



第六章 集合代数

主要内容

- 集合的基本概念
属于、包含
幂集、空集
文氏图等
- 集合的基本运算
并、交、补、差等
- 集合恒等式
集合运算的算律、恒等式的证明方法



1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为**集合**，称这些个体为集合的**元素**

常见的数集： N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质
实例：

枚举法 自然数集合 $N=\{0,1,2,3,\dots\}$

谓词法 $S=\{x \mid x \text{是实数}, x^2-1=0\}$



1. 集合的元素具有的性质

无序性：元素列出的顺序无关

相异性：集合的每个元素只计数一次

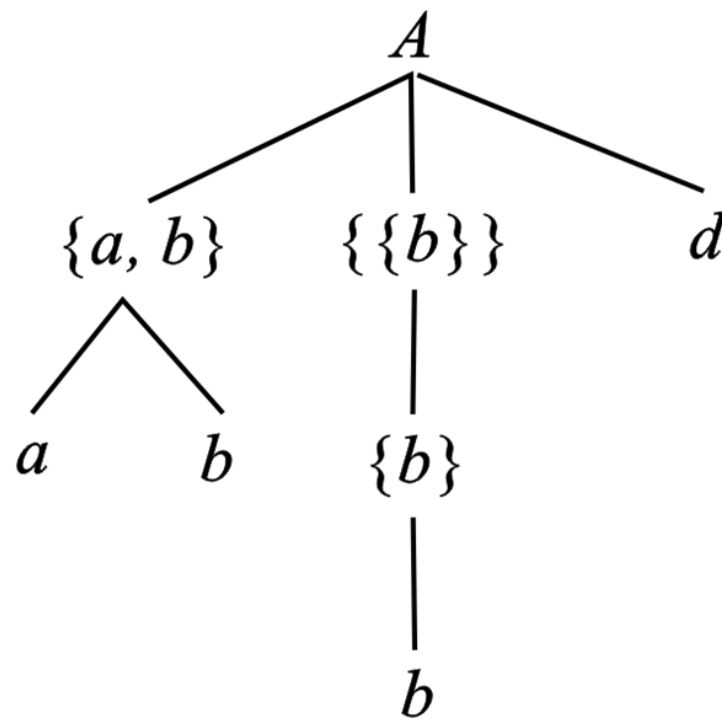
确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

任意性：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系

隶属关系： \in 或者 \notin

3. 集合的树型层次结构



$$d \in A, a \notin A$$



集合与集合之间的关系： $\subseteq, =, \not\subseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

思考： \neq 和 $\not\subseteq$ 的定义

注意 \in 和 \subseteq 是不同层次的问题



1. **定义6.4 空集** \emptyset : 不含有任何元素的集合

实例: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证 对于任意集合 A ,

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

推论 \emptyset 是惟一的

2. **定义6.5 幂集**: $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

实例: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

计数: 如果 $|A| = n$, 则 $|P(A)| = 2^n$.

3. **定义6.6 全集** E : 包含了所有集合的集合

全集具有相对性: 与问题有关, 不存在绝对的全集



初级运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

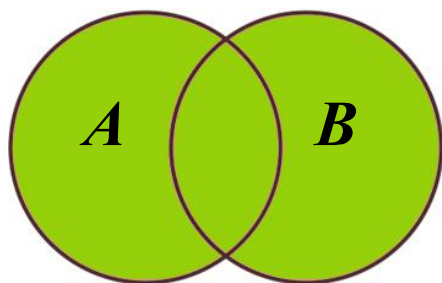
相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

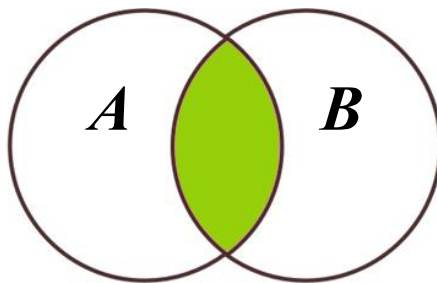
定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$



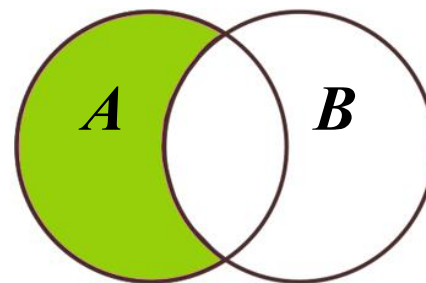
集合运算的表示



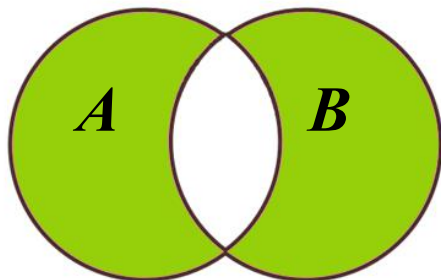
$$A \cup B$$



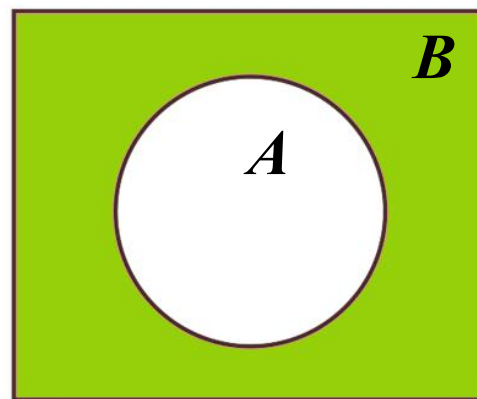
$$A \cap B$$



$$A - B$$



$$A \oplus B$$



$$\sim A$$



- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$



1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A = \{x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

广义交 $\cap A = \{x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

实例

$$\cup \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} = \{1,2,3\}$$

$$\cap \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} = \{1\}$$

$$\cup \{\{a\}\} = \{a\}, \quad \cap \{\{a\}\} = \{a\}$$

$$\cup \{a\} = a, \quad \cap \{a\} = a$$



2. 广义运算的性质

(1) $\cup \emptyset = \emptyset$, $\cap \emptyset$ 无意义

(2) 单元集 $\{x\}$ 的广义并和广义交都等于 x

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\cap \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup \{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

这里的 \mathbf{R} 代表实数集合.



1 类运算：初级运算 $\cup, \cap, -, \oplus$,
优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算和 \sim 运算,
运算由右向左进行

混合运算：2 类运算优先于1 类运算

例1 $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, 计算 $\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A)$.

解：

$$\begin{aligned} & \cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A) \\ &= \cap \{a, b\} \cup (\cup \{a, b\} - \cup \{a\}) \\ &= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a) \\ &= (a \cap b) \cup (b - a) = b \end{aligned}$$



1. 文氏图法

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合 S 上定义了 n 条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集 A_i ，那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = & |S| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

推论 S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$



例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解 方法一：文氏图

定义以下集合：

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 1000\}$$

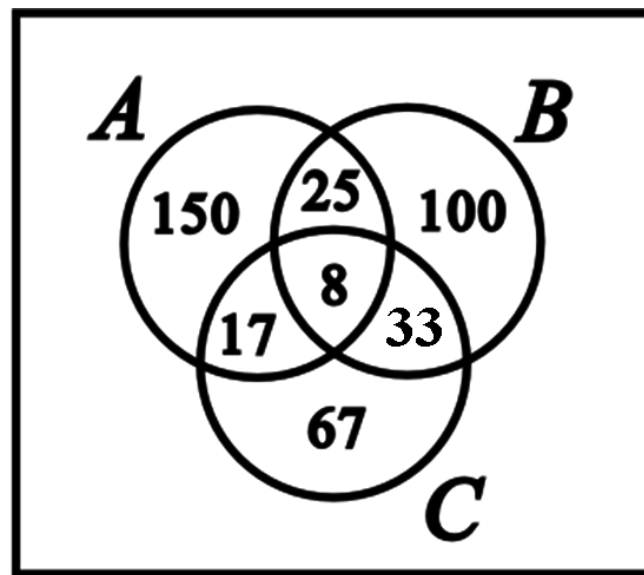
$$A = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被5整除}\}$$

$$B = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被6整除}\}$$

$$C = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被8整除}\}$$

画出文氏图，然后填入相应的数字，解得

$$\begin{aligned} N &= 1000 - (200 + 100 + 33 + 67) \\ &= 600 \end{aligned}$$





方法二

$$|S| = 1000$$

$$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200, \quad |B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166, \quad |C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$

$$|A \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$



集合算律

1. 只涉及一个运算的算律:

交换律、结合律、幂等律

	\cup	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	



2. 涉及两个不同运算的算律:

分配律、吸收律

	\cup 与 \cap	\cap 与 \oplus
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	



3. 涉及补运算的算律:

DM律，双重否定律

	$-$	\sim
<i>D.M</i>律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$



4. 涉及全集和空集的算律:

补元律、零律、同一律、否定律

	\emptyset	E
补元律	$A \cap \sim A = \emptyset$	$A \cup \sim A = E$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup E = E$
同一律	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
否定	$\sim \emptyset = E$	$\sim E = \emptyset$



证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的 X 和 Y 代表集合公式)

(1) 证 $X \subseteq Y$

任取 x , $x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证 $X=Y$

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二

任取 x , $x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的



方法一：命题演算法

例3 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取 x ,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

因此得 $A \cup (A \cap B) = A$.

例4 证明 $A - B = A \cap \sim B$

证 任取 x ,

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B \Leftrightarrow x \in A \cap \sim B \end{aligned}$$

因此得 $A - B = A \cap \sim B$



方法二：等式置换法

例5 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证	$A \cup (A \cap B)$	
	$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$	(同一律)
	$= A \cap (E \cup B)$	(分配律)
	$= A \cap (B \cup E)$	(交换律)
	$= A \cap E$	(零律)
	$= A$	(同一律)



例6 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

① ② ③ ④

证明思路：

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：① \Rightarrow ②，② \Rightarrow ③，③ \Rightarrow ④，④ \Rightarrow ①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）



$$\begin{array}{cccc} \text{证明 } A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B & \Leftrightarrow & A \cap B = A & \Leftrightarrow & A - B = \emptyset \\ \text{①} & & \text{②} & & \text{③} & & \text{④} \end{array}$$

证 ① \Rightarrow ②

显然 $B \subseteq A \cup B$, 下面证明 $A \cup B \subseteq B$.

任取 x ,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有 $A \cup B \subseteq B$. 综合上述②得证.

② \Rightarrow ③

$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$ (由②知 $A \cup B = B$, 将 $A \cup B$ 用 B 代入)



③ \Rightarrow ④

假设 $A-B \neq \emptyset$, 即 $\exists x \in A-B$, 那么知道 $x \in A$ 且 $x \notin B$. 而

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$$

从而与 $A \cap B = A$ 矛盾.

④ \Rightarrow ①

假设 $A \subseteq B$ 不成立, 那么

$$\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A-B \Rightarrow A-B \neq \emptyset$$

与条件④矛盾.



主要内容

- 集合的两种表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合：空集、全集、幂集
- 文氏图及有穷集合的计数
- 集合的 \cup , \cap , $-$, \sim , \oplus 等运算以及广义 \cup , \cap 运算
- 集合运算的算律及其应用



- 熟练掌握集合的两种表示法
- 能够判别元素是否属于给定的集合
- 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系
- 熟练掌握集合的基本运算（普通运算和广义运算）
- 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法



1. 判断下列命题是否为真

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(2) $\emptyset \in \emptyset$

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.



(1) 判断元素 a 与集合 A 的隶属关系是否成立基本方法:

把 a 作为整体检查它在 A 中是否出现, 注意这里的 a 可能是集合表达式.

(2) 判断 $A \subseteq B$ 的四种方法

- 若 A, B 是用枚举方式定义的, 依次检查 A 的每个元素是否在 B 中出现.
- 若 A, B 是谓词法定义的, 且 A, B 中元素性质分别为 P 和 Q , 那么“若 P 则 Q ”意味 $A \subseteq B$, “ P 当且仅当 Q ”意味 $A = B$.
- 通过集合运算判断 $A \subseteq B$, 即 $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$ 三个等式中有一个为真.
- 通过文氏图判断集合的包含 (注意这里是判断, 而不是证明)



2. 设

$$S_1 = \{1, 2, \dots, 8, 9\},$$

$$S_2 = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$S_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$S_4 = \{3, 4, 5\}$$

$$S_5 = \{3, 5\}$$

确定在以下条件下 X 是否与 S_1, \dots, S_5 中某个集合相等？如果是，又与哪个集合相等？

(1) 若 $X \cap S_5 = \emptyset$

(2) 若 $X \subseteq S_4$ 但 $X \cap S_2 = \emptyset$

(3) 若 $X \subseteq S_1$ 且 $X \not\subseteq S_3$

(4) 若 $X - S_3 = \emptyset$

(5) 若 $X \subseteq S_3$ 且 $X \not\subseteq S_1$



解

- (1) 和 S_5 不交的子集不含有3和5, 因此 $X=S_2$.
- (2) S_4 的子集只能是 S_4 和 S_5 . 由于与 S_2 不交, 不能含有偶数, 因此 $X=S_5$.
- (3) S_1, S_2, S_3, S_4 和 S_5 都是 S_1 的子集, 不包含在 S_3 的子集含有偶数, 因此 $X=S_1, S_2$ 或 S_4 .
- (4) $X-S_3=\emptyset$ 意味着 X 是 S_3 的子集, 因此 $X=S_3$ 或 S_5 .
- (5) 由于 S_3 是 S_1 的子集, 因此这样的 X 不存在.



3. 判断以下命题的真假，并说明理由.

(1) $A - B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$

(2) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(3) $A \oplus A = A$

(4) 如果 $A \cap B = B$ ，则 $A = E$.

(5) $A = \{x\} \cup x$ ，则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$.



- 先将等式化简或恒等变形.
- 查找集合运算的相关的算律, 如果与算律相符, 结果为真.
- 注意以下两个重要的充要条件

$$A-B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$A-B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

如果与条件相符, 则命题为真.

- 如果不符合算律, 也不符合上述条件, 可以用文氏图表示集合, 看看命题是否成立. 如果成立, 再给出证明.
- 试着举出反例, 证明命题为假.



解

- (1) $B=\emptyset$ 是 $A-B=A$ 的充分条件, 但不是必要条件. 当 B 不空但是与 A 不交时也有 $A-B=A$.
- (2) 这是 DM 律, 命题为真.
- (3) 不符合算律, 反例如下:
 $A=\{1\}$, $A\oplus A=\emptyset$, 但是 $A\neq\emptyset$.
- (4) 命题不为真. $A\cap B=B$ 的充分必要条件是 $B\subseteq A$, 不是 $A=E$.
- (5) 命题为真, 因为 x 既是 A 的元素, 也是 A 的子集



4. 证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- 分析命题：含有3个命题：

$$A \cup B = A \cup C, \quad A \cap B = A \cap C, \quad B = C$$

①

②

③

- 证明要求

前提：命题①和②

结论：命题③

- 证明方法：

恒等式代入

反证法

利用已知等式通过运算得到新的等式



方法一：恒等变形法

$$\begin{aligned} B &= B \cap (B \cup A) = B \cap (A \cup B) \\ &= B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ &= (A \cup C) \cap C = C \end{aligned}$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$, 则存在 x ($x \in B$ 且 $x \notin C$), 或存在 x ($x \in C$ 且 $x \notin B$).
不妨设为前者.

若 x 属于 A , 则 x 属于 $A \cap B$ 但 x 不属于 $A \cap C$, 与已知矛盾;
若 x 不属于 A , 则 x 属于 $A \cup B$ 但 x 不属于 $A \cup C$, 也与已知矛盾.



方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式。
由已知等式①和②可以得到

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$$

即

$$A \oplus B = A \oplus C$$

从而有

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

根据结合律得

$$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$$

由于 $A \oplus A = \emptyset$, 化简上式得 $B = C$.



5. 设 A, B 为集合, 试确定下列各式成立的充分必要条件:

(1) $A - B = B$

(2) $A - B = B - A$

(3) $A \cap B = A \cup B$

(4) $A \oplus B = A$



解题思路:

求解集合等式成立的充分必要条件可能用到集合的算律、不同集合之间的包含关系、以及文氏图等. 具体求解过程说明如下:

(1) 化简给定的集合等式

(2) 求解方法如下:

- 利用已知的算律或者充分必要条件进行判断
- 先求必要条件, 然后验证充分性
- 利用文氏图的直观性找出相关的条件, 再利用集合论的证明方法加以验证



解

(1) $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\emptyset$. 求解过程如下:

由 $A-B=B$ 得

$$(A \cap \sim B) \cap B = B \cap B$$

化简得 $B=\emptyset$. 再将这个结果代入原来的等式得 $A=\emptyset$. 从而得到必要条件 $A=B=\emptyset$.

再验证充分性. 如果 $A=B=\emptyset$ 成立, 则 $A-B=\emptyset=B$ 也成立.

(2) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下:

充分性是显然的, 下面验证必要性. 由 $A-B=B-A$ 得

$$(A-B) \cup A = (B-A) \cup A$$

从而有 $A=A \cup B$, 即 $A \subseteq B$. 同理可证 $B \subseteq A$.



(3) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$. 求解过程如下:

充分性是显然的, 下面验证必要性. 由 $A \cap B = A \cup B$ 得

$$A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B)$$

化简得 $A = A \cup B$, 从而有 $A \subseteq B$. 类似可以证明 $B \subseteq A$.

(4) $A \oplus B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$. 求解过程如下:

充分性是显然的, 下面验证必要性. 由 $A \oplus B = A$ 得

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus A$$

根据结合律有

$$(A \oplus A) \oplus B = A \oplus A$$

即 $\emptyset \oplus B = \emptyset$, 就是 $B = \emptyset$.