Возникновение пробок и явление фазового перехода в системах массового обслуживания

Кирилл Сёмкин Денис Швейкин Александр Савельев
Александр Богданов Евгений Рябинин

Математика больших данных, 2023

Задача о кассе в час пик

Постановка

Люди подходят к кассе с интенсивностью $\varphi(t)$ - монотонно неубывающей со временем; кассир обслуживает людей с постоянной интенсивностью λ. Ставится вопрос: насколько быстро будет меняться среднее число людей в очереди? Поняв это, можно, например, предсказывать через сколько времени придётся открыть вторую кассу и решать другие прикладные задачи.

В терминах непрерывных марковских цепей имеем следующую модель, см. рис.1.

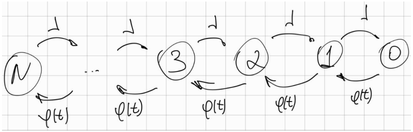


Рис. 1: Марковская цепь задачи

Задача о кассе в час пик

Постановка

В данном случае цепь не является однородной. Тем не менее динамика переходов будет похожей на классический случай:

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = Q(t) \cdot P(t) \\ P(0) = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\pi}(t) = \dot{P}(t)\pi(0) = Q(t)\pi(t) \\ \pi(0) = \pi^0 \end{cases}$$

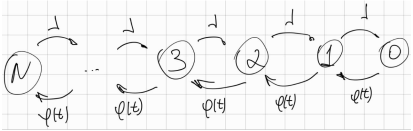


Рис. 1: Марковская цепь задачи

Уравнения динамики цепи

Т.о. имеем следующие уравнения динамики:

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}_0 &= -\varphi(t)\pi_0 + \lambda\pi_1 \\
\dot{\pi}_1 &= \lambda\pi_2 + \varphi(t)\pi_0 - (\lambda + \varphi(t))\pi_1 \\
\dot{\pi}_2 &= \lambda\pi_3 + \varphi(t)\pi_1 - (\lambda + \varphi(t))\pi_2 \\
&\dots \\
\dot{\pi}_N &= \varphi(t)\pi_{N-1} - \lambda\pi_N
\end{aligned}
$$

При этом одно уравнение формально лишнее, т.к.
$\sum \pi_i(t) = 1 \Rightarrow \sum \dot{\pi}_i(t) = 0$

Уравнения динамики цепи

Т.о. имеем следующие уравнения динамики:

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}_0 &= -\varphi(t)\pi_0 + \lambda\pi_1 \\
\dot{\pi}_1 &= \lambda\pi_2 + \varphi(t)\pi_0 - (\lambda + \varphi(t))\pi_1 \\
\dot{\pi}_2 &= \lambda\pi_3 + \varphi(t)\pi_1 - (\lambda + \varphi(t))\pi_2 \\
&\dots \\
\dot{\pi}_N &= \varphi(t)\pi_{N-1} - \lambda\pi_N
\end{aligned}
$$

При этом одно уравнение формально лишнее, т.к. $\sum \pi_i(t) = 1 \Rightarrow \sum \dot{\pi}_i(t) = 0$

Нас интересует поведение $\mathbb{E}[S](t) = \sum\limits_{k=0}^{N} \pi_k k \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{E}[S](t) = \sum\limits_{k=0}^{N} \dot{\pi}_k k$, где $S(t)$ — состояние цепи (кол-во людей в очереди) в момент t.

Случай постоянного потока

Пусть $\varphi(t) = \mu = const$, тогда имеем простую цепь гибели/рождения. Данная цепь является эргодической, со стационарным распределением $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi}_j = \frac{\mu}{\lambda}\tilde{\pi}_{j-1} \Rightarrow \tilde{\pi}_j = (\frac{\mu}{\lambda})^j \cdot \tilde{\pi}_0$$

Случай постоянного потока

Пусть $\varphi(t) = \mu = const$, тогда имеем простую цепь гибели/рождения. Данная цепь является эргодической, со стационарным распределением $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi}_j = \frac{\mu}{\lambda}\tilde{\pi}_{j-1} \Rightarrow \tilde{\pi}_j = (\frac{\mu}{\lambda})^j \cdot \tilde{\pi}_0$$

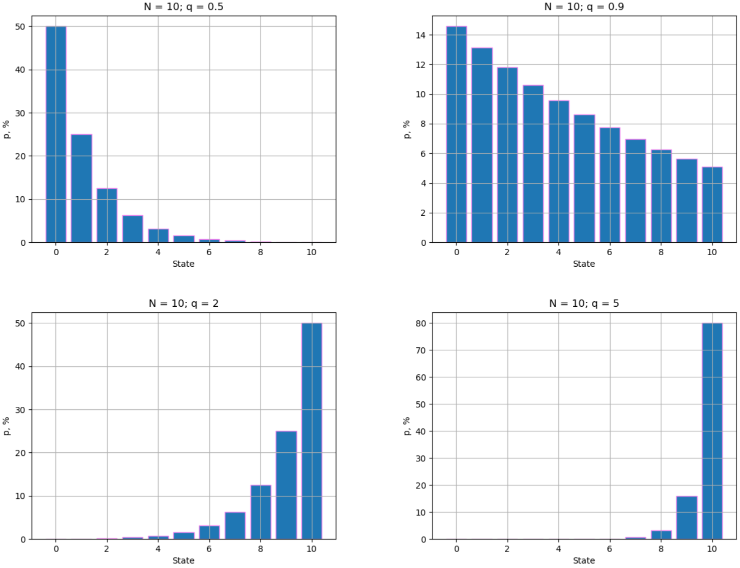
Введём обозначение $q = \mu/\lambda$. Используя $\sum \pi_i = 1$, получим:

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{q-1}{q^{N+1}-1}$$

Случай постоянного потока

Т.о. при заданном N имеем дискретное экспоненциальное распределение на числе людей в очереди: при $q > 1$ вероятности больше для большего людей в очереди, при $q < 1$ - наоборот (при $q = 1$ имеем равномерное распределение). Ниже представлены вид распределений для разных q.

Случай постоянного потока



Случай постоянного потока

Вычислим среднее:

$$\mathbb{E}[S](t) = \sum_{k=0}^{N} \pi_k k = \tilde{\pi}_0 \sum_{k=0}^{N} k q^k$$

При $q < 1$ можно воспользоваться приближением при $N \gg 1$:

$$\mathbb{E}[S](t) = \tilde{\pi}_0 \sum_{k=0}^{N} k q^k \approx \tilde{\pi}_0 \sum_{k=0}^{\infty} k q^k = \tilde{\pi}_0 \frac{q}{(1-q)^2}$$

При $q > 1$ можно воспользоваться оценкой через интеграл:

$$\mathbb{E}[S](t) = \tilde{\pi}_0 \sum_{k=0}^{N} k q^k \approx \tilde{\pi}_0 \int_0^N x \cdot q^x dx = \frac{1}{\log^2 q}(q^N(N \log q - 1) + 1) \sim$$

$$\sim q^N \cdot \frac{N}{\log q}$$

Случай постоянного потока

Посмотрим на точные вычисленные значения средних при разных режимах q:

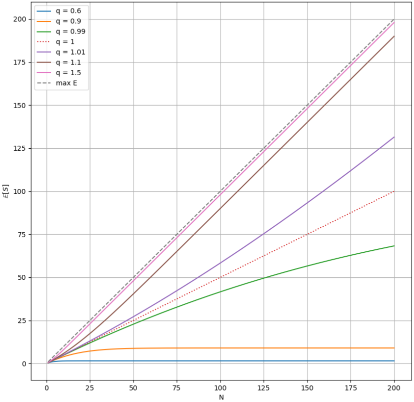


Рис. 3: Средний размер очереди при разных режимах

Случай постоянного потока

Видим фазовый переход с критической точкой $q = 1$.

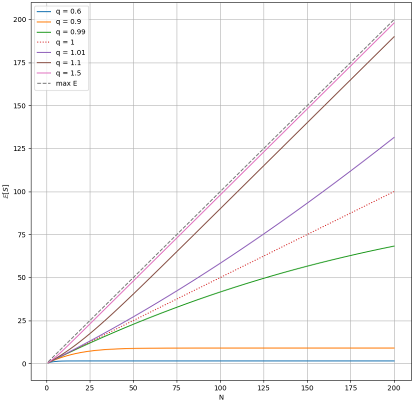


Рис. 3: Средний размер очереди при разных режимах

Приближение быстрого наплыва

Вернёмся к исходной задаче. Пусть $|\varphi(t)| \gg \lambda$ с самого начала $t \geq 0$. Тогда в уравнениях динамики можно пренебречь членами $\lambda \cdot \pi_i$, т.е. пренебрегаем работай кассира и оцениваем насколько быстро будет расти очередь в первые моменты времени. В этом случае имеем цепь рис.4 , т.е. неоднородный пуассоновский поток (считаем, что N может быть сколь угодно большим для простоты).

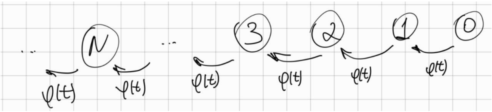


Рис. 4: Приближение цепи в начале наплыва

Приближение быстрого наплыва

Тогда кол-во людей в очереди распределено:

$$S(t) \sim Po(\int_0^t \varphi(s)ds)$$

Со средним и дисперсией пуассоновской случайной величины, т.е.:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{D}[S(t)] = \int_0^t \varphi(s)ds$$

Примеры

- $\varphi(s) \propto s^k \Rightarrow \mathbb{E}[S(t)] \propto s^{k+1}$
- $\varphi(s) \propto e^s \Rightarrow \mathbb{E}[S(t)] \propto e^s$

Численное решение

Теперь найдём точное решение уравнений динамики вероятностей $\pi_i(t)$ численными методами в разных режимах интенсивностей. Для этого использовался метод Рунге-Кутты 4 порядка.

Численное решение

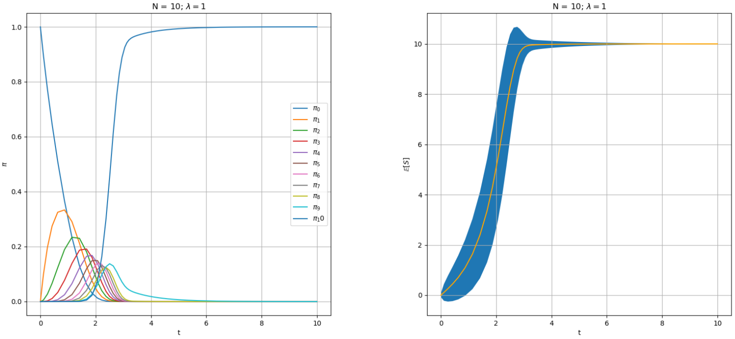


Рис. 4: Численные решения для $\varphi(t) = t$

Численное решение

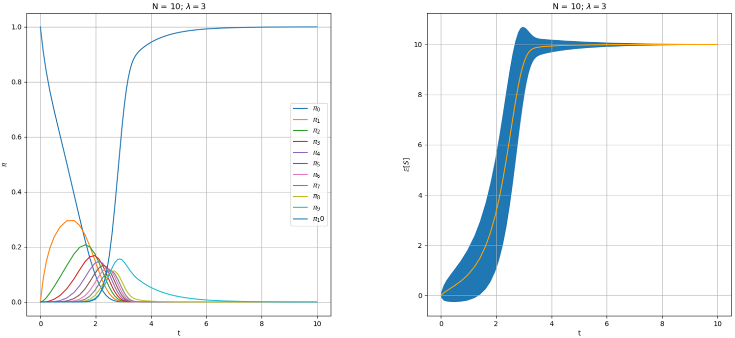


Рис. 4: Численные решения для $\varphi(t) = t$

Численное решение

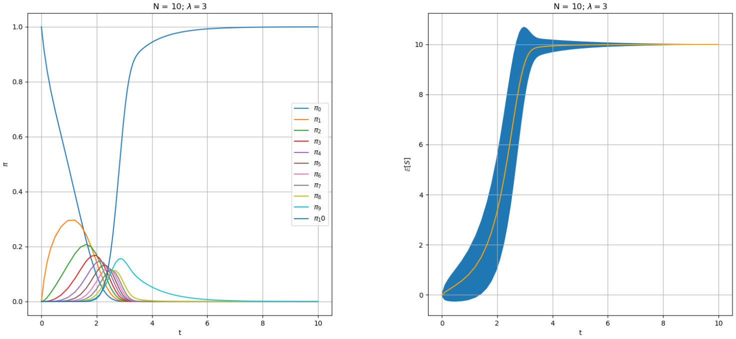


Рис. 4: Численные решения для $\varphi(t) = t^2$

Численное решение

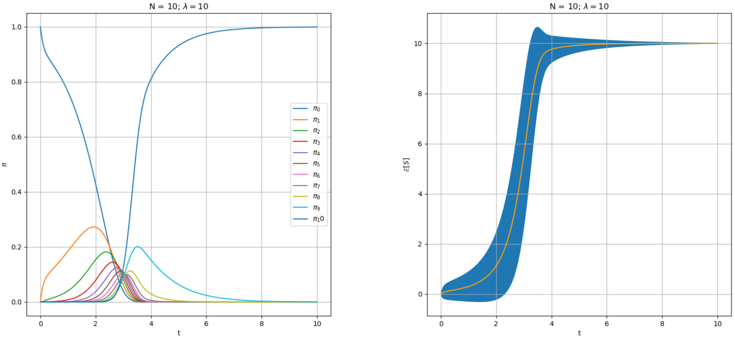


Рис. 4: Численные решения для $\varphi(t) = t^2$

Численное решение

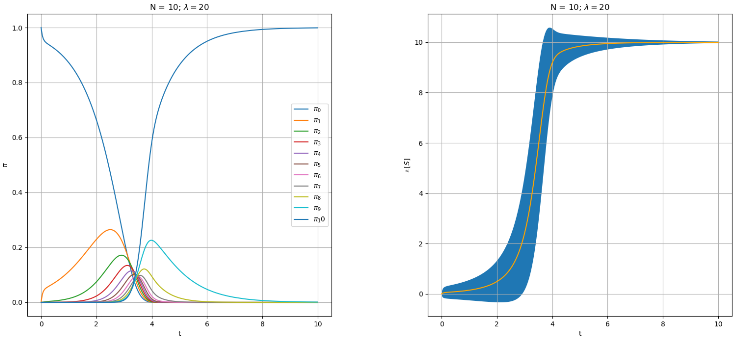


Рис. 4: Численные решения для $\varphi(t) = \exp(t)$

Монте-Карло моделирование цепи

Вместо решения СОДУ можно просимулировать динамику цепи, сэмплируя случайные величины в дискретные моменты времени. Результаты совпадают с полученными выше.

Монте-Карло моделирование цепи

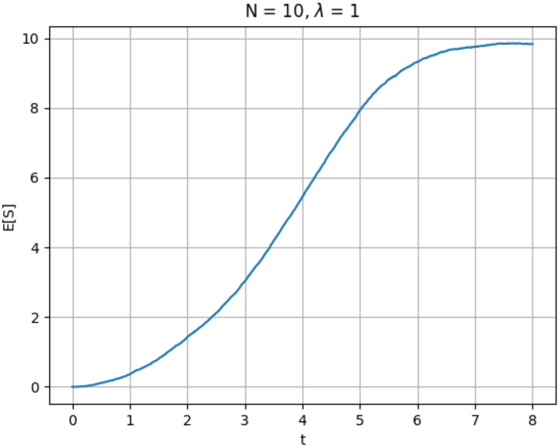


Рис. 5: Численные решения для $\varphi(t) = t$

Монте-Карло моделирование цепи

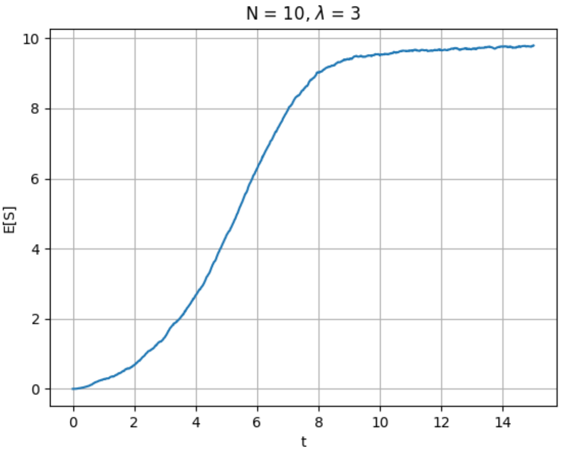


Рис. 5: Численные решения для $\varphi(t) = t$

Монте-Карло моделирование цепи

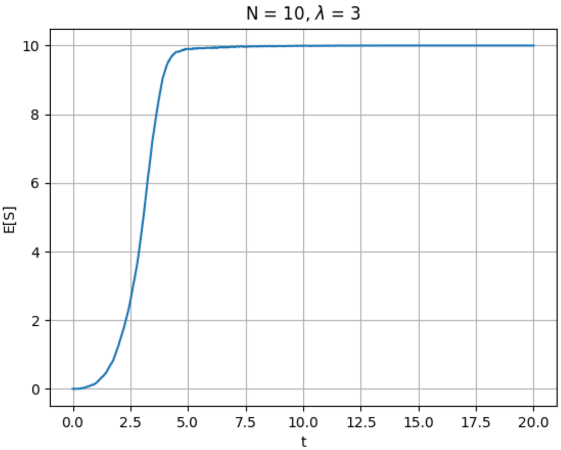


Рис. 5: Численные решения для $\varphi(t) = t^2$

Монте-Карло моделирование цепи

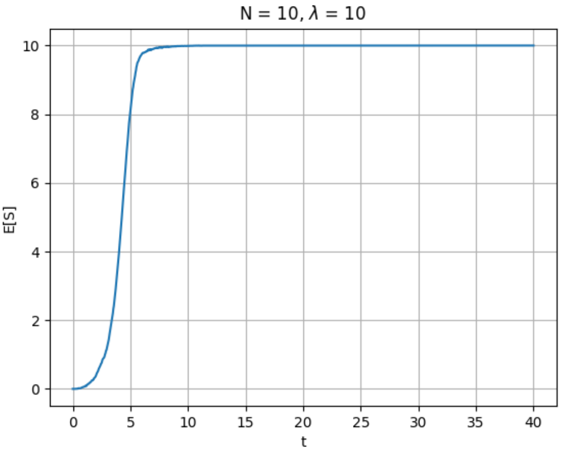


Рис. 5: Численные решения для $\varphi(t) = t^2$

Монте-Карло моделирование цепи

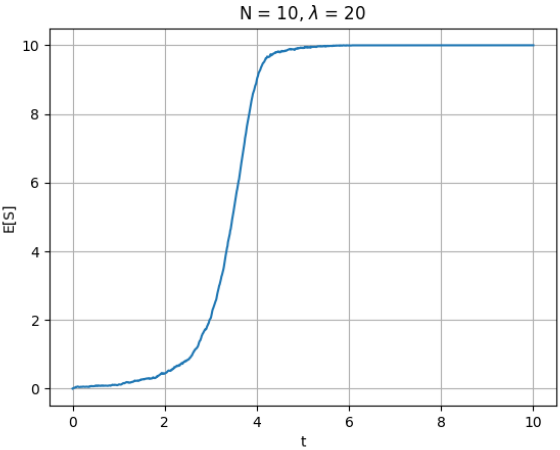


Рис. 5: Численные решения для $\varphi(t) = \exp(t)$