Trabajo Autónomo

Alumno: Dennys Alexander Pucha Carrera

Fecha: 16-08-2023

Curso: 4to ciclo "A"

• Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales como:

a. $y' + y = t \operatorname{sen} t,\ y(0) = 0$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$(s+1)\,Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \qquad Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2(s+1)}$$

$$\frac{2s}{(s^2+1)^2(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{Ds+E}{(s^2+1)^2}$$

$2s = A(s^2+1)^2 + (Bs+C)(s+1)(s^2+1) + (Ds+E)(s+1)$

$s \to -1 \quad -2 = 4A \to A = -1/2$

$s^4 \quad 0 = A + B \to B = 1/2$

$s^3 \quad 0 = B + C \to C = -1/2$

$s^2 \quad 0 = 2A + B + C + D \to D = 1$

$s^1 \quad 2 = B + C + D + E \to E = 1$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2(s+1)} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2\,s}{s^2+1} + \frac{-1/2}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$y(t) = -1/2\, e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - 1/2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}(1 - t\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{1}{2}(1 - t\operatorname{sen} t) - \frac{1}{2}(t \operatorname{sen} t) = y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t$$

b. $y' - y = t e^t \operatorname{sen} t,\ y(0) = 0$

$$s\,Y(s) - y(0) - Y(s) = -(1)^1 \frac{d}{ds} \frac{1}{(s-1)^2+1} = -\frac{(2(s-1))}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$(s-1) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{2}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{s(s-2)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$\frac{(s-1)^2 + 1 - s(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{s^2 - 2s + 2 - s^2 + s}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$\frac{s(s-2)}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{-[(s-1)^2 + 1 - (s-1)(s+1)]}{[(s-1)^2+1]^2} = -\frac{(s^2 - 2s - 2 - 2s^2 + 1 - 2)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$= \frac{-(-s^2-2s)}{[(s-1)^2+1]^2} = \frac{s(s-2)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$y(t) = e^t \sin t - te^t \cos t_{//}$$

c. $y'' + 9y = \cos 3t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 9\,Y(s) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$(s^2+9)\ Y(s) = \frac{s}{s^2+9} + 2s + 5$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+9)^2} + \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s^2+9}$$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{-d}{ds} \cdot \frac{3}{s^2+9} + \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s^2+9}.$$

$$y(t) = \frac{1}{6}\ t \sin 3t + 2 \cos 3t + \frac{5}{3} \sin 3t_{//}$$

d. $y'' + y = \operatorname{sen} t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+1) = \frac{1}{s^2+1} + s - 1 \qquad Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{s} \cdot \frac{-d}{ds} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \qquad y(t) = \frac{1}{2}\ (t \cdot t \operatorname{sen} t) \cdot \cos t - \operatorname{sen} t$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t u \operatorname{sen} u\,(t-u)^0\, du + \cos t - \operatorname{sen} t$$

$$= \frac{1}{2}\ (t \cdot \cos t + \operatorname{sen} t) + \cos t - \operatorname{sen} t$$

$$= \frac{-1}{2}\ t \cos t + \cos t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t_{//}$$

• Consultar un ejemplo sobre aplicación de ecuaciones diferenciales con la transformada de laplace y desarrollar:

a. Describir el problema

b. Identificar la ecuación diferencial aplicada.

c. Describir el procedimiento de solución aplicando de la transformada de laplace.

Transformada de laplace, Polos y Ceros en Análisis de Respuesta de frecuencia

- Descripción

Es una técnica donde una señal de prueba sinusoidal de entrada es usada para medir y obtener información relevante del sistema lineal que se está estudiando. Específicamente se usa la transformada de laplace para la transformación de ecuaciones diferenciales que modelan la frecuencia de entrada y salida de dispositivos eléctricos.

- Ecuación diferencial aplicada.

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_0 u$$

- Procedimiento

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$P(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

Función de transferencia $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} ; \quad v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$v(s) = \frac{1}{Cs} I(s) ; \quad Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Impedancia del capacitor: $Z(j\omega) = \dfrac{1}{Cj\omega}$