

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

5 березня 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1 Категорія  $C$**  складається з наступних компонент:

- із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за  $x, y, z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
- із набору **морфізмів із  $x$  в  $y$**   $C(x, y)$  для всіх  $x, y \in C$ ; морфізми позначають за  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Позначення  $\alpha: x \rightarrow y$  або  $x \xrightarrow{\alpha} y$  означають  $\alpha$  – морфізм із  $x$  в  $y$ ; ми називаємо  $x$  **джерелом** та  $y$  **ціллю**;

- кожен об'єкт  $x$  має **тотожний морфізм**  $1_x: x \rightarrow x$ ;
- для кожних морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y$ ,  $\beta: y \rightarrow z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $\beta\alpha: x \rightarrow z$ .

При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y$  виконано  $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $\alpha: w \rightarrow x$ ,  $\beta: x \rightarrow y$ ,  $\gamma: y \rightarrow z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Remark 0.1.3** Морфізм  $1_x$  для кожного об'єкта  $x$  – єдиний.

**Example 0.1.4** Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
  - $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх функцій;
  - тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
  - композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Example 0.1.5** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

Категорія	Об'єкти	Морфізми
<b>Grp</b>	групи	гомоморфізми груп
<b>Ab</b>	абелеві групи	гомоморфізми груп
<b>Rng</b>	кілець	гомоморфізми кілець
<b>Ring</b>	кілець з одиницею	гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю
${}_R\text{Mod}$	$R$ -модуль	$R$ -лінійне відображення
<b>Top</b>	топологічні простори	неперервні відображення
<b>Met</b>	метричні простори	неперервні відображення
<b>Man</b>	гладкі многовиди	гладкі відображення

**Example 0.1.6** Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньо виглядати. Категорія **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:



Так само є категорії **4, 5, ...**

**Example 0.1.7** Розглянемо моноїд  $M$ . Ми можемо утворити категорію  $\mathcal{M}$ , яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

**Example 0.1.8** Розглянемо так званий посет  $(P, \prec)$  (partially ordered set). Скажемо, що  $\text{Ob}(P) = P$  та  $P(i, j)$  – це будуть тільки ті стрілки, для яких  $i \prec j$ . Композиція тут існує, оскільки  $\prec$  є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки  $\prec$  є рефлексивним відношенням.

*Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для  $(P, \prec)$  відношення  $\prec$  було антисиметричним.*

**Definition 0.1.9** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(x, y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $x \rightarrow x$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об'єктів  $D$  міститься в наборі об'єктів  $C$   
набір стрілок  $x \rightarrow y$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $x \rightarrow y$  в  $C$  для довільних об'єктів  $x, y$  із  $D$   
композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $x, y$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $x, y$  в  $C$ , для довільних об'єктів  $x, y$  із  $D$

**Example 0.1.12** Зокрема маємо кілька прикладів:

- 1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
- 2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

**Definition 0.1.13** Категорія  $C$  називається **малою**, якщо

класи  $\text{Ob}(C), \text{Hom}(C)$  – множини.

Інакше категорія  $C$  називатиметься **великою**.

Категорія  $C$  називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів  $x, y$  клас  $C(x, y)$  – множина

**Example 0.1.14** Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

**Definition 0.1.15** Категорія  $C$  називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізми – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

**Example 0.1.16** Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Мономорфізм

**Definition 0.2.1** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Часто мономорфізми позначають як  $\alpha: x \rightarrowtail y$ .

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – ін’єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Для всіх  $z \in Z$  ми маємо  $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$ , тому за ін’єктивністю,  $\beta_1(z) = \beta_2(z)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\alpha$  – мономорфізм. ■

**Remark 0.2.3** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо  $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$ .

Оберемо об’єкти  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  із нашої категорії **Div** та гомоморфізм  $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , який є сюр’єктивним. Даний морфізм не ін’єктивний, оскільки  $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ . Стверджується, що  $\alpha$  – мономорфізм.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$  – морфізми в **Div** та припустимо, що  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тоді існує елемент  $a \in A$ , для якого  $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$ . Ліворуч раціональне число, тож  $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$  для деяких  $r, s \in \mathbb{Z}$  та  $r \neq 0, s \neq 0$ . Оскільки  $A$  – подільна група, то існує для елемента  $a \in A$  та  $n = 2r$  існує  $b \in A$ , для якого  $a = nb$ . Тоді  $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$ .

Отже,  $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$ , а тому звідси  $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$ .

**Theorem 0.2.5** У категоріях **Set, Top, Grp, Rng** морфізм ін’єктивний  $\iff$  морфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що ін’єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – мономорфізм. Оберемо  $x_1, x_2 \in X$  та припустимо, що  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Покладемо  $z = 0 \in \mathbb{Z}$  та покладемо  $Z = \{z\}$  (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  як  $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$ . Тоді

$$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$ . Таким чином,  $\alpha$  – ін’єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину  $Z$  треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення  $\beta_1, \beta_2$  будуть уже неперервними через дискретність  $Z$ .

(**Grp**). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – мономорфізм. Розглянемо  $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$  – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\beta_1$  – тривіальне вкладення. Отже,  $\ker \alpha = \{e\}$ , а це означає ін’єктивність  $\alpha$ .

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

## 0.2.2 Розщеплений мономорфізм

**Definition 0.2.6** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **розщепленим мономорфізмом (split monic)**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \curvearrowright x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y$$

**Theorem 0.2.7** Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\beta\alpha = 1_x$ . Нехай  $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Тоді  $\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$ . ■

**Theorem 0.2.8** У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін’єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X$ . Припустимо  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Тоді  $x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$ . ■

**Remark 0.2.9** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.10** Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення  $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  – ін’єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$ . Тоді  $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$ , тобто  $\beta(1) = 1$ , але це суперечність! Просто тому що  $\beta$  відображає на  $2\mathbb{Z}$ .

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.11** Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді  $\alpha$  – ін’єктивний, але не розщеплений мономорфізм.

Припустимо, що існує морфізм  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ . Тоді  $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ , однак множина  $\{0\}$  відкрита в  $\mathbb{R}$  з дискретною топологією, але  $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$  не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що  $\beta$  – неперервне відображення.

**Theorem 0.2.12** Задано  $\alpha: X \rightarrow Y$  – морфізм в категорії **Set**.

$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін’єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\alpha$  – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси  $\alpha$  – ін’єктивний.

Тепер нехай  $X = \emptyset$ . Тоді за умовою, існує  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$ . Тоді оскільки  $\beta$  – функція, то  $Y = \emptyset$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\alpha$  – ін’єктивний та  $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$ .

Нехай  $X \neq \emptyset$ , тобто існує елемент  $x_0 \in X$ . Оскільки  $\alpha$  – ін’єктивний, то  $\alpha: X \rightarrow \text{Im } \alpha$ , буде задавати бієкцію, тож для кожного  $y \in \text{Im } \alpha$  існує єдиний елемент  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ . Це визначає функцію  $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$ , що розширюється до функції  $\beta: Y \rightarrow X$ , якщо покласти  $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$ . Для  $x \in X$  ми маємо  $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$ .

Нехай  $X = \emptyset$ , тоді  $Y = \emptyset$  та порожня функція  $\beta: Y \rightarrow X$  задовольняє  $\beta\alpha = 1_X$ . ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *ін’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *ін’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

### 0.2.3 Епіморфізм

**Definition 0.2.13** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **епіморфізмом (epic)**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

Часто епіморфізми позначають як  $\alpha: x \twoheadrightarrow y$ .

**Theorem 0.2.14** У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр'єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Оберемо  $y \in Y$ . Оскільки  $\alpha$  – сюр'єктивне, то  $y = \alpha(x)$  для деякого  $x \in X$ . Тоді маємо  $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.15** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.16** Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що  $\alpha$  – епіморфізм.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  – морфізми з **Rng** та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді  $\beta_1(n) = \beta_2(n)$  для будь-якого цілого  $n \in \mathbb{Z}$ . При  $n \neq 0$  ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для  $m, n \in \mathbb{Z}$  при  $n \neq 0$  ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ .

**Theorem 0.2.17** У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний  $\iff$  морфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – епіморфізм морфізм. Нехай  $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде характеристичною функцією для  $\text{Im } \alpha$  та нехай  $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде стало дорівнювати 1. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , тому за епічністю,  $\beta_1 = \beta_2$ . Із цього випливає, що  $\text{Im } \alpha = Y$ , що доводить сюр'єктивність  $\alpha$ .

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з **Set**. Тільки треба  $\alpha: X \rightarrow Y$  брати уже неперервне відображення, а на просторі  $\{0, 1\}$  задати не дискретну топологію, щоб  $\beta_1, \beta_2$  стали неперервними.

(**Grp**). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що  $[H : \text{Im } \alpha] > 1$ . Ми тоді доведемо, що  $\alpha$  – не епіморфізм.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] = 2$ . Нехай  $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – канонічний гомоморфізм та  $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – тривіальний гомоморфізм. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , але при цьому  $\beta_1 \neq \beta_2$ , оскільки  $\text{Im } \alpha \neq H$ . Тобто в даному випадку  $\alpha$  – не епіморфізм.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] > 2$ . Тоді існують два різних правих суміжних класи  $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$  та  $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$ , причому  $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$ . Покладемо  $b = h_1^{-1}h_2$  та зауважимо, що  $K_1b = K_2$ , а звідси  $K_2b^{-1} = K_1$ . Позначимо  $S_H$  за групу симетрії на  $H$  та оберемо бієкцію  $\sigma \in S_H$ , що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$$

Можна зауважити, що  $\sigma^2 = 1_H$  та  $\sigma(kh) = k\sigma(h)$  для всіх  $k \in \text{Im } \alpha, h \in H$ .

Для  $h \in H$  нехай  $\lambda_h$  буде елементом  $S_H$ , що заданий формулою  $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$ . Тоді звідси отримаємо  $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$  для всіх  $k \in \text{Im } \alpha$ .

Визначимо  $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$  як  $\beta_1(h) = \lambda_k$  та  $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$ . Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для  $k \in \text{Im } \alpha$  ми маємо

$$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k), \text{ а тому } \beta_1\alpha = \beta_2\alpha. \text{ Із іншого боку, } \beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e). \text{ Тож звідси } \beta_1 \neq \beta_2. \text{ Тобто і в цьому випадку } \alpha \text{ – не епіморфізм.} \quad \blacksquare$$

## 0.2.4 Розщеплений епіморфізм

**Definition 0.2.18** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого мноморфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright 1_y$$

**Theorem 0.2.19** Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\alpha\beta = 1_x$ . Нехай  $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow x$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді  $\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$ . ■

**Theorem 0.2.20** У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр’єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\alpha\beta = 1_Y$ . Нехай  $y \in Y$ , тоді покладемо  $x = \beta(y)$ . Звідси  $\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$ . ■

**Remark 0.2.21** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.22** Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм  $\alpha: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , визначений як  $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$  та  $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$ . Це буде сюр’єктивний гомоморфізм. Оскільки  $1 \in \mathbb{Z}_2$  має порядок 2, то будь-який гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  зобов’язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином,  $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$ . Отже,  $\alpha$  – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.23** Розглянемо категорію **Top**. Маємо  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді  $\alpha$  – сюр’єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

**Theorem 0.2.24** У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм  $\iff$  морфізм сюр’єктивний.

**Proof.**

Залишилося довести у зворотний бік.

☞ Дано:  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр’єктивний морфізм. Тобто для кожного  $y \in Y$  знайдеться  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ , а це визначає функцію  $\beta: Y \rightarrow X$ , яка задовольняє  $\alpha\beta = 1_Y$ . Отже,  $\alpha$  – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \text{сюр’єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *сюр’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

## 0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

**Definition 0.2.25** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x \quad \alpha\beta = 1_y$$

**Remark 0.2.26** Якщо  $\alpha$  – ізоморфізм, то морфізм  $\beta$  в означенні – єдиний та позначається за  $\alpha^{-1}$ .

**Definition 0.2.27** Задано  $C$  – категорія.

Об'єкти  $x, y$  називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha: x \rightarrow y - \text{ізоморфізм}$$

Позначення:  $x \cong y$  (це справді відношення еквівалентності).

**Theorem 0.2.28** Морфізм – ізоморфізм  $\iff$  морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

**Proof.**

$\Rightarrow$  миттєво випливає з означення.

$\Leftarrow$  Дано:  $\alpha$  – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми  $\beta, \gamma: y \rightarrow x$ , для яких  $\beta\alpha = 1_x$ ,  $\alpha\gamma = 1_y$ . Але тоді  $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$ . Отже,  $\alpha$  – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.



**Theorem 0.2.29** У категорії **Set**, **Grp** біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

**Proof.**

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що  $\alpha$  – ізоморфізм. Оскільки  $\alpha$  – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії  $\alpha$  – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм  $\alpha^{-1}$ , для якого  $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$ ,  $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$ , що й доводить ізоморфізмість.

(**Grp**). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо  $\alpha$  – гомоморфізм, то  $\alpha^{-1}$  буде ним також. ■

**Remark 0.2.30** Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.

(**Rng**). Зауважимо, що  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  буде біморфізмом, але не бієкцією.

(**Top**). Тотожне відображення  $R \rightarrow R$ , з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

### 0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

**Definition 0.3.1** Задано  $C$  – категорія та  $c \in C$  – об'єкт.

Об'єкт  $c$  називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \alpha: c \rightarrow x$$

Об'єкт  $c$  називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \beta: x \rightarrow c$$



**Example 0.3.2** Зокрема в категорії **Set**, **Top** ініціальним об'єктом буде  $\emptyset$ ; термінальним об'єктом буде  $\{x\}$  (будь-який сінглтон).

**Example 0.3.3** У категоріях **Grp**, **Rng**,  ${}_R\mathbf{Mod}$  ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде  $\{e\}$ , де  $e$  – нейтральний елемент.

**Example 0.3.4** У категорії **Ring** ініціальним об'єктом буде кільце  $\mathbb{Z}$ , а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце  $\{0\}$ .

**Theorem 0.3.5** Задано  $C$  – категорія,  $c_1, c_2 \in C$  – обидва ініціальні. Тоді  $c_1 \cong c_2$ .

**Proof.**

За умовою,  $c_1$  – ініціальний, тоді для об'єкта  $c_1$  існує єдиний морфізм  $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$ . Аналогічно,  $c_2$  – ініціальний, тоді для об'єкта  $c_1$  існує єдиний морфізм  $\beta: c_2 \rightarrow c_1$ . Розглянемо композицію  $\beta\alpha: c_1 \rightarrow c_1$  – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності  $\alpha, \beta$ . У категорії точно існує морфізм  $1_{c_1}: c_1 \rightarrow c_1$  – отже, в силу єдиності такого морфізму,  $\beta\alpha = 1_{c_1}$ . Аналогічно доводиться, що  $\alpha\beta = 1_{c_2}$ . Значить,  $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$  буде ізоморфізмом. ■

**Theorem 0.3.6** Задано  $C$  – категорія,  $d_1, d_2 \in C$  – обидва термінальні. Тоді  $d_1 \cong d_2$ .

*Вправа: довести.*

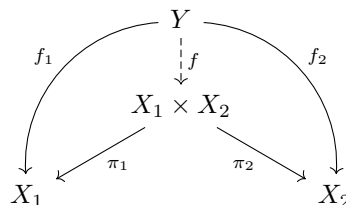
## 0.4 Добуток

**Definition 0.4.1** Задано  $C$  – категорія та  $X_1, X_2 \in C$  – об'єкти.

**Добутком**  $X_1, X_2$  називають об'єкт  $X \in C$ , що оснащений парою морфізмів  $\pi_1: X \rightarrow X_1$  та  $\pi_2: X \rightarrow X_2$ , що є так званими **проективними морфізмами**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: Y \rightarrow X_1, f_2: Y \rightarrow X_2 : \exists! f: Y \rightarrow X : \\ f_1 = \pi_1 f \quad f_2 = \pi_2 f$$

Позначення:  $X = X_1 \times X_2$ .



**Remark 0.4.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії  $C$  **добуток**  $X_i, i \in I$  (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення  $X = \prod_{i \in I} X_i$ .

**Example 0.4.3** Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$ . Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  таких, що  $f(i) \in X_i$  для всіх  $i \in I$ . Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного  $i \in I$  визначимо проєкцію  $\pi_i: P \rightarrow X_i$  таким чином:  $\pi_i(f) = f(i)$ .

Доведемо, що пара  $(P, \{\pi_i\})$  буде утворювати добуток сім'ї  $\{X_i\}$  (у категоріальному сенсі).

**Proof.**

Нехай  $Y$  – об'єкт з морфізмами  $\alpha_i: Y \rightarrow X_i$ . Хочемо знайти єдиний морфізм  $\gamma: Y \rightarrow P$ , щоб  $\alpha_i = \pi_i \gamma$ . Покладемо  $\gamma: Y \rightarrow P$  таким чином:  $\forall y \in Y : \gamma(y)$  буде функцією  $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ , причому

$\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$ . Тоді  $\pi_i \gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$ , тобто звідси  $\pi_i \gamma = \alpha_i$  для всіх  $i \in I$ .

Припустимо, що існує функція  $\gamma': Y \rightarrow P$ , для якої  $\pi_i \gamma' = \alpha_i$ . Тобто для кожного  $y \in Y$  та кожного  $i \in I$  виконано  $\gamma'(y)_i = \alpha_i(y)$ . Але тоді

$\gamma'(y)(i) = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i \gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)(i)$ . Суперечність! ■

**Example 0.4.4** Будемо в категорії **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний  $X_i$  тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток  $P$  – це буде група зі покомпонентним множенням:  $(fg)(i) = f(i)g(i)$ . Це ще називають (**зовнішнім**) **прямим добутком груп**. Проективні відображення  $\pi_i$  будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**,  $_R \mathbf{Mod}$  аналогічно все.

**Example 0.4.5** Залишилася категорія **Top**.

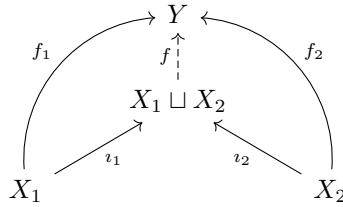
## 0.5 Кодобуток

**Definition 0.5.1** Задано  $C$  – категорія та  $X_1, X_2 \in C$  – об'єкти.

**Кодобутком**  $X_1, X_2$  називають об'єкт  $X \in C$ , що оснащений парою морфізмів  $\iota_1: X_1 \rightarrow X$  та  $\iota_2: X_2 \rightarrow X$ , що є так званими **морфізмами вкладень**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: X_1 \rightarrow Y, f_2: X_2 \rightarrow Y : \exists! f: X \rightarrow Y : \\ f_1 = f\iota_1 \quad f_2 = f\iota_2$$

Позначення:  $X = X_1 \sqcup X_2$ .



**Remark 0.5.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії  $C$  **кодобуток**  $X_i, i \in I$  (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення  $X = \coprod_{i \in I} X_i$ .

**Example 0.5.3** Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$  (якусь довільну). Визначимо множину  $Q$  ось так:  $Q = \bigsqcup_i X'_i$ , де в цьому випадку  $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$  для всіх  $i$ .

Причому варто зауважити, що  $X'_i$  дійсно неперетинні, а також  $X'_i \cong X_i$ . Визначимо відображення  $\iota_i: X_i \rightarrow Q$  таким чином:  $\iota_i(x) = (x, i)$ .

Доведемо, що пара  $(Q, \{\iota_i\})$  буде утворювати кодобуток сім'ї  $\{X_i\}$  (у категоріальному сенсі).

**Proof.**

Створімо нову категорію  $\mathbf{D}_{\text{copr}}$ , яка функціонує ось таким чином:

об'єктами будуть пари  $(X, \{\alpha_i\})$ , де  $X$  – об'єкт категорії **Set** та  $\alpha_i: X_i \rightarrow X$  – відображення; морфізмом між  $(X, \{\alpha_i\})$  та  $(Y, \{\beta_j\})$  буде відображення  $\gamma: X \rightarrow Y$ , для якого  $\gamma \circ \alpha_i = \beta_i$ , причому це для всіх  $i$ . Це дозволяє для всіх  $i$  зробити діаграму комутативною.

Так ось, нам треба довести, що наша визначена пара  $(Q, \{\iota_i\})$  буде ініціальним об'єктом.

Нехай  $(X, \{\alpha_i\})$  – будь-який об'єкт  $\mathbf{D}_{\text{copr}}$ . Визначимо відображення  $\gamma: Q \rightarrow X$  ось таким чином:  $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$ . Зауважимо, що для всіх  $i$  та всіх  $x \in X_i$  ми маємо, що

$$\gamma \circ \iota_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x).$$

Значить,  $\gamma$  буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.

Оберемо морфізм  $\gamma'$ , який діє між двома об'єктами, тобто  $(Q, \{\iota_i\})$  та  $(X, \{\alpha_i\})$ . Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність  $\gamma' \circ \iota_i = \alpha_i$  для всіх  $i$ . Проте з іншого боку,  $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$ . Значить,  $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \iota_i(x) = \gamma'((x, i))$ . ■

**Example 0.5.4** Будемо в категорії **Top**. Як і в категорії **Set**, розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$  (тільки тут вже топологічні простори). Визначимо множину  $Q$  так само, як було вище. На ній задається така топологія:  $U$  – відкрита в  $Q \iff \iota_i^{-1}(U)$  – відкрита в  $X_i$  для всіх  $i$ . Тоді всі функції  $\iota_i: X_i \rightarrow Q$ , як було визначено вище, будуть неперервними. Далі аналогічним чином доводимо, що пара  $(Q, \{\iota_i\})$  утворює кодобуток.

## 0.6 Зрівняльник

**Definition 0.6.1** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$  – два морфізми.

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{array} b$$

Сформуємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$  таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, \alpha)$ , де  $x$  – об'єкт категорії  $C$  та  $\alpha: x \rightarrow a$  – морфізм в  $C$ , щоб  $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \alpha$ ;

$$x \xrightarrow{\alpha} a \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{array} b$$

морфізмом між об'єктами  $(x, \alpha) \rightarrow (y, \beta)$  буде морфізм  $\gamma: x \rightarrow y$  категорії  $C$ , для якого  $\beta \gamma = \alpha$ ;

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow \alpha & \\ \gamma \downarrow & & a \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{array} b \\ y & \nearrow \beta & \end{array}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії  $C$ .

**Зрівняльником** (або **equalizer**)  $\lambda_1, \lambda_2$  будемо називати термінальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ .

Позначимо термінальний об'єкт за  $(p, \iota)$ . Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта  $(x, \alpha)$  існує єдиний морфізм між  $(x, \alpha)$  та  $(p, \iota)$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$  в категорії  $C$ , для якого  $\iota \gamma = \alpha$  – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{array}{ccc} x & \searrow \alpha & \\ \exists! \gamma \downarrow & & a \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{array} b \\ p & \nearrow \iota & \end{array}$$

**Example 0.6.2** Розглянемо категорію **Set**. Нехай  $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$  – два відображення. Покладемо  $P = \{a \in A \mid \lambda_1(a) = \lambda_2(a)\}$  та  $\iota: P \rightarrow A$  – вкладення. Тоді  $\lambda_1 \iota = \lambda_2 \iota$  (тобто звідси  $(P, \iota)$  буде об'єктом категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ , який був зазначений вище). Стверджується, що  $(P, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ . Нехай  $(X, \alpha)$  – довільний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ . Для кожного  $x \in X$  ми маємо  $\lambda_1(\alpha(x)) = \lambda_2(\alpha(x)) = \lambda_2(\alpha(x))$ , тобто  $\text{Im } \alpha \subset P$ . Оберемо відображення  $\gamma: X \rightarrow P$  так, що  $\gamma = \alpha$ . Тоді звідси  $\iota \gamma = \alpha$ , тобто  $\gamma$  – морфізм між об'єктами  $(X, \alpha) \rightarrow (P, \iota)$ .

Оскільки  $\iota$  – ін'єктивний (як вкладення), то тоді це мономорфізм. Отже,  $\gamma$  – єдиний такий морфізм.

**Example 0.6.3** Розглянемо категорію **Top**. Нехай  $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$  – неперервні відображення. Визначимо  $P, \iota$  так само, як в попередньому прикладі (оскільки  $P \subset A$ , то можна визначити топологічний підпростір). Таким чином,  $\iota$  уже буде неперервним. Далі так само доводимо, що  $(P, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ .