Lathund och tentaplugg FMAB30

Dennis Nilsson

June 2021

1 Introduktion

Nedan förljer lathund för kursen i flerdimensionell analys på LTH (FMAB30), och vektoranalys i rummet från FMAB35. Dessa med avsikt att förbereda för tentamen i kursen, och bör därför innefatta de flesta momenten. Språket är inte alltid strängt matematiskt men svaren bör trots detta vara tillräckliga. Lathunden kan inte och bör inte ersätta kursmaterialet i sin helet.

2 Lathund

2.1 Punkter, mängder och koordinatbyte

1. Vad menas med en inre punkt respektive randpunkt till en mängd M i $\mathbb{R}^2$?

   - Om M delmängd av planet så säger vi att en punkt (a, b) är en inre punkt till M om det finns en omgivning av (a, b) som helt och hållet tillhör M, speciellt punkten själv. En punkt (a, b) är en yttre punkt om det finns en omgivning av (a, b) som ligger helt utanför M, dvs. i komplementet till M. Till sist sägs en punkt (a, b) vara en randpunkt om det i alla omgivningar av (a, b) innehåller punkter i M och dess komplement. Mängden av alla randpunkter definierar randen till M.

2. Vad menas med att en mängd M i $\mathbb{R}^2$ är: öppen, sluten, begränsad eller kompakt?

   - En delmängd sägs vara **öppen** om den inte innehåller någon av sina randpunkter, och **sluten** om den den inehåller hela sin rand. Om bäggedera ovan gäller är den varken eller.
   - En delmängd av planet planet är **begränsad** om den kan inneslutas av en cirkelskiva av godtycklig storlek, och obegränsad om den inte kan det.
   - En mängd som både är **sluten** och **begränsad** är **kompakt**.

3. Hur inför man polära koordinater i planet, repektive rymdpolära koordinater?

- Polära koordinater, elipspolära inefattat, införs genom att bilda en ny mängd i planet genom variabelbyte; kalla denna mängd E.

$$E : \begin{cases} x = x_0 + ar\cos\rho = f_1(r,\rho) \\ y = y_0 + ar\sin\rho = f_2(r,\rho). \end{cases} \tag{1}$$

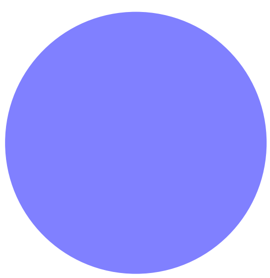
  Med $E = \{(r,\rho) : r_1 \leq r \leq r_2, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$. Notera att arean ändras genom bytet, varvid dess ändring är precis determinanten av funktionalmatrisen:

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\rho)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \rho} - \frac{\partial f_1}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial r} = \Phi. \tag{2}$$

  Ovan innebär att om vi till exempel skulle göra ett polärt koordinatbyte på en mängd D i $\mathbb{R}^2$ som definieras av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, skulle vi få en mängd E i $\mathbb{R}^2$, genom bytet $\{x = \cos\rho, y = \sin\rho\}$, som bildar kvadraten $E = \{(r,\rho) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \rho \leq 2\pi\}$. Här blir $\Phi = r$.

  Ett till exempel är den förskjutna ellipsskivan med radie 2 och center i $(1,1)$, $D = \{(x,y) : (\frac{x}{\sqrt{2}} - 1)^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}} - 1)^2 \leq 2, 0 \leq x, 0 \leq y\}$. Genom bytet:

$$E : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}r\cos\rho \\ y = 1 + \sqrt{2}r\sin\rho \end{cases} \tag{3}$$



  och begränsningarna $E = \{(r,\rho) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}\}$ får vi det nya området. Beräkning av funktionaldeterminant utesluts här.

- Rymdpolära koordinater, förskjutna innefattade, införs liksom planpolära koordinater med ett variabelbyte och begränsningar:

$$E : \begin{cases} x = x_0 + ar\sin\theta\cos\rho = f_1(r,\theta,\rho) \\ y = y_0 + ar\sin\theta\sin\rho = f_2(r,\theta,\rho) \\ z = z_0 + ar\cos\theta = f_3(r,\theta,\rho). \end{cases} \tag{4}$$

Med $E = \{(r,\theta,\rho) : r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \rho_1 \le \rho \le \rho_2\}$. Lägg märke till att dessa begränsas mellan värdena: $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \rho < 2\pi$. Vi får här funktionalmatrisen:

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\rho)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial r}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \rho} - \frac{\partial f_2}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right) - \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \rho} - \frac{\partial f_2}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial r}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \theta} - \frac{\partial f_2}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial r}\right) = r^2 \sin\theta. \tag{6}$$

2.2 Partiella differentialekvationer och dess uppbyggnad

Från endim vet vi att det finns första och andra ordningens differentialekvationer (samt resterande ordningar med komplexa lösningsmetoder) som kan lösas med ren integration och integrerande faktor eller lösningsmetod för det homogena och inhomogena fallet för fallet av ordning två. Låt oss först repetera dessa, integration tas upp [insert here]:

- Integrerande faktor: Antag att vi vill lösa följande $y' + g(x) \cdot y = h(x)$.
  1. Sök Integrerande faktor: $G(x) = \int g(x)$, IF $= e^{G(x)}$
  2. Multiplicera sedan in:

  $$y' \cdot e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = h(x)e^{G(x)} \tag{7}$$

  $$\text{VL: } \left(ye^{G(x)}\right)' = y'e^{G(x)} + G'(x)ye^{G(x)} = y'e^{G(x)} + g(x)e^{G(x)} \tag{8}$$

  3. Lös ut:

  $$\left(ye^{G(x)}\right)' = h(x)e^{G(x)} \tag{9}$$

  $$\iff ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)}dx \tag{10}$$

  $$\iff y = \frac{1}{e^{G(x)}}\int h(x)e^{G(x)}dx \tag{11}$$

- Differentialekvationer andra ordningen, homogent fall: $y''py' + qy = 0$ där y beror av x.
  1. Lös karakteristiska ekvationen, förslagsvis med pg-formeln:

  $$r^2 + pr + q = 0 \tag{12}$$

2. (a) Om lösningarna r_1, r_2 är reella och olika:

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

   (b) Om lösningarna r_1, r_2 är reella och lika:

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_2 x}$$

   (c) Om lösningarna r_1, r_2 är komplexa konjugat: $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$

$$y(x) = (C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x))e^{\alpha x}$$

- Differentialekvationer andra ordningen, inhomogent fall: $y'' + py' + qy = g(x)$ där y beror av x

  1. Bestäm den homogena lösningen till ekvationen, dvs: $y''+py'+qy = 0$ Se ansats ovan.
  2. Bestäm en partikulärlösning till ekvationen. Detta görs genom en ansats, där vi försöker matcha $y_p(x)$ med $g(x)$. Sedan substitueras ansatsen på $y_p(x)$ och dess derivator in i ekvationen, som sedan löses i vanlig ordning. De okända konstanterna i $y_p(x)$ bestäms och lösningen till differentialekvationen är den homogena lösningen plus den inhomogena lösningen: $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.
     Ansatstabellen: Notera att en anstas inte funkar då ansatsen också är

Typ	g(x)	Ansats
Polynom	$x^2 - q$	$Ax^2 + Bx + C$
Exponential	$2e^{4x}$	Ae^{4x}
Trig	$\sin 3x$	$A \sin 3x + B \cos 3x$
Trig	$-2 \cos 3x$	$A \sin 3x + B \cos 3x$
Blandat	xe^{2x}	$(Ax + B)e^{2x}$

Table 1: Ansatstabell

     eb del av den homogena lösningen. Detta löses genom att multiplicera ansatsen med t^m, där m är det minsta positiva heltal sådant att ingen term i ansatsen är en del av lösningen till den gomogena ekvationen.

- Partiella differentialekvationer av varierande ordning och typ:

  – Finn ekvatione sådan att

$$\begin{cases} f'_x = g(x, y) \\ f'_y = h(x, y) \end{cases}$$

  stämmer $f(x, y)$:

1. Integrera en av funktionsderivatorna och lägg till godtycklig funktion $\rho(x$ eller $y)$, om vi integrerar en funktion beroende av x fås en godtycklig funktion av y efter integration (som en konstant). Säg att vi väljer f'_x och får: $f(x,y) = \int f'_x dx = \int g(x,y)dx = G(x,y) + \rho(y)$.
2. Derivera den som integrerats med avseende på motsatt variabel: $f'_y(x,y) = g(x,y) + \rho'_y$
3. Jämför nyfunna $f'_y(x,y)$ med givna och bestäm ρ.
4. Om ρ beror av den givna variabeln (y) är $f(x,y)$ funnen, annars saknas lösning.

– På given form: $f(x,y) = g(xy)$ för $xf'_x + yf'_y = 1(1)$, $x > 0, y > 0, t = xy$. Vi har alltså att $f(x,y)$ är en nästlad funktion, därmed måste kedjeregeln appliceras vid derivation.

1. Först fås:

$$\begin{cases} f'_x = g'(t)t'_x = g'(t)y \\ f'_y = g'(t)t'_y = g'(t)x \end{cases} \iff xyg'(t) + xyg'(t) + g(t) = 1 \tag{13}$$

$$\iff 2tg'(t) + g(t) = 1 \tag{14}$$

$$\iff g'(t) + \frac{1}{2t}g(t) = \frac{1}{2t} \tag{15}$$

2. Varvid vi använder integrerande faktor IF $= e^{\int \frac{1}{2t}} = e^{\log t/2}$ för ek. (12). När detta mutipliceras in:

$$g(t)e^{\log t/2} = \int \frac{1}{2t} e^{\log t/2} dt = \sqrt{t} + C \tag{16}$$

$$\iff g(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^{\log t/2}} + \frac{C}{e^{\log t/2}} = \frac{\sqrt{xy}}{e^{\log xy/2}} + \frac{C}{e^{\log xy/2}} \tag{17}$$

– Variabelbyte av andra ordningen, allmän metod. Vi har fått följande variabelbyte, differentialekvation och randvillkor:

$$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases} \tag{18}$$

$$A(a,b)f''_{xy}(x,y) + B(r,t)f''_{yy}(x,y) = C(q,p)f''_{xx}(x,y) + Df'_y(x,y) + Ef'_x(x,y) \tag{19}$$

$$\tilde{f}(x,y) = h(x,y) \tag{20}$$

1. Vi tar fram derivatorna och andraderivatorna:

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u g'_{1x}(x,y) + f'_v g'_{2x}(x,y) = af'_u + bf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u g'_{1y}(x,y) + f'_v g'_{2y}(x,y) = cf'_u + df'_v \\ f''_{xx} = \left(af'_u + bf'_v\right)' x = (af'_u)'x + (bf'_v)'x = a(f''_{uu}u'_x + f''_{uv}v'_x) + b(f''_{vu}u'_x + f''_{vv}v'_x) \\ f''_{yy} = \dots \\ f''_{xy} = f''_{yx} = \dots \end{cases} \tag{21}$$

2. Sätt in i differentialekvationen (19).
3. Lös ekvationen för $f(x,y)$, med lömplig metod från endim eller flerdim ovan.
4. Vid instans av randvillkor (20), eller liknande $f(x,x) = h(x,y)$, sätter vi in dessa variabler i funktionen och sätter dessa lika med varandra. Dvs. $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$, sedan löses den godtyckliga funktionen ρ ut, som fås genom lösning av differentialekvationen, och det kompletta svaret för $f(x,y)$ kan nu ges.

2.3 Differentierbarhet

Vi säger att $f(x,y)$ är **differentierbar** om $f(x+\partial x, y+\partial y) - f(x,y) = f'_x(x,y)\partial x + f'_y(x,y)\partial y + \rho(\partial x, \partial y)\sqrt{(\partial x)^2 + (\partial y)^2}$, där $\rho(\partial x, \partial y) \longrightarrow 0$ då $(\partial x, \partial y) \longrightarrow 0$.

Differentialen av f i punkten (x,y) är: $df = f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y$
Exempel: $f(x,y) = \ln x^2 + y^2$ och vi vill approximera skillnaden mellan $f(2,1)$ och $f(2,01;1,03)$.

1. Etablera uppskattning: $\mathrm{d}f = \frac{2x+y}{x^2+xy}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+xy}\mathrm{d}y$,
2. Exakt:
$$\begin{cases} (x,y) = (2,1) \\ (\partial x, \partial y) = (0,01;0,03) \end{cases}$$
, $\partial f = f(2,01;1,03) - f(2,1) = \ln 2,01^2 + 2,01 \cdot 1,03 - \ln 2^2 + 2 \approx 0,0182$
3. Approximation: $\mathrm{d}f = \frac{5}{6} \cdot 0,01 + \frac{2}{6} \cdot 0,03 = \frac{11}{6} \cdot 0,01 \approx 0,0183$
4. Skillnaden blir alltså $0,0001$

2.4 Implicita funktionssatsen

Låt $F(x,y)$ vara en funktion med kontenuerliga partiella derivator och låt (a,b) vara en punkt på $F(x,y) = C$. Om $F'_y(a,b) \neq 0$ så kan y uttryckas som en kontenuerligt deriverbar funktion av x (dvs $y = y(x)$) i en omgivning av (a,b).

Man kan exempelvis använda implicita funktionssatsen och implicit derivering för att ta fram derivatan i given punkt för en implicit funktion. Satsen visar att derivatan finns, och med implicit derivering kan vi implicit lösa ut derivatan av funktionen i fråga, dvs. $f(x)$.

2.5 Taylors formel

2.5.1 Flerdim

Låt $h = x - a$ och $k = y - b$.

Antag att $f(x, y)$ har kontenuerligt partiella derivator till och med ordning te i en omgivning av punkten (a, b), då gäller det för alla $(x, y) = (a + h, b + k)$ i omgivningen:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right) \tag{22}$$

$$+\sqrt{h^2+k^2}^3 \cdot \rho(h,k) \tag{23}$$

, där $\rho(h, k)$ är begränsad då (h, k) är litet.

2.5.2 Endim

Påminner om taylors formel för endimesionell analys: Låt a vara en given punkt för vilken det önskas uppskatta en funktion i en variabel under - sålunda tas taylorsformel för punkten av ordning k fram.

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

Lägg märke till att om $a = 0$ kallas denna uppskattning för Maclaurinutveckling eller Maclaurinpolynom efter.

2.6 Optmering och etrempunkter

Låt oss vara nog med skillnaden mellan optimering och att finna lokala extrempunkter. Förstadera avser att hitta eventuellt största eller minsta värde till en funktion på ett avsett område, andradera avser att bestämma samtliga intressanta punkter och dess karaktär över ett inte nödvändigtvis bestämt område.

1. Lokala extrempunkter:

   En eventuell lokal extrempunkt karakteriseras av att punkten är stationär och att den givna funktionen är pertiellt deriverbar i punkten. Vi antar att (a, b) är en lokal extrempunkt till f och är partiellt deriverbar. Då är $\nabla f(a, b) = 0$.
   Att bestämma stationära punkter till f har ingen generell lösningsmetod,

Koefficienter	$Q(h,k)$	Punkt
$++$	Positivt definit	Lokalk minimum
$--$	Negativt definit	Lokalt maximum
$+-\mid-+$	Indefinit	Sadelpunkt

Table 2: Caption

utan förlitar sig på faktorisering och insättning av olika slag:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Exempelvis har vi:

$$\begin{cases} f'_x = y(1+y^2-x^2) = 0 \\ f'_y = x(1+x^2-y^2) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

och

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 1+x^2-y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+y^2-x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+y^2-x^2 = 0 \\ 1+x^2-y^2 = 0 \end{cases} \tag{25}$$

När väl stationära punkter är bestämda (underförstått att funktionen är partiellt deriverbar i punkter i fråga) kan vi gå vidare till dess karaktär. Den bestäms av den kvadratiska formen av f i (a,b), som vi ovan konstaterade var en lokal extrempunkt.

$$Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2 \tag{26}$$

Efter att kvadratiska formen $Q(h,k)$ är framtagen implicerar dess karaktär punktens karaktär: Max, min, sadelpunkt eller odefinierat. Se figur 3. Vid kvadratkomplettering a $Q(h,k)$ kan man säga följande om koefficienter och funktionens karaktär, se figur 2.

Villkor på Q	Q karaktär	(a,b) karaktär
$Q(h,k) > 0,\ \forall (h,k) \neq 0$	Positivt definit	Lokalt minimum
$Q(h,k) < 0,\ \forall (h,k) \neq 0$	Negativt definit	Lokalt maximum
$Q(h,k) \geq 0,\ \forall (h,k) \neq 0$	Positivt semidefinit	Ingen slutsats
$Q(h,k) \leq 0,\ \forall (h,k) \neq 0$	Negativt semidefinit	Ingen slutsats
$Q(h,k) > 0 \wedge Q(h,k) < 0\ \forall (h,k) \neq 0$	Indefinit	Sadelpunkt

Table 3: Extrempunkters karaktär baserat på den kvadratiska formen

2. Optimering av kompakt område:
   För ovannämnda område måste följande betraktas:

   - Stationära punkter i området.
   - Randpunkter till området.
   - Punkter där funktionen inte är partiellt deriverbar.

   Ansatsen följer som sådant:

   (a) Bestäm de stationära punkterna till området D för fuktionen $f(x, y)$, och dess fuktionsvärde i dessa.
   (b) Parametrisera randens alla sidor $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ till de envariable funktionerna $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$. Bestäm dess interval genom att betrakta D, ta fram dess max/min genom att sätta $g'_x(t) = 0$ och ta slutligen fram funktionsvärdet för punkten - antingen genom att sätta in punkten i $f(x, y)$ eller i $g_x(t)$. Vi kan antingen betrakta ändpunkterna till D separat eller under tiden som vi tar fram randens eventuella intressanta punkter, vilket som fungerar.
   (c) Bestäm funktionsvärdet i de punkter där f inte är partiellt deriverbar.
   (d) Jämför alla de samlade intressanta funktionsvärdena och punkterna, och ta fram extremiteterna - största/minsta.

3. Optimering av icke-kompakt område:

   (a) Metod ett: Undersöker funktionen och skapar ett kompakt område som delmängd av den icke-kompakta mängden, och hanterar därefter utomstående värden - det vill säga gränsvärden.
   Lättast är att använda en exempeluppgift: Vi har $f(x, y) = \frac{x+2y}{e^{x^2+y^2}}$ och $D : \mathbb{R}^2$ vilken är begränsad och ej kompakt.

      i. För det första noterar vi att $\frac{x+2y}{e^{x^2+y^2}} \longrightarrow 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty$. Här bildas kanske tanken att senare optimera funktionen på en cirkelskiva, delmängd av D, D_{r_0}. Detta eftersom funktionen verkar konvergera mot 0 då cirkelskivans radie närmar sig oändligheten.
      ii. Stationära punkter fås genom:

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x + 2y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f'_y = 2e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x + 2y)e^{-(x^2+y^2)} = 0. \end{cases}$$

      Eftersom en exponentialfunktion är skild från noll använder vi triangelolikhet och ersätter alla uttryck på forrmen $e^{q(x,y)}$ med en etta.

$$\begin{cases} f'_x = 1 - 2x(x + 2y) = 0 \quad (1) \\ f'_y = 2 - 2y(x + 2y) = 0 \quad (2) \end{cases} \tag{27}$$

Ur (27.1) fås $y = 2x$ och således, genom insättning i (27.2), fås $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}, y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}} \iff (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$ and $(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}})$.
$\begin{cases} f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-(1/2)} \\ f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-(1/2)} \end{cases}$

iii. Sedan, att bestämma vår r_0 och formellt gränsvärdet.Genom variabelbytet $\begin{cases} x = r\cos\rho \\ y = r\sin\rho \end{cases}$, fås funktionen $\tilde{f}(x,y) = (r\cos\rho + 2r\sin\rho)e^{-(r^2)}$.

$$0 \leq \mid \tilde{f}(x,y) \mid = \mid (r\cos\rho + 2r\sin\rho)e^{-(r^2)} \mid = \mid (r\cos\rho + 2r\sin\rho) \mid e^{-(r^2)} \leq \frac{3r}{e^{r^2}} \tag{28}$$

$$\implies \tilde{f}(x,y) \longrightarrow 0 \text{ då } \sqrt{x^2+y^2} = r \longrightarrow \infty \tag{29}$$

Tanken är nu att välja r_0 så att största och minsta värde innefattas i den kompakta mängden.

iv. Formellt skrivet: Alltså finns ett ral r_0 sådant att $\mid f(x,y) \mid < \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-(1/2)}$ då $\sqrt{x^2+y^2} \geq r_0$. På den kompakta mängden D_{r_0} så har f största och minsta värde, och dessa måste då vara $\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-(1/2)}$ och $-\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-(1/2)}$, vilket också måste gälla på hela $\mathbb{R}^2$.

(b) Metod två: Under förutsättningen att den icke-kompakta mängden utvidgas med en bestämd funktion åt ett begränsat antal håll kan man undersöka potentiellt intressanta punkter genom att bilda den funktion som genomlöper alla dessa punkter. Sedan undersöks den nyframtagna funktionens största och minsta värden tillägsvis.
Även här lättast med en exempeluppgift: Vi har $f(x,y) = x^2e^{-x-y}$ och $D = \{(x,y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$

i. Studera först linjerna $x = a$ och $0 \leq y \leq 2$, genom att bilda $f(a,y) = \underline{g(y)} = a^2e^{-a-y}$. Vi noterar att $e^{-a}a^2$ är icke-negativ och när y ökar minskar $g(y)$ vilket implicerar att $g(y)$ är strängt avtagande. Största värdet för $g(y)$ finner vi då $y = 0$ och minsta då $y = 2$, enligt restriktionerna på y. Utan vidare ser vi också att funktionen går mot 0 då $a \longrightarrow \infty$. Då vi även beaktar vänstra och ävre randen får vi att minsta värdet blir 0.

ii. Nu skall vi tas oss ann att bestämma f_{max}. Bilda $\underline{h(x)} = f(x,0) = x^2e^{-x}$, $x \geq 0$.

$$h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases} \tag{30}$$

Efter teckenstudie finner vi att $x = 2$ är en maxpunkt till funktionen; $h(2) = 4e^{-2}$.

iii. Svar: $f_{min} = 0$, $f_{max} = 4e^{-2}$

2.7 Optimering med bivillkor

2.7.1 Recept

Nedan fröljer ett 'recept' som kan följas mer eller mindre till pricka när väl man nått fram till förutsättningarna att påbörja detta, nämligen en funktion $f(x, y)$ och en eller flera bivillkor på formen $g(x, y) = C$ eller alternativt $h(x, y, z)$ om det bivillkoret ges för rummet.

1. Vi börjar med att ta fram ändpunkterna $p_1 = (a, b)$, om de finns (finns de inte kan steget uteslutas eller tas upp i studien för randen). Sedan sätts dessa in i funktionen $f(a, b) = \alpha$ och tas med som värde och intressant punkt.

2. Undersöker sedan sambandet $\nabla f \parallel \nabla g$ (parallella) på bivillkoret - ligger punkter som tas fram ur ekvationssystemen inte på bivillkoret skall de förkastas. Detta kan göras på två sätt:

   2.1. Traditionellt beaktar vi separat $\nabla g = 0$ och $\nabla f = \lambda \nabla g$ (Lagrange multiplikatormetod).

$$\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases}$$

,

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x & (1) \\ f'_y = \lambda g'_y & (2) \end{cases}$$

   Där ett vanligt trick för ekvationssystem två är att antingen dividera ekvationerna med varandra (på valfritt sätt: (1)/(2) eller (2)/(1)) eller om man i steg ett har provat ändpunkterna $x = 0$ eller $y = 0$ kan man förkorta med antingen x eller y eller båda.

   2.2. Alternativt, om vi har ett slutet område där min/max måste existera ($\iff$ kontenuerlig funktion på kompakt mängd) kan följande förenkling göras:

$$\nabla f \parallel \nabla g \iff \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{bmatrix} \iff \text{[Linjärt beroende vektorer]} \iff \det \begin{bmatrix} f'_x & g'_x \\ f'_y & g'_y \end{bmatrix} = 0.$$

   Detta kan ibland vara svårare än parametriseringen i 2.1, och kan utesluta vissa punkter. notera att antalet villkor måste vara jämt, vid ojämt används Lagrange multiplikator metod i 2.1.

3. Uttryck som återfinns genom 2.1 eller 2.2 kan sedan sättas in i bivillkoret eller i andra ekvationer i samma ekvationssystem. Vi bildar alltså ekvationssystemet av antingen determinanten eller lagrange multiplikatorerna tillsammans med bivillkoret i sig. Villkor av annan karaktär som lämpas kan även sättas in om inga punkter erhålls ur Lagrange multiplikator metoden eller determinantversionen. För rumnmet håller samma tillvägagångssätt!

4. Kontrollera att punkter som erhålls möter bivillkoret! (Det är hela tanken med uppgiften...)

2.7.2 Exempel #9 2021-05-31

Tentalydelse: Av alla trianglar med given omkrets, bestäm den som har störst area.
Lösningsförslag:

1. Antag att triangelns omkrets är $p > 0$. Låt x, y, z vara sidorna i en given triangel och v vinkeln mellan x och y som ligger bredvid varandra. Triengelns area ges av:
$$A = \frac{xy \sin v}{2},$$
där siglängderna x och y enligt triangelolikheten inte kan överstiga $\frac{p}{2}$. Enligt cosinussatsen är
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos v \iff x^2 + y^2 - 2xy \cos v - (p - x - y)^2 = 0.$$

2. Därmed vill vi maximera funktionen
$$f(x, y, v) = \frac{xy \sin v}{2},$$
med defenitionsmängden $D_f = \{(x, y, v) : 0 \leq x, y \leq \frac{p}{2}, 0 \leq v \leq \pi\}$, under bivillkoret
$$g(x, y, v) = x^2 + y^2 - 2xy \cos v - (p - x - y)^2 = 0.$$
(Detta inkluderar fall där triangeln urartar och får arean 0.) Eftersom det är en kontinuerlig funktion som ska optimeras på en kompakt mängd så är existensen av maximum garanterad.

3. Gradienterna av f och g:
$$\nabla f = (\frac{y \sin v}{2}, \frac{x \sin v}{2}, \frac{xy \cos v}{2}) = \frac{1}{2}(y \sin v, x \sin v, xy \cos v)$$
$$\nabla g = (2x - 2y \cos v + 2(p - x - y), 2y - 2x \cos v + 2(p - x - y), 2xy \sin v) =$$
$$2(p - y - y \cos v, p - x - x \cos v, xy \sin v).$$

Vi antar nu att punkten vi söker skall vara i D_f och söker ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2\nabla f = \lambda\frac{1}{2}\nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y\sin v = \lambda(p - y - y\cos v) \quad (1) \\ x\sin v = \lambda(p - x - x\cos v) \quad (2) \\ xy\cos v = \lambda xs\sin v \quad (3) \\ x^2 + y^2 - 2xy\cos v - (p - x - y)^2 = 0 \quad (4). \end{cases}$$

Ekvationerna (1) och (2) ger:

$$\lambda p = y(\lambda + \lambda\cos v + \sin v) = x(\lambda + \lambda\cos v + \sin v),$$

vilket innebär att $x = y$ eller $\lambda + \lambda\cos v + \sin v = 0$. Från ekvation (3) får vi:

$$\lambda = \frac{\cos v}{\sin v},$$

som tillsammans med $\lambda + \lambda\cos v + \sin v = 0$ ger oss:

$$\lambda = \frac{\cos v}{\sin v} = -\frac{\sin v}{1+\cos v} \iff (1+\cos v)\cos v = -\sin^2 v \iff \cos v + 1 = 0,$$

vilken inte ligger inom mängden. Därför återstår $x = y$. Substitution av $\lambda = \frac{\cos v}{\sin v}$ i ekvation (2) leder till att

$$x\sin v = \frac{\cos v}{\sin v}(p - x - x\cos v) \iff x\sin^2 v = p\cos v - x\cos v - x\cos^2 v \iff$$

$$x = (p - x)\cos v \iff \cos v = \frac{x}{p-x}.$$

Insättning av $x = y$ och $\cos v = \frac{x}{p-x}$ i ekvation (4) ger att

$$x^2 + x^2 - 2x^2\frac{x}{p-x} - (p-2x)^2 = 0 \iff [...] \iff x = \frac{p}{3} \quad \text{eller} \quad x = \frac{p}{2}.$$

4. Sammanfattningsvis ges den enda lösningen $x = y = \frac{p}{3}$ och $\cos v = \frac{1}{2} \iff v = \frac{\pi}{3}$. Funktionen f antar då värdet

$$f(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

Med andra ord har triangeln störst area då alla sidor har längden $\frac{p}{3}$, dvs liksidig.

2.7.3 Exempel 2020–03–16

Låt $f(x, y) = (2y + x)^2$. Vilka värden antar f på cirkeln $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$? $\Longrightarrow$ vi skall nu finna f_{min} och f_{max}, spannet däremmellan måste f anta på cirkeln om vi tar hänsyn till bivillkoret.

1. Vi sätter $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 + y^2 - 5$ med bivillkoret $g(x, y) = 0$. Tar fram $\nabla f(x, y) = 2(2y+x)(1, 2)$ och $\nabla g(x, y) = 2(x-1, y)$.

2. Vi tar fram determinanten i vanlig ordning och sätter lika med noll:

$$det \begin{bmatrix} 2(2y + x) & 2(x - 1) \\ 4(2y + x) & 2y \end{bmatrix} = 4(2y + x)(-2x + y + 2) = 0$$

3. Vi kombinerar nu ovan med bivillkoret $g(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} 4(2y + x)(-2x + y + 2) = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

   Ur första ekvationen fås dels (fall 1) $(2y + x) = 0$ och dels (fall 2) $(-2x + y + 2) = 0$. Löser vi ut antingen x eller y för bäggedera fall och sätter in dessa i bivillkoret (cirkeln) fås punkterna $(0, 0), (0, -2)$ och $(2, 2)$ med respektive värde 0, 16 och 36.

4. Svar: f antar alla värden i intervallet $[0, 36]$ på cirkeln (bivillkoret).

2.8 Kurvintegraler

En kurvintegral av vektorfältet $\overline{\mathbf{F}}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, längs den positivt orienterade kurvan γ och parametriserad av $\overline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, ges av:

$$\int_\gamma \overline{\mathbf{F}} \cdot d\overline{\mathbf{r}} = \int_\gamma P\mathrm{dx} + Q\mathrm{dy} = \int_a^b \overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overline{\mathbf{r}}'(t)\mathrm{dt}.$$

Vilket för övrigt även fungerar med kurvan i rummet och vektorfältet $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z)$ i rummet.
För en kurva (∂D) som utgör den positivt orienterade randen av ett slutet område D i planet kan Greens formel appliceras när man tar kurvintegralen av denna för ett vektorfält i led med ovan:

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{dx} + Q\mathrm{dy} = \iint_D (Q'_x - P'y)\mathrm{dxdy}.$$

Antar vi att (P, Q) är ett potentialfält i ett område Ω, med potentialfält $U(x, y)$. För varje kurva γ i Ω gäller det då att:

$$\int_\gamma P\mathrm{dx} + Q\mathrm{dy} = U(x, y) - U(x_0, y_0),$$

där (x_0, y_0) är startpunkt och (x, y) är slutpunkt för γ. Vilket för övrigt även fungerar med kurvan i rummet och vektorfältet $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z)$ i rummet.

Låt oss även ta upp villkor för potentialer: Om vektorfältet (P, Q) är definierat i ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{R}^2$ är följande ekvivalent.

1. Fält (P, Q) är vägoberoende.
2. Kurvintegralen längs varje sluten kurva är lika med noll.
3. Fältet (P, Q) är potentialfält.
4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Vi kan dessutom definiera längden av en given kurva i planet. Låt γ vara en kurva i planet som ges av $\overline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Dess längd blir således:

$$L = \int_a^b \|\overline{\mathbf{r}}(t)\|\mathbf{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathbf{d}t.$$

2.9 Flödesintegraler

Vi fortsätter med flödesintegraler - som kan tänkas bestämma flödet genom en kurva i planet.

Flödesintegralen av fältet $\overline{\mathbf{F}} = (P, Q)$ längs kurvan γ skrivs:

$$\int_\gamma \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{ds} = \int_\gamma -Q\mathrm{dx} + P\mathrm{dy},$$

vilket är en omskrivning av kurvintegralen så när som på. Därmed kan denna även parametriseras som ovan, enligt:

$$\int_\gamma -Q\mathrm{dx} + P\mathrm{dy} = \int_a^b \overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overline{\mathbf{r}}'(t)\mathrm{dt}.$$

Vi inför sedan begreppen $div\overline{\mathbf{F}}$ och $rot\overline{\mathbf{F}}$, som står för rotation och divergens. Med dessa kan vi göra uttalande om vissa egenskaper som gäller för vektorfält i rummet.

$$rot\overline{\mathbf{F}} = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

$$div\overline{\mathbf{F}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Vi kan konstatera följande:

1. Begrepp: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \iff rot\overline{\mathbf{F}} = 0 \implies$ virvelfritt
2. Sats: Varje potentialfält är virvelfritt.

3. Sats: Varje virvelfritt väktorfält definierat i ett enkelt sammanhängande område Ω är ett potentialfält.

Detta leder oss fram till två formler, en omskrivning av flödesintegralen för en sluten kurva och en omskrivning av kurvintegralen för en sluten kurva:

$$\oint_{\partial D} \overline{\mathbf{F}} \cdot d\overline{\mathbf{r}} = \iint_D (rot\overline{\mathbf{F}}) \cdot \overline{\mathbf{n}}\text{dxdy}$$

$$\oint_{\partial D} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}d\mathbf{s} = \iint_D (div\overline{\mathbf{F}}) \cdot \text{dxdy}$$

2.10 Vektoranalys i rummet

- *Läng av kurva i plan:* Vi kan inleda med längden av en given kurva i rummet. Låt γ vara en kurva i planet som ges av $\overline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$. Dess längd blir således:

$$L = \int_a^b \|\overline{\mathbf{r}}(t)\|\mathbf{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\mathbf{d}t.$$

- *Kurvintegraler i rummet* finns också och definieras:

$$\int_\gamma \overline{\mathbf{F}}\mathbf{d}r = \int_\gamma P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y + R\mathbf{d}z = \int_a^b \overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overline{\mathbf{r}}'(t)$$

  , där $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z)$ är ett tredimensionellt vektorfält som parametriseras av $\overline{\mathbf{r}}(t); t : a \to b$. Notera att samma utlägg om potential-/konservativ funktion gäller för vektorfältet i rummet. Om vi skall finna $U(x, y, z)$ till $\overline{\mathbf{F}}$ skall det göras som fallet för vektorfältet i planet - fast, i två steg upprepat.

- *Flödesintegralen genom ytan:* För en yta Γ, vektorfältet $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z)$, normalen till ytan $\overline{\mathbf{n}}$ och ytans projektion på xy-planet D, kan vi definiera flödesintegralen genom ytan som:

$$\iint_\Gamma \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathbf{d}s = \iint_D \overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{r}}(s, t)) \cdot (\overline{\mathbf{r}}_s' \times \overline{\mathbf{r}}_t')\mathbf{d}s\mathbf{d}t.$$

  Den sista termen är alltså kryssprodukten av de partiella derivatorna för parametriseringen av ytan Γ i rummet.

- *Rotation av ett vektorfält* $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z) = (P, Q, R)$ i $\mathbb{R}^3$ definieras som:

$$rot\overline{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

- *Stokes sats:* Antag Γ är en orienterad yta i rummet med positivt orienterad rand $\partial\Gamma$, och att $\overline{\mathbf{F}}$ är ett vektorfält. Då gäller följande:

$$\int_{\partial\Gamma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\overline{\mathbf{r}} = \iint_\Gamma (rot\overline{\mathbf{F}}) \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathbf{d}s = \iint_\Gamma (rot\overline{\mathbf{F}}) \cdot (\overline{\mathbf{r}}_s' \times \overline{\mathbf{r}}_t')\mathbf{d}s\mathbf{d}t$$

- *Nedan följer sanna påstående om virvelfrihet och vektorfält i rummet:*
  1. Verje potentialfält i $\mathbb{R}^3$ är virvelfritt precis då
  $$rot\overline{\mathbf{F}} = (0,0,0) = \mathbf{0} \iff \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \wedge \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \wedge \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$
  2. Varje virvelfritt vektorfält i rummet definierat på en enkelt sammanhängande mängd ω är ett potentialfält.
  3. Flödet genom ytor med gemensam rand blir **lika** om $rot\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}}$, där $\overline{\mathbf{V}}$ är en vektorpotential till $\overline{\mathbf{F}}$ (motsvarighet till vägoberoende i $\mathbb{R}^2$).
  4. Antag $\overline{\mathbf{F}}$ är ett vektorfält i rummet med en vektorpotential $\overline{\mathbf{V}}$ (fält som uppfyller $rot\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}}$). Då är $\overline{\mathbf{F}}$ divergensfritt $\iff div\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{0}}$.
- *Gauss (divergens)sats:* Antag vi har en kropp K i rummet med randytan/begränsningsytan Y som består av ändligt många slutan ytor som var och en är positivt orienterade (normalen pekar utår). För vektorfältet $\overline{\mathbf{F}}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller det:
  $$\iint_Y \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathbf{d}s = \iint_Y \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\overline{\mathbf{s}} = \iiint_K div\overline{\mathbf{F}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$
  Flödesintegralen genom randytan bildar trippelintegralen över kroppen som ranytan begränsar (positivt orienterat). Om $\overline{\mathbf{n}}$ eller ekvivalent $\mathbf{d}\overline{\mathbf{s}}$ är innåtriktad gäller istället:
  $$\iint_Y \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\overline{\mathbf{s}} = -\iiint_K div\overline{\mathbf{F}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z.$$
  Likt Greens formel kan ovanstående sats även fungera med ompletterande ytor för att bilda den slutna kroppen, skriv dessa som unioner av mängder.

2.11 Riktning, storlek, tillväxthastighet, tangentplan, rikt.deriv.

Gradienten för en funktion, över alla punkter, definieras som:

$$\text{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y).$$

Enligt satsen om maximal tillväxthastighet för funktionen f i punkten (a,b), ges dess riktning och storlek av:

$$\nabla f(a,b) = (\alpha, \beta) \quad \text{(riktningsvektor)}$$

$$||\nabla f(a,b)|| = \sqrt{(\alpha)^2 + (\beta)^2} \quad \text{(storlek av riktningsvektor).}$$

Vi kan sedan bestämma tangetplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten (ξ, ϕ, τ) genom insättning (se detta som en utvidgning av *3.6.2 Ytor*):

$$z - f(\xi,\phi) = f'_x(\xi,\phi)(x-\xi) + f'_y(\xi,\phi)(y-\phi).$$

Maxmial tillväxthastighet kan ses gå i samma riktning som riktningsvektorn. Att fråga om maximal tillväxhstighet och riktningsvektorn för en punkt på ytan blir således samma fråga.

Riktningsderivata: Med antagandet att $\overline{\mathbf{V}} = (v_1, v_2)$ är en vektor av längd 1 (normering om ej: $\overline{\mathbf{V}} = \frac{1}{||\overline{\mathbf{V}}||}\overline{\mathbf{V}}$) kan vi definiera riktningsderivatan som:

$$f'_{\overline{\mathbf{V}}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t},$$

under förutsättningen att gränsvärdet existerar. Lättast är dock att göra följande: beräknar $\nabla f(x,y)$, normera riktningsvektorn som ovan och utför följande

$$f'_{\overline{\mathbf{V}}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \overline{\mathbf{V}} = (f'_x(a,b) \cdot v_1 + f'_y(a,b) \cdot v_2).$$

Vidre kan vi också definiera tangenten till en punkt på en nivåkurva till ytan $f(x,y)$, dvs. $f(x,y) = C$ i punkten (a,b):

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0$$

2.12 Dubbelintegralers satser

2.12.1 Linjäritet, additivitet, monotonitet, triangelolikheten

Antag att f och g är integrerbar på området D (som kan delas in i D_1 och D_2):

$$(1) \quad \iint_D \alpha f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} = \alpha \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y}$$

$$(2) \quad \iint_D (f(x,y) + g(x,y))\mathbf{d}x\mathbf{y} = \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} + \iint_D g(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y}$$

$$\mathit{(3)} \quad \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} = \iint_{D_1} f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} + \iint_{D_2} f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y}$$

$$(4) \quad f(x,y) \leq g(x,y) \text{ på D} \implies \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} \leq \iint_D g(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y}$$

$$(5) \quad \| \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} \| \leq \iint_D \|f(x,y)\|\mathbf{d}x\mathbf{y}$$

(6) Låt f vara kontenuerlig, D bågvis sammanhängande och $\mu(D)$ vara arean av D. Vi kan då säga det finns minst en punkt $(\xi, \eta) \in D$ sådan att:

$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{y} = f(\xi,\eta)\mu(D)$$

(1) och (2) följer ur linjäritet, (3) ur additivitet, (4) ur monotonitet och (5) är triangelolikheten för dubbelintegraler. Vi utesluter itererad enkelintegration och liknande i denna del - dessa finns också.

2.12.2 Jämförelsesatser

Antag $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y) \, \forall \, (x,y) \in \mathbf{D}$, då råder:

$$\iint_D g(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \text{ Konvergerar } \implies \iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \text{ Konvergerar}$$

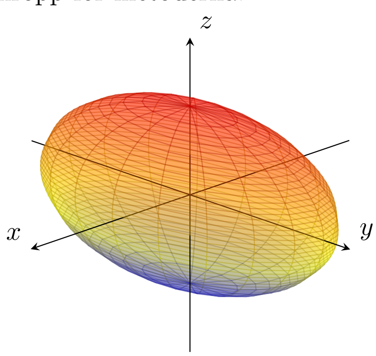
$$\iint_D f(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \text{ Divergerar } \implies \iint_D g(x,y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \text{ Divergerar}$$

2.13 Trippelintegraler

En trippelintegral av konstanten ett är samma sak som volymen av en kropp $\mathbf{K}$, och en trippelintegral av en funktion är samma sak som massa - om man tolkar funktionen som en densitetsfunktion i tre variabler. De ser ut som sådant:

$$\iiint_K 1\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z, \iiint_K \rho(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = \eta$$

Vi finner två sätt att räkna ut dessa nedan. Låt oss introducera en given kropp för metoderna:



2.13.1 Enkel-dubbel

Om vi låter kroppen löpa från z_1 till z_2 i vertikalled och låter D_z beteckna vara den allmänna yta som beskriver tvärsnittsarean genom figuren (horisontalt). Då kan vi göra följande omskrivning:

$$\eta = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D_z} \rho(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \right) \mathbf{d}z.$$

Det är här så att om ρ är lika med ett (vi vill alltså bara räkna ut volymen) är dubbelintegralen lika med arean av tvärsnittet och trippelintegralen reduceras genast till en enkelintegral med gränserna z_1 och z_2:

$$V = \iiint_K 1\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = \int_{z_2}^{z_2} (\text{Area för } D_z)\mathbf{d}z$$

Ett exempel på detta är kroppen som begränsas av ytorna $x^2 = 4 - 4z$ och $z = 0$ (xy-planet). Vi kan konstatera att x kan skrivas $x = \pm 2\sqrt{1-z}$ och eftersom kroppen ser ut som en fyrkant ovan ifrån, ett tält i rummet, fås arean av att multiplicera de liika långa sidorna: $sida \cdot sida = (2 \cdot x)^2 = (4\sqrt{1-z}^2) = 16(1-z) = A$. Efter vi noterar att z löper från 0 till 1 fås följande:

$$\int_0^1 16(1-z)\mathbf{d}z = \cdots = 8.$$

2.13.2 Dubbel-enkel

Om vi låter kroppen erhålla en övre yta $\Phi(x,y)$ och en undre yta $\zeta(x,y)$, samt låter D_z vara det område som omsluts av randen ∂D vilken är precis lika med skärningen mellan ytorna. Då kan följande omskrivning göras:

Notera att veriabelsubstitution och itererad enkel eller dubbelintegration är möjlig här och för integraler av godtycklig ordning.

$$\eta = \iint_{D_z} \left(\int_{\zeta(x,y)}^{\Phi(x,y)} \rho(x,y,z)\mathbf{d}z \right) \mathbf{d}x\mathbf{d}y.$$

2.13.3 Massa

Låt $\rho(x,y,z)$ vara densitetsfunktionen i $\mathbb{R}^3$, då fås massan m för kroppen K genom:

$$m = \iiint \rho(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x\mathbf{d}y.$$

2.13.4 Tyngdpunkt

En tyngdpunkt x_T, y_T eller z_T betecknas:

$$x_T = \frac{1}{m} \iiint x\rho(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x\mathbf{d}y,$$

där m är massan och K en godtycklig kropp i rummet.

- Om K är homogen betyder det att $\rho = 1$.

2.13.5 Tröghetsmoment

Detta begrepp bestämmer hur trögt det är att rotera en given kropp K kring en axel (oftast koordinataxlarna).

Låt $\rho(x, y, z)$ beskriva densitet, l den vinkelräta sträckan från en given punkt till axeln (q_1, q_2, q_3): $l = \sqrt{(x-q_1)^2 + (y-q_2)^2 + (z-q_3)^2}$. Exempelvis ges z-axeln av $(0, 0, z)$ och således $l = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. Tröghet:

$$J = \iiint_{\mathbf{K}} l^2 \rho(x, y, z) \mathbf{d}z \mathbf{d}x \mathbf{d}y$$

3 Att memorera

3.1 Derivation

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Table 4: Standardderivator

Glöm inte heller kvotregeln för derivator (produkt och kedjeregel utesluts).

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \tag{31}$$

3.2 Integration

$f(x)$	$\int f(x)$
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Table 5: Standardintegraler

3.3 Trigonometriska formler

De nödvändiga och vanliga inom ramen för tentan:

$\cos(a-b) =$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a+b) =$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a-b) =$	$\sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\sin(a+b) =$	$\sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(2a) =$	$\cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin(2a) =$	$2 \sin a \cos a$
$\tan(2a) =$	$\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
$\cos^2 a =$	$\frac{1+\cos 2a}{2}$
$\sin^2 a =$	$\frac{1-\cos 2a}{2}$

Table 6: Trigonometriska formler

3.4 Trigonometrisk tabell

De viktigaste värdena infor tentamen, fler därtill finns...

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	**odef**	0

Table 7: Trigonometrisk tabell

3.5 Klassiska enkelintegraler

1-7 är ganska nödvändiga, men resterande förekommer så när som på inte på tentamen.

1. $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

2. $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

3. $\int \sin x \cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$

4. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

5. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

6. $\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

7. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

8. $\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

9. $\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

10. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

3.6 Parametrisering

3.6.1 Kurvor

Nedan föreslås en typisk parameterframställning $r(t) = (x(t); y(t))$, eventuellt $r(t) = (x(t); y(t); z(t))$, för några av de ofta förekommande kurvorna inom kursens ram.

1. Funktionskurvan $y = f(x)$
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$
2. Grundcirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ med centrum i origo och given radie $a > 0$
$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$$
3. Den räta linjen i rummet som går genom punkten $(x, y, z) = (a, b, c)$ och har $\hat{d} = (A, B, C)$ som en riktningsvektor
$$\begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{bmatrix} + \text{t} \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{bmatrix} = \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{x(t) = a + At} \\ \text{y(t) = b + Bt} \\ \text{z(t) = c + Ct} \end{cases}$$

3.6.2 Ytor

Nedan föreslås en typisk parameterframställning $r(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$, eventuellt $r(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, för några av de ofta förekommande kurvorna inom kursens ram.

1. Funktionsytan $z = f(x, y)$
$$\begin{cases} \text{x(s,t) = s} \\ \text{y(s,t) = t} \\ \text{z(s,t) = f(s,t)} \end{cases}$$
I prkatiken skrivs ofta $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ istället för att införa nya variabler formellt.
2. Cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq a^2$, där $a > 0$ (konstant). Praktiskt görs detta med polära koordinater.
$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$
3. Cylindern $x^2 + y^2 = a^2$, där $a > 0$ och $c \leq z \leq d$
$$\begin{cases} x(s,t) = a\cos t \\ y(s,t) = a\sin t \\ z(s,t) = s \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ c \leq s \leq d \end{cases}$$

4. Sfären $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, där $a > 0$. Avpraktiska skäl används rymdpolära koordinater:
$\begin{cases} x(\phi,\theta) = a\sin\phi\cos\theta \\ y(\phi,\theta) = a\sin\phi\sin\theta \\ z(\phi,\theta) = a\cos\phi \end{cases}$, där $\begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

3.7 Formler och andra knep

3.7.1 Variabelsubstitution funktionaldeterminant i fel variabel

Om vi har ett veriabelbyte säg:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

, för något område i xy-planet. När vi tar fram funktionaldeterminanten (uttryck för areaskillnad) $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ brukar vi ha uttrycken för $x(u,v)$ och $y(u,v)$, och ta fram dess derivata för respektive variabel, sätta de i en determinant och lösa denna. Detta kan även göras när vi istället erhåller $u(x,y)$ och $v(x,y)$, genom sambandet:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}$$

3.7.2 Variabelsub. ellipspoolära funktd.

Vi inför exempelvis dess ellipspolära koordinaterna, som har härleds ur $(3x)^2 + (2y)^2 = z$:

$$\begin{cases} x = \frac{r}{3}\cos\phi \\ y = \frac{r}{2}\sin\phi \end{cases}$$

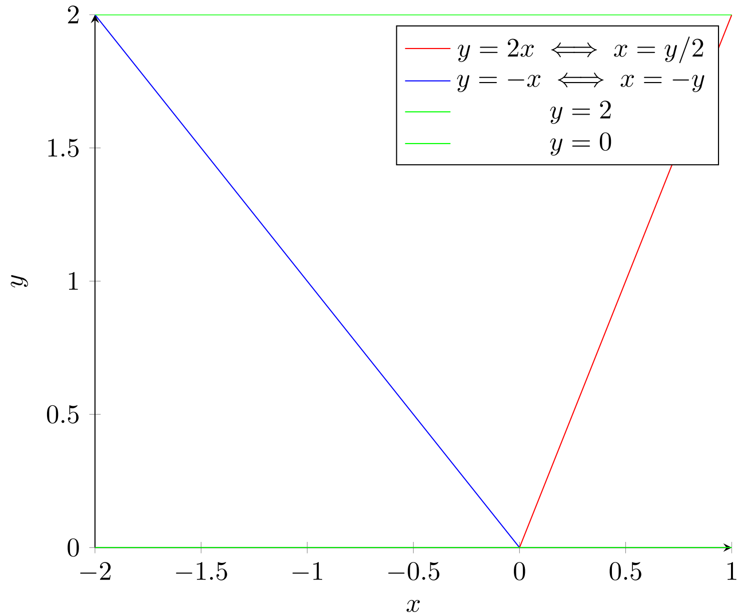
Vår funktionaldeterminant för koordinatbytet ges av:

$$det \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cos\phi & -\frac{r}{3}\sin\phi \\ \frac{1}{2}\sin\phi & \frac{r}{2}\cos\phi \end{bmatrix} = \left(\frac{r}{6}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \right) = \frac{r}{6}.$$

Funktionaldeterminanten blir alltså precis lika med multiplikationen av konstanterna $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ och r i koordinatbytet.

3.7.3 Beskriva område med x som funktion

Området som ges av punkterna $(0,0),(1,2),(-2,2)$ kan beskrivas enligt $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2, y/2 \leq x \leq -y\}$, där x begränsas av funktioner i y.



3.7.4 Skissera hyperbel

Det finns två typer av hyperbler, den variabel som är negativ skärs aldrig av kurvan. Vi kan sätta upp:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}$$
$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2}.$$

1. Dess center ges av $(-h, -k)$. Sätt upp punkter som ligger sidan om i x-led med a på vardera sida och sidan om i y-led med b på vardera sida. Asymptoterna går som ett kors genom den rektangel du satt upp, och kurvan emellan dessa.

2. Asymptoter tas fram genom att sätta uttrycket lika med noll, och lös ut y. Center som ovan genom h och k, och den variabel som är negativ korsas ej av kurvan.

3.7.5 Differentialekvation på speciell form

Givet i tentalydelsen: bestäm alla lösningar på formen $f(x, y) = g(h(x, y))$ till ekvationen $af'_x + bf'_y = Q$ exempelvis. Denna löses genom kedjeregeln, insättning av godtyckliga derivator och substitution (om behövs samt andra steg):

$$\begin{cases} f'_x = h'_x(x,y)g'(h(x,y)) \\ f'_y = h'_y(x,y)g'(h(x,y)) \end{cases}$$

, vilket ger:

$$ah'_y(x,y)g'(h(x,y)) + bh'_y(x,y)g'(h(x,y)) = Q.$$

Lös sedan denna för $g(h(x,y)) = f(x,y)$.

3.8 Tangentplant till punkt på yta

För ytan g(x,y,z) ges tengentplanet till punkten (a,b,c) av:

$$\nabla_1 g(a,b,c)(x-a) + \nabla_2 g(a,b,c)(y-b) + \nabla_3 g(a,b,c)(z-c) = 0.$$

Till skillnad från tangenplanet till ytan $f(x,y)$ som ses i del 2.9.

3.9 Max/min på kompakt område

Om vi har en kontenuerlig (kontenuerligt differentierbar) $f(x,y)$ i $\mathbb{R}^2$ eller $f(x,y,z)$ i $\mathbb{R}^3$ som skall optimeras på ett kompakt område måste denna ha en max eller/och min punkt. En funktion uppbyggd av elementära funktioner är i regel kontenuerlig om inte division med noll kan inträffa.

3.10 Kvadratisk form

När man skall finna lokal extrempunkter och dess karaktär används den kvadratiska formen. Det är mycket viktigt att kvadratkomplettera till fullo när $Q(h,k)$ har tagits fram. Om de återstående kvadraterna (skall bara finnas sådana kvar om allt är rätt) är negativa då har vi en *max*, positiva då har vi *min* och blandat *sadelpunkt*. Skulle en enda kvadrat återstå, t.ex. $(h+k)^2$, är $Q(h,k)$ semidefinit och inget kan sägas om den förutom att det inte är ett extremvärde.

3.11 Icke-kompakt område begränsad i axelparallel riktning

Låt oss säga vi har en funktion $f(x,y)$ och ett område, säg $D = \{(x,y) : 0 < x \leq 4, y \geq 0\}$. För att studera områdets potentiella max/min är det lämpligt att titta på alla linjer paralella med x-axeln som löper oändligt y-led och begränsas till 4 i x led ($\neq 0$). Vi skriver om funktionen till:

$$y = a, 0 < x \leq 4 \longrightarrow f(x,a),$$

och se vad som händer då x löper mellan sina värden och då y går mot oändligheten. De värden som x antar bildar linjer för vilket det måste finnas max- eller minpunkt på. Om vi skulle se att $f(x,a)$ är som störst, oberoende av a, då $x=3$ kommer vi återfinna maxpunkt på denna - genom att parametrisera $f(3,y)=\rho(y), \rho'(y)=0 \iff \ldots$ och fortsätta därefter. Detsamma kan göras för minpunkt och huruvida funktionen är begränsad mot oändligheten eller ej.

3.12 Förarbete till Greens formel för kurvintegraler

Innan man kan använda greens på en positivt orienterad kurva (∂D) som bildar det kompakta området D kanske måste detta område bildas. Kurvan kan vara felorienterad - då kan den orienteras åt motsatt håll genom att multiplicera med ett minustecken på kurvintegralen. Därtill kan den vara inkomplett - addera i sådana fal en eller flera kurvor sådana att kurvan sluts till ett linjestycke som är positivt orienterat (oftast lättast med axelparalella linjer men ibland kan det vara värt att prova kurvor som kan parametriseras av polära koordinater).

Vi antar att vi har fått en negativt orienterad kurva i planet γ som vi skall ta fram kurvintegralen $\int_\gamma P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y$ till. Vi gör genast ändring till positivt led för γ och kompletterar med de positivt orienterade kurvorna β, α, som bildar ∂D och innesluter området D. Vi får då följande:

$$\int_{\alpha+\beta-\gamma} P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y = \iint_D (Q'_x - P'_y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y \iff$$

$$\int_\alpha P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y + \int_\beta P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y - \iint_D (Q'_x - P'_y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_\gamma P\mathbf{d}x+Q\mathbf{d}y.$$

Lägg märke till hur orienteringskiftet påverkar tecken för kurvintegralen.

3.13 Optimering på kompakt område

Tänkt på att kontrollera om punkterna som återfinns under uppigten verkligen ligger inom området som avses...

Återigen, glöm inte hörnpunkterna.

3.14 Funktionaldeterminant

När man byter koordinater är det viktigt att skriva rätt funktionaldeterminant, speceillt då man kanske inte använder ett konventionellt koordinatbyte.

3.15 Partiella diffekvationer kvarstår med en variabel

Om vi vid slutet av en uppgift för aprtiella deifferentiualekvationer kvarstår med en variabel, eller sedan innan substituerat sådant att vi nu har en variabel, och integrerar med avseende på denna - då kvarblir en godtycklig konstant istället för en godtycklig funktion. Exempelvis:

$$g'(u) = \frac{1}{2u} \iff \int g'(u)\mathbf{d}u = \int \frac{1}{2u}\mathbf{d}u \iff g(u) = \frac{1}{2}\ln u + C.$$

Precis som vid en vanlig integration.

3.16 Krav vid lösning av partiell differentialekvation

Om vi har en uppift som lyder något i stil med "Bestäm alla lösningar av den partiella differentialekvationen ... genom variabelbytet ... . Bestäm även den lösning som uppfyller kravet $f(x,1) = 2x$." I sådana fall löser vi uppgiften som vanligt, jobba på tills dess att vi finner ett uttryck för f, som till exempel kan se ut såhär: $f(x,y) = xy + \rho(\frac{y}{x})$, där ρ är en godtycklig funktion. För att möta villkoret sätter vi: $f(x,1) = x + \rho(\frac{1}{x}) = 2x$, sedan låter vi $t = \frac{1}{x}$ och får därmed $\rho(t) = \frac{1}{t}$. Vi kan vidare konstatera att $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$.

3.17 Volym enkel-dubbel utvidgat

Vi har en kropp $\mathbf{K}$ som beskrivs av $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, med densitetsfunktionen $\rho(x,y,z) = y^2$ - beräkna massan! Om vi använder en enkel-dubbel som inte inkluderar y i den inre integraler kommer det vissa sig att massberäkningen blir betydligt enklare. Vi skall alltså ta fram den area som erhåller samma y-koordinat eller likväl den area som är tvärsnittet för ett godtyckligt y. Detta kan göras genom att bruka sambandet för den övre ytan ovan:

$$D = z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2} \implies D_y : z^2 + x^2 + y^2 \le 1 \iff z^2 + x^2 \le 1 - y^2 \text{ för } x \ge 0, z \ge 0.$$

Vi använder uttrycker för ytan och tar fram en olikhet som separerar variablerna. Den blir en kvartscirkelskiva med radien $\sqrt{1 - y^2}$ och area $\frac{1}{4}\pi(1 - y^2)$. Vi beräknar massan nu!

$$\iiint_K \rho(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = \iiint_K y^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = \int_0^1 y^2 \left(\iint_{D_y} 1\mathbf{d}x\mathbf{d}z \right)\mathbf{d}y$$

$$= \int_0^1 y^2 \left(\text{Area av } D_y \right)\mathbf{d}y = \int_0^1 y^2 \frac{1}{4}\pi(1 - y^2)\mathbf{d}y = ... = \frac{\pi}{30}.$$

Vi drar nytta av faktumet att en konstant dubbelintegral av området $\mathbf{Q}$ är precis lika med arean av $\mathbf{Q}$

4 Extentor - Uppgifter att träna mer på

Uppgifter för överbetyg är i regel svåra praktiskt och teoretiskt - vissa knep kan hjälpa men bäst är att kunna hela kursinnehållet utan och innan. Har märkt att det finns en tendens att *koppla potentialfunktioner till ett vektorfält och en eller flera godtyckliga kurvor och dess kurvintegral genom detta fält.* Bota detta med att läsapå om potentialfält och vägoberoende vektorfält (en implicerar den andra) och hur man uttrycker godtyckliga kurvor i planet.

4.1 2021/05/31

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4.2 2021/04/10

2, 3, 5, 7, 8, 9.

4.3 2021/03/15

1,3,6, 7, 8.

4.4 2020-21-28

1, 2, 5, 7, 8, 9.

4.5 2020-08-18

7, 8.

4.6 2020-06-08

3, 7, (8,9 inga likartade)

4.7 2020–03–16

1b, 5, 8(nyttig plot-uppgift), 9, 10

4.8 2019-10-30

(Bra uppgifter 9, 10) 1, 5, 6, 7, 8