y f'_y + f = 1}$
$x > 0, y > 0$ & $t = xy$.

$$f'_x = g'(t) \cdot t'_x = g'(t) \cdot y \quad \& \quad f'_y = g'(t) \cdot t'_y = g'(t) \cdot x$$

$$\Leftrightarrow xyg'(t) + xyg'(t) + g(t) = 1 \Leftrightarrow 2tg'(t) + g(t) = 1$$

* Metod: Integrerande faktor: $t^{1/2}$

$$g'(t) + \frac{1}{2t} g(t) = 1/2t$$

$$\Rightarrow \underbrace{t^{1/2} g'(t) + \frac{1}{2} t^{-1/2}}_{D(t^{1/2} \cdot g(t))} = \frac{1}{2} t^{-1/2} \Leftrightarrow t^{1/2} g(t) = \int \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow t^{1/2} g(t) = t^{1/2} + C$$

$$g(t) = 1 + C/t^{1/2}$$

$$\Longrightarrow g(t) = 1 + C/\sqrt{xy}$$

Partiella derivator

Def. Riktningsderivata

f definierad i omgivning av (a,b) & $\bar{v} = (v_1, v_2)$ är vektor med längd 1. Då blir riktningsderivata i (a,b) i rikt. $\bar{v}$:

$$f'_{\bar{v}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t}$$

Def: Differentierbarhet

f def. kring (a,b), f är differentierbar i (a,b) om det finns tal A, B, sådana att:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)$$

för något ρ: $\rho(h,k) \to 0$ $(h,k) \to (0,0)$

Def Triangelolikhet!

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Def Tangentplan

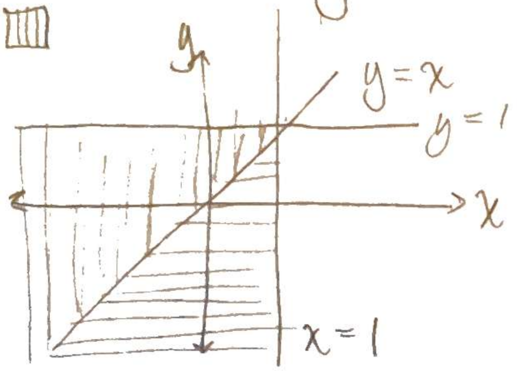
$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Seminarie Maple övning.

I Rita $\max(x,y) \le 1$ $\{\max(1,2)=2, \max(-1,-2)=-1\}$

$$\max(x,y) = \begin{cases} y, & y \ge x \\ x, & y \le x \end{cases}$$

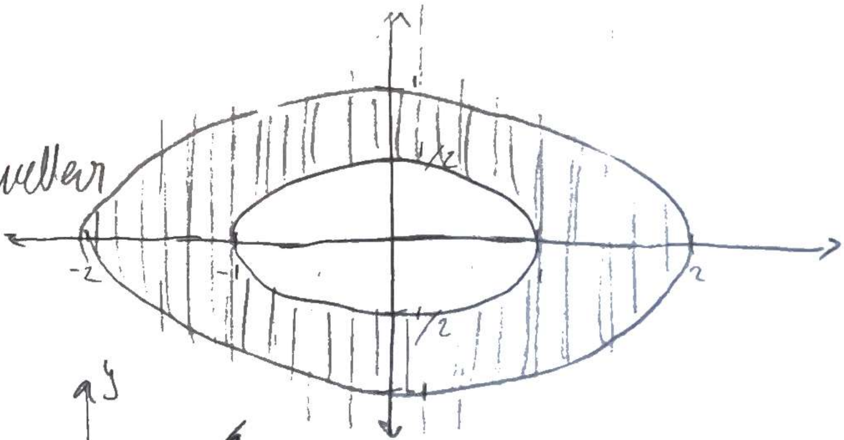
Fall 1 $y \ge x$: $y \le 1$ | Fall 2: $y \le x$, $x \le 1$



Tolkning $\max(x,y) \le 1 \iff \begin{cases} x \le 1 \\ y \le 1 \end{cases}$ 1 snittet av bägge mängd

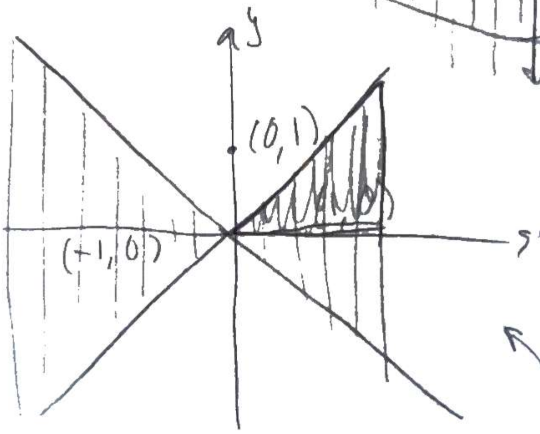
2.10 $1 \le x^2 + 4y^2 \le 4$

får snittet mellan dessa



$x^2 - y^2 \ge 0$

$(x-y)(x+y) \ge 0$



arm

$x^2 \ge y^2$

$\Leftrightarrow |x| \ge |y|$

$x \ge 0$, $y \ge 0$

$x \ge y$: $y = x$ | spegla

Intro PDE

* De enklaste av fall: ordning 1 - Integral

$$f'_x(x,y) = g(x,y) \text{, } g(x,y) \text{ given.}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \int g(x,y)\,dx + f(y)$$

<u>Ex</u> $f'_y = x\cos y + e^{xy} + x^2$

$f(x,y) = x\sin y + e^{xy}/x + x^2 y + f(x)$

* Finna lösning till system av partiella derivator.

1. Integrera i en variabel.
2. Derivera integrerat uttryck för motsatt variabel
3. Jämför deriverat uttryck med givet uttryck i samma variabel.
4. Finn $f(x,y)$ genom att bestämma den godtyckliga funktionen.

  * Notera att den godtyckliga funktionen f beror av <u>en</u> variabel. Om, vid jämförelse, den skall bero av 2 - saknas lösning.

- Finna lösning till given form, grad 1.

1. Derivera $f(x,y) = g(x,y)$ i termer av $f'_x = g \dots$, $f'_y = g \dots$, och sätt in

2. Lös förstagradsekvationen, exempelvis med integrerande faktor.

3. Ta fram $g(t)$ i termer av (x,y).

Ex: $f(x,y) = g(xy)$, $xf'_x + yf'_y + f = 1$

1. $f'_x = g'(t) \cdot t'_x = y \cdot g'(t)$
   $f'_y = g'(t) \cdot t'_y = x \cdot g'(t)$

2. $x(y \cdot g'(t)) + y(x \cdot g'(t)) + g(t) = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2xy \cdot g'(t) + g(t) = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2t \cdot g'(t) + g(t) = 1 \Leftrightarrow g'(t) \cdot \frac{g(t)}{2t} = \frac{1}{2t}$

IF: $\int 1/2t \, dt = t^{1/2} + C$

$\Rightarrow \quad t^{1/2} \cdot g'(t) + \frac{t^{1/2} \cdot g(t)}{2t} = \frac{t^{1/2}}{2t}$

$\Leftrightarrow \quad t^{1/2} \cdot g'(t) + \frac{g(t)}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2t^{1/2}}$

$\Leftrightarrow \int D(t^{1/2} \cdot g(t)) = \int \frac{1}{2t^{1/2}} dt = t^{1/2} + C$

$g(t) = 1 + \frac{C}{t^{1/2}} = 1 + \frac{C}{\sqrt{xy}}$

III variabelbyte ordning 2 ex: $f(x,t)$

$$f''_{tt} = c^2 f''_{xx}, \quad c \neq 0. \quad \begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

I $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot u'_x = f'_u + f'_v$

$f'_t = f'_u \cdot u'_t + f'_v \cdot u'_t = cf'_u - cf'_v$

II $f'_{xx} = (f'_u)'_x + (f'_v)'_x = (f''_{uu} \cdot u'_x + f''_{uv} \cdot v'_x) + (f''_{vu} \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot v'_x)$

$= (f''_{uu} + f''_{vv}) + (f''_{uv} + f''_{vu}) = f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv}$

$f'_{tt} = c(f'_u)'_t - c(f'_v)'_t = c(f''_{uu} \cdot u'_t + f''_{uv} \cdot v'_t) - c(f''_{vu} \cdot u'_t + f''_{vv} \cdot v'_t)$

$= c(cf''_{uu} - cf''_{uv}) - c(cf''_{vu} - cf''_{vv}) = c^2 f''_{uu} - 2c^2 f''_{vu} + c^2 f''_{vv}$

III $f''_{tt} = c^2 f''_{xx} \iff c^2 f''_{uu} - 2c^2 f''_{uv} + c^2 f''_{vv} = c^2(f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv})$

$\iff 4 \cdot f''_{uv} = 0 \iff f''_{uv} = 0$

IV $f''_{uv} = (f'_u)'_v = 0 \iff f'_u = g(u)$ godtycklig

$\iff f = \underline{G(u) + h(v)}$

V Sätt in: $\underline{f(x,t) = G(x+ct) + h(x-ct)}$

III Variabelbyte (ofta svårt) får fram en lösning av typen $f(x,y) = g(x,y) + \underline{\varphi(x,y)}$

$$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$$

1. $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x$, $f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y$
2. Sätt in i diff. ekvation.
3. Lös ekvationen för $\tilde{f}(u,v)$ & byt tillbaka för $f(x,y)$
4. Om randvillkor $f(x,y)$ eller $f(x,x)$ ges, byt till lämpliga variabler i den funna funktionen. från variabelbyte sätt dessa lika med varandra. Lös ut φ, & svara med $f(x,y)$, nu komplett med randvillkoret.

<u>metod</u> $\varphi(x^2) = x^3 - \sin\sqrt{x}$, använd variabelbyte

$$t = x^2 \overset{x \geq 0}{\iff} x = \sqrt{t}$$

$$\varphi(t) = (\sqrt{t})^3 - \sin\sqrt{\sqrt{t}} = t^{3/2} - \sin t^{1/4}$$

<u>notis</u> Om metod för integrerande faktor används & $\int 0 \, du$ fås $\varphi(v)$, eftersom det ej skall vara en konstant, utan godtycklig funktion.

Integrerande faktor utvidgas
(Påminnelse)

Vill lösa: $y' + g(x) \cdot y = h(x)$

1. Sök IF: $G(x) = \int g(x)$, $IF = e^{G(x)}$
2. Multiplicera in.

$$y' e^{G(x)} + g(x) \cdot y \cdot e^{G(x)} = h(x) \cdot e^{G(x)}$$

VL: $\left(y e^{G(x)}\right)' = y' e^{G(x)} + G'(x) y e^{G(x)} = y' e^{G(x)} + g(x) y e^{G(x)}$

3. Lös ut:

$$\left(y e^{G(x)}\right)' = h(x) e^{G(x)}$$

$$\iff \quad y e^{G(x)} = \int h(x) e^{G(x)} dx$$

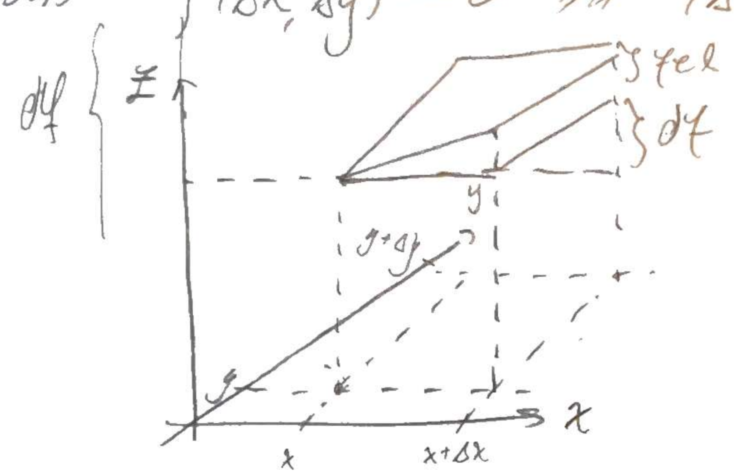
$$y = \frac{1}{e^{G(x)}} \int h(x) e^{G(x)} dx$$

Differentiabarhet (igen) | Differential

* $f(x,y)$ differentiabar i (x,y) om

$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f} = \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y}_{df} + \underbrace{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\rho(\Delta x,\Delta y)}_{\text{felet}}$$

där $\rho(\Delta x, \Delta y) \to 0$ då $(\Delta x, \Delta y) \to 0$



Differentialen av f i punkten (x,y)

$$df = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy$$

Ex $f(x,y) = \ln|x^2+xy|$ Vi vill approximera skillnad mellan $f(2,1)$ och $f(2{,}01;\,1{,}03)$

$$df = \frac{2x+y}{x^2+xy}\cdot dx + \frac{x}{x^2+xy}\,dy$$

1. Exakt: $(x,y)=(2,1)$, $(\Delta x,\Delta y) = (0{,}01;\,0{,}03)$

$$\Delta f = f(2{,}01;\,1{,}03) - f(2,1) = \underbrace{\ln|2{,}01^2 + 2{,}01\cdot 1{,}03| - \ln|2^2+2|}_{\approx 0{,}0182}$$

2. Approx: $df = \frac{5}{6}\cdot 0{,}01 + \frac{2}{6}\cdot 0{,}03 = \frac{11}{6}\cdot 0{,}01 \approx \underline{0{,}0183}$

Rotationssymmetri & derivator

* Om vi har en funktion $h(x,y) = f(r)$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ blir h''_{xx} samma som h''_{yy} bara man byter ut alla x mot y när man går från $x \to y$

* Laplace operator: $h''_{xx} + h''_{yy} = f''(r) + f'(r)\frac{1}{r}$ då h är rotationssymmetriskt

Taylors formel i utr.

* Låt $h = x - a$ och $k = y - b$.

Antag att $f(x,y)$ har kont. partiella derivator till och med ordning 3 i en omgivning av punkt (a,b), då gäller det för alla $(x,y) = (a+h, b+k)$ i omgivningen:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)k + \\ &\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right) + \\ &\sqrt{h^2+k^2}^{\,3}\cdot B(h,k) \end{aligned}\right\}$$

, där $B(h,k)$ är begränsad då (h,k) är litet.

Lokala extrempunkter

- Antag att (a,b) är lokal extrempunkt till f & är partiellt deriverbar. Då är $\underline{\nabla f(a,b) = 0}$

- <u>Stationär punkt</u>: då $\nabla f(a,b) = 0$

- <u>Lokal extrempunkt</u>: <u>stationär</u> + partiellt deriverbar

- Bestämma stationära punkter har ingen generell lösningsmetod, utan förlitar sig på faktorisering för att lösa:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

ex: $\begin{cases} y(1 + y^2 - x^2) = 0 \\ x(1 + x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$

I $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ II $\begin{cases} y = 0 \\ 1 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ III $\begin{cases} 1 + y^2 - x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ IV $\begin{cases} 1 + y^2 - x^2 = 0 \\ 1 + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

- <u>Kvadratisk form</u> av f i (a,b):

$$^{*}Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)hk$$

forts. Extrempunkter

* kvadratisk form $Q(h,k)$ är

I · <u>positivt definitiv</u> om $Q(h,k) > 0 \ \forall (h,k) \neq 0$

II · <u>negativt definitiv</u> om $Q(h,k) < 0 \ \forall (h,k) \neq 0$

III · <u>positivt semidefinitiv</u> om $Q(h,k) \geq 0 \ \forall (h,k) \neq 0$

IV · <u>negativt semidefinitiv</u> om $Q(h,k) \leq 0 \ \forall (h,k) \neq 0$

V · <u>indefinitiv</u> om $Q(h,k)$ antar pos. & neg värden.

⇒ Om I, f lokalt minimum i (a,b)
om II, f lokalt max. i (a,b)
Om V, f sadelpunkt i (a,b)
om III & IV ingen slutsats

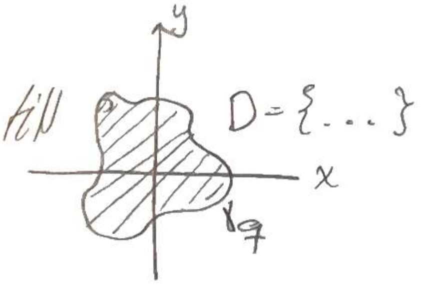
⇒ vid kvadratkompletering: $Q(h,k)$

båda koefficienter positiva → $Q(h,k)$ pos. def.
båda –"– negativa → –"– neg. def
olika tecken på koef. → –"– indefinit.

→ Om bara en variabel återstår är Q semidefinitivt.

Optimering av kompakt område *

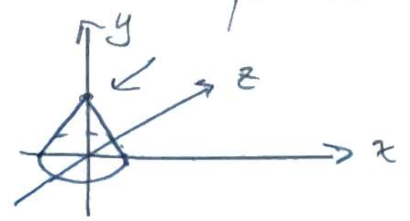
* kompakt: Betrakta samtliga
- stationära punkter till området
- randpunkter till området
- punkter där funktionen inte är partiellt deriverbar.



I Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y)$, om det finns inre- & randpunkter, ta fram funktionsvärdet till inre punkter.

II Parametrisera randens alla sidor $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ till de envariabla funktionerna $g_1(t), g_2(t)\ldots$ Bestäm dess intervall genom D, ta punkt för $g'(t) = 0$ & bestäm funktionsvärde för:
- Ändpunkter av parametriserad $g(t)$
- Där derivatan är 0. $[g'(t) = 0]$
- Stationära punkter på randen

III Bestäm funktionsvärde i de punkter där f inte är partiellt deriverbar

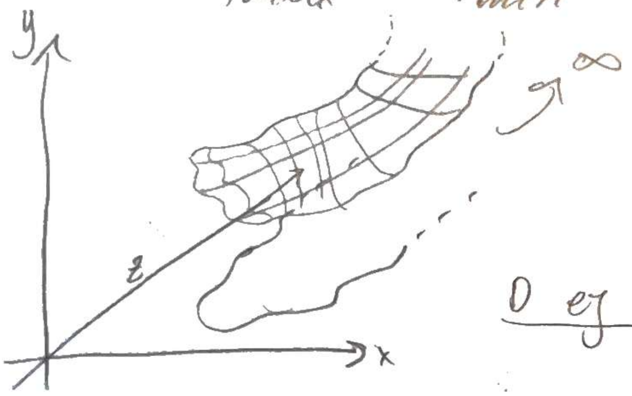


Optimering på icke-kompakta omr.

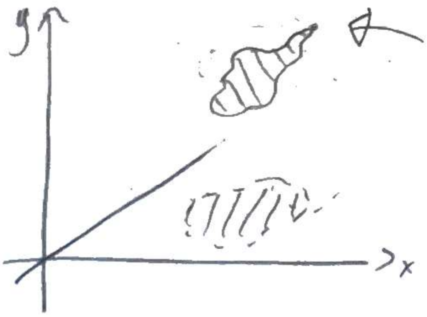
Intro:

$f(x,y)$ kontinuerlig på D men icke-kompakt

$\Rightarrow$ f_{max} & f_{min} behövs ej existera.



D ej begränsat $\rightarrow \infty$



men kanske nära denna max

D hela randen ingår ej!

Lösningsförslag: Skapa kompakt område som delmängd av D, och kontrollera därefter utomstående värden.

$\rightarrow$ Så som gränsvärden...

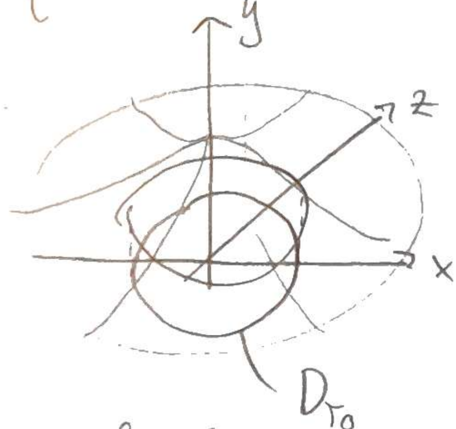
Ex icke-kompakt

$$f(x,y) = (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}, \; D: \mathbb{R}^2 \begin{cases} \text{obegränsat} \\ \text{ej kompakt} \end{cases}$$

I $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{e^{(x^2+y^2)}}$ borde $\to 0$, $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ $\quad \{ f: \text{kontinuerlig}$

↑ tanke om f karaktär

$\Rightarrow$ Optimera för f på D_{r_0} (kompakt) för något r_0



$D_{r_0}: x^2+y^2 \leq r_0^2$

kompakt

II Stat. punkter

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = 0 \\ f'_y = 2e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{f} \neq 0}$

$$\begin{cases} (x+2y)\cdot 2x = 1 & ① \\ (x+2y)\cdot 2y = 2 & ② \end{cases}$$

① $x+2y = \dfrac{1}{2x} \to$ ② $\dfrac{1}{2x}\cdot 2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x} \to$

$\to$ ① $(x+4x)\cdot 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}}$

go: $y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{10}}, \; x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$

[vi väljer r_0 sådan att punkterna finns i D]

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{2}{\sqrt{10}}\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{10}} + \tfrac{4}{\sqrt{10}}\right)e^{-\left(\frac{1}{10} - \frac{4}{10}\right)} = \boxed{\tfrac{5}{\sqrt{10}} e^{-1/2}}$$

$$f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \tfrac{2}{\sqrt{10}}\right) = \boxed{-\tfrac{5}{\sqrt{10}} e^{-1/2}}$$

III Bestämmer r_0 & Gränsvärde f, då $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad f(x,y) = (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)e^{-r^2}$$

$$\underset{\to 0}{0} \le |\overset{\to 0}{f(x,y)}| = |(r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)e^{-r^2}| = |\cos\varphi + 2\sin\varphi| r e^{-r^2}$$

$$\le 3 \cdot \frac{r}{e^{r^2}} \to 0 \quad \Rightarrow f(x,y) \to 0 \text{ då } \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$$

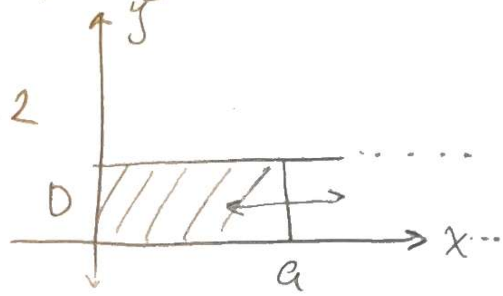
* Tanken är nu att välja r_0 så att största & minsta blir ett innefattande stationära punkterna

Forandlig: Alltså finns ett tal r_0 sådant att $|f(x,y)| < \frac{3}{\sqrt{10}} e^{-1/2}$ då $\sqrt{x^2+y^2} \ge r_0$. På den kompakta mängden D_{r_0} så har f största & minsta värde, och dessa måste vara $\frac{3}{\sqrt{10}} e^{-1/2}$ & $-\frac{3}{\sqrt{10}} e^{-1/2}$, vilket också måste gälla på hela $\mathbb{R}^2$

Ex$_2$ icke-kompakt

$$f(x,y) = x^2 e^{-x-y} \quad \text{i } D: \; x \ge 0,\ 0 \le y \le 2.$$

I Studera först linjer $x=a$, $0 \le y \le 2$



$$f(a,y) = a^2 e^{-a-y} = g(y)$$

$$= \frac{a^2 e^{-a}}{e^y}$$

- $e^{-a} \cdot a^2$ icke-negativ   D obegr.
- y ökar, $g(y)$ minskar
  $\Rightarrow g(y)$ strängt avtagande

- störst $y=0$
  minst $y=2$

OBS! $f(x,y) \ge 0$ och $f(0,y) = 0 \Rightarrow$ minsta värde $\boxed{0}$

II Bestäm f_{max}

$$h(x) = f(x,0) = x^2 e^{-x}, \quad x \ge 0$$

$$h'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x) e^{-x} = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$
$x = 2$

	0		2	
$h'(x)$	0	+	0	−
$h(x)$		↗		↘

$$\boxed{h(2) = 4e^{-2}}$$

Svar: $f_{min} = 0$, $f_{max} = 4e^{-2}$

Optimering med bivillkor - F11

Rep: Allmänt: min/max existerar då ① inre stat. punkter
② Ränder, ③ Icke-deriverbara punkter
↳ kan vara svårt

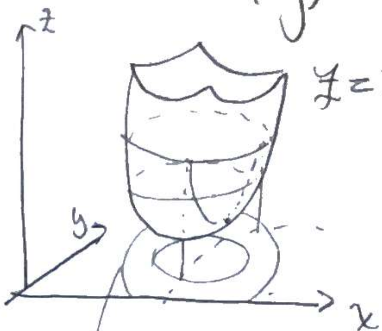
Ex min/max $f(x,y)=2x^2+x(y^2-2)$ i $x^2+y^2\leq 1$

Rand: $x^2+y^2=1 \rightarrow$ min/max $h(t)=f(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

Tanke: 3D problem → rand 2D → 2D problem → 1D rand
→ 1D problem

Ex min/max avstånd från origo till kurvan $x^3+y^3=1$ då $x\geq 0, y\geq 0$

→ Allmänt: Opt. m. biv.: min/max $f(x,y)$ då $g(x,y)=c$
$(x,y)\in D_f$ $(\mathbb{R})$

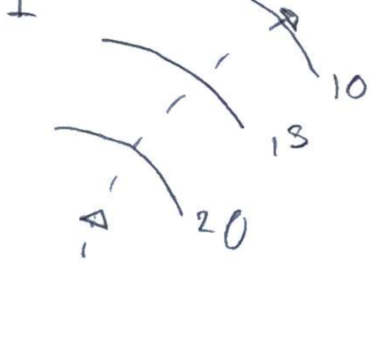


$z=f(x,y)$

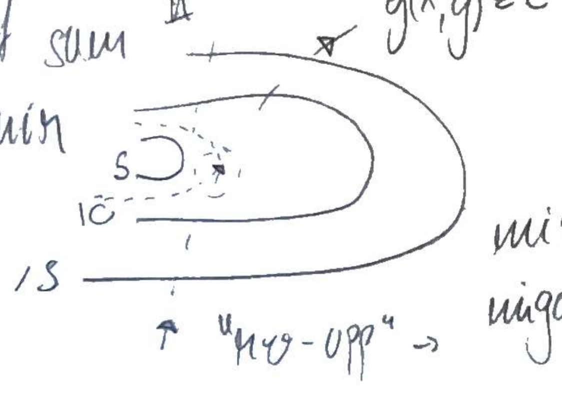
$g(x,y)=c \rightarrow$ nivåkurva till g

[vi vill finna dessa tangent.]

→ nivåkurvor till f



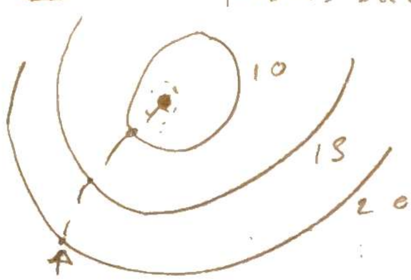
ingen punkt som ger max/min



"nér-upp" → min existerar någonstans

Forts

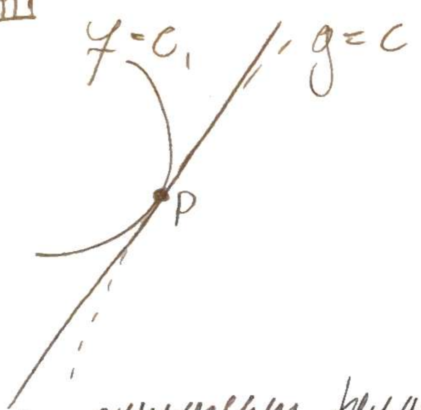
III funk. med slot



min existerar i ändpunkter

Allmänt

II.



Ser tangent överens mellan de två nivåkurvorna för fall II

↳ gemensam tangent. ① grad $f \parallel$ grad g i P → parallell

② ev. randpunkter som fall III (grad $g = 0$ kan också hända)

↳ Del av II som kontrolleras.

Opt. ⇒ ① Bivillkor grad $f \parallel$ grad g

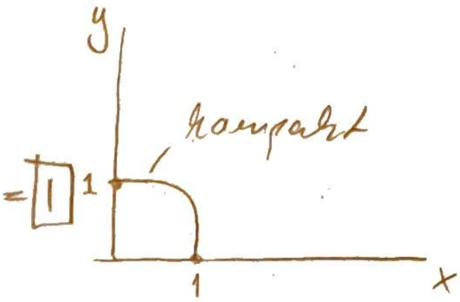
② Randen

③ Jämföra

Ex optimering bivillkor

min/max $\sqrt{x^2+y^2} \to \overbrace{x^2+y^2}^{f}$ [samma resultat som för $\sqrt{u}$]

för $\underbrace{x^3+y^3=1}_{g}$, $x \geq 0, y \geq 0$



I Ändpunkter: $(1,0), (0,1)$ | $f(1,0)=f(0,1)=\boxed{1}$

II $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g \iff$

$\bar{u} \parallel \bar{v} \iff \bar{u} = \lambda \cdot \bar{v}$

([$\bar{u} \parallel \bar{0}$, men $\bar{u} \neq \lambda \cdot \bar{0}$] eller $\bar{v} = 0$)

① $\operatorname{grad} g = 0$

② $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$

på x^3+y^3, $x \geq 0, y \geq 0$

① $\operatorname{grad} g = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{bmatrix} = 0 \iff (x,y)=(0,0)$ [inte på delkurvan uppfyller g...]

$\operatorname{grad} g \neq 0$ då $x^3+y^3=1$

② $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g = \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 3x^2 \\ 2y = \lambda\, 3y^2 \end{cases}$

Eftersom vi prövat ändpunkter ($x=0$ eller $y=0$) kan vi förkorta:

$$\iff \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 3x \\ 2 = \lambda \cdot 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3\lambda} \\ y = \frac{2}{3\lambda} \end{cases} \Rightarrow x = y \qquad x^3+y^3=1, \; x \geq 0, y \geq 0$$

$x^3+y^3=1 \iff x^3+x^3=1 \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = y$ ← Punkt!

$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{1}{2^{2/3}} = \boxed{\sqrt[3]{2}}$

min: $\sqrt{1} = 1$

max $= \sqrt[6]{2}$

Bivillkor anmärkningar

I min/max skall existera.

II Lin-alg: grad $f \parallel$ grad $g \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ Vektorer linjärt beroende

ter bort konstant

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x^2 \\ y & y^2 \end{vmatrix} = 0 = xy^2 - x^2y = xy(y-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0 \text{ eller } y=0}_{\text{Ändpunkter}} \text{ eller } \underline{\underline{y=x}}$$

III Vi skall inte utesluta tidigare metoder

Ex: min/max $\underbrace{2x^2+x(y^2-2)}_{f} \mid \underbrace{x^2+y^2=1}_{g}$

$$0 = \begin{vmatrix} 4x+y^2-2 & \overset{(2)}{x} \\ 2xy & y \end{vmatrix} = 4xy+y^3-2y-2x^2y = 0 \text{ då } \overline{x^2+y^2-1}$$

$\Rightarrow$ Svårt! Lättare att parametrisera

IV Substitution kan vara farligt:

Ex: min $x^2y^2 \mid y^2=x$ sub: x^3 inget bivillkor

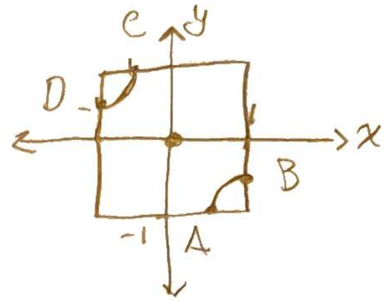
kravet av positiva x tappas $x^3 \longrightarrow -\infty$

Seminarie Optimering (S. 17)

min/max $f(x,y) = xy + x^2y^2$ på $D: |x| \le 1; |y| \le 1$

I Stat

$$\begin{cases} f'_x = y + 2xy^2 = 0 \iff y(1+2xy) = 0 & ① \\ f'_y = x + 2yx^2 = 0 \iff x(1+2xy) = 0 & ② \end{cases}$$



kompakt

① $y = 0$ eller $1 + 2xy = 0$

② $x = 0$ eller $1 + 2xy = 0$

($y=0$ & $1+2xy=0$) går ej?

$(0,0)$, $1 + 2xy = 0 \implies xy = -1/2$

$\implies y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

$f(0,0) = \boxed{0}$ $\quad f(x,y) = xy + (xy)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

kan stoppa in $y = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ & sedan optim. denna endim funktion.

II Ω

A: $f(x,-1) = -x + x^2 = g(x)$, $g'(x) = -1 + 2x = 0$

$[-1 \le x \le 1]$ $\qquad x = 1/2$

$g(-1) = \boxed{2}$, $g(1) = \boxed{0}$, $g(1/2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$

B: $f(1,y) = y + y^2 = h(y)$; $h'(y) = 1 + 2y = 0 \implies y = -1/2$

$[-1 \le y \le 1]$ $\quad h(-1/2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$ (testat redan), $h(1) = \boxed{2}$

C, D: Samma sak | hörnpunkter: $\boxed{2}$ eller $\boxed{0}$

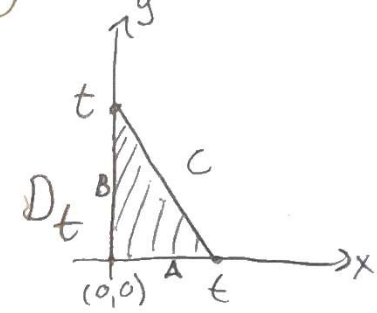
$f_{min} = -1/4$, $f_{max} = 2$

forts 8.33

min/max $f(x,y)=(x^2+y)e^{-x-y}$ $\quad$ D: $x\geq 0,\ y\geq 0$

I konstatera karaktär $\quad (x^2+y)\,e^{-x-y}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad +$



icke-kompakt (obegränsat)

$\hookrightarrow \underbrace{f(x,y)\geq 0 \text{ i } D \;|\; f(0,0)=0,\ (0,0)\in D}$

minsta $=\boxed{0}$

$\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = ?$ existerar ej.

Låt $x+y=t$ | f på $x+y=t$: $|(x^2+y)e^{-t}| \leq |x^2+y|\cdot e^{-t} \leq$

$\leq (x^2+y)e^{-t} \leq (t^2+t)e^{-t} \to 0,\ t\to+\infty$

som högsta värde vid uppskattning

II Låt oss optimera f på D_t [kompakt]

$f'_x = (2x-(x^2+y))e^{-x-y}=0$ $\iff \begin{cases} x^2+y=2x \\ x^2+y=1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$

$f'_y = (1-(x^2+y))\underbrace{e^{-x-y}}_{e^{?}\neq 0}=0$

$\Rightarrow (1/2,\ 3/4) \quad f(1/2,\ 3/4)=\boxed{e^{-5/4}}$

III Rand Ω

A: $y=0,\ 0\leq x\leq t \quad g(x)=x^2e^{-x}$ | $g'(x)=x(2-x)e^{-x}=0$

$\Rightarrow x=0,\ \underline{x=2}$

Noll $\qquad g(2)=\boxed{4e^{-2}}$

forts

B: $x=0,\ 0\leq y\leq t$ $\quad h(y)=ye^{-y}$ | $h'(y)=(1-y)e^{-y}=0$

$\Leftrightarrow y=1$ $\quad h(1)=\boxed{e^{-1}}$

C: $f\to 0,\ t\to+\infty$ $\quad f\sim$ väldigt litet

IV Norm:

$(0,0)$ min $=\boxed{0}$, f(två övriga) = väldigt litet!

$\boxed{f_{min}=0}$ $\quad f_{max}=\boxed{4e^{-2}}$

---

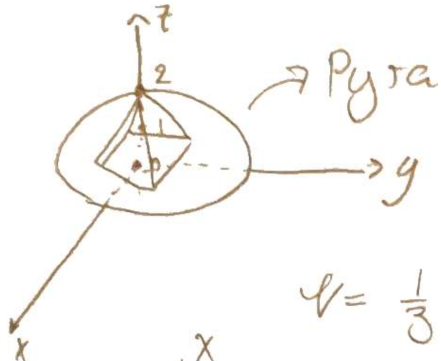
icke-kompakt

Om man kan skapa ett kompakt område sådant att de värden på funktionens närmar sig 0, kan man sedan optimera på detta område.

$(x^2+y)e^{-x-y}$ $\sim$ e^{t} skapar komplexitet, gör då området som begränsas av $t=x+y$

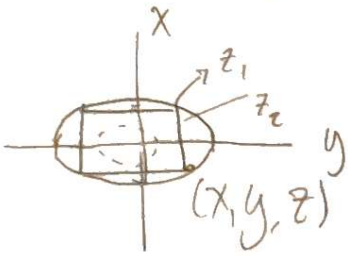
Optimering ex: 8.48

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1 \quad = g(x,y,z)$$



→ Pyramid som begränsas av elipsoids skal.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{basarea} \cdot \text{höjden} = \underbrace{\frac{4}{3}xy(2-z)}_{f(x,y,z)} \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$



$$\max f(x,y,z) \,\Big|\, g(x,y,z) = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

kompakt!

$$\nabla f = \begin{bmatrix} y(2-z) \\ x(2-z) \\ -xy \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ y/2 \\ 2(z-1) \end{bmatrix}$$

$\perp$ $\nabla g = 0 \iff (0,0,1)$ punkten ligger ej på ytan, ej möjligt.

$$② \begin{cases} y(2-z) = \lambda 2x \\ x(2-z) = \lambda\, y/2 \\ -xy = \lambda \cdot 2(z-1) \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1) = 1 \end{cases}$$

② $y = 4 - 2z$

① $(4-2z)(2-z) = \lambda \cdot 2x$

$8 - 4z - 4z + 2z^2 = \lambda \cdot 2x$

$4 - 4z + z^2 = \lambda x$

③

$$-(4 - 4z + z^2)(4 - 2z) = \lambda^2 (2z - 2)$$

$$-(16 - 8z - 16z + 8z^2 + 4z^2 - 2z^3) = \lambda^2 \cdot 2(z-1)$$

$$-16 + 24z - 12z^2 - 2z^3 = \lambda^2 \cdot 2(z-1)$$

$$-8 + 12z - 6z^2 - z^3 = \lambda^2 \cdot (z+1)$$

Optimering av bivillkor *

Givet $f(x,y)$ o bivillkoret $g(x,y)=c_1$ eller
$f(x,y,z)$ o $g(x,y,z)=c_2$ o $h(x,y,z)=c_1$

I grad f ∥ grad g o grad $g=0$

a) $\begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{bmatrix}$

Används även vid ojämnt antal villkor = Lagrang multiplikator-metod.

II $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = f'_x g'_x - f'_y g'_y = 0$

Löser ek.: $\begin{cases} \det(\nabla f, \nabla g) = 0 \\ g(x,y) = c_1 \end{cases}$

III grad $f(x,y,z)$ ∥ grad $g(x,y,z)$ ∥ grad $h(x,y,z)$

$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = \det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$ $\begin{cases} \det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0 \\ g(x,y,z) = c_1 \\ h(x,y,z) = c_2 \end{cases}$

[...]

Läs elevationssystem, ta ut de intressanta punkter som mäter bivillkor(et).
Evaluera $f(p_1, p_2 \dots p_n)$ & jämför sedan.

Vektorvärda funktioner

- Derivata $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i punkten a

$$r'(a) = (x'(a), y'(a))$$

och tolkas som tangentvektor till r i punkten a.

- Derivata för kors multiplikation $\hat{=}$ skalär-produkt av vektorvärda funktioner r, s

$$(r \cdot s)'(t) = r'(t) \cdot s(t) + r(t) \cdot s'(t)$$

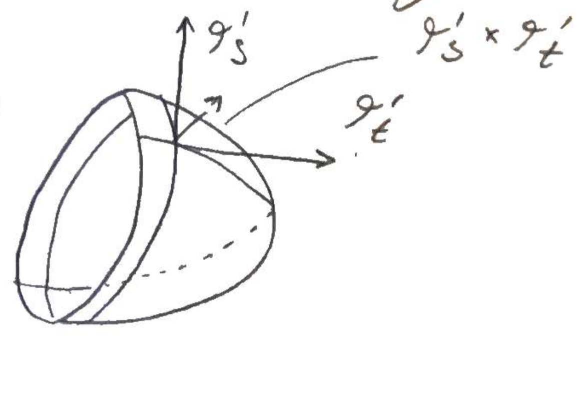
$$(r \times s)'(t) = r'(t) \times s(t) + r(t) \times s'(t)$$

- Derivata $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i ab för $r(x(s,t), y(s,t))$

$$r'_s(a,b) = (x'_s(a,b), y'_s(a,b))$$

$$r'_t(a,b) = (x'_t(a,b), y'_t(a,b))$$

↳ tolkas som tangentvektorer till ytan av $\mathbb{R}^2$



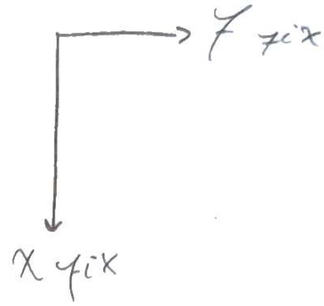
r'_s & r'_t spänner upp planet och dess normalvektor ges av $r'_s \times r'_t$

↳ $z - f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

forts... vektorvärda funktioner

Låt $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3 \dots f_p)$ vara en funktion av variablerna $x_1, x_2 \dots x_n$. Vi definierar <u>funktionalmatrisen</u> $\bar{f}'$:

$$\bar{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

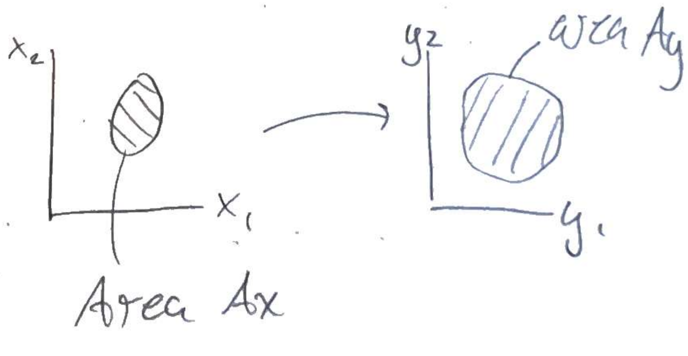


Även kallat <u>Jacobimatris</u>

---

allmänt

I Låt $\bar{y} = A\bar{x}$ $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$



$$\frac{A_y}{A_x} = |\det A|$$

II Icke-linjär: $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$

$[\bar{f}'(x_0),\ \det \bar{f}'(\bar{x}_0)]$

$\approx \bar{f}(x_0) + \bar{f}'(x_0) \cdot \Delta x$

$\Rightarrow$ Beskriver förändring nära $\bar{x}_0$

$|\det \bar{f}'(\bar{x}_0)|$: <u>funktionaldeterminant</u>

Approximation av vektorvärda funk.

Vi har sett att reellvärd approximeras med

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k + R.$$

En vektorvärd $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ $\bar{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ blir då:

$$\Delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot k + R_1$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot k + R_2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix}}_{\Delta \bar{f}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\bar{f}'} \underbrace{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\bar{h}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}}_{\bar{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \bar{f} = \bar{f}' \cdot \bar{h} + \bar{R}} \qquad \underline{\Delta \bar{f} \approx \bar{f}' \cdot \bar{h}}$$

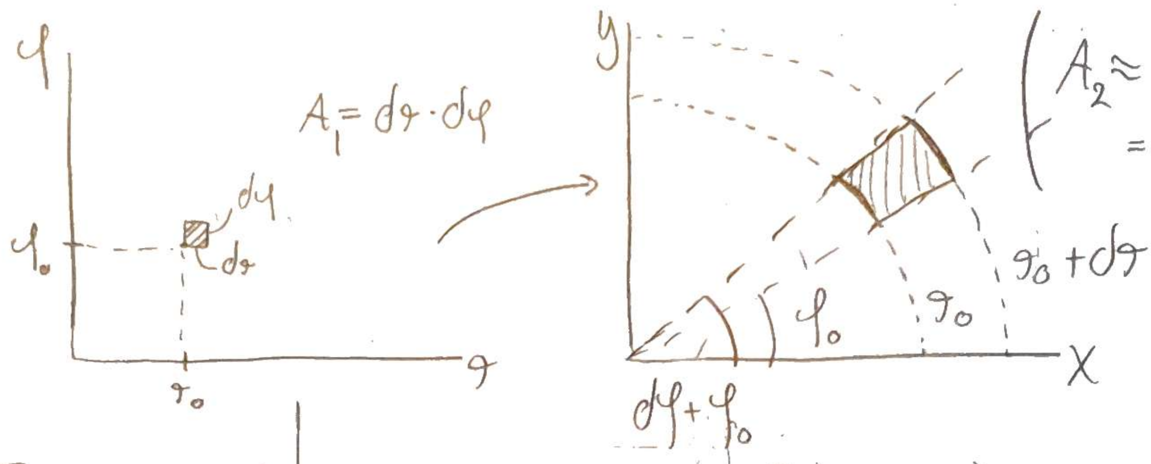
↳ Varför uppskattning på föregående fungerar!

↳ Lokal approximation med linjär avbildning tillskott $\bar{h}$ med $\bar{f}'$ som avbildningsmatris

$$\boxed{\text{Differential } \; d\bar{f} = \bar{f}' \cdot \bar{h}}$$

gamla y_1, y_2 — gamla x_1, x_2

Ex $\begin{cases} \boxed{x} = r\cos\varphi = f_1(r,\varphi) \\ \boxed{y} = r\sin\varphi = f_2(r,\varphi) \end{cases}$ $\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



$$\left(A_2 \approx dr \cdot r_0\, d\varphi = r_0 \cdot \underbrace{dr\, d\varphi}_{A_1} \right)$$

$$\left[\frac{A_2}{A_1} \approx r_0 \right]$$

funktionalmatris $= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = \Phi$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \left| \Phi \right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = \boxed{r} \approx \frac{A_2}{A_1}$$

Avbildning; invers, bijektivitet.

- Låt funktionsmatrisen vara: $\bar{f}'(\bar{x}_0)$ i x_0

om $|\det \bar{f}'(\bar{x}_0)| \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ är bijektiv i} \\ \text{närheten av } \bar{x}_0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ vi kan byta variabler fram och tillbaka

- Implicit funktion: "y inbakt i uttryck"

$x^2+y^2=1$	I $y=\pm\sqrt{1-x^2}$	Inte funk.	$\square$
$F(x,y)=1$	II $y=\sqrt{1-x^2}$	funk.	$\blacksquare$
	III $y=-\sqrt{1-x^2}$.	funk	$\blacksquare$

En matematisk funktion är injektiv, vilket kan bestämmas med:

[Gradient av nivåkurva: $F(x,y)=C$ och (a,b) uppfyller ekv. dvs. $F(a,b)=C$.

$F'_y \neq 0 \Rightarrow$ det finns en funk. $y=f(x)$ som löser $F(x,y)=C$ i närhet av (a,b)]

Differentierbarhet & sammansättning av vektorvärda funktioner.

* En funktion $\bar{f}$ av $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sägs vara differentierbar i punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om det existerar en $n \times p$ matris $\bar{A}$:

$$\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) = \bar{A} \cdot \bar{h} + \bar{\rho}(\bar{h})|\bar{h}|$$

för något $\bar{\rho}$: $\bar{\rho}(\bar{h}) \to 0$, $\bar{h} \to 0$. $\bar{A}$ är precis funktionalmatrisen $\bar{f}'$

* Låt $\bar{f}$ & $\bar{g}$ vara två vektorvärda, partiellt differentierbara:

$$(\bar{f} \circ g)'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}(\bar{x})$$

* Repitition matrismultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a \quad c} \\ b \quad d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}} & \begin{matrix} y \\ q \end{matrix} \end{pmatrix} = \boxed{(ax + cz)} + (ay + cq) \ldots$$

radvis & kolonnvis.

* Funktionaldeterminant för rymdpolära & polära koord.

$\bar{f}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\bar{g}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

$\det f' = r \quad \Big| \quad \det g' = r^2 \sin\theta$

Repitition av integrationsmetoder & kunskaper

Ex variabelsub.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x},\ x=t^2,\ dx=2t\,dt \\ x=1 \Rightarrow t=1,\ x=3 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{matrix}\right]$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t(t^2+1)}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{(t^2+1)} = 2\Big[\arctan t\Big]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Partialintegration

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Jämförelsesatsen

Antag f & g är definierade på $[a,\infty[$, och att $0 \le f(x) \le g(x)$ då $x \ge a$. f & g är integrerbara på $[a, R]$ för varje $R > a$

(1) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent

(2) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ Divergent $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent.

Jordisar

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konv. $\alpha > 1$ | $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konv. $\alpha < 1$

* Partialbråksuppdelning
  → Förenklar svåra bråk

Beräkna $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

I Betrakta utan gräns $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

$$= \int \frac{1}{x(x^2-3x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$$

II Gör om för partialbråksuppdelning med ansats:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$ { Multiplicera med VL nämnare

$$\Leftrightarrow$$

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2)x + C(x-1)x = 1$$

$$Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 - Cx = 1$$

$$(A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A = 1$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ -3A-2B-C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1/2 \\ B = -1 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

III

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2|\right]_3^R =$$

Dubbelintegraler

* Def. integrerbarhet: Antag f vara begränsad på rektangeln D. Vi säger f är integrerbar på D om för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ, under resp. över f:

$$\iint_D \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_D \Phi(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon$$

I finns: $\displaystyle\iint_D \Phi(x,y)\,dx\,dy \leq I \leq \iint_D \Psi(x,y)\,dx\,dy$

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow \text{Dubbelintegralen, instängd.}$$

* <u>Itererad Integration</u>: Antag f vara integrerbar på $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$

Då gäller:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

och om $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ så vi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

Antag att f & g är integrerbara på området D:

(I) $$\iint_D \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

(Linjär)

(II) $$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

(III) $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$ <u>additiv</u>

(IV) $f(x,y) \leq g(x,y)$ på D <u>monoton</u>

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

(V) $$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$ <u>Triangelolikhet</u>

(VI) f kontinuerlig, D begränsad sammanhängande, $\mu(D)$ är arean av D. Det finns minst en punkt $(\xi, \eta) \in D$ sådan att:

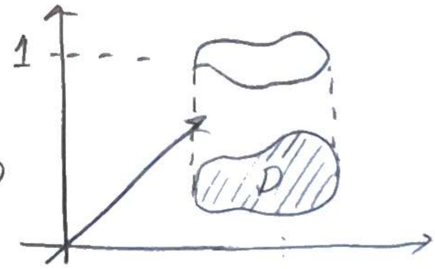
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\,\mu(D)$$

Integration & benämningar.

En delmängd av $\mathbb{R}^2$ kallas <u>nollmängd</u> om den för varje $\varepsilon > 0$ kan övertäckas med en följd av parallella rektanglar av sammanlagd area $< \varepsilon$.

En kontinuerlig funktionskurva $y = f(x)$ blir en <u>nollmängd</u>

En begränsad mängd är <u>mätbar</u> om den konstanta funktionen $f(x,y) = 1$ är integrerbar på D

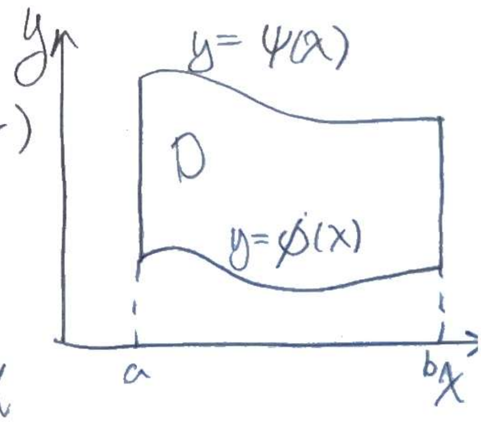


Mängden (*) är mätbar. Antag nu att f är kontinuerlig på D

$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$

där $\phi(x)$ & $\psi(x)$ är kont. på $[a,b]$. (*)

Då är f integrerbar på D:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Variabelbyte

Antag avbildningen $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, och notera

att funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

, avbildar området E i uv-planet bijektivt på D, och y är kontinuerligt partiellt deriverbara. Antag vidare att $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ på D. Då gäller:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du\,dv$$

(under förutsättning f är integrerbar på D.)

Se exempel 7.9 i boken för ellips-polärt byte.
– " – 7.10 – " – opolärt byte.

<u>OBS</u> $\boxed{\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}}}$

Generaliserade Integraler

Def: Uttömmande svit. Antag $(D_k)_1^\infty = D_1, D_2, D_3 \ldots$ en följd av slutna mätbara delmängder till en mängd D. Vi säger att $(D_k)_1^\infty$ är en uttömmande svit till D om:

1. $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \ldots$
2. För varje sluten delmängd D' av D gäller det att $D' \subseteq D_k$ för något k.

$$\Rightarrow \boxed{\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D}$$ Union av alla $D_k = D$.

Ex 1. Följd $(D_k)_1^\infty$, $D_k = \{(x,y) : 0 \leq x \leq k, 0 \leq y \leq k\}$

$\Rightarrow D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty\}$

2. Följd $(D_k)_1^\infty$, $D_k = \{(x,y) : \frac{1}{k^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\Rightarrow D = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

(I) Antag att det för en funktion f på en mängd D gäller att gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy = A$$

1. 2.

existerar (ändligt) o oberoende av vilken uttömmande svit $(D_k)_1^\infty$ till D vi väljer, då är den generaliserade integralen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$ **konvergent** med värde A

(motsats 1, 2 $\Rightarrow$ Divergent)

(II) Om $f(x,y) \geq 0$ på D så är gränsv.

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy,$$ oberoende av vilken

uttömmande svit $(D_k)_1^\infty$ till D vi väljer.

1. Notera att ändlighetstecknen kan användas slappt för dubbelintegraler, och argument om utlämnande snitt ofta kan uteslutas. (För $f(x,y) \geq 0$ på D!)

2. Icke-positiva/växlande funktioner är klurigа...

Definiera:

$$f_+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{där } f(x,y) \geq 0 \\ 0 & \text{där } f(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & \text{där } f(x,y) < 0 \\ 0 & \text{där } f(x,y) \geq 0 \end{cases}$$

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ konvergent omm

: $\iint_D f_+(x,y)\,dxdy \wedge \iint_D f_-(x,y)\,dxdy$ är konverg.

3. En integral (växlande) är konvergent precis då den även är absolutkonvergent $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

jämförelsesats: Om $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$

$$\iint_D g(x,y)\,dxdy \text{ konv.} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ konv.}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ div.} \Rightarrow \iint_D g(x,y)\,dxdy \text{ diverg.}$$

$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy =$ $\quad D: x^2+y^2 \geq 1:$ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$= \iint_E \frac{1}{(r^2)^2} \cdot r\,drd\varphi = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}\,d\varphi dr = \left| \begin{array}{l} 1 \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$$= \int_1^\infty \frac{dr}{r^3} \cdot \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r^3}\,dr$$

$$2\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{r^3}\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}$$

Föreläsning på variabelbyte / Gen. Integr.

∘ Del av integral:

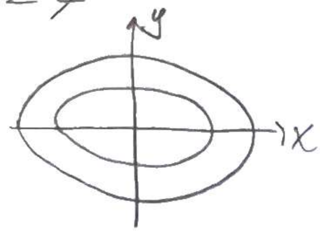
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(-\cos^3\varphi/3\right) = -\cos^2\varphi\cdot(-\sin\varphi) = \underline{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}$$

∘ Integrand:

$$I = \iint_D x^2\,dx\,dy \quad \text{på} \quad D: 1 \le x^2 + 4y^2 \le 4$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi \end{cases}$$



$$I = \iint_E r^2\cos^2\varphi \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi$$

$$E \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\varphi \cdot \frac{1}{2}r\,d\varphi\,dr = \qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{1}{2}r\cos\varphi \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{2}r\right|$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi \cdot \int_1^2 r^3\,dr = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}\cdot\pi$$

Minnesregler: Repitition av trig int.

#

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	odef	0

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

#

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{\text{trig1:an}}\,dx = \int \cos x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= \left[u = \sin x,\ \frac{du}{dx} = \cos x,\ dx = \frac{du}{\cos x} \right]$$

$$= \int \cos x\,(1-u^2)\cdot\frac{1}{\cos x}\,du = \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

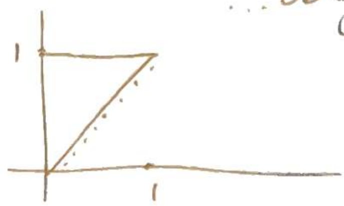
Teori:

$$\int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$\underline{\text{ex}}$ $$\int -\sin x \cdot \cos^2 x\,dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right] + C$$

Obegränsad funktion ... obegr.

(*) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dx\,dy$ på D:



$$(*) = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(2 \int \frac{1}{2\sqrt{y-x}}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 2 \left[\sqrt{y-x} \right]_{y=x}^{y=1} dx = 2 \int_0^1 \overset{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2 \left[\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} \cdot (-1) \right]_0^1$$

$$= 2\left(+ \frac{2}{3} \right) = + \frac{4}{3}$$

Integrato e polynom div

$f(x)$	$\int f(x)dx$ (+c)
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^{kx}	e^{kx}/k
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Ex $f(x) = 4x^3 + 19x^2 + 19x - 6$, $g(x) = (x+2)$

$$\begin{array}{rl}
4x^2 + 11x - 3 & \\
\hline
4x^3 + 19x^2 + 19x - 6 & \big|\ (x+2) \\
-4x^3 - 8x^2 & \\
\hline
11x^2 + 19x - 6 & \\
-11x^2 - 22x & \\
\hline
-3x - 6 & \\
-(-3x - 6) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$f(x) = (x+2)(4x^2 + 11x - 3)$

$$\begin{array}{cl}
k(x) & \\
\hline
f(x) & \big|\ g(x) \\
\vdots & \\
\hline
r(x) &
\end{array}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Använd kedjeregel, påminnelse

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = g(f(x)) + C$$

I. Vi ändrar om i integralen, sådan att vi bildar den inre derivatan. Detta tillåter oss sedan att använda omvända kedjeregeln

i) $$\int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx = \left[(\sin^3 x)/3 \right]$$

ii) $$\int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{(1+y^2)} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x}{2-x^2} + x \right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln|2-x^2| + \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1$$

Riemannsumma & Trippelintegral

* Def: $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k)$ betecknar

Riemannsumman till f på området D.

Diametern av området D är den minsta cirkel som innesluter D.

Finhet kallas den största diametern.

* Sats: Antag f vara kontinuerlig på D & att $S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k)$, är Rm. summan till f på D. Då gäller det att: $S \longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

* Påstående: Trippelintegraler $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ behandlas som dubbel-integraler. K betecknar kroppen i rummet $\mathbb{R}^3$.

Vid variabelbyte tas volymskillnad som av determinanter.

F

Fysikalisk tolkning: massa

K

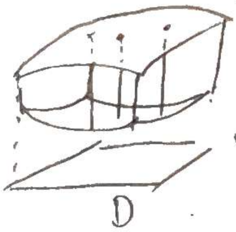
Densitet $\rho(x,y,z)$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

(x,y,z) $dV = dxdydz$

Inom kuben kan vi tänka oss densitet $\rho(x,y,z)$ vara konstant. Massan dM blir då $\rho(x,y,z)dxdydz$

$\Rightarrow$ Summan alla bitar i kroppen K som dM: $\iiint_K \rho(x,y,z)\,dxdydz = M$

Area:



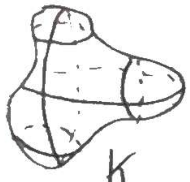
$f(x,y)$

$g(x,y)$

D

$$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))\,dxdy = V$$

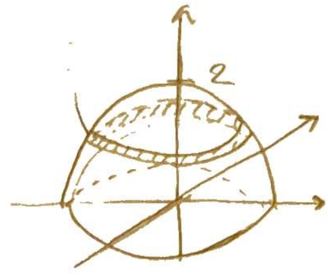
Volym kan bestämmas av en allmän kropp K med antagandet av konstant densitet.



K

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz$$

Ex $\iiint_K z\,dx\,dy\,dz$, $K: x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$.



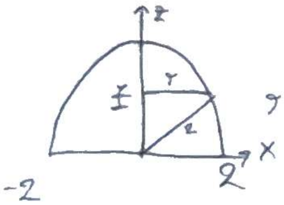
Princip I: Skiva kroppen axelparallellt.

$dM = \iint_{D_z} z\,dx\,dy$, $M = \int dM = \int_0^2 \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz$

D_z

Arean av D_z

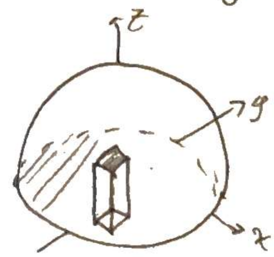
$$I = \int_0^2 \left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz = \int_0^2 z\,dz \iint_{D_z} 1\,dx\,dy$$



$r = \sqrt{4-z^2}$

$$= \int_0^2 z\,dz \cdot \underbrace{\pi\left(\sqrt{4-z^2}\right)^2}_{\text{Arean}} = \pi \left[2z^2 - \frac{z^4}{4} \right]_0^2 = 4\pi$$

Princip 2 "Dubbel-enkel"



$$dM = \int_0^{\text{På ytan}} z\,dz = \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz$$ Massan av en stapel

ytan: $x^2+y^2+z^2 = 4$

$z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

$$\Rightarrow \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz \right) dx\,dy = \ldots = 4\pi$$

yttre gränser måste vara tal.

D

D = projektion av ytan.

Massa, tyngdpunkt & tröghetsmoment.

Massa: Låt $f(x, y, z)$ vara densitet i (x, y, z)

$$m = \iiint_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$, där en kropp är K.

Tyngdpunkt

En tyngdpunkt x_T, y_T eller z_T beräknas:

$$x_T = \frac{1}{m}\iiint_K x f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$, där m är

massa & K är kroppen.

- Om K är homogent är $f = 1$

- Dubbel-enkel $$\iiint_K f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{m(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right) dx\,dy$$

där D är projection på xy-planet & m, g är begränsade funktioner för kroppen

Volym för godtycklig kropp:

$$V = \iint_D (f(x, y) - g(x, y))\,dx\,dy$$ med D som projection på planet.

tröghetsmoment. Hur trögt det är att rotera en kropp kring en axel.

Låt dm vara densiteten $f(x,y,z)$ och l vara vinkelräta sträckan från (x,y,z) till axel.

$$l = \sqrt{(x-q_1)^2 + (y-q_2)^2 + (z-q_3)^2}$$ där (q_1, q_2, q_3) beskriver axeln

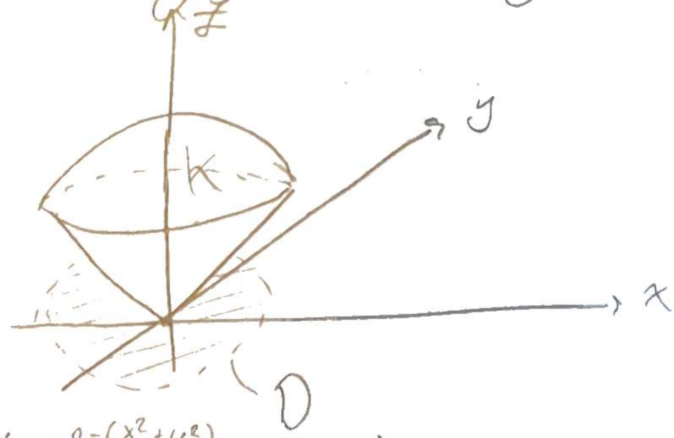
z-axel $(0,0,z) \Rightarrow l = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

tröghet:

$$J = \iiint_K l^2 \, dm = \iiint l^2 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Ex Kropp med $\rho = 1$ som begränsas av ytorna

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z = 2-(x^2+y^2) \end{cases}$$



Rotation kring z

I

$$J = \iiint_K (x^2+y^2)\cdot 1 = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} (x^2+y^2)\, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[z \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2-(x^2+y^2)} \cdot (x^2+y^2)\, dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2)\left(2-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

II D bestäms av skärning av $\sqrt{x^2+y^2} = 2-(x^2+y^2)$

Vi får E: $\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \;\Big|\; x^2+y^2 \le 1$

III

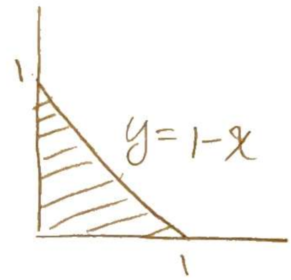
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot (2-r^2-r)\cdot r\, d\varphi\, dr = \int_0^1 (2r^3-r^5-r^4)\,dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{6} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \cdot 2\pi = \frac{15-5-6}{30}\cdot 2\pi = \boxed{\frac{4\pi}{15}}$$

Seminarie

7.35 + (7.34) [$\alpha = 1$]

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$$



$\boxed{7.34} \leftarrow \alpha \neq 1$: $$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx\right) =$$

konvergent om

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}, \quad p < 1$$

$\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha < 2}}$

$\Rightarrow$ om $\alpha < 2$

Sem: Trippelintegraler

7.46

$$I=\iiint_K \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \quad K: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4$$

Rymdpolära, funk.det. $= r^2\sin\theta$ $\quad E: 1\le r\le 2$

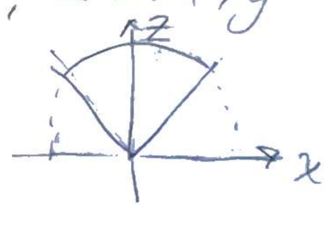
$0\le\varphi\le 2\pi$

$0\le\theta\le\pi$

$$I=\iiint_E \frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_1^2 1\,dr\cdot\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 2\pi\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi$$

7.51 $\displaystyle\iiint_K \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \quad K: x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}$



Rymdpolära: $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$y=0$

$x^2+z^2\le 1$

$$I=\iiint_E \frac{r\cos\theta}{1+r^2\sin^2\theta}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{2r^2\sin\theta}{1+r^2\sin^2\theta}\,r\cos\theta\,d\theta\,dr$$

$$=\frac{2\pi}{2}\int_0^1 r\cdot\left[\ln(1+r^2\sin^2\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi/4}dr = \pi\cdot\int_0^1 r\,\ln\left(1+r^2\cdot\frac{1}{2}\right)dr$$

+ räkneregel

+ partialintegration

övre $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

undre: $\sqrt{x^2+y^2}=z$

7.31 forts

Man kan även kolla dubbel-integral:

$$I=\iint_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\frac{z}{1+x^2+y^2}\,dz\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_D\frac{1}{x^2+y^2+1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\frac{1-(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}dx\,dy=$$

$=\{$pol. koord$\}$: E: $\sqrt{1-(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2+y^2} \iff 1=2(x^2+y^2)$

$\iff \frac{1}{2}=x^2+y^2$

$$\begin{cases}0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}\quad \det.=r$$

$$=\frac{1}{2}\iint_E\frac{1-2r^2}{1+r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi=\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{r-2r^3}{1+r^2}\,dr$$

$$\begin{array}{r|l} -2r & \\ \hline r-2r^3 & 1+r^2 \\ -(-2r^3-2r) & \\ \hline 3r & \end{array}$$

$$=\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}-2r+\frac{2\cdot 3r}{1+r^2}\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\left[-r^2\right]_0^{1/\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{2\cdot 3r}{1+r^2}\,dr\right)=\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln(1+r^2)\cdot 3\right]_0^{1/\sqrt{2}}\right.$$

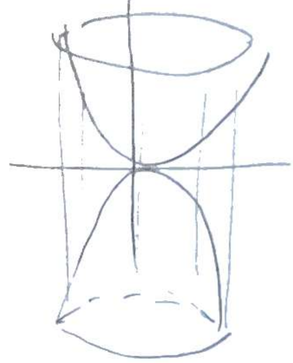
$$=\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln(3/2)\right)=\frac{3\cdot\ln(3/2)-1}{2}\cdot\pi$$

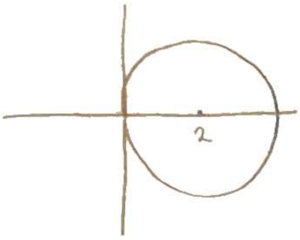
8.6 Volym av K: $x^2+y^2 \le 4x$, $|z| \le x^2+y^2$

$x^2-4x+y^2 \le 0$

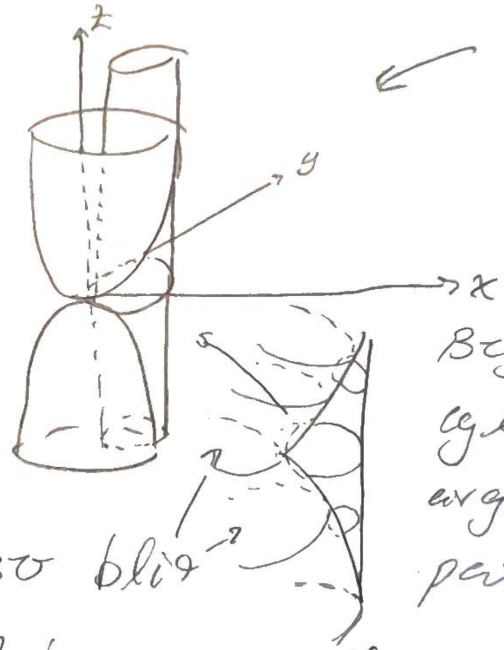
$(x-2)^2+y^2 \le 2^2$

$-(x^2+y^2) \le \underbrace{z \le x^2+y^2}_{\text{paraboloid}}$





oberoende av z
$\Rightarrow$ cylinder



Begränsas av cylinder & avgränsas av paraboloid

Projektionen D blir cylindern, & gränsen blir

$$V = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[x^2+y^2-(-x^2-y^2)\right] dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D x^2+y^2\,dx\,dy = [\text{pol}]:$$

$$D: \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \left| \; \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r \right.$$

$$E: \; 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$= 2\iint_E \left((2+r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi\right) r\,dr\,d\varphi = 2\iint_E (4+4r\cos\varphi + r^2)\, r\,dr\,d\varphi$$

[...]

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4r + 4r^2\cos\varphi + r^3)\,dr\right)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left[2r^2 + \frac{4r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\varphi =$$

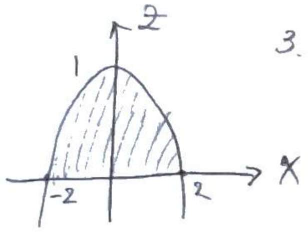
$$= 2\int_0^{2\pi}\left(8 + \frac{32}{3}\cos\varphi + \frac{16}{4}\right)d\varphi = 2\left[8\varphi + \frac{32}{3}\sin\varphi + 4\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2(16\pi + 8\pi) = 48\pi$$

8.8 Volym K begränsas av $\underset{1}{x^2 = 4-4z}$, $\underset{2}{y^2 = 4-4z}$, $\underset{3}{z = 0}$

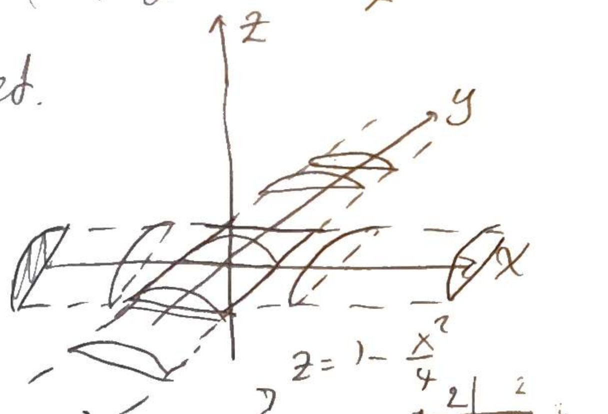
L: (1.) $z = 1 - \frac{x^2}{4}$

(2.) $z = 1 - \frac{y^2}{4}$



3. $z = 0$

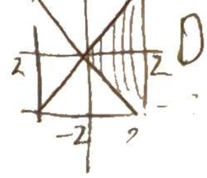
↳ begränsat i rummet.



(1) = (2) gör $x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow$ $y = \pm x$

(*)



(*)

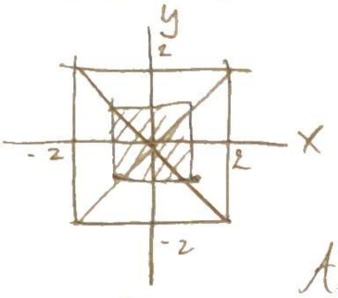
$$4\iint_D \left(\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 0\right)dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^2\left(\int_{-x}^{x}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dy\right)dx = 4\left(\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\cdot 2x\,dx\right) = \ldots$$

exempel på "enkel-dubbel"

$x^2 = 4 - 4z$

$$V = \int_0^1 (\text{area av } D_z)\,dz = \int_0^1 16 - 16z\,dz$$



$$A = (2 \cdot 2\sqrt{1-z})^2 = 16(1-z)$$

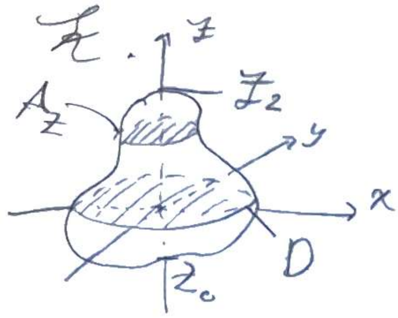
$$= 16\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 16 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{8}$$

$x^2 = 4 - 4z$

$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{1-z}$

I Det gäller att volym kan skrivas

$$V = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz,$$ för en kropp K.



II Omskrivning sker på två sätt:

1. Enkel-dubbel:

$$V = \int_{z_0}^{z_1} (\text{Uttryck generell area i } z,\ D_z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} A_z\,dz$$

2. Dubbel-enkel:

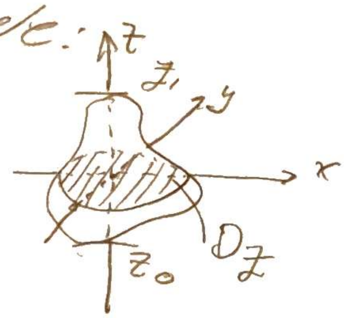
$$V = \iint_D (\text{övre funk} - \text{undre funk})\,dx\,dy$$

Trippelintegraler överlag

I volymen är en trippelintegral av konstant funktion (1). En generell trippelint. är:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Vi kan använda samma metoder som för volymen, nämligen:



a) Enkel-dubbel:

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz,\ \text{där}$$

D_z är den yta som beskriver tvärsnittets area, genom figuren. z_1 & z_0 är övre/undre gränser.

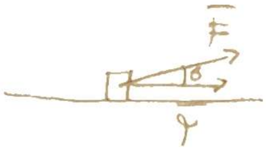
b) Dubbel-enkel:

$$\iint_{D_z}\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy,\ \text{där } D_z \text{ är projektionen}$$

en på xy-planet & $\psi(x,y)$ är den övre funktionen, & $\varphi(x,y)$ den undre, för kroppen K.

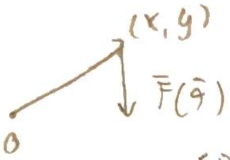
Notera: Variabelsubstitution fungerar överallt!

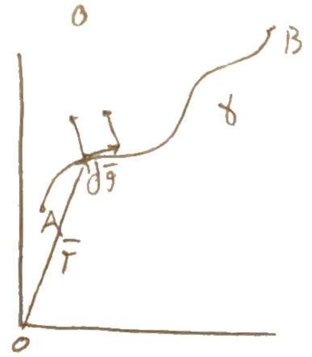
F19: kurvintegraler & Greens formel

Fysik 

Arbete W = kraft · förflyttning
$= \bar F \cdot \bar r$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (vektorfält) $\quad F: \bar r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \bar F(\bar r) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix}$





$$d(W) = \bar F(\bar r) \cdot d\bar r, \quad W = \int_\gamma dW = \int_\gamma \bar F(\bar r) \cdot d\bar r$$

$$= \int_\gamma \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy =$$

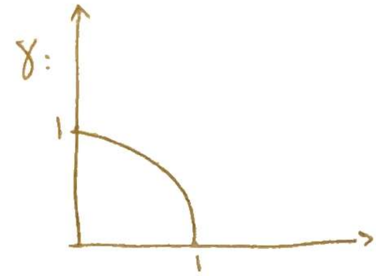
$d\bar r = \bar r'(t)\,dt = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} dt$

$\gamma: \bar r = \bar r(t) = (x(t), y(t))$

$a \le t \le b \quad t: a \to b$

$$= \int_a^b \underbrace{P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}_{f(t)}\, dt$$

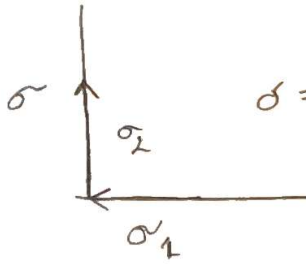
Ex: Kurvintegral: $I = \int_\gamma \underbrace{xy}_{P}\,dx + \underbrace{(x^2+y^2)}_{Q}\,dy$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t\cdot\sin t}_{xy}\cdot\underbrace{(-\sin t)}_{x'(t)} + \underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{x^2+y^2}\cdot\underbrace{\cos t}_{y'}\,dt \qquad \begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases} \quad t: 0\to\frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 t\cdot\cos t + \cos t)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3}+\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Ex Samma fält: $\int_\sigma xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy =$



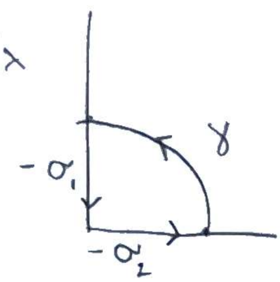
$\sigma = \sigma_1+\sigma_2$

$$= \int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2} = \int_1^0 \underbrace{\cancel{t\cdot 0}}_{xy}\cdot\underbrace{1}_{x'} + (\cancel{t^2+0^2})\cdot 0)\,dt \qquad \sigma_1: \begin{cases}x=t, & t: 1\to 0\\ y=0\end{cases}$$

$$+ \int_0^1 (\cancel{t\cdot 0}\cdot 0 + (0^2+t^2)\cdot 1)\,dt \qquad \sigma_2: \begin{cases}y=t, & t: 0\to 1\\ x=0\end{cases}$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

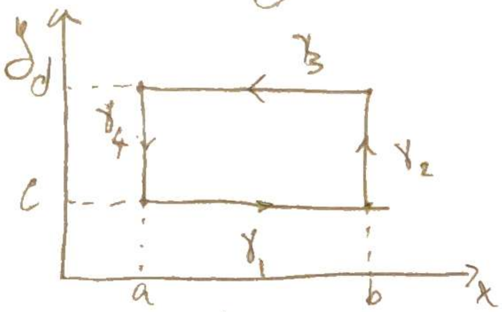
Ex



$$\int_{\gamma-\sigma_1-\sigma_2} = \int_\gamma - \int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Greens formel

Kurvintegral $\longleftrightarrow$ dubbelintegral



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} =$$

$\gamma_1 \quad \begin{matrix} x = t \\ y = c \end{matrix} \quad t: a \to b$ $\qquad \gamma_2 \quad \begin{matrix} x = b \\ y = t \end{matrix} \quad t: c \to d$ $\qquad \gamma_3 \quad \begin{matrix} x = t \\ y = d \end{matrix} \quad : t: b \to a$

$\gamma_4: \quad \begin{matrix} x = a \\ y = t \end{matrix} \quad t: d \to c$

$$= \int_a^b \Big(P(t,c)\cdot \underset{x'}{\underset{\smile}{1}} + Q(t,c)\cdot \underset{y'}{\underset{\smile}{0}}\Big)dt + \int_c^d \Big(P(b,t)\cdot 0 + Q(b,t)\cdot 1\Big)dt$$

$$+ \int_b^a \Big(P(t,d)\cdot 1 + Q(t,d)\cdot 0\Big)dt + \int_d^c \Big(P(a,t)\cdot 0 + Q(a,t)\cdot 1\Big)dt$$

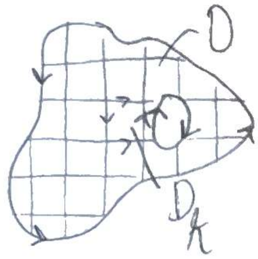
$t \to x \qquad t \to y$

$$= \int_a^b \underbrace{\Big(P(x,c) - P(x,d)\Big)}_{[P(x,y)]_{y=d}^{y=c} = \int_d^c P'_y(x,y)\,dy} dx \quad \int_c^d \Big(Q(b,y) - Q(a,y)\Big)dy = \begin{cases} \int_a^b \int_c^d -P'_y\,dy\,dx \; + \\ + \int_c^d \int_a^b Q'_x\,dx\,dy \end{cases}$$

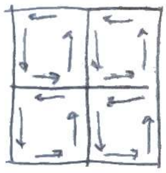
Greens...

$$= \iint_D -P'_y\,dxdy + \iint_D Q'_x\,dxdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

Allmänt:



$$\sum \int_{\partial D_k} = \sum \iint_{D_k} \sim \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$



Bidragen av de inre delarna tar ut varandra, vi inser då den yttre randen av D kvarstår.

Vi går längs randen sådant att området ligger till vänster.

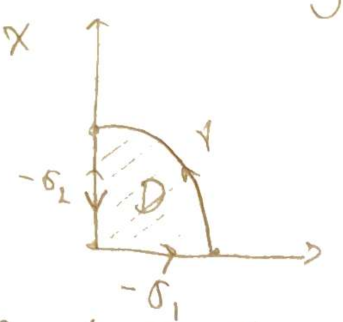
$\Rightarrow$ Positiv orientering.

$$\boxed{\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy}$$

total rand | Pos. orienterad

$P = xy,\ Q = x^2 + y^2$

Ex



$\partial D = \gamma - \sigma_2 - \sigma_1$

$$\iint_D (\underbrace{2x}_{Q'_x} - \underbrace{x}_{P'_y})\,dx\,dy = \iint_D x\,dx\,dy$$

$$= \iint \cos\varphi \cdot r^2\,dr\,d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$0 \le r \le 1$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

↳ viktigt att faktiskt P, Q är definierat för hela D.

Ex

$$\int_\gamma = ? \qquad \int_\gamma - \int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} = \iint_D = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma = \frac{1}{3} + \int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2}$$

} om det går att beräkna via parametrisering.

Definitioner kurvor

I Låt γ vara en kurva i planet som ges av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Dess längd blir:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\int_a^b |\bar{r}'(t)| \, dt}_{\text{bågelement } ds} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt = \int_\gamma ds$$

i Rummet R^3

$$\mathcal{L} = \int_a^b |\bar{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

Ex: $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $\bar{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\mathcal{L} = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} |\bar{r}'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = \boxed{2\sqrt{2} \cdot \pi}$$

II Längden av en sammansatt kurva blir dess konkatenering $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_n$

$$\mathcal{L} = \int_\gamma ds = \int_{\gamma_1} ds + \ldots \int_{\gamma_n} ds$$

kan även skrivas: $\gamma_1 \cup \gamma_2 \ldots \cup \gamma_n$

IM <u>Kurvintegral</u>. Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion, γ kurva i planet som ges av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$. Kurvintegralen $\int_\gamma f\,ds$, av funk. f längs γ:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\bar{r}(t))\,|\bar{r}'(t)|\,dt = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

<u>notera</u>

$$\int_\gamma (f+g)\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$$

Vanliga räkneregler gäller.

Ex: γ ges av $\bar{r}(t) = (t, t^3)$, $1/3 \le t \le 1$, längddensitet som varierar $f(x,y) = x^3 + y$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

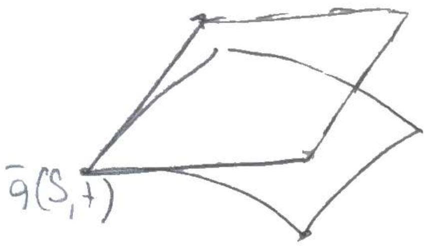
1. $f(\bar{r}(t)) = t^3 + t^3 = 2t^3$, $\bar{r}'(t) = (1, 3t^2)$

$$m = \int_{1/3}^{1} f(\bar{r}(t))\,|\bar{r}'(t)|\,dt = \int_{1/3}^{1} 2t^3\sqrt{1 + 9t^4}\,dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 9t^4 \\ du = 36t^3\,dt \end{array} \right.$$

$$= \ldots = \frac{10\sqrt{10}}{27}\left(1 - \frac{1}{27}\right)$$

Ytintegral, arean av ytan Γ kan skrivas

$$A = \iint_D \underbrace{|\bar{r}'_s \times \bar{r}'_t| \, ds\,dt}_{\text{Areaelement}} = \iint_\Gamma dS$$



Ex Ytan $z = x^2+y^2$, $0 \le x^2+y^2 \le 4$

Param: $\bar{r}(s,t) = (s, t, s^2+t^2)$ $D: 0 \le s^2+t^2 \le 4$

$$\bar{r}'_s = (1,0,2s), \quad \bar{r}'_t = (0,1,2t)$$

$$|\bar{r}'_s \times \bar{r}'_t| = |(1,0,2s) \times (0,1,2t)| = |(-2s,-2t,1)| =$$
$$= \sqrt{4s^2+4t^2+1}$$

$$A = \iint_D |\bar{r}'_s \times \bar{r}'_t| \, ds\,dt = \iint_D \sqrt{4s^2+4t^2+1} \, ds\,dt \ldots = \frac{\pi}{6}(17^{3/2}-1)$$

V Låt T vara en yta som ges av parametris. $\bar{r}: D \to R^3$, där D är ett område i R^2 & låt f vara kont. funk. av typ $R^3 \to R$
Def. ytintegral $\iint_T f\,dS$ av f på ytan T

$$\iint_T f\,dS = \iint_D f(\bar{r})\,|\bar{r}'_s \times \bar{r}'_t|\,ds\,dt$$

VI Kurvintegralen $\int \bar{F}\,d\bar{r}$ av vektorfältet $\bar{F}$ längs den orienterade kurvan γ, parametriserad av $\bar{r}(t)$, $a \le t \le b$.

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt.$$

Tillägsvis kan detta skrivas på annat sätt, differentialform.

$$\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)),\quad \bar{r}(t) = (x(t), y(t)),\quad a \le t \le b$$

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_\gamma (P,Q) \cdot (dx, dy) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Parametrisera γ & skriv

$$= \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \dots$$

Anm: $\int_{-\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = -\int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ Negativ orientering till pos. orient.

$$\int_a^b \dots = -\int_b^a \dots$$

Greens formel: Antag att (P, Q) är vektorfält i planet, vars D_f innehåller området D med positivt orienterad rand ∂D. Då gäller:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

Alltså precis likt med kurvintegraler, men ofta lättare att räkna ut!

Anm: I många fall kan $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ge vägoberoende fält, vägen spelar alltså ingen roll.

Areaberäkning

$$\int_{\partial D} x\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy = \text{Arean av } D$$

Krav $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$$\begin{cases} (P, Q) = (-y, 0) \Rightarrow \int_{\partial D} -y\,dx = A(D) \\ (P, Q) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x) \Rightarrow \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy = A(D) \end{cases}$$

Potentialfält

- Ett fält är vägoberoende iff kurvintegralen längs varje sluten kurva är noll.

def. (Potentialfält). Vektorfältet $F = (P, Q)$ kallas potentialfält, eller konservativt fält, i området Ω om det finns en funktion U av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i Ω sådan att:

$$\overline{F} = \nabla U = \operatorname{grad} U, \text{ dvs. } (P, Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Funktionen U kallas potentialfunktion till fältet F.

Ex $\quad (P, Q) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$U = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C \quad \text{då} \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Sats 9.3: Antag att (P, Q) är ett potentialfält i Ω, med pot.f. U. För varje kurva γ i Ω gäller det då att:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0).$$

där (x_0, y_0) är startpunkt & (x_1, y_1) är slutpunkt för γ.

* Angreppssätt för potentialfunktionen U.

I Söker funktion U: $\nabla U = (P, Q)$

• $(P, Q) = (2xy + y,\ x^2 + x + 3y^2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + y & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + 3y^2 & (2) \end{cases}$$

II Lös en av ekvationerna, t.ex. (1)

(1) $U(x, y) = \int (2xy + y)\,dx = x^2 y + xy + h(y)$

där h är en godtycklig funk i en variabel.

III Derivera (1) med avseende på motsatt variabel än för vilken vi deriverar (y).

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x + h'(y) \quad (3)$$

IV Jämför nu (3) med (2).

$$\left.\begin{aligned} (3)\ \frac{\partial U}{\partial y} &= x^2 + x + h'(y) \\ (2)\ \frac{\partial U}{\partial y} &= x^2 + x + 3y^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &h'(y) = 3y^2 \\ &\Rightarrow h(y) = y^3 + C \end{aligned}$$

V (P, Q) är ett potentialfält med $U = x^2 y + xy + y^3 + C$

[Om $h'(y)$ skulle vara $= xy$ t.ex är (P, Q) inte pot.]

Kurvor och villkor för potentialer.

*(Den nivåkurva som ges av $U(x,y) = C$ kallas ekvipotentialkurva)

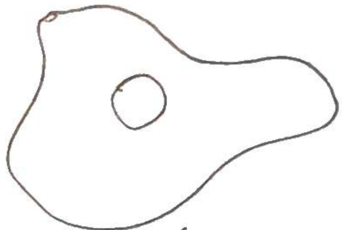
I Om (P,Q) är ett potentialfält i Ω så är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i Ω

II Potentialfält $\Rightarrow$ vägoberoende

Sats 9.5: Om (P,Q) vägoberoende vektorfält i Ω så följer det att (P,Q) är ett potentialfält i Ω.

Sats 9.6: Antag (P,Q) vektorfält är definierad i enkelt-sammanhängande område Ω. Då gäller det att om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i Ω så är (P,Q) ett potentialfält.

enkelt sammanh. (e.s)



ej. enkelt sammanh.

Kulmineret: Om vektorf. (P,Q) är def. i e.s. område är följande ekvivalent:

1. Fält (P,Q) vägoberoende
2. kurvintegralen längs varje sluten kurva är noll.
3. Fältet (P,Q) är potentialfält.
4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$