Teorema de Bayes

El teorema de Bayes refleja una interpretación muy diferente sobre las probabilidades que nosotros obtenemos de sucesos aleatorios.

Entendamos primero de que se trata el teorema de Bayes.

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{posteriori}} = \frac{\overbrace{P(A)}^{priori} \quad \overbrace{P(B|A)}^{\text{verosimilitud}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{evidencia}}}$$

El teorema de Bayes está compuesto de 4 partes fundamentales:

1. **Probabilidades a priori:**
   Representan la probabilidad que es el reflejo de la creencia inicial que tengo de sucesos u ocurrencias de una variable aleatoria. Pero no necesariamente la creencia inicial refleja la realidad como se ha visto en clases pasadas.
2. **Evidencia:**
   Son la "evidencia" que me dan los experimentos de la vida real, además modifican las probabilidades reales.
3. **Verosimilitud:**
   Entonces el teorema de Bayes dice que la evidencia debe estar condicionada por las probabilidades que yo pensaba de los eventos u ocurrencias de una variable aleatoria. Por que es una probabilidad de obtener esa evidencia dada una creencia inicial A de los eventos.
4. **Posteriori:**
   Cual es la probabilidad de que yo observe los eventos A dada la evidencia B, de esta manera el teorema de Bayes lo que hace es: actualizar o modificar - mejorar mi creencia inicial sobre las probabilidades de un evento aleatorio.

Esto es muy importante porque esto corrige el problema del pensamiento frecuentista de que las probabilidades no coinciden con las probabilidades teóricas que yo tenía. En este caso:

- $P(A):$ Probabilidad teórica.

Ejemplo:

Test medico: mamografia (sensitividad 80%)

El dispositivo detector tiene una sensitividad de 80%. ¿Que quiere decir esto? en términos probabilísticos, la probabilidad de:

Sabiendo tu que tienes cancer $y = 1$ ¿cual es la probabilidad de que el dispositivo de positivo $x = 1$

$$P(x = 1|y = 1) = 80\% = 0.8$$

Este problema tiene algo que es un poco complicado de entender, porque te hablan de sensitividad; quiere decir que hablan sobre casos que están verificados, probablemente para verificar la eficiencia del aparato.

¿cómo se pudo haber hecho? tomaron un conjunto de pacientes que ya tenían cancer y usan el aparato para ver que tan efectivo es el aparato en detectar el cancer.
Lo que quiere decir es que de esa muestra de pacientes que todos tenían cancer, el dispositivo fue capaz de detectar solamente el 80%.

El parámetro es un poco engañoso, porque uno puede pensar que es parámetro es la probabilidad de tener cancer, pero hay un error muy importante y a eso se le llama **falacia** en probabilidad. Esto significa que se esta ignorando el conocimiento previo de la creencia inicial priori de lo que es realmente tener cancer.

Si nosotros dejamos de lado el uso de un dispositivo de detección de cancer para la mamografia. La probabilidad de tener cancer, solo cancer sin ningún conocimiento previo o condición es distinta. Veasmolo en un ejemplo de pizarrón.

$$\begin{array}{ccl} y & \rightarrow & \text{cancer} \\ x & \rightarrow & \text{examen} \end{array}$$

Las estadísticas pueden decir que la probabilidad de que una persona tenga cancer es $P(y = 1) = 0.004$ sin embargo pueden existir falsos positivos, es decir la persona o el medico sabía que no tenia cancer pero el aparato dio positivo (A esto le llamamos falso positivo) $P(x = 1|y = 0) = 0.1$ del 10%. Entonces nosotros ya tenemos:

- Evidencia
- $p(x = 1|y = 1) = 0.8$ Verosimilitud
- $p(y = 1) = 0.004$ Priori o creencia inicial

Es decir tenemos que buscar la probabilidad de que sabiendo que el examen dió positivo $x = 1$ yo realmente tenga cancer $y = 1$, se traduce a $P(x = 1|y = 1)$

$$p(y = 1|x = 1) = \frac{p(y = 1)p(x = 1|y = 1)}{p(x = 1)}$$

En la expresión tenemos los elementos:

- **priori:** $p(y = 1)$
- **verosimilitud:** $p(x = 1|y = 1)$

- **evidencia:** $\quad p(x=1)$

Pero aún no obtenemos la evidencia ¿cómo la calculamos? Podemos calcularla como la probabilidad conjunta **Join**

$$p(x) = \sum_y P(x, y) = \sum_y P(x|y)P(y)$$

En realidad $p(x)$ es una probabilidad marginal Entonces vamos a encontrar $p(x=1)$

$$P(x=1) = \sum_y P(x=1|y)P(y)$$

con $p(y)$ queremos denotar que son todos los posibles estados de y. Es decir si tiene cancer $y=1$ o no $y=0$, entonces con ello queremos encontrar la probabilidad marginal contemplando todos los estados de y.

$$\begin{aligned} P(x=1) = &\quad \textstyle\sum_y P(x=1|y)P(y) \\ P(x=1) = &\quad P(x=1|y=0)P(y=0) + P(x=1|y=1)P(y=1) \end{aligned}$$

Tenemos:

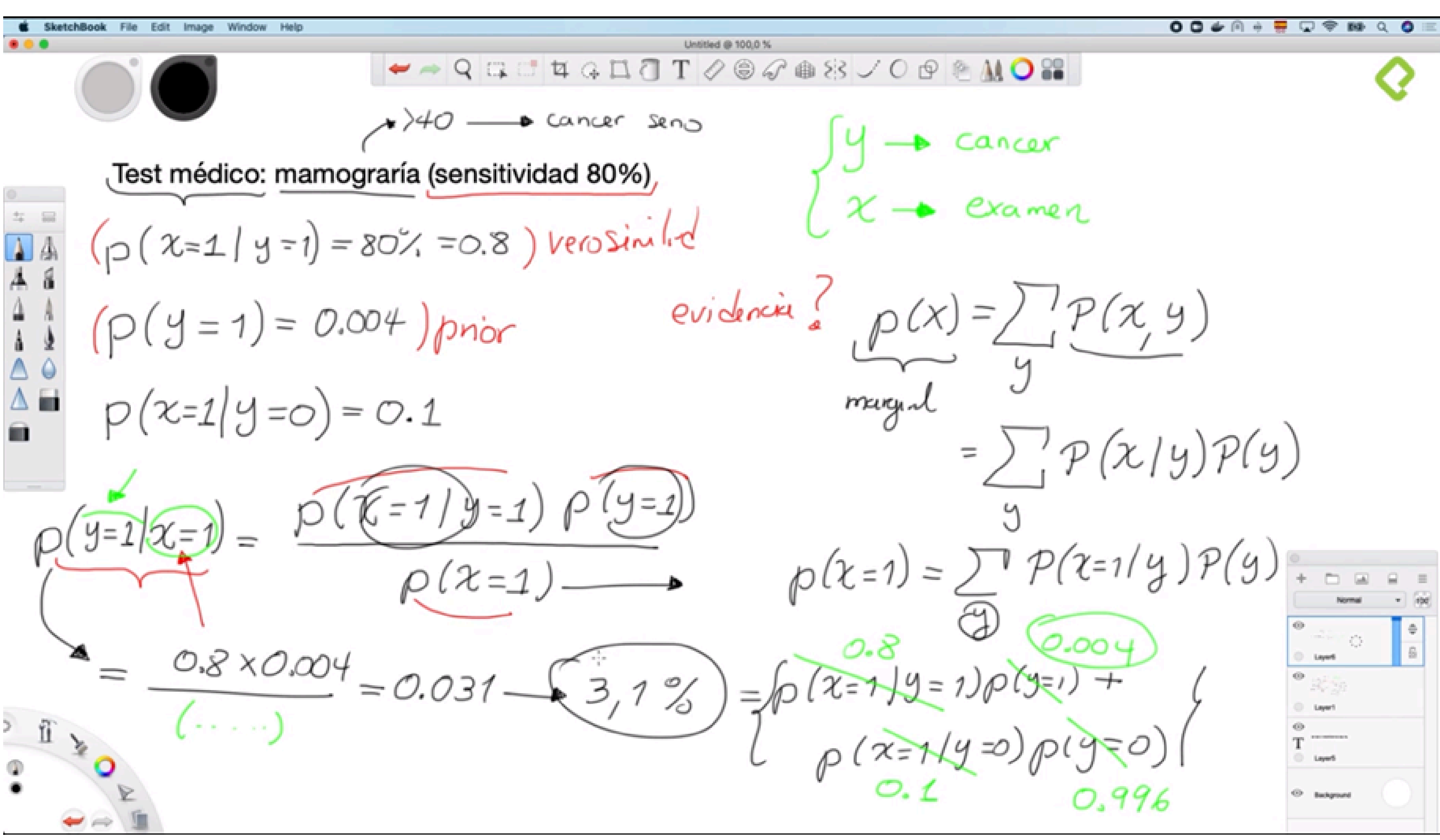
- **Falso positivo:** $p(x=1|y=0) = 0.1$ del 10%.
- **Verosimilitud:** $p(x=1|y=1) = 0.8$
- **Priori:** $p(y=1) = 0.004$
- $p(y=0) = 1 - p(y=1) = 1 - 0.004 = 0.996$

Calculando:

$$\begin{aligned} p(y=1|x=1) = &\quad \tfrac{p(y=1)p(x=1|y=1)}{p(x=1|y=0)p(y=0)+p(x=1|y=1)p(y=1)} \\ p(y=1|x=1) = &\quad \tfrac{0.004\times0.8}{0.1\times0.996+0.8\times0.004} \\ p(y=1|x=1) = &\quad \tfrac{0.0032}{0.1028} \\ p(y=1|x=1) = &\quad 0.0311 = 3.11\% \end{aligned}$$

Lo que quiere decir es que si el dispositivo da positivo. La probabilidad de que realmente tengas cancer es del 3.11%. La sensitividad del aparato es de 80% y las personas acostumbraban a pensar, eso quiere decir que el 80% de los resultados realmente implican cancer, mirándolo con la regla de Bayes nos damos cuenta que es distinto.

Realmente la probabilidad posterior nos dice;
dado que el resultado de la maquina nos da positivo; la probabilidad de que haya cancer es del `3.11%`.



Extras

- Are you Bayesian or Frequentist?
- Teorema de Bayes
- Teorema de Bayes - Matemovil