简约而不简单——二分法的四重境界

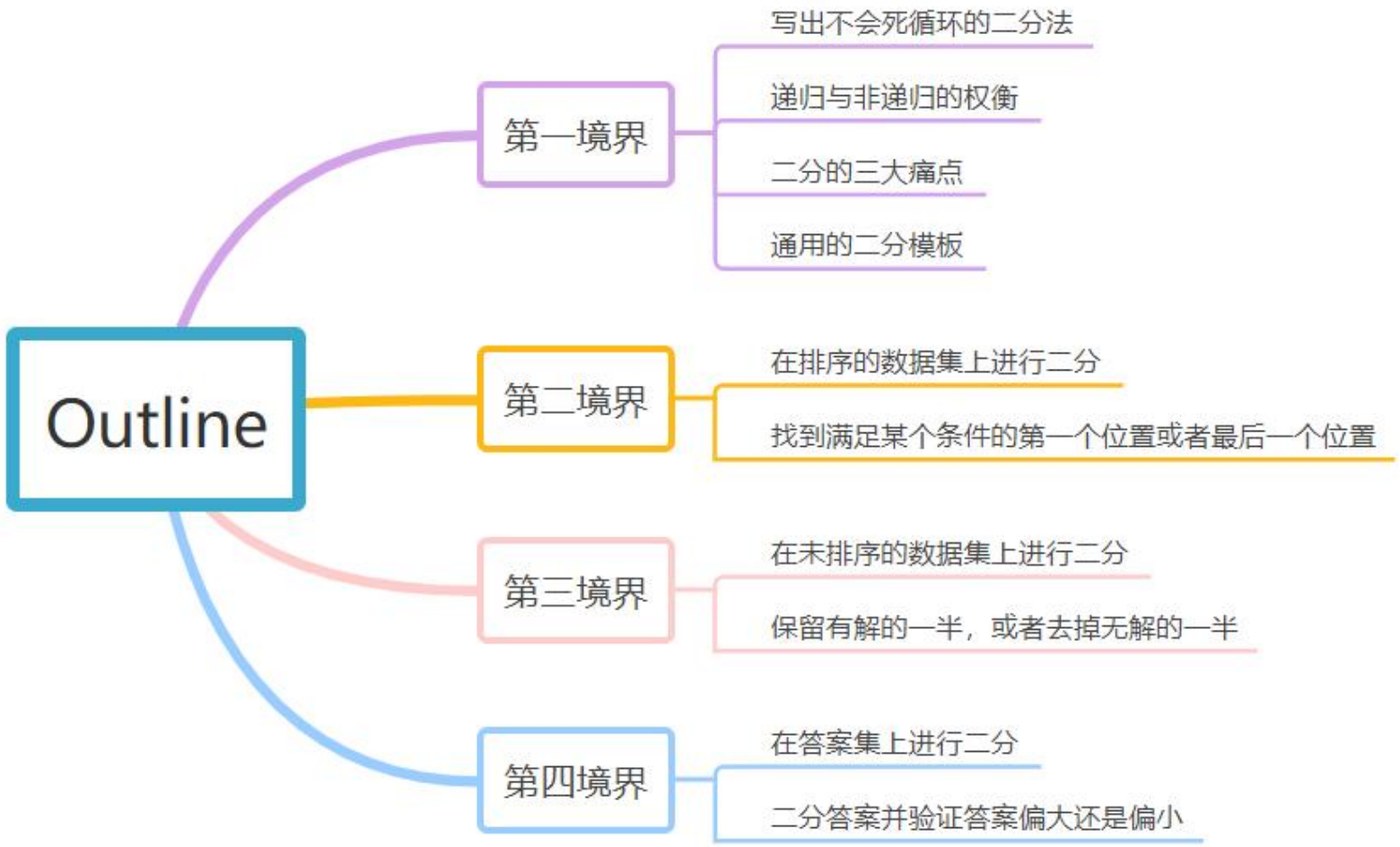
主讲人 令狐冲
课程版本 v7.0

版权声明

九章的所有课程均受法律保护，不允许录像与传播录像

一经发现，将被追究法律责任和赔偿经济损失

Outline



常见的面试时间复杂度和对应的算法

- O(logn) 二分法比较多
- O(√n) 分解质因数（极少）
- O(n) 双指针，单调栈，枚举法
- O(nlogn) 排序, O(n * logn 的数据结构上的操作)
- O(n^2), O(n^3)，动态规划等
- O(2^n)，组合类的搜索问题
- O(n!) 排列类的搜索问题

独孤九剑 —— 破刀式

根据时间复杂度倒推算法是面试常用策略

如： 比O(n)更优的时间复杂度只能是O(logn)的二分法

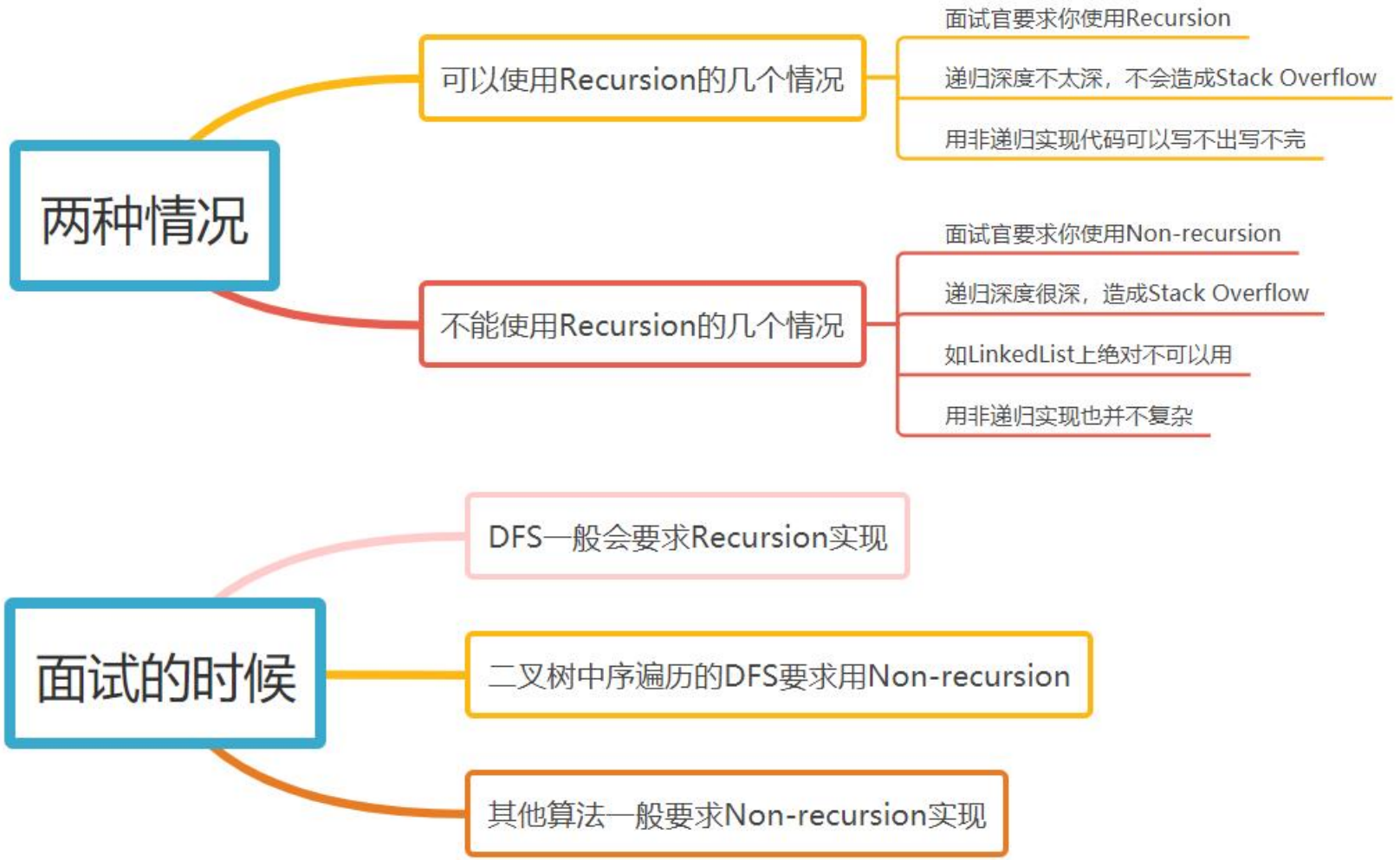
Recursion or While Loop?

R: Recursion

W: While loop

B: Both work

Recursion or Non-Recursion(Iteration)



第一境界
写出不会死循环的二分法

http://www.jiuzhang.com/solutions/binary-search/

start + 1 < end

start + (end - start) / 2

A[mid] ==, <, >

A[start] A[end] ? target

二分法常见痛点

又死循环了!
what are you 弄撒捏!

循环结束条件到底是哪个？！

start <= end

start < end

start + 1 < end

指针变化到底是哪个?

start = mid

start = mid + 1

start = mid - 1

```python
def binarySearch(self, nums, target):
    if not nums:
        return -1

    start, end = 0, len(nums) - 1
    # 用 start + 1 < end 而不是 start < end 的目的是为了避免死循环
    # 在 first position of target 的情况下不会出现死循环
    # 但是在 last position of target 的情况下会出现死循环
    # 样例：nums=[1，1] target = 1
    # 为了统一模板，我们就都采用 start + 1 < end，就保证不会出现死循环
    while start + 1 < end:
        # python 没有 overflow 的问题，直接 // 2 就可以了
        # java和C++ 最好写成 mid = start + (end - start) / 2
        # 防止在 start = 2^31 - 1, end = 2^31 - 1 的情况下出现加法 overflow
        mid = (start + end) // 2

        # > , =, < 的逻辑先分开写，然后在看看 = 的情况是否能合并到其他分支里
        if nums[mid] < target:
            # 写作 start = mid + 1 也是正确的
            # 只是可以偷懒不写，因为不写也没问题，不会影响时间复杂度
            # 不写的好处是，万一你不小心写成了 mid - 1 你就错了
            start = mid
        elif nums[mid] == target:
            end = mid
        else:
            # 写作 end = mid - 1 也是正确的
            # 只是可以偷懒不写，因为不写也没问题，不会影响时间复杂度
            # 不写的好处是，万一你不小心写成了 mid + 1 你就错了
            end = mid

    # 因为上面的循环退出条件是 start + 1 < end
    # 因此这里循环结束的时候，start 和 end 的关系是相邻关系（1和2，3和4这种）
    # 因此需要再单独判断 start 和 end 这两个数谁是我们要的答案
    # 如果是找 first position of target 就先看 start，否则就先看 end
    if nums[start] == target:
        return start
    if nums[end] == target:
        return end

    return -1
```

```java
public int binarySearch(int[] nums, int target) {
    if (nums == null || nums.length == 0) {
        return -1;
    }

    int start = 0, end = nums.length - 1;
    // 用 start + 1 < end 而不是 start < end 的目的是为了避免死循环
    // 在 first position of target 的情况下不会出现死循环
    // 但是在 last position of target 的情况下会出现死循环
    // 样例：nums=[1，1] target = 1
    // 为了统一模板，我们就都采用 start + 1 < end，就保证不会出现死循环
    while (start + 1 < end) {
        // python 没有 overflow 的问题，直接 // 2 就可以了
        // java和C++ 最好写成 mid = start + (end - start) / 2
        // 防止在 start = 2^31 - 1, end = 2^31 - 1 的情况下出现加法 overflow
        int mid = start + (end - start) / 2;

        // > , =, < 的逻辑先分开写，然后在看看 = 的情况是否能合并到其他分支里
        if (nums[mid] < target) {
            // 写作 start = mid + 1 也是正确的
            // 只是可以偷懒不写，因为不写也没问题，不会影响时间复杂度
            // 不写的好处是，万一你不小心写成了 mid - 1 你就错了
            start = mid;
        } else if (nums[mid] == target) {
            end = mid;
        } else {
            // 写作 end = mid - 1 也是正确的
            // 只是可以偷懒不写，因为不写也没问题，不会影响时间复杂度
            // 不写的好处是，万一你不小心写成了 mid + 1 你就错了
            end = mid;
        }
    }

    // 因为上面的循环退出条件是 start + 1 < end
    // 因此这里循环结束的时候，start 和 end 的关系是相邻关系（1和2，3和4这种）
    // 因此需要再单独判断 start 和 end 这两个数谁是我们要的答案
    // 如果是找 first position of target 就先看 start，否则就先看 end
    if (nums[start] == target) {
        return start;
    }
    if (nums[end] == target) {
        return end;
    }
    return -1;
}
```

死循环的发生

Last Position of Target

nums = [1,1], target = 1

使用 start < end 无论如何都会出现死循环

任意位置 vs 第一个位置 vs 最后一个位置

http://www.lintcode.com/problem/classical-binary-search/

http://www.lintcode.com/problem/first-position-of-target/

http://www.lintcode.com/problem/last-position-of-target/

Search In a Big Sorted Array

http://www.lintcode.com/problem/search-in-a-big-sorted-array/

http://www.jiuzhang.com/solutions/search-in-a-big-sorted-array/

大小未知的排序数组中找 target 出现的位置

无法直接确定二分右边界怎么办?

倍增法
Exponential Backoff

使用到倍增思想的场景：

动态数组（ArrayList in Java, vector in C++)

网络重试

```python
def searchBigSortedArray(self, reader, target):
    kth = 1
    while reader.get(kth - 1) < target:
        kth = kth * 2

    # start 也可以是 kth // 2，但是我习惯比较保守的写法
    # 因为写为 0 也不会影响时间复杂度
    start, end = 0, kth - 1
    while start + 1 < end:
        mid = start + (end - start) // 2
        if reader.get(mid) < target:
            start = mid
        else:
            end = mid
    if reader.get(start) == target:
        return start
    if reader.get(end) == target:
        return end
    return -1
```

```java
public int searchBigSortedArray(ArrayReader reader, int target) {
    int kth = 1;
    while (reader.get(kth - 1) < target) {
        kth = kth * 2;
    }

    // start 也可以是 kth / 2，但是我习惯比较保守的写法
    // 因为写为 0 也不会影响时间复杂度
    int start = 0, end = kth - 1;
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (reader.get(mid) < target) {
            start = mid;
        } else {
            end = mid;
        }
    }
    if (reader.get(start) == target) {
        return start;
    }
    if (reader.get(end) == target) {
        return end;
    }
    return -1;
}
```

为什么没有三分法?
Trinary Search

时间复杂度上会不会更好?

实际运行速度上会不会更快?

分的越多，系数越大

三分法实现起来更加复杂

时间复杂度是一样的

实际运行速度反而更慢了

第二境界 OOXX
在排序的数据集上进行二分

一般会给你一个数组

让你找数组中第一个/最后一个满足某个条件的位置

OOOOOOO...OOXX....XXXXXX

Find K Closest Elements

http://www.lintcode.com/problem/find-k-closest-elements/

http://www.jiuzhang.com/solutions/find-k-closest-elements/

排序数组中找离 target 最接近的 k 个整数

如何提高代码的可读性?

```python
def kClosestNumbers(self, A, target, k):
    # 找到 A[left] < target, A[right] >= target
    # 也就是最接近 target 的两个数，他们肯定是相邻的
    right = self.findUpperClosest(A, target)
    left = right - 1

    # 两根指针从中间往两边扩展，依次找到最接近的 k 个数
    results = []
    for _ in range(k):
        if self.isLeftCloser(A, target, left, right):
            results.append(A[left])
            left -= 1
        else:
            results.append(A[right])
            right += 1

    return results
```

```python
def findUpperClosest(self, A, target):
    # find the first number >= target in A
    start, end = 0, len(A) - 1
    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if A[mid] >= target:
            end = mid
        else:
            start = mid

    if A[start] >= target:
        return start

    if A[end] >= target:
        return end

    # 找不到的情况
    return len(A)
```

```python
def isLeftCloser(self, A, target, left, right):
    if left < 0:
        return False
    if right >= len(A):
        return True
    return target - A[left] <= A[right] - target
```

```java
public int[] kClosestNumbers(int[] A, int target, int k) {
    // 找到 A[left] < target, A[right] >= target
    // 也就是最接近 target 的两个数，他们肯定是相邻的
    int right = findUpperClosest(A, target);
    int left = right - 1;

    // 两根指针从中间往两边扩展，依次找到最接近的 k 个数
    int[] results = new int[k];
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (isLeftCloser(A, target, left, right)) {
            results[i] = A[left];
            left -= 1;
        } else {
            results[i] = A[right];
            right += 1;
        }
    }

    return results;
}
```

```java
private int findUpperClosest(int[] A, int target) {
    // find the first number >= target in A
    int start = 0, end = A.length - 1;
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (A[mid] >= target) {
            end = mid;
        } else {
            start = mid;
        }
    }

    if (A[start] >= target) {
        return start;
    }

    if (A[end] >= target) {
        return end;
    }

    // 找不到的情况
    return A.length;
}
```

```java
private boolean isLeftCloser(int[] A, int target, int left, int right) {
    if (left < 0) {
        return false;
    }
    if (right >= A.length) {
        return true;
    }
    return (target - A[left]) <= (A[right] - target);
}
```

Maximum Number in Mountain Sequence

http://www.lintcode.com/problem/maximum-number-in-mountain-sequence/

http://www.jiuzhang.com/solutions/maximum-number-in-mountain-sequence/

在先增后减的序列中找最大值

直接用for循环, O(n)太过复杂

比O(n)更快　　复杂度 - O(nlogn) 二分

假设山峰及右边部分为X, 山峰左边部分为O

那么X的条件是什么?

```python
class Solution:
    """
    @param nums: a mountain sequence which increase firstly and then decrease
    @return: then mountain top
    """
    def mountainSequence(self, nums):
        if not nums:
            return -1

        # find first index i so that nums[i] > nums[i + 1]
        start, end = 0, len(nums) - 1
        while start + 1 < end:
            mid = (start + end) // 2
            # mid + 1 保证不会越界
            # 因为 start 和 end 是 start + 1 < end
            if nums[mid] > nums[mid + 1]:
                end = mid
            else:
                start = mid

        return max(nums[start], nums[end])
```

```java
public class Solution {
    /**
     * @param nums: a mountain sequence which increase firstly and then decrease
     * @return: then mountain top
     */
    public int mountainSequence(int[] nums) {
        if (nums == null || nums.length == 0) {
            return -1;
        }

        // find first index i so that nums[i] > nums[i + 1]
        int start = 0, end = nums.length - 1;
        while (start + 1 < end) {
            int mid = (start + end) / 2;
            // mid + 1 保证不会越界
            // 因为 start 和 end 是 start + 1 < end
            if (nums[mid] > nums[mid + 1]) {
                end = mid;
            } else {
                start = mid;
            }
        }

        return Math.max(nums[start], nums[end]);
    }
}
```

休息 5 分钟

Take a break

Find Minimum in Rotated Sorted Array

http://www.lintcode.com/problem/find-minimum-in-rotated-sorted-array/

http://www.jiuzhang.com/solutions/find-minimum-in-rotated-sorted-array/

右半部分的条件

A: < 第一个数

B: <= 最后一个数

建立OOXX模型

将左半边有序数组看做O, 将右半边有序数组看做X

可以把最后一个数当成target，找最后一个小于等于target的位置

```python
def findMin(self, nums):
    if not nums:
        return -1

    start, end = 0, len(nums) - 1
    target = nums[-1]

    # find the first element <= target
    while start + 1 < end: # 用来控制区间大小
        mid = (start + end) // 2
        if nums[mid] <= target: # 如果mid位置上的数字小于等于最右端的数字时，区间向左移动
            end = mid
        else:
            start = mid

    return min(nums[start], nums[end]) # 最终返回start和end位置上较小的数字即可
```

```java
public int findMin(int[] nums) {
    if (nums == null || nums.length == 0) {
        return -1;
    }

    int start = 0, end = nums.length - 1;
    int target = nums[nums.length - 1];

    // find the first element <= target
    while (start + 1 < end) {           //用来控制区间大小
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (nums[mid] <= target) {      //如果mid位置上的数字小于等于最右端的数字时，区间向左移动
            end = mid;
        } else {
            start = mid;
        }
    }
    return Math.min(nums[start], nums[end]);  //最终返回start和end位置上较小的数字即可

}
```

Follow up: 如果有重复的数?

可以证明，无法保证在 Log(N) 的时间复杂度内解决

例子：[1,1,1,1,1….,1] 里藏着一个0

最坏情况下需要把每个位置上的1都看一遍，才能找到最后一个有0的位置

考点：能否想到这个最坏情况的例子

不是写代码！不是写代码！不是写代码！

Search in Rotated Sorted Array

http://www.lintcode.com/problem/search-in-rotated-sorted-array/

http://www.jiuzhang.com/solutions/search-in-rotated-sorted-array/

在旋转数组中找到一个数的位置

方法1：实现简单

如何利用 Find Minimum 来解决这道题？

方法1：实现简单

做两次二分

第一次找到最小值

然后在最小值左侧或者右侧去找 target

用两次二分


```python
def search(self, A, target):
    if not A:
        return -1

    index = self.find_min_index(A)
    if A[index] <= target <= A[-1]:
        return self.binary_search(A, index, len(A) - 1, target)
    return self.binary_search(A, 0, index - 1, target)

def find_min_index(self, A):
    start, end = 0, len(A) - 1
    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if A[mid] < A[end]:
            end = mid
        else:
            start = mid

    if A[start] < A[end]:
        return start
    return end
```

```python
def binary_search(self, A, start, end, target):
    if end < 0 :
        end += len(A)
    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if A[mid] < target:
            start = mid
        else:
            end = mid
    if A[start] == target:
        return start
    if A[end] == target:
        return end
    return -1
```

用两次二分


```java
public int search(int[] A, int target) {
    if (A == null || A.length == 0) {
        return -1;
    }

    int index = findMinIndex(A);
    if (A[index] <= target && target <= A[A.length - 1]) {
        return binarySearch(A, index, A.length - 1, target);
    }

    return binarySearch(A, 0, index - 1, target);
}

private int findMinIndex(int[] A) {
    int start = 0, end = A.length - 1;
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (A[mid] < A[end]) {
            end = mid;
        } else {
            start = mid;
        }
    }

    if (A[start] < A[end]) {
        return start;
    }
    return end;
}
```

```java
private int binarySearch(int[] A, int start, int end, int target) {
    if (end < 0) {
        end += A.length;
    }
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (A[mid] < target) {
            start = mid;
        } else {
            end = mid;
        }
    }

    if (A[start] == target) {
        return start;
    }
    if (A[end] == target) {
        return end;
    }
    return -1;
}
```

如果面试官继续纠缠

面试官：刚才这个题你写得太快了不算

面试官：你能否只用一次二分就解决这个问题？

(答出来可以拿到 Strong Hire，答不出来也没关系)

方法2：加大难度

在一个Rotated Sorted Array上切一刀
可以判断出这一刀切在左半部分还是右半部分
这一刀的两边仍然是Rotated Sorted Array

用一次二分


```python
def search(self, A, target):
    if not A:
        return -1

    start, end = 0, len(A) - 1
    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if A[mid] >= A[start]:
            if A[start] <= target <= A[mid]:
                end = mid
            else:
                start = mid
        else:
            if A[mid] <= target <= A[end]:
                start = mid
            else:
                end = mid

    if A[start] == target:
        return start
    if A[end] == target:
        return end
    return -1
```

```java
public int search(int[] A, int target) {
    if (A == null || A.length == 0) {
        return -1;
    }

    int start = 0, end = A.length - 1;
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (A[mid] >= A[start]) {
            if (A[start] <= target && target <= A[mid]) {
                end = mid;
            } else {
                start = mid;
            }
        } else {
            if (A[mid] <= target && target <= A[end]) {
                start = mid;
            } else {
                end = mid;
            }
        }
    }

    if (A[start] == target) {
        return start;
    }
    if (A[end] == target) {
        return end;
    }
    return -1;
}
```

第三境界
在未排序的数据集上进行二分

并无法找到一个条件，形成 XXOO 的模型

但可以根据判断，保留下有解的那一半或者去掉无解的一半

Find Peak Element

http://www.lintcode.com/problem/find-peak-element/

http://www.jiuzhang.com/solutions/find-peak-element/

follow up: Find Peak Element II (by 高频题冲刺班)

如果求的是最高峰或所有峰，复杂度都不可能低于O(n)

上升区间右侧必有峰

下降区间左侧必有峰

谷的两边都有峰

```python
def findPeak(self, A):
    # write your code here
    start, end = 1, len(A) - 2
    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if A[mid] < A[mid - 1]:
            end = mid
        elif A[mid] < A[mid + 1]:
            start = mid
        else:
            return mid

    if A[start] < A[end]:
        return end
    else:
        return start
```

```java
public int findPeak(int[] A) {
    int start = 1, end = A.length - 2;
    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (A[mid] < A[mid - 1]) {
            end = mid;
        } else if (A[mid] < A[mid + 1]) {
            start = mid;
        } else {
            return mid;
        }
    }

    if (A[start] < A[end]) {
        return end;
    } else {
        return start;
    }
}
```

第四境界
在答案集上进行二分

第一步：确定答案范围

第二步：验证答案大小

Wood Cut

https://www.lintcode.com/problem/wood-cut/

https://www.jiuzhang.com/solution/wood-cut/

将一些原木切成 k 段等长小木头，求小木头最长是多少

为什么可以二分

如果能切出k段长度为length的小木头，一定能切出k段更短的小木头

如果能切不出k段长度为length的小木头，一定切不出k段更长的小木头

小木头的长度不可能比最长原木更长

小木头的长度不可能比所有原木总和除k更长

L = [232, 124, 456]

length	1	2	3	...	113	114	115	116	...
k	812	406	270	...	7	7	6	6	...

```python
def woodCut(self, L, k):
    if not L:
        return 0

    start, end = 1, min(max(L), sum(L) // k)
    if start > end:
        return 0

    while start + 1 < end:
        mid = (start + end) // 2
        if self.get_pieces(L, mid) >= k:
            start = mid
        else:
            end = mid

    if self.get_pieces(L, end) >= k:
        return end
    if self.get_pieces(L, start) >= k:
        return start

    return 0

# O(n)
def get_pieces(self, L, length):
    return sum(l // length for l in L)
```

```java
public int woodCut(int[] L, int k) {
    if (L == null || L.length == 0) {
        return 0;
    }

    long maxValue = 0, sumValue = 0;
    for (int i = 0; i < L.length; i++) {
        sumValue += L[i];
        maxValue = Math.max(maxValue, L[i]);
    }

    int start = 1, end = (int)Math.min(maxValue, sumValue / k);
    if (start > end) {
        return 0;
    }

    while (start + 1 < end) {
        int mid = start + (end - start) / 2;
        if (getPieces(L, mid) >= k) {
            start = mid;
        } else {
            end = mid;
        }
    }

    if (getPieces(L, end) >= k) {
        return end;
    }
    if (getPieces(L, start) >= k) {
        return start;
    }

    return 0;
}

// O(n)
private long getPieces(int[] L, int length) {
    long reslut = 0;
    for (int i = 0; i < L.length; i++) {
        reslut += L[i] / length;
    }
    return reslut;
}
```

Thank You

Q & A