



主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系



定义7.1 由两个元素 x 和 y ，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作 $\langle x, y \rangle$.

有序对性质：

- (1) 有序性 $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ (当 $x \neq y$ 时)
- (2) $\langle x, y \rangle$ 与 $\langle u, v \rangle$ 相等的充分必要条件是
$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$



定义7.2 设 A, B 为集合, A 与 B 的笛卡儿积记作 $A \times B$, 且

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}.$$

例1 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

$$A \times B$$

$$= \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 3, c \rangle \}$$

$$B \times A$$

$$= \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$$

$$A = \{\emptyset\}, B = \emptyset$$

$$P(A) \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle \}$$

$$P(A) \times B = \emptyset$$



(1) 不适合交换律

$$A \times B \neq B \times A \quad (A \neq B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$$

(2) 不适合结合律

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集, 则 $A \times B$ 就是空集.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

(5) 若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A \times B| = mn$



证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

**例2**

(1) 证明 $A=B, C=D \Rightarrow A \times C = B \times D$

(2) $A \times C = B \times D$ 是否推出 $A=B, C=D$? 为什么?

解 (1) 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times D$$

(2) 不一定.反例如下:

$A=\{1\}, B=\{2\}, C=D=\emptyset$, 则 $A \times C = B \times D$ 但是 $A \neq B$.



定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系, 记作 R .

如果 $\langle x, y \rangle \in R$, 可记作 xRy ; 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \not R y$

实例: $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle\}$, $S = \{\langle 1, 2 \rangle, a, b\}$.

R 是二元关系, 当 a, b 不是有序对时, S 不是二元关系

根据上面的记法, 可以写 $1R2$, aRb , $a \not R c$ 等.



定义7.4

设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从 A 到 B 的二元关系, 当 $A=B$ 时则叫做 A 上的二元关系.

例3 $A=\{0,1\}, B=\{1,2,3\}$, 那么

$$R_1=\{<0,2>\}, R_2=A \times B, R_3=\emptyset, R_4=\{<0,1>\}$$

R_1, R_2, R_3, R_4 是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是 A 上的二元关系.

计数: $|A|=n, |A \times A|=n^2$, $A \times A$ 的子集有个. 所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A 上有=512个不同的二元关系.



定义7.5 设 A 为集合,

(1) \emptyset 是 A 上的关系, 称为**空关系**

(2) **全域关系** $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

小于等于关系 $L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \}$, A 为实数子集

整除关系 $D_B = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in B \wedge x \text{ 整除 } y \}$, A 为非0整数子集

包含关系 $R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y \}$, A 是集合族.



例如, $A=\{1, 2\}$, 则

$$E_A = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>\}$$

$$I_A = \{<1,1>, <2,2>\}$$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, 则

$$L_A = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,3>\}$$

$$D_A = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <3,3>\}$$

例如 $A = P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, 则 A 上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\emptyset, \emptyset>, <\emptyset, \{a\}>, <\emptyset, \{b\}>, <\emptyset, \{a,b\}>, <\{a\}, \{a\}>, \\ <\{a\}, \{a,b\}>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, \{a,b\}>, <\{a,b\}, \{a,b\}>\}$$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.



1. 关系矩阵

若 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, R 是从 A 到 B 的关系, R 的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j \rangle \in R.$$

2. 关系图

若 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, R 是从 A 上的关系, R 的关系图是 $G_R = \langle A, R \rangle$, 其中 A 为结点集, R 为边集. 如果 $\langle x_i, x_j \rangle$ 属于关系 R , 在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意:

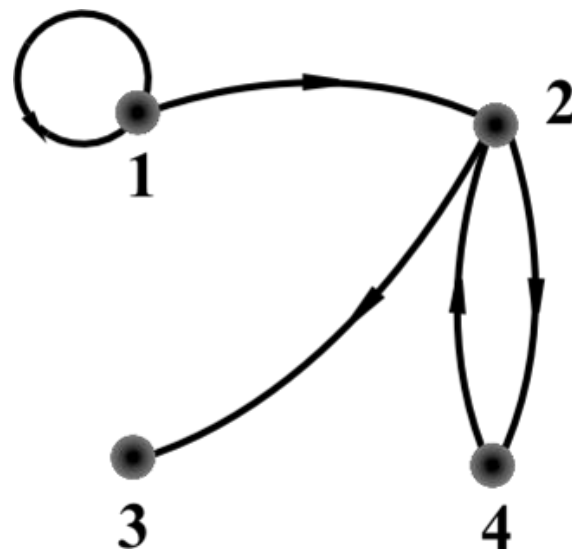
- 关系矩阵适合表示从 A 到 B 的关系或 A 上的关系 (A, B 为有穷集)
- 关系图适合表示有穷集 A 上的关系



例4

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$,
 R 的关系矩阵 M_R 和关系图 G_R 如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\text{dom}R = \{ x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \}$$

$$\text{ran}R = \{ y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \}$$

$$\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$$

例5 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$, 则

$$\text{dom}R = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{ran}R = \{2, 3, 4\}$$

$$\text{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$$



定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \}$$

例6 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

$$S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$R^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

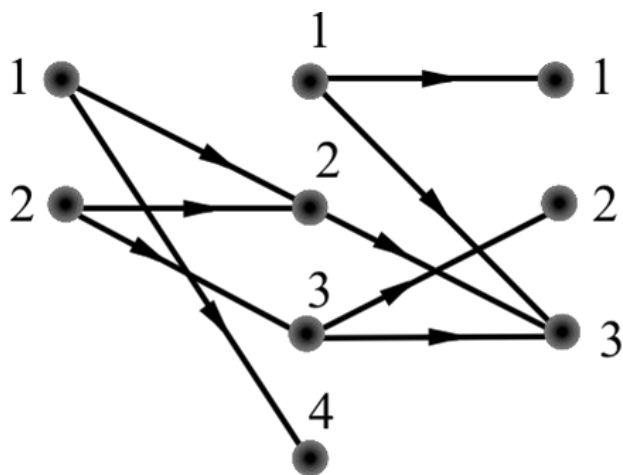
$$S \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$



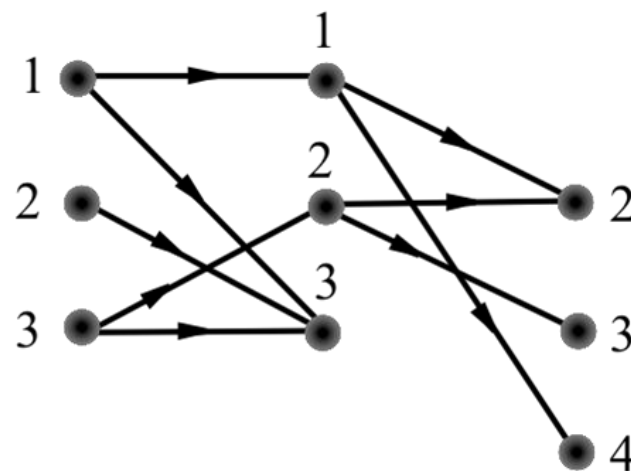
利用图示（不是关系图）方法求合成

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

$$S \circ R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$



$R \circ S$



$S \circ R$



定义7.9 设 R 为二元关系, A 是集合

(1) R 在 A 上的**限制**记作 $R \upharpoonright A$, 其中

$$R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2) A 在 R 下的**像**记作 $R[A]$, 其中

$$R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$$

说明:

- R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 是 R 的子关系, 即 $R \upharpoonright A \subseteq R$
- A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\text{ran}R$ 的子集, 即 $R[A] \subseteq \text{ran}R$



例7 设 $R=\{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,4>, <3,2>\}$, 则

$$R \upharpoonright \{1\} = \{<1,2>, <1,3>\}$$

$$R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$$

$$R \upharpoonright \{2,3\} = \{<2,2>, <2,4>, <3,2>\}$$

$$R[\{1\}] = \{2,3\}$$

$$R[\emptyset] = \emptyset$$

$$R[\{3\}] = \{2\}$$



定理7.1 设 F 是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\text{dom}F^{-1}=\text{ran}F, \text{ran}F^{-1}=\text{dom}F$

证 (1) 任取 $\langle x,y \rangle$, 由逆的定义有

$$\langle x,y \rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x \rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in F.$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取 x ,

$$x \in \text{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y \rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(\langle y,x \rangle \in F) \Leftrightarrow x \in \text{ran}F$$

所以有 $\text{dom}F^{-1}=\text{ran}F$.

同理可证 $\text{ran}F^{-1}=\text{dom}F$.



定理7.2 设 F, G, H 是任意的关系, 则

$$(1) (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

$$(2) (F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$

证 (1) 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (F \circ G) \circ H \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \circ G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, t \rangle \in G) \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \exists t (\langle s, t \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H)) \\ \Leftrightarrow & \exists s (\langle x, s \rangle \in F \wedge \langle s, y \rangle \in G \circ H) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ (G \circ H) \end{aligned}$$

所以 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$



(2) 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle y, t \rangle \in F \wedge \langle t, x \rangle \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y \rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$



定理7.3 设 R 为 A 上的关系, 则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in R \circ I_A \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in I_A) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge t = y \wedge y \in A) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in R \end{aligned}$$



定理7.4

$$(1) F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H \quad (2) (G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$$

$$(3) F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H \quad (4) (G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$$

只证 (3) 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in F \circ (G \cap H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G \cap H) \\ \Leftrightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \exists t ((\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \wedge (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H)) \\ \Rightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \wedge \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in H) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y \rangle \in F \circ H \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in F \circ G \cap F \circ H \end{aligned}$$

所以有 $F \circ (G \cap H) = F \circ G \cap F \circ H$



定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \dots \cup R \circ R_n$$

$$(R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \dots \cup R_n \circ R$$

$$R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \dots \cap R \circ R_n$$

$$(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \dots \cap R_n \circ R$$



定理7.5 设 F 为关系, A, B 为集合, 则

$$(1) F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$$

$$(2) F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$$

$$(3) F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$$

$$(4) F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$$



证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in F \upharpoonright (A \cup B) \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A \cup B \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in A) \vee (\langle x, y \rangle \in F \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \vee \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright B \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B\end{aligned}$$

所以有 $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.



(4) 任取 y ,

$$y \in F[A \cap B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x (<x, y> \in F \wedge x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (<x, y> \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x ((<x, y> \in F \wedge x \in A) \wedge (<x, y> \in F \wedge x \in B))$$

$$\Rightarrow \exists x (<x, y> \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x (<x, y> \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有 $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$.

**定义7.10**

设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

$$(1) R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$$

$$(2) R^{n+1} = R^n \circ R$$

注意:

- 对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于 A 上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$



例 8 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$, 求 R 的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2 的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



R^3 和 R^4 的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$, 即 $R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\dots, \quad R^3=R^5=R^7=\dots$$

R^0 的关系矩阵是

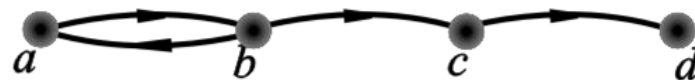
$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



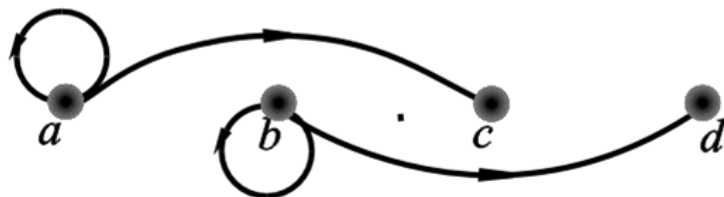
$R^0, R^1, R^2, R^3, \dots$ 的关系图如下图所示.



R^0



R^1



$R^2 = R^4 = \dots$



$R^3 = R^5 = \dots$



定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 t , 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为 A 上的关系,

由于 $|A|=n$, A 上的不同关系只有 n^2 个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \dots, R^{2^{n^2}}, \dots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$



定理7.7 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$, 施归纳于 n .

若 $n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m, n \in \mathbb{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.



(2) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}$, 施归纳于 n .

若 $n=0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$\begin{aligned}(R^m)^{n+1} &= (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m \\ &= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}\end{aligned}$$

所以对一切 $m, n \in \mathbf{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.



定理7.8 设 R 是 A 上的关系,
若存在自然数 s, t ($s < t$) 使得 $R^s = R^t$, 则

- (1) 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$
- (2) 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$
- (3) 令 $S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$
(2) 对 k 归纳. 若 $k=0$, 则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$
假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$, 则

$$\begin{aligned} R^{s+(k+1)p+i} &= R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p \\ &= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i} \end{aligned}$$

由归纳法命题得证.



(3) 任取 $q \in \mathbb{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若 $q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s + kp + i, \text{ 其中 } 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.



定义7.11 设 R 为 A 上的关系,

- (1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是**自反的**.
- (2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是**反自反的**.

实例:

- 1. 自反: 全域关系 E_A , 恒等关系 I_A , 小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A
- 2. 反自反: 实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.
- 3. $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_2 自反, R_3 反自反, R_1 既不是自反的也不是反自反的.



定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$,

则称 R 为 A 上**对称**的关系.

(2) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$,

则称 R 为 A 上的**反对称**关系.

实例:

1. 对称关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset
2. 反对称关系: 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset 也是 A 上的反对称关系.
3. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 : 对称和反对称;

R_2 : 只有对称;

R_3 : 只有反对称;

R_4 : 不对称、不反对称



定义7.13 设 R 为 A 上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R),$$

则称 R 是 A 上的**传递**关系.

实例:

1. A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和 空关系 \emptyset , 小于等于和小于关系, 整除关系, 包含与真包含关系

2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系, R_2 不是 A 上的传递关系.



定理7.9 设 R 为 A 上的关系, 则

- (1) R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$



证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$, 由于 R 在 A 上自反必有

$$\langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性

任取 x , 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.



(3) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性

任取 $\langle x, y \rangle$, 由 $R = R^{-1}$ 得

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是对称的



(4) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x=y \wedge x, y \in A \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A\end{aligned}$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.



(5) 必要性

任取 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是传递的



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	M^2 中1位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则 x_i 到 x_k 也有边



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×



主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
 - 集合表示
 - 矩阵表示
 - 图表示
- 闭包的性质



定义7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系,
 R 的**自反(对称或传递)闭包** 是 A 上的关系 R' ,
使得 R' 满足以下条件:

- (1) R' 是自反的(对称的或传递的)
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反(对称或传递)关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$

R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

定理7.10 设 R 为 A 上的关系, 则有

- (1) $r(R) = R \cup R^0$
- (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$
- (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

说明: 对有穷集 $A(|A|=n)$ 上的关系, (3) 中的并最多不超过 R^n



证 只证(1)和(3).

(1) 由 $I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$ 知 $R \cup R^0$ 是自反的, 且满足 $R \subseteq R \cup R^0$. 设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系, 则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$. 从而有 $R \cup R^0 \subseteq R''$. $R \cup R^0$ 满足闭包定义, 所以 $r(R) = R \cup R^0$.

(3) 先证 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ 成立.

用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n \subseteq t(R)$.

$n=1$ 时有 $R^1 = R \subseteq t(R)$. 假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立, 那么对任意的 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R \Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R)) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)$$

这就证明了 $R^{n+1} \subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.



再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \dots$ 成立, 为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \dots$ 传递.

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots \wedge \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, y \rangle \in R^t) \wedge \exists s (\langle y, z \rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^{t \circ s})$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

从而证明了 $R \cup R^2 \cup \dots$ 是传递的.



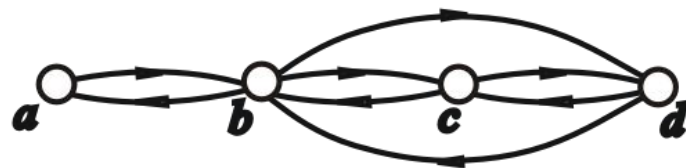
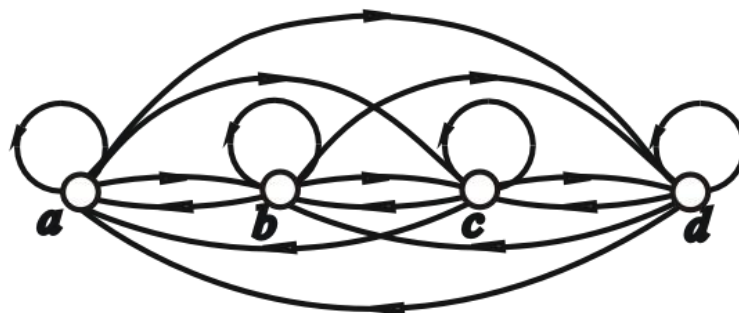
设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t
则 $M_r = M + E$ $M_s = M + M'$ $M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$
 E 是单位矩阵, M' 是转置矩阵, 相加时使用**逻辑加**.

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t , 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

- (1) 考察 G 的每个顶点, 若没环就加一个环, 得到 G_r
- (2) 考察 G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边, 得到 G_s
- (3) 考察 G 的每个顶点 x_i , 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许 $i=j$), 如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图 G_t



例9 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$,
 R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.

 R  $r(R)$  $s(R)$  $t(R)$



定理7.11 设 R 是非空集合 A 上的关系, 则

- (1) R 是自反的当且仅当 $r(R)=R$.
- (2) R 是对称的当且仅当 $s(R)=R$.
- (3) R 是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

- (1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略



定理7.13 设 R 是非空集合 A 上的关系,

- (1) 若 R 是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的
- (2) 若 R 是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的
- (3) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

证明 略

说明: 如果需要进行多个闭包运算,

比如求 R 的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$, 运算顺序如下:

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$



主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应



定义7.15 设 R 为非空集合上的关系.

如果 R 是**自反**的、**对称**的和**传递**的, 则称 R 为 A 上的**等价关系**.
设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 **x 等价于 y** , 记做 $x \sim y$.

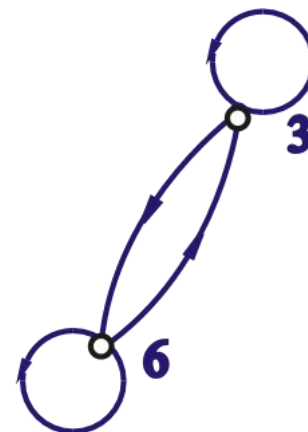
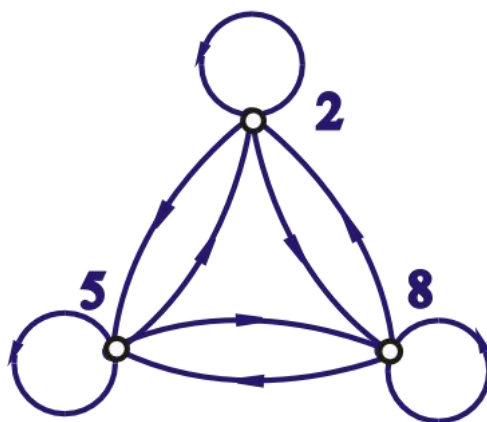
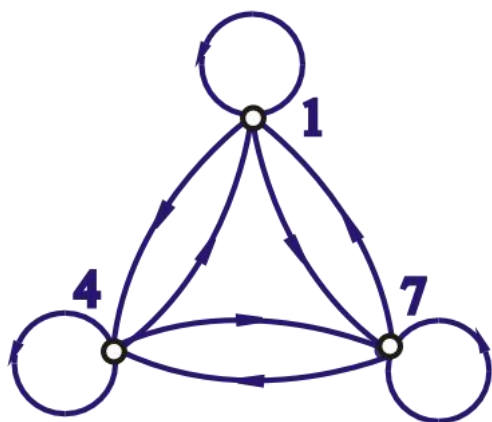
实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$

其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 **x 与 y 模3相等**, 即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等.

不难验证 R 为 A 上的等价关系, 因为

- (1) $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod{3}$
- (2) $\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, 则有 $y \equiv x \pmod{3}$
- (3) $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, $y \equiv z \pmod{3}$, 则有 $x \equiv z \pmod{3}$



模 3 等价关系的关系图



定义7.16 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的**等价类**, 简记为 $[x]$ 或 \overline{x}

实例 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$



定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$
- (3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交
- (4) $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义, $\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$. 又 $x \in [x]$, 即 $[x]$ 非空.

(2) 任取 z , 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \Rightarrow \langle z, x \rangle \in R$$

$$\langle z, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle z, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, z \rangle \in R$$

从而证明了 $z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$.

这就得到了 $[x] = [y]$.



(3) 假设 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 则存在 $z \in [x] \cap [y]$, 从而有 $z \in [x] \wedge z \in [y]$, 即 $\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$ 成立. 根据 R 的对称性和传递性必有 $\langle x, y \rangle \in R$, 与 x 和 y 矛盾

\mathcal{R}

(4) 先证 $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$. 任取 y ,

$$\begin{aligned} y \in \bigcup \{[x] \mid x \in A\} &\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge y \in [x]) \\ &\Rightarrow y \in [x] \wedge [x] \subseteq A \Rightarrow y \in A \end{aligned}$$

从而有 $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$

再证 $A \subseteq \bigcup \{[x] \mid x \in A\}$. 任取 y ,

$$y \in A \Rightarrow y \in [y] \wedge y \in A \Rightarrow y \in \bigcup \{[x] \mid x \in A\}$$

从而有 $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq A$ 成立.

综上所述得 $\bigcup \{[x] \mid x \in A\} = A$.



定义7.17 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**, 记做 A/R ,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, A 关于模3等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$$

定义7.18 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi (\pi \subseteq P(A))$ 满足:

- (1) $\emptyset \notin \pi$
- (2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- (3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个**划分**, 称 π 中的元素为 A 的**划分块**.



例10 设 $A = \{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下:

$$\pi_1 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$\pi_4 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

$$\pi_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

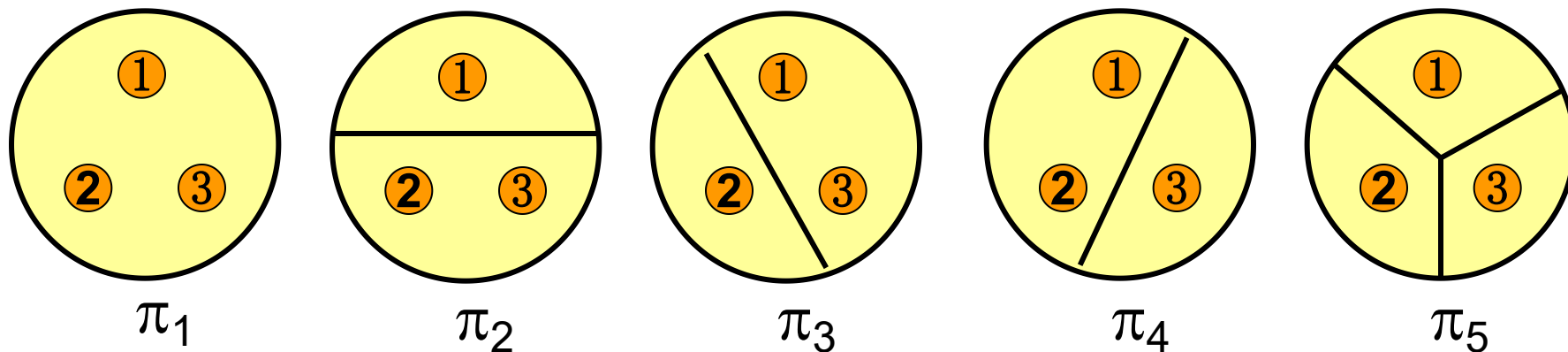
$$\pi_6 = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分, 其他都不是 A 的划分.



例11 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

解 先做出 A 的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1 对应 E_A , π_5 对应 I_A , π_2, π_3 和 π_4 分别对应 R_2, R_3 和 R_4 .

$$R_2 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_3 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_4 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} \cup I_A$$



主要内容

- 偏序关系

 - 偏序关系的定义

 - 偏序关系的实例

- 偏序集与哈斯图

- 偏序集中的特殊元素及其性质

 - 极大元、极小元、最大元、最小元

 - 上界、下界、最小上界、最大下界



定义7.19 偏序关系：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，记作 \leq .

设 \leq 为偏序关系, 如果 $\langle x, y \rangle \in \leq$, 则记作 $x \leq y$,
读作 x “小于或等于” y .

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.



定义7.20 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x 与 y **可比** $\Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x$

(2) 任取元素 x 和 y , 可能有下述几种情况发生:

$x < y$ (或 $y < x$), $x = y$, x 与 y 不是可比的

定义7.21 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

(1) $\forall x, y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称 R 为**全序** (或线序)

实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系, 整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x, y \in A$, 如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$, 则称 y **覆盖** x .

例如 $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.



定义7.23 集合 A 和 A 上的偏序关系 \leq 一起叫做**偏序集**, 记作 $\langle A, \leq \rangle$.

实例: $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle, \langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$

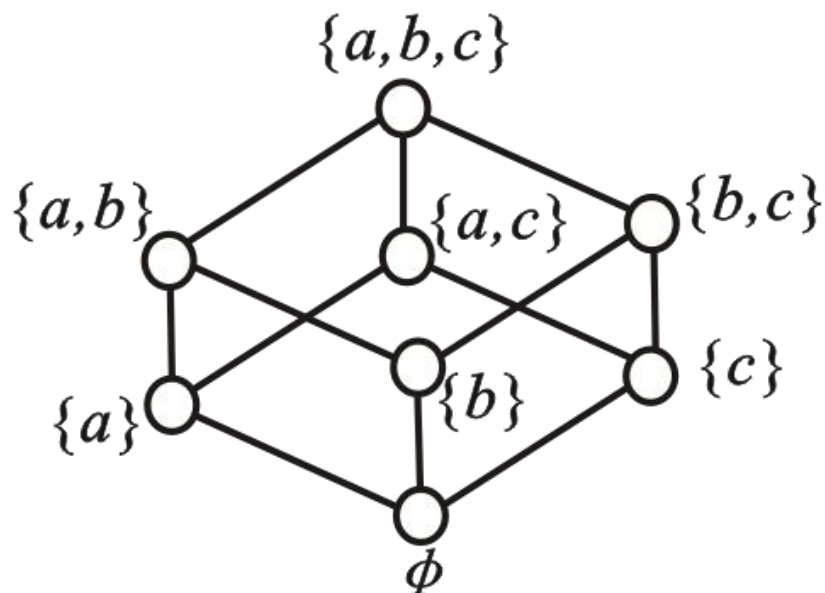
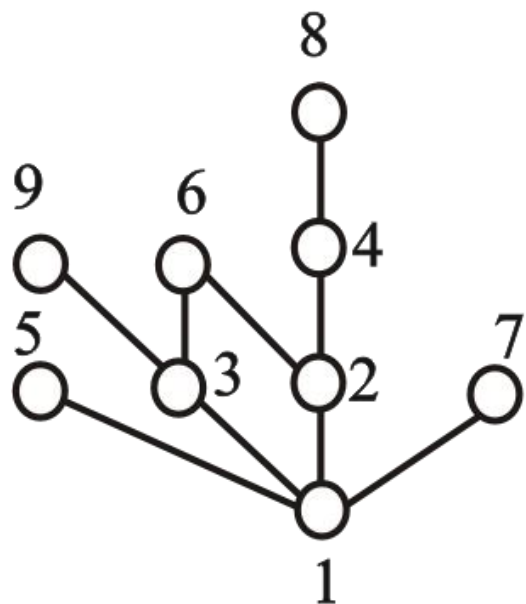
哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点:

- (1) 每个结点没有环
- (2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前
- (3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

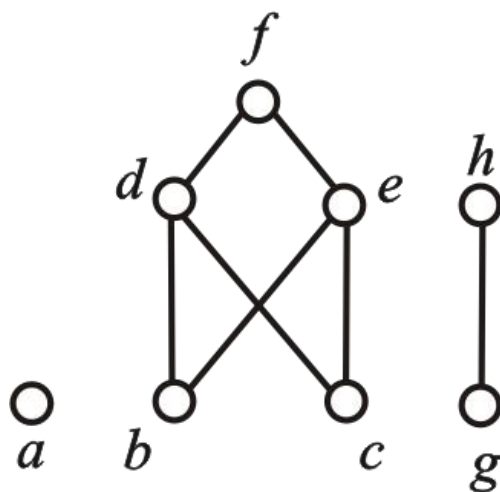


例12 偏序集 $\langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图.





例13 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$



定义7.24 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**
- (3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**
- (4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**

性质:

- (1) 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 可能存在多个.
- (2) 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- (3) 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- (4) 孤立结点既是极小元, 也是极大元.



定义7.25 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**上界**
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**下界**
- (3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, C 的最小元为 B 的**最小上界或上确界**
- (4) 令 $D = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, D 的最大元为 B 的**最大下界或下确界**

性质:

- (1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- (2) 下界、上界存在不一定惟一
- (3) 下确界、上确界如果存在, 则惟一
- (4) 集合的最小元是其下确界, 最大元是其上确界; 反之不对.



例14 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元, 设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元: a, b, c, g ;

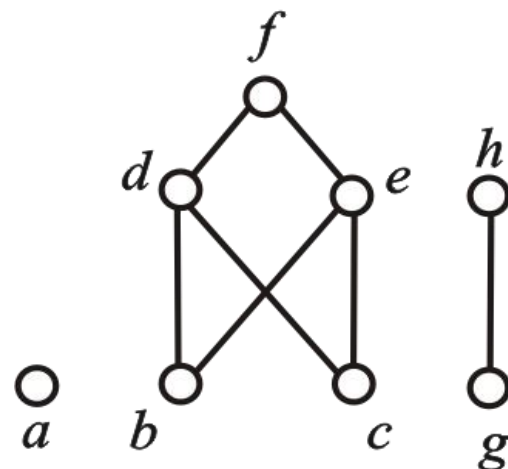
极大元: a, f, h ;

没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f ,

最小上界为 d .





例15 设 X 为集合, $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$, 且 $A \neq \emptyset$. 若 $|X| = n, n \geq 2$. 问:

- (1) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最大元?
- (2) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最小元?
- (3) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么?
并说明理由.

解 (1) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 不存在最小元和最大元, 因为 $n \geq 2$.

(2) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即 $\{x\}, x \in X$.

(3) $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即 $X - \{x\}, x \in X$.



主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从 A 到 B 的关系、 A 上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质： A 上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A 上关系的自反、对称、传递闭包
- A 上的等价关系、等价类、商集与 A 的划分
- A 上的偏序关系与偏序集



- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算 $A \times B$, $\text{dom } R$, $\text{ran } R$, $\text{fld } R$, R^{-1} , $R \circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集 A/R
- 给定 A 的划分 π , 求出 π 所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法
- 证明涉及关系运算的集合等式
- 证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系



1. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \text{ 且 } x+2y \leq 6 \}$,
 $S = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$,

求:

(1) R 的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) $\text{dom } R, \text{ran } R, \text{fld } R$

(4) $R \circ S, R^3$

(5) $r(R), s(R), t(R)$



$$(1) R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle \}$$

$$(2) R^{-1} = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$(3) \text{dom}R = \{1, 2, 3\}, \text{ran}R = \{1,2\}, \text{fld}R = \{1, 2, 3\}$$

$$(4) R \circ S = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$R^3 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle \}$$

$$(5) r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$$

$$s(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle \}$$



2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R :

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle \in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

$$\begin{aligned} A \times A = \{ &\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \\ &\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \\ &\langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle \} \end{aligned}$$

根据 $\langle x,y \rangle$ 中的 $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将 A 划分成等价类:

$$\begin{aligned} A/R = \{ &\{ \langle 1,1 \rangle \}, \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}, \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle \}, \\ &\{ \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,1 \rangle \}, \\ &\{ \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle \}, \\ &\{ \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle \}, \{ \langle 4,4 \rangle \} \} \end{aligned}$$



3. 设 R 是 \mathbb{Z} 上的模 n 等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n},$$

试给出由 R 确定的 \mathbb{Z} 的划分 π .

解 设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$, 则

$$[r] = \{ kn+r \mid k \in \mathbb{Z} \}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\pi = \{ [r] \mid r = 0, 1, \dots, n-1 \}$$



4. 设偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出 A 和 R 的集合表达式

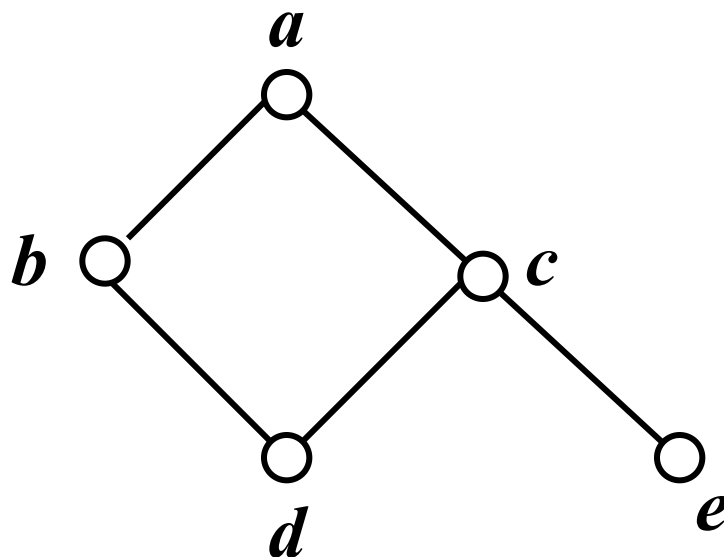
(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元

解

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, c \rangle, \langle e, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是 a ,
极小元是 d, e ;
没有最小元.





5. 设 R 是 A 上的二元关系, 设

$$S = \{ \langle a, b \rangle \mid \exists c (\langle a, c \rangle \in R \wedge \langle c, b \rangle \in R) \}.$$

证明如果 R 是等价关系, 则 S 也是等价关系。

证 R 是 A 上的等价关系.

(1) 证自反 任取 x ,

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \exists x (\langle x, x \rangle \in R \wedge \langle x, x \rangle \in R) \Rightarrow \langle x, x \rangle \in S$$

(2) 证对称 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in S &\Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R) \\ &\Rightarrow \exists c (\langle c, x \rangle \in R \wedge \langle y, c \rangle \in R) \Rightarrow \langle y, x \rangle \in S \end{aligned}$$

(3) 证传递 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S \\ \Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R) \wedge \exists d (\langle y, d \rangle \in R \wedge \langle d, z \rangle \in R) \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in S \end{aligned}$$



6. 设偏序集 $\langle A, R \rangle$ 和 $\langle B, S \rangle$, 定义 $A \times B$ 上二元关系 T :

$$\langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 (1) 自反性 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySy \Rightarrow \langle x, y \rangle T \langle x, y \rangle$$

(2) 反对称性 任取 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \wedge \langle u, v \rangle T \langle x, y \rangle &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

(3) 传递性 任取 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle, \langle w, t \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \wedge \langle u, v \rangle T \langle w, t \rangle &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle T \langle w, t \rangle \end{aligned}$$

1. 证明 R 在 A 上自反任取 x ,

$$\begin{array}{ccccc} x \in A & \Rightarrow & \dots\dots\dots & \Rightarrow & \langle x, x \rangle \in R \\ \text{前提} & & \text{推理过程} & & \text{结论} \end{array}$$

2. 证明 R 在 A 上对称任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{array}{ccccc} \langle x, y \rangle \in R & \Rightarrow & \dots\dots\dots & \Rightarrow & \langle y, x \rangle \in R \\ \text{前提} & & \text{推理过程} & & \text{结论} \end{array}$$



3. 证明 R 在 A 上反对称

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{array}{ccccc} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R & \Rightarrow & \dots\dots\dots & \Rightarrow & x = y \\ \text{前提} & & \text{推理过程} & & \text{结论} \end{array}$$

4. 证明 R 在 A 上传递

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$,

$$\begin{array}{ccccc} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R & \Rightarrow & \dots\dots\dots & \Rightarrow & \langle x, z \rangle \in R \\ \text{前提} & & \text{推理过程} & & \text{结论} \end{array}$$



7. R, S 为 A 上的关系, 证明 $R \subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证 只需证明对于任意正整数 n , $R^n \subseteq S^n$. 对 n 归纳.
 $n=1$, 显然为真.

假设对于 n , 命题为真, 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R^n \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in S^n \wedge \langle t, y \rangle \in S)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in S^n \circ S$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in S^{n+1}$$



- 数学归纳法（主要用于幂运算）
- 证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$$x \in \text{dom} R \Leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in R)$$

$$y \in \text{ran} R \Leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in R)$$

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1}$$

$$\langle x, y \rangle \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in S)$$

$$\langle x, y \rangle \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R$$

$$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \dots$$