

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

10 березня 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1 Категорія  $C$**  складається з наступних компонент:

- із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за  $x, y, z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
- із набору **морфізмів із  $x$  в  $y$**   $C(x, y)$  для всіх  $x, y \in C$ ; морфізми позначають за  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Позначення  $\alpha: x \rightarrow y$  або  $x \xrightarrow{\alpha} y$  означають  $\alpha$  – морфізм із  $x$  в  $y$ ; ми називаємо  $x$  **джерелом** та  $y$  **ціллю**;

- кожен об'єкт  $x$  має **тотожний морфізм**  $1_x: x \rightarrow x$ ;
- для кожних морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y, \beta: y \rightarrow z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $\beta\alpha: x \rightarrow z$ .

При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $\alpha: x \rightarrow y$  виконано  $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $\alpha: w \rightarrow x, \beta: x \rightarrow y, \gamma: y \rightarrow z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Remark 0.1.3** Морфізм  $1_x$  для кожного об'єкта  $x$  – єдиний.

**Example 0.1.4** Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
  - $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх функцій;
  - тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
  - композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Example 0.1.5** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

Категорія	Об'єкти	Морфізми
<b>Grp</b>	групи	гомоморфізми груп
<b>Ab</b>	абелеві групи	гомоморфізми груп
<b>Rng</b>	кілець	гомоморфізми кілець
<b>Ring</b>	кілець з одиницею	гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю
$R$ <b>Mod</b>	$R$ -модуль	$R$ -лінійне відображення
<b>Top</b>	топологічні простори	неперервні відображення
<b>Met</b>	метричні простори	неперервні відображення
<b>Man</b>	гладкі многовиди	гладкі відображення

**Example 0.1.6** Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньою виглядати. Категорія **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:



Так само є категорії **4, 5, ...**

**Example 0.1.7** Розглянемо моноїд  $M$ . Ми можемо утворити категорію  $\mathcal{M}$ , яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

**Example 0.1.8** Розглянемо так званий посет  $(P, \prec)$  (partially ordered set). Скажемо, що  $\text{Ob}(P) = P$  та  $P(i, j)$  – це будуть тільки ті стрілки, для яких  $i \prec j$ . Композиція тут існує, оскільки  $\prec$  є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки  $\prec$  є рефлексивним відношенням.

*Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для  $(P, \prec)$  відношення  $\prec$  було антисиметричним.*

**Definition 0.1.9** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(x, y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $x \rightarrow x$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об'єктів  $D$  міститься в наборі об'єктів  $C$   
набір стрілок  $x \rightarrow y$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $x \rightarrow y$  в  $C$  для довільних об'єктів  $x, y$  із  $D$   
композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $x, y$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $x, y$  в  $C$ , для довільних об'єктів  $x, y$  із  $D$

**Example 0.1.12** Зокрема маємо кілька прикладів:

- 1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
- 2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

**Definition 0.1.13** Категорія  $C$  називається **малою**, якщо

класи  $\text{Ob}(C)$ ,  $\text{Hom}(C)$  – множини.

Інакше категорія  $C$  називатиметься **великою**.

Категорія  $C$  називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів  $x, y$  клас  $C(x, y)$  – множина

**Example 0.1.14** Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

**Definition 0.1.15** Категорія  $C$  називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізми – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

**Example 0.1.16** Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Мономорфізм

**Definition 0.2.1** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Часто мономорфізми позначають як  $\alpha: x \rightarrowtail y$ .

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – ін’єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Для всіх  $z \in Z$  ми маємо  $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$ , тому за ін’єктивністю,  $\beta_1(z) = \beta_2(z)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\alpha$  – мономорфізм. ■

**Remark 0.2.3** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо  $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$ .

Оберемо об’єкти  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  із нашої категорії **Div** та гомоморфізм  $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , який є сюр’єктивним. Даний морфізм не ін’єктивний, оскільки  $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ . Стверджується, що  $\alpha$  – мономорфізм.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$  – морфізми в **Div** та припустимо, що  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тоді існує елемент  $a \in A$ , для якого  $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$ . Ліворуч раціональне число, тож  $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$  для деяких  $r, s \in \mathbb{Z}$  та  $r \neq 0, s \neq 0$ . Оскільки  $A$  – подільна група, то існує для елемента  $a \in A$  та  $n = 2r$  існує  $b \in A$ , для якого  $a = nb$ . Тоді  $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$ .

Отже,  $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$ , а тому звідси  $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$ .

**Theorem 0.2.5** У категоріях **Set, Top, Grp, Rng** морфізм ін’єктивний  $\iff$  морфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що ін’єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – мономорфізм. Оберемо  $x_1, x_2 \in X$  та припустимо, що  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Покладемо  $z = 0 \in \mathbb{Z}$  та покладемо  $Z = \{z\}$  (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  як  $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$ . Тоді

$$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$ . Таким чином,  $\alpha$  – ін’єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину  $Z$  треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення  $\beta_1, \beta_2$  будуть уже неперервними через дискретність  $Z$ .

(**Grp**). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – мономорфізм. Розглянемо  $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$  – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\beta_1$  – тривіальне вкладення. Отже,  $\ker \alpha = \{e\}$ , а це означає ін’єктивність  $\alpha$ .

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

## 0.2.2 Розщеплений мономорфізм

**Definition 0.2.6** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **розщепленим мономорфізмом (split monic)**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \curvearrowright x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y$$

**Theorem 0.2.7** Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\beta\alpha = 1_x$ . Нехай  $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Тоді  $\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$ . ■

**Theorem 0.2.8** У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін’єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X$ . Припустимо  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Тоді  $x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$ . ■

**Remark 0.2.9** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.10** Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення  $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  – ін’єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$ . Тоді  $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$ , тобто  $\beta(1) = 1$ , але це суперечність! Просто тому що  $\beta$  відображає на  $2\mathbb{Z}$ .

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.11** Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді  $\alpha$  – ін’єктивний, але не розщеплений мономорфізм.

Припустимо, що існує морфізм  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ . Тоді  $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ , однак множина  $\{0\}$  відкрита в  $\mathbb{R}$  з дискретною топологією, але  $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$  не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що  $\beta$  – неперервне відображення.

**Theorem 0.2.12** Задано  $\alpha: X \rightarrow Y$  – морфізм в категорії **Set**.

$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін’єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\alpha$  – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси  $\alpha$  – ін’єктивний.

Тепер нехай  $X = \emptyset$ . Тоді за умовою, існує  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$ . Тоді оскільки  $\beta$  – функція, то  $Y = \emptyset$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\alpha$  – ін’єктивний та  $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$ .

Нехай  $X \neq \emptyset$ , тобто існує елемент  $x_0 \in X$ . Оскільки  $\alpha$  – ін’єктивний, то  $\alpha: X \rightarrow \text{Im } \alpha$ , буде задавати бієкцію, тож для кожного  $y \in \text{Im } \alpha$  існує єдиний елемент  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ . Це визначає функцію  $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$ , що розширюється до функції  $\beta: Y \rightarrow X$ , якщо покласти  $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$ . Для  $x \in X$  ми маємо  $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$ .

Нехай  $X = \emptyset$ , тоді  $Y = \emptyset$  та порожня функція  $\beta: Y \rightarrow X$  задовольняє  $\beta\alpha = 1_X$ . ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *ін’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *ін’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

### 0.2.3 Епіморфізм

**Definition 0.2.13** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **епіморфізмом (epic)**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

Часто епіморфізми позначають як  $\alpha: x \twoheadrightarrow y$ .

**Theorem 0.2.14** У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр'єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Оберемо  $y \in Y$ . Оскільки  $\alpha$  – сюр'єктивне, то  $y = \alpha(x)$  для деякого  $x \in X$ . Тоді маємо  $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.15** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.16** Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що  $\alpha$  – епіморфізм.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  – морфізми з **Rng** та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді  $\beta_1(n) = \beta_2(n)$  для будь-якого цілого  $n \in \mathbb{Z}$ . При  $n \neq 0$  ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для  $m, n \in \mathbb{Z}$  при  $n \neq 0$  ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ .

**Theorem 0.2.17** У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний  $\iff$  морфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – епіморфізм морфізм. Нехай  $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде характеристичною функцією для  $\text{Im } \alpha$  та нехай  $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$  буде стало дорівнювати 1. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , тому за епічністю,  $\beta_1 = \beta_2$ . Із цього випливає, що  $\text{Im } \alpha = Y$ , що доводить сюр'єктивність  $\alpha$ .

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з **Set**. Тільки треба  $\alpha: X \rightarrow Y$  брати уже неперервне відображення, а на просторі  $\{0, 1\}$  задати не дискретну топологію, щоб  $\beta_1, \beta_2$  стали неперервними.

(**Grp**). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що  $[H : \text{Im } \alpha] > 1$ . Ми тоді доведемо, що  $\alpha$  – не епіморфізм.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] = 2$ . Нехай  $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – канонічний гомоморфізм та  $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$  – тривіальний гомоморфізм. Тоді  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ , але при цьому  $\beta_1 \neq \beta_2$ , оскільки  $\text{Im } \alpha \neq H$ . Тобто в даному випадку  $\alpha$  – не епіморфізм.

Випадок  $[H : \text{Im } \alpha] > 2$ . Тоді існують два різних правих суміжних класи  $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$  та  $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$ , причому  $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$ . Покладемо  $b = h_1^{-1}h_2$  та зауважимо, що  $K_1b = K_2$ , а звідси  $K_2b^{-1} = K_1$ . Позначимо  $S_H$  за групу симетрії на  $H$  та оберемо бієкцію  $\sigma \in S_H$ , що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$$

Можна зауважити, що  $\sigma^2 = 1_H$  та  $\sigma(kh) = k\sigma(h)$  для всіх  $k \in \text{Im } \alpha, h \in H$ .

Для  $h \in H$  нехай  $\lambda_h$  буде елементом  $S_H$ , що заданий формулою  $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$ . Тоді звідси отримаємо  $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$  для всіх  $k \in \text{Im } \alpha$ .

Визначимо  $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$  як  $\beta_1(h) = \lambda_k$  та  $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$ . Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для  $k \in \text{Im } \alpha$  ми маємо

$$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k), \text{ а тому } \beta_1\alpha = \beta_2\alpha. \text{ Із іншого боку, } \beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e). \text{ Тож звідси } \beta_1 \neq \beta_2. \text{ Тобто і в цьому випадку } \alpha \text{ – не епіморфізм.} \quad \blacksquare$$

## 0.2.4 Розщеплений епіморфізм

**Definition 0.2.18** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого мноморфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright 1_y$$

**Theorem 0.2.19** Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\alpha\beta = 1_y$ . Нехай  $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow z$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ . Тоді  $\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$ . ■

**Theorem 0.2.20** У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр’єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\alpha\beta = 1_Y$ . Нехай  $y \in Y$ , тоді покладемо  $x = \beta(y)$ . Звідси  $\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$ . ■

**Remark 0.2.21** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.22** Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм  $\alpha: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , визначений як  $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$  та  $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$ . Це буде сюр’єктивний гомоморфізм. Оскільки  $1 \in \mathbb{Z}_2$  має порядок 2, то будь-який гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  зобов’язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином,  $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$ . Отже,  $\alpha$  – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.23** Розглянемо категорію **Top**. Маємо  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді  $\alpha$  – сюр’єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

**Theorem 0.2.24** У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм  $\iff$  морфізм сюр’єктивний.

**Proof.**

Залишилося довести у зворотний бік.

☞ Дано:  $\alpha: X \rightarrow Y$  – сюр’єктивний морфізм. Тобто для кожного  $y \in Y$  знайдеться  $\beta(y) \in X$ , для якого  $\alpha(\beta(y)) = y$ , а це визначає функцію  $\beta: Y \rightarrow X$ , яка задовольняє  $\alpha\beta = 1_Y$ . Отже,  $\alpha$  – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \text{сюр’єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *сюр’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

## 0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

**Definition 0.2.25** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x \quad \alpha\beta = 1_y$$

**Remark 0.2.26** Якщо  $\alpha$  – ізоморфізм, то морфізм  $\beta$  в означенні – єдиний та позначається за  $\alpha^{-1}$ .

**Definition 0.2.27** Задано  $C$  – категорія.

Об'єкти  $x, y$  називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha: x \rightarrow y - \text{ізоморфізм}$$

Позначення:  $x \cong y$  (це справді відношення еквівалентності).

**Theorem 0.2.28** Морфізм – ізоморфізм  $\iff$  морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

**Proof.**

$\Rightarrow$  миттєво випливає з означення.

$\Leftarrow$  Дано:  $\alpha$  – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми  $\beta, \gamma: y \rightarrow x$ , для яких  $\beta\alpha = 1_x$ ,  $\alpha\gamma = 1_y$ . Але тоді  $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$ . Отже,  $\alpha$  – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.



**Theorem 0.2.29** У категорії **Set**, **Grp** біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

**Proof.**

(**Set**). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що  $\alpha$  – ізоморфізм. Оскільки  $\alpha$  – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії  $\alpha$  – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм  $\alpha^{-1}$ , для якого  $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$ ,  $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$ , що й доводить ізоморфізмість.

(**Grp**). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо  $\alpha$  – гомоморфізм, то  $\alpha^{-1}$  буде ним також. ■

**Remark 0.2.30** Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.

(**Rng**). Зауважимо, що  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  буде біморфізмом, але не бієкцією.

(**Top**). Тотожне відображення  $R \rightarrow R$ , з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

### 0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

**Definition 0.3.1** Задано  $C$  – категорія та  $c \in C$  – об'єкт.

Об'єкт  $c$  називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \alpha: c \rightarrow x$$

Об'єкт  $c$  називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \beta: x \rightarrow c$$



**Example 0.3.2** Зокрема в категорії **Set**, **Top** ініціальним об'єктом буде  $\emptyset$ ; термінальним об'єктом буде  $\{x\}$  (будь-який сінглтон).

**Example 0.3.3** У категоріях **Grp**, **Rng**,  ${}_R\mathbf{Mod}$  ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде  $\{e\}$ , де  $e$  – нейтральний елемент.

**Example 0.3.4** У категорії **Ring** ініціальним об'єктом буде кільце  $\mathbb{Z}$ , а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце  $\{0\}$ .

**Theorem 0.3.5** Задано  $C$  – категорія,  $c_1, c_2 \in C$  – обидва ініціальні. Тоді  $c_1 \cong c_2$ .

**Proof.**

За умовою,  $c_1$  – ініціальний, тоді для об'єкта  $c_1$  існує єдиний морфізм  $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$ . Аналогічно,  $c_2$  – ініціальний, тоді для об'єкта  $c_1$  існує єдиний морфізм  $\beta: c_2 \rightarrow c_1$ . Розглянемо композицію  $\beta\alpha: c_1 \rightarrow c_1$  – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності  $\alpha, \beta$ . У категорії точно існує морфізм  $1_{c_1}: c_1 \rightarrow c_1$  – отже, в силу єдиності такого морфізму,  $\beta\alpha = 1_{c_1}$ . Аналогічно доводиться, що  $\alpha\beta = 1_{c_2}$ . Значить,  $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$  буде ізоморфізмом. ■

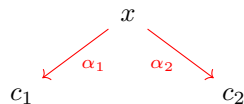
**Theorem 0.3.6** Задано  $C$  – категорія,  $d_1, d_2 \in C$  – обидва термінальні. Тоді  $d_1 \cong d_2$ .

*Вправа: довести.*

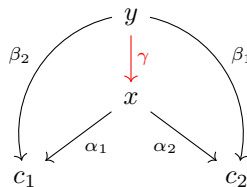
## 0.4 Добуток

**Definition 0.4.1** Задано  $C$  – категорія та  $\{c_1, c_2\}$  – сім'я об'єктів  $C$ . Сформуємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{pr}}$  таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ , де  $x$  – об'єкт в  $C$  та  $\alpha_1: x \rightarrow c_1, \alpha_2: x \rightarrow c_2$  – морфізми в  $C$ ;



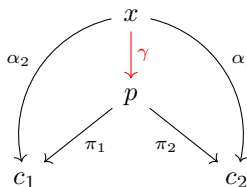
морфізмом між об'єктами  $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\}) \rightarrow (y, \{\beta_1, \beta_2\})$  буде морфізм  $\gamma: x \rightarrow y$ , для якого  $\beta_1\gamma = \alpha_1, \beta_2\gamma = \alpha_2$ ;



композицією морфізмів буде композиція, як в категорії  $C$ .

**Добутком** сім'ї  $\{c_1, c_2\}$  називають термінальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pr}}$ .

Позначимо термінальний об'єкт за  $(p, \{\pi_1, \pi_2\})$ . Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта  $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$  існує єдиний морфізм між  $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$  та  $(p, \{\pi_1, \pi_2\})$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$  в категорії  $C$ , для якого  $\pi_1\gamma = \alpha_1, \pi_2\gamma = \alpha_2$ .



Використовується позначення  $p = c_1 \times c_2$ ; морфізми  $\pi_1: c_1 \times c_2 \rightarrow c_1, \pi_2: c_1 \times c_2 \rightarrow c_2$  називаються **проективними морфізмами**.

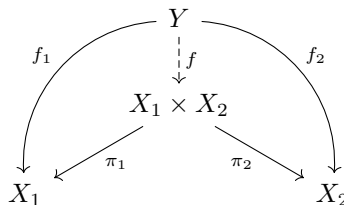
**Remark 0.4.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії  $C$  добуток деякої сім'ї об'єктів  $\{c_i, i \in I\}$ . Позначення:  $p = \prod_{i \in I} c_i$ .

**Definition 0.4.3** Задано  $C$  – категорія та  $X_1, X_2 \in C$  – об'єкти.

**Добутком**  $X_1, X_2$  називають об'єкт  $X \in C$ , що оснащений парою морфізмів  $\pi_1: X \rightarrow X_1$  та  $\pi_2: X \rightarrow X_2$ , що є так званими **проективними морфізмами**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: Y \rightarrow X_1, f_2: Y \rightarrow X_2 : \exists! f: Y \rightarrow X : \\ f_1 = \pi_1 f \quad f_2 = \pi_2 f$$

Позначення:  $X = X_1 \times X_2$ .



**Remark 0.4.4** Аналогічним чином можна визначити в категорії  $C$  **добуток**  $X_i, i \in I$  (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення  $X = \prod_{i \in I} X_i$ .

**Example 0.4.5** Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$ . Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій  $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  таких, що  $f(i) \in X_i$  для всіх  $i \in I$ . Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного  $i \in I$  визначимо проєкцію  $\pi_i: P \rightarrow X_i$  таким чином:  $\pi_i(f) = f(i)$ .

Доведемо, що пара  $(P, \{\pi_i\})$  буде утворювати добуток сім'ї  $\{X_i\}$  (у категоріальному сенсі).

**Proof.**

Нехай  $Y$  – об'єкт з морфізмами  $\alpha_i: Y \rightarrow X_i$ . Хочемо знайти єдиний морфізм  $\gamma: Y \rightarrow P$ , щоб  $\alpha_i = \pi_i \gamma$ . Покладемо  $\gamma: Y \rightarrow P$  таким чином:  $\forall y \in Y : \gamma(y)$  буде функцією  $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ , причому

$\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$ . Тоді  $\pi_i \gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$ , тобто звідси  $\pi_i \gamma = \alpha_i$  для всіх  $i \in I$ .

Припустимо, що існує функція  $\gamma': Y \rightarrow P$ , для якої  $\pi_i \gamma' = \alpha_i$ . Тобто для кожного  $y \in Y$  та кожного  $i \in I$  виконано  $\gamma'(y)_i = \alpha_i(y)$ . Але тоді

$\gamma'(y)_i = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i \gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)_i$ . Суперечність! ■

**Example 0.4.6** Будемо в категорії **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний  $X_i$  тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток  $P$  – це буде група зі покомпонентним множенням:  $(fg)(i) = f(i)g(i)$ . Це ще називають (**зовнішнім**) **прямим добутком груп**. Проективні відображення  $\pi_i$  будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**, **Mod** аналогічно все.

**Example 0.4.7** Залишилася категорія **Top**.

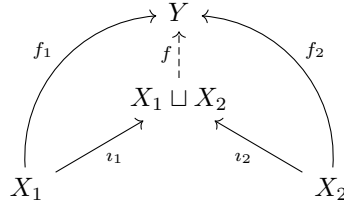
## 0.5 Кодобуток

**Definition 0.5.1** Задано  $C$  – категорія та  $X_1, X_2 \in C$  – об'єкти.

**Кодобутком**  $X_1, X_2$  називають об'єкт  $X \in C$ , що оснащений парою морфізмів  $\iota_1: X_1 \rightarrow X$  та  $\iota_2: X_2 \rightarrow X$ , що є так званими **морфізмами вкладень**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: X_1 \rightarrow Y, f_2: X_2 \rightarrow Y : \exists! f: X \rightarrow Y : \\ f_1 = f \iota_1 \quad f_2 = f \iota_2$$

Позначення:  $X = X_1 \sqcup X_2$ .



**Remark 0.5.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії  $C$  **кодобуток**  $X_i, i \in I$  (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення  $X = \coprod_{i \in I} X_i$ .

**Example 0.5.3** Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$  (якусь довільну). Визначимо множину  $Q$  ось так:  $Q = \bigsqcup_i X'_i$ , де в цьому випадку  $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$  для всіх  $i$ .

Причому варто зауважити, що  $X'_i$  дійсно неперетинні, а також  $X'_i \cong X_i$ . Визначимо відображення  $\iota_i: X_i \rightarrow Q$  таким чином:  $\iota_i(x) = (x, i)$ .

Доведемо, що пара  $(Q, \{\iota_i\})$  буде утворювати кодобуток сім'ї  $\{X_i\}$  (у категоріальному сенсі).

**Proof.**

Створімо нову категорію  $\mathbf{D}_{\text{сорг}}$ , яка функціонує ось таким чином:

об'єктами будуть пари  $(X, \{\alpha_i\})$ , де  $X$  – об'єкт категорії **Set** та  $\alpha_i: X_i \rightarrow X$  – відображення; морфізмом між  $(X, \{\alpha_i\})$  та  $(Y, \{\beta_j\})$  буде відображення  $\gamma: X \rightarrow Y$ , для якого  $\gamma \circ \alpha_i = \beta_i$ , причому це для всіх  $i$ . Це дозволяє для всіх  $i$  зробити діаграму комутативною.

Так ось, нам треба довести, що наша визначена пара  $(Q, \{\iota_i\})$  буде ініціальним об'єктом.

Нехай  $(X, \{\alpha_i\})$  – будь-який об'єкт  $\mathbf{D}_{\text{сорг}}$ . Визначимо відображення  $\gamma: Q \rightarrow X$  ось таким чином:  $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$ . Зауважимо, що для всіх  $i$  та всіх  $x \in X$  ми маємо, що

$$\gamma \circ \iota_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x).$$

Значить,  $\gamma$  буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.

Оберемо морфізм  $\gamma'$ , який діє між двома об'єктами, тобто  $(Q, \{\iota_i\})$  та  $(X, \{\alpha_i\})$ . Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність  $\gamma' \circ \iota_i = \alpha_i$  для всіх  $i$ . Проте з іншого боку,  $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$ . Значить,  $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \iota_i(x) = \gamma'((x, i))$ . ■

**Example 0.5.4** Будемо в категорії **Top**. Як і в категорії **Set**, розглянемо сім'ю множин  $\{X_i, i \in I\}$  (тільки тут вже топологічні простори). Визначимо множину  $Q$  так само, як було вище. На ній задається така топологія:  $U$  – відкрита в  $Q \iff \iota_i^{-1}(U)$  – відкрита в  $X_i$  для всіх  $i$ . Тоді всі функції  $\iota_i: X_i \rightarrow Q$ , як було визначено вище, будуть неперервними. Далі аналогічним чином доводимо, що пара  $(Q, \{\iota_i\})$  утворює кодобуток.

## 0.6 Зрівняльник

**Definition 0.6.1** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$  – два морфізми.

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

Сформуємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$  таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, \alpha)$ , де  $x$  – об'єкт категорії  $C$  та  $\alpha: x \rightarrow a$  – морфізм в  $C$ , щоб  $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \alpha$ ;

$$x \xrightarrow{\alpha} a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

морфізмом між об'єктами  $(x, \alpha) \rightarrow (y, \beta)$  буде морфізм  $\gamma: x \rightarrow y$  категорії  $C$ , для якого  $\beta \gamma = \alpha$ ;

$$\begin{array}{ccccc}
x & & & & \\
\downarrow \gamma & \searrow \alpha & & & \\
& & a & \xrightleftharpoons[\lambda_2]{\lambda_1} & b \\
& \nearrow \beta & & & \\
y & & & & 
\end{array}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії  $C$ .

**Зрівняльником** (або **equalizer**)  $\lambda_1, \lambda_2$  будемо називати термінальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ .

Позначимо термінальний об'єкт за  $(p, \iota)$ . Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта  $(x, \alpha)$  існує єдиний морфізм між  $(x, \alpha)$  та  $(p, \iota)$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$  в категорії  $C$ , для якого  $\iota\gamma = \alpha$  – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{array}{ccccc}
x & & & & \\
\downarrow \exists! \gamma & \searrow \alpha & & & \\
& & a & \xrightleftharpoons[\lambda_2]{\lambda_1} & b \\
& \nearrow \iota & & & \\
p & & & & 
\end{array}$$

**Example 0.6.2** Розглянемо категорію **Set**. Нехай  $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$  – два відображення. Покладемо  $P = \{a \in A \mid \lambda_1(a) = \lambda_2(a)\}$  та  $\iota: P \rightarrow A$  – вкладення. Тоді  $\lambda_1\iota = \lambda_2\iota$  (тобто звідси  $(P, \iota)$  буде об'єктом категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ , який був зазначений вище). Стверджується, що  $(P, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ . Нехай  $(X, \alpha)$  – довільний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ . Для кожного  $x \in X$  ми маємо  $\lambda_1(\alpha(x)) = \lambda_1\alpha(x) = \lambda_2\alpha(x) = \lambda_2(\alpha(x))$ , тобто  $\text{Im } \alpha \subset P$ . Оберемо відображення  $\gamma: X \rightarrow P$  так, що  $\gamma = \alpha$ . Тоді звідси  $\iota\gamma = \alpha$ , тобто  $\gamma$  – морфізм між об'єктами  $(X, \alpha) \rightarrow (P, \iota)$ .

Оскільки  $\iota$  – ін'єктивний (як вкладення), то тоді це мономорфізм. Отже,  $\gamma$  – єдиний такий морфізм.

**Example 0.6.3** Розглянемо категорію **Top**. Нехай  $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$  – неперервні відображення. Визначимо  $P, \iota$  так само, як в попередньому прикладі (оскільки  $P \subset A$ , то можна визначити топологічний підпростір). Таким чином,  $\iota$  уже буде неперервним. Далі так само доводимо, що  $(P, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ .

**Example 0.6.4** Розглянемо категорію **Grp**. Нехай  $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$  – два гомоморфізми груп та  $P$  – така сама множина, що в попередньому прикладі, яка є підгрупою  $A$ , тож  $\iota: P \rightarrow A$  (знову вкладення) – гомоморфізм груп. Далі так само доводимо, що  $(P, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Аналогічно для категорій **Rng**,  $\mathbf{R}$  **Mod**.

**Proposition 0.6.5** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$  – два морфізми. Припустимо, що  $(p, \iota)$  – зрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ . Тоді  $\iota$  – мономорфізм.

**Proof.**

Нехай  $\beta_1, \beta_2: x \rightarrow p$  – морфізми категорії  $C$ , для яких  $\iota\beta_1 = \iota\beta_2$ . Для зручності позначу  $\iota\beta_1 = \alpha$ .

Оскільки  $(p, \iota)$  – об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ , ми маємо наступне:

$$\lambda_1\alpha = (\lambda_1\iota)\beta_1 = (\lambda_2\iota)\beta_1 = \lambda_2\alpha.$$

Отже,  $(x, \alpha)$  – також об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
x & & & & \\
\downarrow \beta_2 & \searrow \alpha & & & \\
& & a & \xrightleftharpoons[\lambda_2]{\lambda_1} & b \\
& \nearrow \beta_1 & & & \\
& \nearrow \iota & & & \\
p & & & & 
\end{array}$$

За початковими припущеннями,  $\iota\beta_1 = \alpha$ ,  $\iota\beta_2 = \alpha$ . Але за єдиністю відображення з такими властивостями (зважаючи на означення зрівняльника),  $\beta_1 = \beta_2$ . Звідси  $\iota$  – мономорфізм. ■

## 0.7 Козрівняльник

**Definition 0.7.1** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$  – два морфізми.

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

Сформуємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{coeq}}$  таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, \alpha)$ , де  $x$  – об'єкт категорії  $C$  та  $\alpha: b \rightarrow x$  – морфізм в  $C$ , щоб  $\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_2$ ;

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b \xrightarrow{\alpha} x$$

морфізмом між об'єктами  $(x, \alpha) \rightarrow (y, \beta)$  буде морфізм  $\gamma: x \rightarrow y$  категорії  $C$ , для якого  $\gamma\alpha = \beta$ ;

$$\begin{array}{ccc} & & y \\ & \nearrow \beta & \uparrow \gamma \\ a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow \\ & & x \end{array}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії  $C$ .

**Козрівняльником** (або **coequalizer**)  $\lambda_1, \lambda_2$  будемо називати ініціальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{coeq}}$ .

Позначимо ініціальний об'єкт за  $(q, \pi)$ . Тоді за означенням ініціальності, для кожного об'єкта  $(x, \alpha)$  існує єдиний морфізм між  $(q, \pi)$  та  $(x, \alpha)$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: q \rightarrow x$  в категорії  $C$ , для якого  $\gamma\pi = \alpha$  – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & \nearrow \beta & \uparrow \exists! \gamma \\ a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b & & \\ & \searrow \pi & \downarrow \\ & & q \end{array}$$

**Proposition 0.7.2** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$  – два морфізми. Припустимо, що  $(q, \pi)$  – козрівняльник  $\lambda_1, \lambda_2$ . Тоді  $\iota$  – епіморфізм.

*Насправді, доведення є аналогічним, коли мова була про зрівняльник  $\implies$  мономорфізм.*

## 0.8 Пулбек

**Definition 0.8.1** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1: a_1 \rightarrow b$ ,  $\lambda_2: a_2 \rightarrow b$  – морфізми.

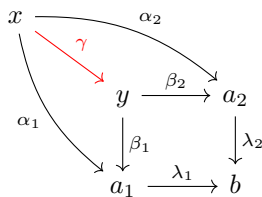
$$\begin{array}{ccc} & a_2 & \\ & \downarrow \lambda_2 & \\ a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

Сконструємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$  ось таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ , де  $x$  – об'єкт категорії  $C$  та  $\alpha_1: x \rightarrow a_1$ ,  $\alpha_2: x \rightarrow a_2$  – два морфізми категорії  $C$ , для яких  $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$ ;

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha_2} & a_2 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

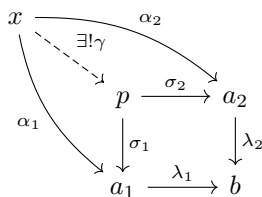
морфізмами між об'єктами  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(y, (\beta_1, \beta_2))$  будуть всі морфізми  $\gamma: x \rightarrow y$  категорії  $C$ , для яких  $\beta_1\gamma = \alpha_1$ ,  $\beta_2\gamma = \alpha_2$ ;



композицією морфізмів буде композиція, як в категорії  $C$ .

**Пулбеком** пари морфізмів  $(\lambda_1, \lambda_2)$  будемо називати термінальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{pb}$ .

Позначимо термінальний об'єкт за  $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ . Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  існує єдиний морфізм між  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$  в категорії  $C$ , для якого  $\sigma_1\gamma = \alpha_1$ ,  $\sigma_2\gamma = \alpha_2$ .



**Example 0.8.2** Розглянемо категорію **Set**. Нехай  $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$  будуть дві функції. Визначимо  $A_1 \times_B A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \lambda(a_1) = \lambda(a_2)\} \subset A_1 \times A_2$ . Така множина називається **розшарованим добутком**  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Покладемо  $P = A_1 \times_B A_2$  та визначимо  $\sigma_i: P \rightarrow A_i$  таким чином:  $\sigma_i((a_1, a_2)) = a_i, i = 1, 2$ . Зауважимо, що  $\lambda_1\sigma_1 = \lambda_2\sigma_2$ . Дійсно, для  $a = (a_1, a_2) \in P$  маємо наступне:

$$\lambda_1\sigma_1(a) = \lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2) = \lambda_2\sigma_2(a).$$

Отже,  $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$  – об'єкт допоміжної категорії  $\mathbf{D}_{pb}$ . Я стверджую, що цей об'єкт буде пулбеком пари  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Нехай  $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$  – об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{pb}$ . Визначимо  $\gamma: X \rightarrow P$  таким чином  $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ .

Зауважимо, що  $(\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \stackrel{\text{дійсно}}{\in} P$ , оскільки  $\lambda_1(\alpha_1(x)) = \lambda_2(\alpha_2(x))$  (в силу обраного об'єкта з  $\mathbf{D}_{pb}$ ). Також зазначимо, що  $\sigma_i\gamma = \alpha_i, i = 1, 2$ , тому це формує морфізм між  $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ . Залишилося довести єдиність.

Нехай  $\gamma'$  – інший морфізм між  $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ .

$$\gamma'(x) = (\sigma_1\gamma'(x), \sigma_2\gamma'(x)) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = \gamma(x).$$

Тобто  $\gamma' = \gamma$ , що доводить єдиність морфізма.

**Example 0.8.3** Розглянемо категорію **Top**. Нехай  $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$  – уже неперервні відображення, на  $A_1 \times A_2$  покладемо добуток топологій  $A_1, A_2$ , а також  $P = A_1 \times_B A_2$  – топологічний підпростір  $A_1 \times A_2$ . Відображення  $\sigma_i: P \rightarrow A_i$ , які визначали минулого разу, – це звуження проєктивного відображення  $A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$  (що є неперервним), тому  $\sigma_i$  – неперервні. Аналогічно доводиться, що  $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$  утворює пулбек. Тільки ще варто зауважити, що  $\gamma: X \rightarrow P \subset A_1 \times A_2$ , що було визначено як  $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ , буде теж неперервним, оскільки кожний  $\alpha_i$  – неперервний.

**Example 0.8.4** Розглянемо категорію **Grp**. Нехай  $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$  – уже гомоморфізм груп, на  $A_1 \times A_2$  стоїть прямий добуток груп  $A_1, A_2$ , а також  $P = A_1 \times_B A_2$  – підгрупа  $A_1 \times A_2$  (вправа: довести). Також  $\sigma_i, \gamma$ , що задані так само, як було вище, – гомоморфізми. Тому  $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$  утворює пулбек за аналогічними міркуваннями.

Абсолютно аналогічно можна сказати про **Rng**,  **$_R \text{Mod}$** .

**Theorem 0.8.5** Задано  $C$  – категорія.

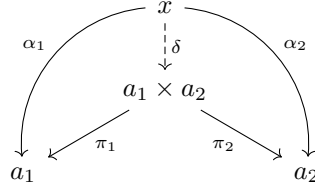
Існують зрівняльники та скінченні добутки в  $C \iff$  існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії  $C$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано: існують зрівняльники та скінченні добутки в  $C$ .

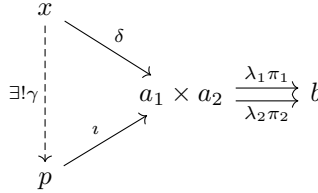
Добуток порожньої сім'ї об'єктів уже автоматично термінальний (TODO: обдумати).

Залишилося показати існування пулбеку. Нехай  $\lambda_i: a_i \rightarrow b$  – два морфізми категорії  $C$ . За нашими умовами, існує добуток  $(a_1 \times a_2, \{\pi_i\})$  сім'ї  $\{a_1, a_2\}$ , тобто існує термінальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pr}}$ . Тобто у нас є одна діаграма:



Хто такий об'єкт  $x$  та звідки морфізми  $\alpha_1, \alpha_2$ , буде ясно пізніше.

Також за умовою, існує зрівняльник для морфізмів  $\lambda_1\pi_1, \lambda_2\pi_2$ . Тобто у нас є друга діаграма:



Морфізм  $\delta$  ми взяли з попередньої діаграми, а про об'єкт  $x$  та морфізм  $\gamma$  буде згодом.

Покладемо  $\sigma_i = \pi_i i$ . Зауважимо, що  $\lambda_1\sigma_1 = \lambda_1\pi_1 i = \lambda_2\pi_2 i = \lambda_2\sigma_2$ . Таким чином,  $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$  – об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ . Залишилося показати, що це – термінальний – і таким чином ми отримаємо пулбек. Нехай  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  – об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$  (тепер з об'єктом  $x$  та морфізмами  $\alpha_1, \alpha_2$  на діаграмі стало ясніше). Тобто уже маємо  $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$ . Ми також маємо  $\lambda_1\pi_1\delta = \lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 = \lambda_2\pi_2\delta$ , тож звідси  $(x, \delta) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$ . Тоді за зрівняльником, існує морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$ , для якого  $i\gamma = \delta$  (тепер з морфізмом  $\gamma$  стало ясніше).

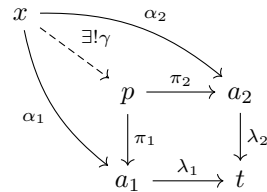
Зауважимо, що  $\sigma_i\gamma = \pi_i i\gamma = \pi_i\delta = \alpha_i, i = 1, 2$ , тобто звідси  $\gamma$  – це морфізм в  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$  між об'єктами  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ .

Припустимо, що  $\gamma'$  – ще один такий же морфізм. Тоді  $\pi_i i\gamma' = \sigma_i\gamma' = \alpha_i$  та аналогічно  $\pi_i\gamma = \alpha_i$ . Але за єдиністю в добутку,  $i\gamma' = i\gamma$ . Оскільки  $i$  – мономорфізм, то звідси  $\gamma' = \gamma$ .

$\Leftarrow$  Дано: існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії  $C$ .

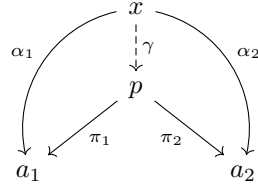
Позначимо  $t$  за термінальний об'єкт  $C$ . Хочемо довести, що існує скінченний добуток в  $C$ ; а для цього буде достатньо лише довести, що для сім'ї  $\{a_1, a_2\}$  (тобто лише для двох об'єктів) існує добуток (TODO: додати пояснення).

Оскільки  $t$  – термінальний, то існують єдині морфізми  $\lambda_i: a_i \rightarrow t, i = 1, 2$  в категорії  $C$ . За умовою, існує пулбек для пари  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , тобто в категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$  існує термінальний об'єкт  $(p, (\pi_1, \pi_2))$  (те, що  $\pi_i$  – це проекція, на даному етапі це невідомо, але скоро своє позначення виправдає). У нас вже є перша діаграма:



Хто такий об'єкт  $x$  та морфізм  $\gamma$ , стане зараз ясно.

Ми тепер хочемо довести, що  $(p, \{\pi_i\})$  утворює добуток сім'ї  $\{a_1, a_2\}$ . Тобто хочемо таку діаграму:



Знову ж таки, хто такий  $x$  та морфізм  $\gamma$ , стане скоро ясно.

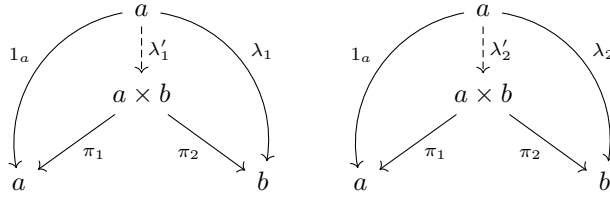
Нехай  $(x, \{\alpha_i\})$  – об’єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pr}}$  (тепер за  $x$  стало ясно на діаграмах). Тоді зауважимо, що  $\lambda_i \alpha_i: x \rightarrow t, i = 1, 2$  – два морфізми в термінальний об’єкт, тож за єдиністю,  $\lambda_1 \alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2$ . Але це означає, що пара  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  буде об’єктом категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ , тоді за термінальністю  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ , існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$  категорії  $C$ , для якої  $\pi_i \gamma = \alpha_i$  (тепер і про  $\gamma$  стало ясно на діаграмах). Власне, це й доводить існування добутку.

Залишилося довести, що існують зрівняльники в  $C$ . Нехай  $\lambda_i: a \rightarrow b$  – два морфізми категорії  $C$ .

$$a \begin{matrix} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{matrix} b$$

Ми вже знаємо вище, що існує  $(a \times b, \{\pi_i\})$  – добуток сім’ї  $\{a, b\}$ . Двічі застосуємо означення добутку – отримаємо морфізми  $\lambda'_1, \lambda'_2: a \rightarrow a \times b$ , для яких справедливі:

$$\pi_1 \lambda'_1 = 1_a \quad \pi_1 \lambda'_2 = 1_a \quad \pi_1 \lambda'_1 = \lambda_1 \quad \pi_2 \lambda'_2 = \lambda_2 \quad (*).$$



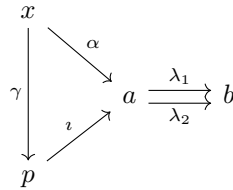
За припущенням, існує пулбек для  $(\lambda'_1, \lambda'_2)$ , тобто існує термінальний об’єкт  $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$  категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ . Використовуючи перші дві рівності в  $(*)$ , отримаємо:

$$\sigma_1 = 1_a \sigma_1 = \pi_1 \lambda'_1 \sigma_1 = \pi_1 \lambda'_2 \sigma_2 = 1_a \sigma_2 = \sigma_2.$$

Для зручності позначимо  $\iota = \sigma_1 = \sigma_2$ . За останніми двома рівностями в  $(*)$ ,

$$\lambda_1 \iota = \pi_2 \lambda'_1 \sigma_1 = \pi_2 \lambda'_2 \sigma_2 = \lambda_2 \iota.$$

Таким чином, отримали, що  $(p, \iota)$  – об’єкт  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ . Хочемо довести, що  $(p, \iota)$  буде зрівняльником  $\lambda_1, \lambda_2$ , тобто хочемо таку діаграму:



Нехай  $(x, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$ . Зокрема звідси  $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \alpha \stackrel{\text{позн.}}{=} \beta$ . Зауважимо, що  $\lambda'_i \alpha, i = 1, 2$  – морфізми із  $(x, (\alpha, \beta))$  в  $(a \times b, (\pi_1, \pi_2))$ . Справді,  
 $\pi_1 \lambda'_i \alpha = 1_a \alpha = \alpha \quad \pi_2 \lambda'_i \alpha = \lambda_i \alpha = \beta$ .

Оскільки другий об’єкт – термінальний, то за єдиністю,  $\lambda'_1 \alpha = \lambda'_2 \alpha$ , а звідси  $(x, \alpha, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{pb}}$ . Отже, звідси існує єдиний морфізм  $\gamma: x \rightarrow p$ , для якого  $\sigma_i \gamma = \alpha \iff \iota \gamma = \alpha$ . Остання рівність закінчує доведення за існування зрівняльника. ■

## 0.9 Пушаут

**Definition 0.9.1** Задано  $C$  – категорія та  $\lambda_1: a \rightarrow b_1, \lambda_2: a \rightarrow b_2$  – морфізми.



$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \\ b_1 & & \end{array}$$

Сконструємо категорію  $\mathbf{D}_{\text{po}}$  ось таким чином:

об'єктами будуть пари  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ , де  $x$  – об'єкт категорії  $C$  та  $\alpha_1: b_1 \rightarrow x$ ,  $\alpha_2: b_2 \rightarrow x$  – два морізми категорії  $C$ , для яких  $\alpha_1 \lambda_1 = \alpha_2 \lambda_2$ ;

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ b_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & x \end{array}$$

морфізмами між об'єктами  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  та  $(y, (\beta_1, \beta_2))$  будуть всі морфізми  $\gamma: x \rightarrow y$  категорії  $C$ , для яких  $\gamma \alpha_1 = \beta_1$ ,  $\gamma \alpha_2 = \beta_2$ ;

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 & & \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \searrow \beta_2 \\ b_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & x & & \\ & & \searrow \beta_1 & & \\ & & & & y \end{array}$$

*(Note: In the original image, a red arrow labeled  $\gamma$  points from  $x$  to  $y$ .)*

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії  $C$ .

**Пушаутом** пари морфізмів  $(\lambda_1, \lambda_2)$  будемо називати ініціальний об'єкт категорії  $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ .

Позначимо ініціальний об'єкт за  $(q, (\tau_1, \tau_2))$ . Тоді за означенням ініціальності, для кожного об'єкта  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$  існує єдиний морфізм між  $(q, (\tau_1, \tau_2))$  та  $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм  $\gamma: q \rightarrow x$  в категорії  $C$ , для якого  $\gamma \tau_1 = \alpha_1$ ,  $\gamma \tau_2 = \alpha_2$ .

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 & & \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \tau_2 & & \searrow \alpha_2 \\ b_1 & \xrightarrow{\tau_1} & q & & \\ & & \searrow \alpha_1 & & \\ & & & & x \end{array}$$

*(Note: In the original image, a red arrow labeled  $\gamma$  points from  $q$  to  $x$ .)*

**Theorem 0.9.2** Задано  $C$  – категорія.

Існують козрівняльники та скінченні кодобутки в  $C \iff$  існують пушаути та ініціальний об'єкт категорії  $C$ .

*Доведення аналогічне, просто тут все дуальне.*