

## Лабораторная работа №3

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения с учетом следующих требований:

- формат матрицы – **профильный**;
- размерность матрицы, элементы матрицы и вектор правой части читать из файлов<sup>1</sup>, результаты записывать в файл;
- в программе резервировать объём памяти, необходимый для хранения в нем только одной матрицы и необходимого числа векторов (то есть треугольные матрицы, полученные в результате разложения, должны храниться на месте исходной матрицы);
- элементы матрицы обрабатывать в порядке, соответствующем формату хранения, то есть необходимо работать именно со столбцами верхнего и строками нижнего треугольников.

2. Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ:

$$A_k x_k = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где матрицы  $A_k$  строятся следующим образом:

$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij}, & i > 1 \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k}, & i = 1 \end{cases}$$

и  $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$  выбираются достаточно произвольно, а правая часть  $f_k$  получается умножением матрицы  $A_k$  на вектор  $x^* = (1, \dots, n)$ . Размерность  $n$  для СЛАУ выбирать от 10 до  $10^3$ .

Для каждого  $k$ , для которого система (1) вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения. Исследования представить в виде следующей таблицы:

---

<sup>1</sup> Предварительно необходимо написать отдельный генератор матрицы в требуемом формате. Далее полученные структуры матрицы, вектор правой части и точного решения записываются в файлы. Для каждого теста создавать отдельную директорию. При запуске метода решения выбирается директория, из которой будут считываться данные.

$n$	$k$	$\ x^* - x_k\ $	$\ x^* - x_k\ /\ x^*\ $

Для одного из значений  $k$  попытаться найти операцию, вызывающую скачкообразное накопление погрешности, пояснить полученные результаты.

3. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности. Матрица Гильберта размерности  $k$  строится следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для **плотных матриц**. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU-разложения.

5. **Бонусное задание.** Реализовать метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ, матрица которых хранится в **разреженном строчно-столбцовом формате** и является симметричной.

Точность решения СЛАУ задавать как минимум  $1e^{-7}$ .

5.1. Протестировать разработанную программу. Для тестирования использовать матрицы небольшой размерности, при этом вектор правой части формировать умножением тестовой матрицы на заданный вектор.

5.2. Провести исследование реализованного метода на матрице с диагональным преобладанием, построенной следующим образом:

$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij}, & i > 1 \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 1, & i = 1, \end{cases}$$

и  $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$  выбираются достаточно произвольно, а правая часть  $f$  получается умножением матрицы  $A$  на вектор  $x^* = (1, \dots, n)$ . Размерность  $n$  для СЛАУ выбирать от 10 до  $10^5$ .

Построить таблицу:

$n$	Количество итераций	$\ x^* - x_k\ $	$\ x^* - x_k\ /\ x^*\ $	$cond(A)$

Для каждого полученного решения с помощью невязки и погрешности оценить число обусловленности  $cond(A) \geq \frac{\|x - x^*\|}{\|x^*\|} / \frac{\|f - Ax\|}{\|f\|}$ .

5.3. Провести аналогичные (п. 5.2) исследования на матрице с обратным знаком внедиагональных элементов.

5.4. Повторить аналогичные (п. 5.2) исследования для плотной матрицы Гильберта для различных размерностей (размерность  $n$  для СЛАУ выбирать от 10 до  $10^3$ ).

#### **Требования к программному коду (вычислительные алгоритмы)**

1. Рекомендуется использовать языки программирования: C++, C#, Java.
2. Рекомендуется придерживаться основных положений ООП при разработке.
3. Рекомендуется выполнять документирование программного кода.

#### **Оценка результатов**

<i>Задание</i>	<i>Результат (в виде коэффициента)</i>
Сдача в срок	0.15
Основные численные результаты, выводы, защита	0.0 – 0.55
Программная реализация и индивидуальный код	0.0 – 0.25
Грамотность изложения и общее качество отчета	0.0 – 0.05
Дополнительное задание	0.3

Срок сдачи третьей лабораторной работы – до 14.05.2021 (включительно).