Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

12 лютого 2024 р.

Зміст

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 Категорія C складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $X, Y, Z, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів**; морфізми позначають за $f, g, h, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Hom}(C)$;
– кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як $f\colon X \to Y$, де об'єкт X – область визначення, об'єкт Y – область значень;
– кожний об'єкт X має **тотожний морфізм** $1_X\colon X \to X$;
– для кожних морфізмів $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ існуватиме **композиція морфізмів** $g \circ f\colon X \to Z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $f\colon X \to Y$ виконано $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$;
2) для кожних трьох морфізмів $f\colon W \to X, g\colon X \to Y, h\colon Y \to Z$ виконується асоціативність композиції, тобто $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Example 0.1.2 Розглянемо Set – це буде категорія, яка складається з наступного:
– Ob(Set) – набір всіх множин;
– Hom(Set) – набір всіх відображень;
– тотожне відображення $1_X\colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f\colon X \to Y$ та $g\colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що Ob(Set) – це саме <u>набір</u> всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathrm{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f\colon X \to Y$ – буде, насправді, <u>множиною</u>. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.