



## 主要内容

- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式



**定义5.1** 设 $A, B$ 是两个谓词公式, 如果 $A \leftrightarrow B$ 是永真式, 则称 $A$ 与 $B$ 等值, 记作 $A \leftrightarrow B$ , 并称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式

### 基本等值式

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如,  $\neg\neg\forall xF(x) \leftrightarrow \forall xF(x)$ ,

$\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$  等

### 第二组

#### (1) 消去量词等值式

设 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\textcircled{1} \quad \forall xA(x) \leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\textcircled{2} \quad \exists xA(x) \leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$



## (2) 量词否定等值式

$$\textcircled{1} \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\textcircled{2} \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

## (3) 量词辖域收缩与扩张等值式.

$A(x)$  是含  $x$  自由出现的公式,  $B$  中不含  $x$  的自由出现关于全称量词的:

$$\textcircled{1} \forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\textcircled{2} \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\textcircled{3} \forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\textcircled{4} \forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$



关于存在量词的：

$$\textcircled{1} \exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\textcircled{2} \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\textcircled{3} \exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\textcircled{4} \exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

(4) 量词分配等值式

$$\textcircled{1} \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\textcircled{2} \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

注意： $\forall$ 对 $\vee$ ， $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律



### 1. 置换规则

设  $\Phi(A)$  是含  $A$  的公式, 那么, 若  $A \Leftrightarrow B$ , 则  $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ .

### 2. 换名规则

设  $A$  为一公式, 将  $A$  中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号, 其余部分不变, 设所得公式为  $A'$ , 则  $A' \Leftrightarrow A$ .

### 3. 代替规则

设  $A$  为一公式, 将  $A$  中某个个体变项的所有自由出现用  $A$  中未曾出现过的个体变项符号代替, 其余部分不变, 设所得公式为  $A'$ , 则  $A' \Leftrightarrow A$ .



**例1** 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令  $F(x)$ :  $x$ 是人,  $G(x)$ :  $x$ 犯错误.

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \quad \text{或} \quad \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (F(x) \wedge \neg G(x)) \quad \text{量词否定等值式}$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x) \vee G(x)) \quad \text{置换}$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \quad \text{置换}$$



(2) 不是所有的人都爱看电影

解 令  $F(x)$ :  $x$  是人,  $G(x)$ : 爱看电影.

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \quad \text{或} \quad \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (F(x) \rightarrow G(x)) \quad \text{量词否定等值式}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (\neg F(x) \vee G(x)) \quad \text{置换}$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge \neg G(x)) \quad \text{置换}$$



**例2** 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项： $\forall x(F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

解  $\forall x(F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z) \rightarrow \exists t G(x,t,z))$  换名规则

$\Leftrightarrow \forall x \exists t (F(x,y,z) \rightarrow G(x,t,z))$  辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$  代替规则

$\Leftrightarrow \forall x \exists y (F(x,u,z) \rightarrow G(x,y,z))$  辖域扩张等值式





**例3** 设个体域 $D=\{a,b,c\}$ , 消去下述公式中的量词:

(1)  $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解  $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$$\Leftrightarrow (\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(c)\rightarrow G(y)))$$

$$\Leftrightarrow ((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$$

$$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$$

$$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$$



## 解法二

$$\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \exists y G(y))$$

辖域缩小等值式

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a) \rightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(b) \rightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(c) \rightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$



$$(2) \exists x \forall y F(x, y)$$

$$\exists x \forall y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x, a) \wedge F(x, b) \wedge F(x, c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c))$$

$$\vee (F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c))$$

$$\vee (F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c))$$



**定义5.2** 设 $A$ 为一个一阶逻辑公式，若 $A$ 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_kx_kB$$

则称 $A$ 为**前束范式**，其中 $Q_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )为 $\forall$ 或 $\exists$ ， $B$ 为不含量词的公式。

例如，  $\forall x \neg (F(x) \wedge G(x))$

$\forall x \exists y (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x, y)))$  是前束范式

而  $\neg \exists x (F(x) \wedge G(x))$

$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$  不是前束范式，



### 定理5.1（前束范式存在定理）

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

#### 例4 求下列公式的前束范式

$$(1) \neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

$$\text{解 } \neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x)) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一。



$$(2) \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

解  $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x)) \quad (\text{量词分配等值式})$$

或

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \quad \text{量词否定等值式}$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y) \quad \text{换名规则}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y)) \quad \text{辖域收缩扩张规则}$$



$$(3) \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

解  $\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x, y) \wedge \neg H(y)))$$

辖域收缩扩张规则

或

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(z, y) \wedge \neg H(y))$$

代替规则

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$$