

Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

18 лютого 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 Категорія C складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за X, Y, Z, \dots , а набір позначають за $\text{Ob}(C)$;
 - із набору **морфізмів**; морфізми позначають за f, g, h, \dots , а набір позначають за $\text{Hom}(C)$;
 - кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як $f: X \rightarrow Y$, де об’єкт X – область визначення, об’єкт Y – область значень;
 - кожний об’єкт X має **тотожний морфізм** $1_X: X \rightarrow X$;
 - для кожних морфізмів $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ існуватиме **композиція морфізмів** $g \circ f: X \rightarrow Z$.
- При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів $f: X \rightarrow Y$ виконано $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$;
- 2) для кожних трьох морфізмів $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$ виконується асоціативність композиції, тобто $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Example 0.1.3 Розглянемо Set – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$ – набір всіх множин;
 - $\text{Hom}(\text{Set})$ – набір всіх відображень;
 - тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$ задається як $x \mapsto x$;
 - композиція між $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\text{Ob}(\text{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі, $\text{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f: X \rightarrow Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y , то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.4 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

- 1) Grp – об’єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
- 2) Ring – об’єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
- 3) Top – об’єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
- 4) Man – об’єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

Example 0.1.5 Розглянемо моноїд M . Ми можемо утворити категорію M , яка містить єдиний об’єкт – це моноїд.

Example 0.1.6 Розглянемо так званий посет $(P, <)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\text{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i < j$. Композиція тут існує, оскільки $<$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $<$ є рефлексивним відношенням.

Навіть не обов’язково тут вимагати, щоб для $(P, <)$ відношення $<$ було антисиметричним.

Definition 0.1.7 Задано C – категорія.

Стрілочка $f: X \rightarrow Y$ називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка $g: Y \rightarrow X$, для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти X, Y даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення: $X \cong Y$.

Definition 0.1.8 Ендоморфізмом назвемо стрілочку $f: X \rightarrow X$. Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

Аутоморфізмом назвемо ізоморфізм f , який є ендоморфізмом.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $A \rightarrow A$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C , якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
 набір стрілок $A \rightarrow B$ в D міститься в наборі стрілок $A \rightarrow B$ в C для довільних об'єктів A, B із D
 композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок A, B в D збігається з набором стрілок A, B в C , для довільних об'єктів A, B із D

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Монік

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.3 Зворотнє твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію $C = \text{Div}$ підкатегорії Grp . Тут абелева група називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.

Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ із нашої категорії C та гомоморфізм $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker \alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – монік.

Нехай $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$ – морфізми в C та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$.

Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях $\text{Set}, \text{Top}, \text{Grp}, \text{Rng}$ морфізм ін'єктивний \iff морфізм – монік.

Proof.

Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – монік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – монік морфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді $\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.

За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін'єктивний.

(Top). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z .

(Grp). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – монік морфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$ – перший буде вкладенням,

другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker \alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивність α .

(Rng). Таке саме доведення. ■

0.2.2 Розщеплений монік

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: X \rightarrow Y$ називається **розщепленим моніком**, якщо

$$\exists \beta: Y \rightarrow X: \beta\alpha = 1_X$$

Морфізм – розщеплений монік, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \circ \alpha \xrightarrow{\exists \beta} y$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений монік – монік.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений монік в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$.

Нехай $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді

$$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2.$$
■

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожний розщеплений монік – ін'єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений монік, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Тоді

$$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2.$$
■

Remark 0.2.9 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію Grp. Вкладення $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим моніком.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений монік, тобто існує гомоморфізм $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію Top. Оберемо тотожне відображення $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді α – ін'єктивний, але не розщеплений монік.

Припустимо, що існує морфізм $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$. Тоді $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в \mathbb{R} з дискретною топологією, але не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha: X \rightarrow Y$ – морфізм в категорії Set.

$$\alpha \text{ – розщеплений монік} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.

\Rightarrow Дано: α – розщеплений монік. Оскільки Set – конкретна категорія, то звідси α – ін'єктивний. Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

\Leftarrow Дано: α – ін'єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.

Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін’єктивний, то $\alpha|_{\text{Im } \alpha}: X \rightarrow \text{Im } \alpha$ буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \text{Im } \alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$, що розширюється до функції $\beta: Y \rightarrow X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.

Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta: Y \rightarrow X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений монік} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{монік}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях ін’єктивність більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.

Але якщо слово ін’єктивний видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії Set , що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епікі

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **епіком**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епік, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення моніка).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр’єктивний морфізм – епік.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр’єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію Rng та оберемо вкладення $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, яке не є сюр’єктивним. Але доведемо, що α – епік.

Нехай $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ – морфізми з Rng та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категорії Set , Top , Grp морфізм сюр’єктивний \iff морфізм – епік.

Proof.

Ми вже знаємо, що сюр’єктивний морфізм – епік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – епік морфізм. Нехай $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде характеристичною функцією для $\text{Im } \alpha$ та нехай $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\text{Im } \alpha = Y$, що доводить сюр’єктивність α .

(Top). Проводиться те саме доведення, як з Set . Тільки треба $\alpha: X \rightarrow Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0, 1\}$ задати не дискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неперервними.

(Grp). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр’єктивний. Звідси

впливає, що $[H : \text{Im } \alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епік морфізм.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] = 2$. Нехай $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq \beta_2$, оскільки $\text{Im } \alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епік.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1b = K_2$, а звідси $K_2b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо бієкцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases} \text{ Можна зауважити, що } \sigma^2 = 1_H \text{ та } \sigma(kh) = k\sigma(h) \text{ для всіх } k \in \text{Im } \alpha, h \in H.$$

Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H , що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \text{Im } \alpha$.

Визначимо $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для $k \in \text{Im } \alpha$ ми маємо

$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку α – не епік. ■

0.2.4 Розщеплений епік

Definition 0.2.18 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: X \rightarrow Y$ називається **розщепленим епіком**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епік, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого моніка). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xleftarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright^{1_y}$$

Theorem 0.2.19 Кожний розщеплений епік – епік.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений епік в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\alpha\beta = 1_x$.

Нехай $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow z$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді

$$\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2. \quad \blacksquare$$

Theorem 0.2.20 У конкретній категорії кожний розщеплений епік – сюр'єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений епік, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси

$$\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y. \quad \blacksquare$$