

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

19 лютого 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1** Категорія  $C$  складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за  $x, y, z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
- із набору **морфізмів із  $x$  в  $y$**   $C(x, y)$  для всіх  $x, y \in C$ ; морфізми позначають за  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Позначення  $\alpha: x \rightarrow y$  або  $x \xrightarrow{\alpha} y$  означають  $\alpha$  – морфізм із  $x$  в  $y$ ; ми називаємо  $x$  **джерелом** та  $y$  **ціллю**;

- кожен об’єкт  $x$  має **тотожний морфізм**  $1_x: x \rightarrow x$ ;
- для кожних морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y$ ,  $\beta: y \rightarrow z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $\beta\alpha: x \rightarrow z$ .

При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y$  виконано  $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $\alpha: w \rightarrow x$ ,  $\beta: x \rightarrow y$ ,  $\gamma: y \rightarrow z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Example 0.1.3** Розглянемо  $\text{Set}$  – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
- $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх відображень;
- тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
- композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .

Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Example 0.1.4** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

- 1)  $\text{Grp}$  – об’єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
- 2)  $\text{Ring}$  – об’єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
- 3)  $\text{Top}$  – об’єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
- 4)  $\text{Man}$  – об’єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

**Example 0.1.5** Розглянемо моноїд  $M$ . Ми можемо утворити категорію  $M$ , яка містить єдиний об’єкт – це моноїд.

**Example 0.1.6** Розглянемо так званий посет  $(P, \prec)$  (partially ordered set). Скажемо, що  $\text{Ob}(P) = P$  та  $P(i, j)$  – це будуть тільки ті стрілки, для яких  $i \prec j$ . Композиція тут існує, оскільки  $\prec$  є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки  $\prec$  є рефлексивним відношенням.

*Навіть не обов’язково тут вимагати, щоб для  $(P, \prec)$  відношення  $\prec$  було антисиметричним.*

**Definition 0.1.7** Задано  $C$  – категорія.

Стрілочка  $f: X \rightarrow Y$  називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка  $g: Y \rightarrow X$ , для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти  $X, Y$  даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення:  $X \cong Y$ .

**Definition 0.1.8** Ендоморфізмом назвемо стрілочку  $f: X \rightarrow X$ . Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

**Автоморфізмом** назвемо ізоморфізм  $f$ , який є ендоморфізмом.

**Definition 0.1.9** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $A \rightarrow A$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об'єктів  $D$  міститься в наборі об'єктів  $C$   
 набір стрілок  $A \rightarrow B$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $A \rightarrow B$  в  $C$  для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$   
 композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $A, B$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $A, B$  в  $C$ , для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Монік

**Definition 0.2.1** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – ін'єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Для всіх  $z \in Z$  ми маємо  $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$ , тому за ін'єктивністю,  $\beta_1(z) = \beta_2(z)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.3** Зворотнє твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію  $C = \text{Div}$  підкатегорії  $\text{Grp}$ . Тут абелева група називається **подільною**, якщо  $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$ .

Оберемо об'єкти  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  із нашої категорії  $C$  та гомоморфізм  $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки  $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ . Стверджується, що  $\alpha$  – монік.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$  – морфізми в  $C$  та припустимо, що  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тоді існує елемент  $a \in A$ , для якого  $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$ . Ліворуч раціональне число, тож  $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$  для деяких  $r, s \in \mathbb{Z}$  та  $r \neq 0, s \neq 0$ . Оскільки  $A$  – подільна група, то існує для елемента  $a \in A$  та  $n = 2r$  існує  $b \in A$ , для якого  $a = nb$ . Тоді  $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$ .

Отже,  $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$ , а тому звідси  $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$ .

**Theorem 0.2.5** У категоріях  $\text{Set}, \text{Top}, \text{Grp}, \text{Rng}$  морфізм ін'єктивний  $\iff$  морфізм – монік.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – монік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – монік морфізм. Оберемо  $x_1, x_2 \in X$  та припустимо, що  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Покладемо  $z = 0 \in \mathbb{Z}$  та покладемо  $Z = \{z\}$  (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  як  $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$ . Тоді  $\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$ .

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$ . Таким чином,  $\alpha$  – ін'єктивний.

(Top). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину  $Z$  треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення  $\beta_1, \beta_2$  будуть уже неперервними через дискретність  $Z$ .

(Grp). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – монік морфізм. Розглянемо  $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$  – перший буде вкладенням,

другий буде тривіальним. Тоді  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\beta_1$  – тривіальне вкладення. Отже,  $\ker \alpha = \{e\}$ , а це означає ін'єктивність  $\alpha$ .

(Rng). Таке саме доведення. ■

### 0.2.2 Розщеплений монік

**Definition 0.2.6** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: X \rightarrow Y$  називається **розщепленим моніком**, якщо

$$\exists \beta: Y \rightarrow X: \beta\alpha = 1_X$$

Морфізм – розщеплений монік, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \curvearrowright x \xrightleftharpoons[\alpha]{\exists \beta} y$$

**Theorem 0.2.7** Кожний розщеплений монік – монік.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений монік в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\beta\alpha = 1_x$ .

Нехай  $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Тоді

$$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2.$$

■

**Theorem 0.2.8** У конкретній категорії кожний розщеплений монік – ін'єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений монік, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X$ . Тоді

$$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2.$$

■

**Remark 0.2.9** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.10** Розглянемо категорію Grp. Вкладення  $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим моніком.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений монік, тобто існує гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$ . Тоді  $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$ , тобто  $\beta(1) = 1$ , але це суперечність! Просто тому що  $\beta$  відображає на  $2\mathbb{Z}$ .

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

**Example 0.2.11** Розглянемо категорію Top. Оберемо тотожне відображення  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді  $\alpha$  – ін'єктивний, але не розщеплений монік.

Припустимо, що існує морфізм  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ . Тоді  $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ , однак множина  $\{0\}$  відкрита в  $\mathbb{R}$  з дискретною топологією, але не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що  $\beta$  – неперервне відображення.

**Theorem 0.2.12** Задано  $\alpha: X \rightarrow Y$  – морфізм в категорії Set.

$$\alpha \text{ – розщеплений монік} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\alpha$  – розщеплений монік. Оскільки Set – конкретна категорія, то звідси  $\alpha$  – ін'єктивний. Тепер нехай  $X = \emptyset$ . Тоді за умовою, існує  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$ . Тоді оскільки  $\beta$  – функція, то  $Y = \emptyset$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\alpha$  – ін'єктивний та  $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$ .

Нехай  $X \neq \emptyset$ , тобто існує елемент  $x_0 \in X$ . Оскільки  $\alpha$  – ін’єктивний, то  $\alpha|_{\text{Im } \alpha}: X \rightarrow \text{Im } \alpha$  буде задавати бієкцію, тож для кожного  $y \in \text{Im } \alpha$  існує єдиний елемент  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ . Це визначає функцію  $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$ , що розширюється до функції  $\beta: Y \rightarrow X$ , якщо покласти  $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$ . Для  $x \in X$  ми маємо  $\beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$ .

Нехай  $X = \emptyset$ , тоді  $Y = \emptyset$  та порожня функція  $\beta: Y \rightarrow X$  задовольняє  $\beta\alpha = 1_X$ . ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений монік} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{монік}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях ін’єктивність більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.

Але якщо слово ін’єктивний видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії  $\text{Set}$ , що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

### 0.2.3 Епікі

**Definition 0.2.13** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **епіком**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епік, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення моніка).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

**Theorem 0.2.14** У конкретній категорії кожний сюр’єктивний морфізм – епік.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр’єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Оберемо  $y \in Y$ . Оскільки  $\alpha$  – сюр’єктивне, то  $y = \alpha(x)$  для деякого  $x \in X$ . Тоді маємо  $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.15** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.16** Розглянемо категорію  $\text{Rng}$  та оберемо вкладення  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , яке не є сюр’єктивним. Але доведемо, що  $\alpha$  – епік.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  – морфізми з  $\text{Rng}$  та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді  $\beta_1(n) = \beta_2(n)$  для будь-якого цілого  $n \in \mathbb{Z}$ . При  $n \neq 0$  ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для  $m, n \in \mathbb{Z}$  при  $n \neq 0$  ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ .

**Theorem 0.2.17** У категорії  $\text{Set}$ ,  $\text{Top}$ ,  $\text{Grp}$  морфізм сюр’єктивний  $\iff$  морфізм – епік.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що сюр’єктивний морфізм – епік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – епік морфізм. Нехай  $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде характеристичною функцією для  $\text{Im } \alpha$  та нехай  $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде стало дорівнювати 1. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , тому за епічністю,  $\beta_1 = \beta_2$ . Із цього випливає, що  $\text{Im } \alpha = Y$ , що доводить сюр’єктивність  $\alpha$ .

(Top). Проводиться те саме доведення, як з  $\text{Set}$ . Тільки треба  $\alpha: X \rightarrow Y$  брати уже неперервне відображення, а на просторі  $\{0, 1\}$  задати не дискретну топологію, щоб  $\beta_1, \beta_2$  стали неперервними.

(Grp). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр’єктивний. Звідси

впливає, що  $[H : \text{Im } \alpha] > 1$ . Ми тоді доведемо, що  $\alpha$  – не епік морфізм.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] = 2$ . Нехай  $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – канонічний гомоморфізм та  $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – тривіальний гомоморфізм. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , але при цьому  $\beta_1 \neq \beta_2$ , оскільки  $\text{Im } \alpha \neq H$ . Тобто в даному випадку  $\alpha$  – не епік.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] > 2$ . Тоді існують два різних правих суміжних класи  $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$  та  $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$ , причому  $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$ . Покладемо  $b = h_1^{-1}h_2$  та зауважимо, що  $K_1b = K_2$ , а звідси  $K_2b^{-1} = K_1$ . Позначимо  $S_H$  за групу симетрії на  $H$  та оберемо бієкцію  $\sigma \in S_H$ , що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases} \text{ Можна зауважити, що } \sigma^2 = 1_H \text{ та } \sigma(kh) = k\sigma(h) \text{ для всіх } k \in \text{Im } \alpha, h \in H.$$

Для  $h \in H$  нехай  $\lambda_h$  буде елементом  $S_H$ , що заданий формулою  $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$ . Тоді звідси отримаємо  $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$  для всіх  $k \in \text{Im } \alpha$ .

Визначимо  $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$  як  $\beta_1(h) = \lambda_k$  та  $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$ . Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для  $k \in \text{Im } \alpha$  ми маємо

$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$ , а тому  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Із іншого боку,  $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$ . Тож звідси  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тобто і в цьому випадку  $\alpha$  – не епік. ■

## 0.2.4 Розщеплений епік

**Definition 0.2.18** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: X \rightarrow Y$  називається **розщепленим епіком**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епік, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого моніка). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xleftarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright^{1_y}$$

**Theorem 0.2.19** Кожний розщеплений епік – епік.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений епік в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\alpha\beta = 1_x$ .

Нехай  $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow z$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді

$$\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2. \quad \blacksquare$$

**Theorem 0.2.20** У конкретній категорії кожен розщеплений епік – сюр'єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений епік, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\alpha\beta = 1_Y$ . Нехай  $y \in Y$ , тоді покладемо  $x = \beta(y)$ . Звідси

$$\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y. \quad \blacksquare$$

**Remark 0.2.21** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.22** Розглянемо категорію  $\text{Grp}$  та визначимо морфізм  $\alpha: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , визначений як  $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$  та  $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$ . Це буде сюр'єктивний гомоморфізм. Оскільки  $1 \in \mathbb{Z}_2$  має порядок 2, то будь-який гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  зобов'язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином,  $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$ . Отже,  $\alpha$  – не розщеплений епік.

Можна аналогічні міркування провести для категорії  $\text{Rng}$ .

**Example 0.2.23** Розглянемо категорію  $\text{Top}$ . Маємо  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді  $\alpha$  – сюр'єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним моніком).

**Theorem 0.2.24** У категорії  $\text{Set}$  морфізм – розщеплений епік  $\iff$  морфізм сюр'єктивний.

**Proof.**

Залишилося довести у зворотний бік.

⇐ Дано:  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр’єктивний морфізм. Тобто для кожного  $y \in Y$  знайдеться  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ , а це визначає функцію  $\beta: Y \rightarrow X$ , яка задовольняє  $\alpha\beta = 1_Y$ . Отже,  $\alpha$  – розщеплений епік. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епік} \implies \text{сюр’єктивний} \implies \text{епік}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *сюр’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У категорії Set всі ці три терміни збігаються.

**0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми**

**Definition 0.2.25** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно монік та епік}$$

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x \quad \alpha\beta = 1_y$$

**Remark 0.2.26** Якщо  $\alpha$  – ізоморфізм, то морфізм  $\beta$  в означенні – єдиний та позначається за  $\alpha^{-1}$ .

**Definition 0.2.27** Задано  $C$  – категорія.

Об’єкти  $x, y$  називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha: x \rightarrow y \text{ – ізоморфізм}$$

Позначення:  $x \cong y$  (це справді відношення еквівалентності).

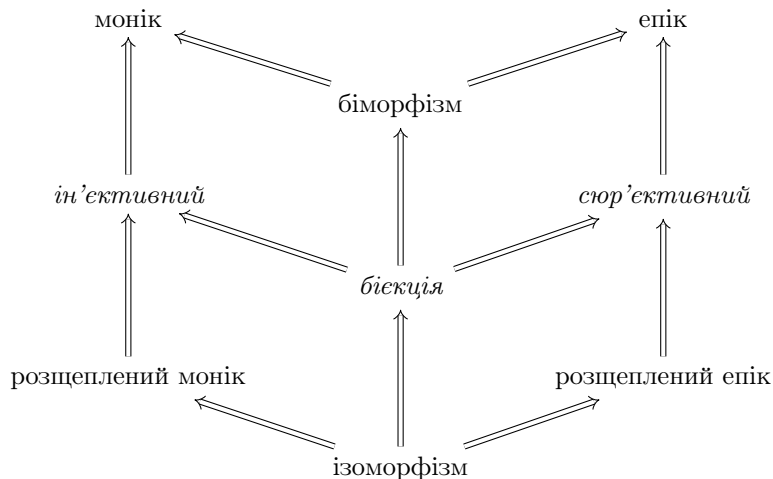
**Theorem 0.2.28** Морфізм – ізоморфізм  $\iff$  морфізм – розщеплений монік та розщеплений епік.

**Proof.**

⇒ *миттєво випливає з означення.*

⇐ Дано:  $\alpha$  – розщеплений монік та розщеплений епік. Тобто існують морфізми  $\beta, \gamma: y \rightarrow x$ , для яких  $\beta\alpha = 1_x$ ,  $\alpha\gamma = 1_y$ . Але тоді  $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$ . Отже,  $\alpha$  – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.



**Theorem 0.2.29** У категорії  $\text{Set}$ ,  $\text{Grp}$  біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

**Proof.**

( $\text{Set}$ ). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що  $\alpha$  – ізоморфізм. Оскільки  $\alpha$  – монік та епік, то в даній категорії  $\alpha$  – ін’єктивний та сюр’єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм  $\alpha^{-1}$ , для якого  $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$ ,  $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$ , що й доводить ізоморфізмість.

( $\text{Grp}$ ). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо  $\alpha$  – гомоморфізм, то  $\alpha^{-1}$  буде ним також. ■

**Remark 0.2.30** Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.

( $\text{Rng}$ ). Зауважимо, що  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  буде біморфізмом, але не бієкцією.

( $\text{Top}$ ). Тотожне відображення  $R \rightarrow R$ , з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).