Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 **Категорія** C складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $X, Y, Z, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів**; морфізми позначають за $f, g, h, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Hom}(C)$;
– кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як $f\colon X \to Y$, де об'єкт X – область визначення, об'єкт Y – область значень;
– кожний об'єкт X має **тотожний морфізм** $1_X\colon X \to X$;
– для кожних морфізмів $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ існуватиме **композиція морфізмів** $g \circ f\colon X \to Z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $f\colon X \to Y$ виконано $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$;
2) для кожних трьох морфізмів $f\colon W \to X, g\colon X \to Y, h\colon Y \to Z$ виконується асоціативність композиції, тобто $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Example 0.1.3 Розглянемо Set – це буде категорія, яка складається з наступного:
– $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ – набір всіх множин;
– $\mathrm{Hom}(\mathrm{Set})$ – набір всіх відображень;
– тотожне відображення $1_X\colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f\colon X \to Y$ та $g\colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ – це саме <u>набір</u> всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathrm{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f\colon X \to Y$ – буде, насправді, <u>множиною</u>. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.4 Розглянемо стисло ще приклади категорій:
1) Grp – об'єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
2) Ring – об'єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
3) Top – об'єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
4) Man – об'єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

Example 0.1.5 Розглянемо моноїд M. Ми можемо утворити категорію $\mathcal{M}$, яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.6 Розглянемо так званий посет $(P, \prec)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\mathrm{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки $\prec$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $\prec$ є рефлексивним відношенням.
Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для $(P, \prec)$ відношення $\prec$ було антисиметричним.

Definition 0.1.7 Задано C – категорія.
Стрілочка $f\colon X \to Y$ називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка $g\colon Y \to X$, для якої

$$f \circ g = 1_Y \qquad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об'єкти X, Y даної категорії називаються **ізоморфними**.
Позначення: $X \cong Y$.

Definition 0.1.8 **Ендоморфізмом** назвемо стрілочку $f\colon X \to X$. Тобто це стрілка між двома однаковими об'єктами.
Автоморфізмом назвемо ізоморфім f, який є ендоморфізмом.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $A \to A$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C, якщо

$$\begin{aligned} &\text{набір об'єктів } D \text{ міститься в наборі об'єктів } C \\ &\text{набір стрілок } A \to B \text{ в } D \text{ міститься в наборі стрілок } A \to B \text{ в } C \text{ для довільних об'єктів } A, B \text{ із } D \\ &\text{композиція двох морфізмів в } D \text{ задається так само, як і в } C \end{aligned}$$

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

$$\text{набір стрілок } A, B \text{ в } D \text{ збігається з набором стрілок } A, B \text{ в } C, \text{ для довільних об'єктів } A, B \text{ із } D$$

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Монік

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha \colon x \to y$ називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift right, "\beta_1"'] & x \arrow[r, "\alpha"] & y \end{tikzcd}$$