Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

5 березня 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 **Категорія** C складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $x, y, z, \ldots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів із** x **в** y $C(x, y)$ для всіх $x, y \in C$; морфізми позначають за $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Позначення $\alpha\colon x \to y$ або $x \overset{\alpha}{\to} y$ означають α – морфізм із x в y; ми називаємо x **джерелом** та y **ціллю**;
– кожний об'єкт x має **тотожний морфізм** $1_x\colon x \to x$;
– для кожних морфізмів $\alpha\colon x \to y,\ \beta\colon y \to z$ існуватиме **композиція морфізмів** $\beta\alpha\colon x \to z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $\alpha\colon x \to y$ виконано $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$;
2) для кожних трьох морфізмів $\alpha\colon w \to x, \beta\colon x \to y, \gamma\colon y \to z$ виконується асоціативність композиції, тобто $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Remark 0.1.3 Морфізм 1_x для кожного об'єкта x – єдиний.

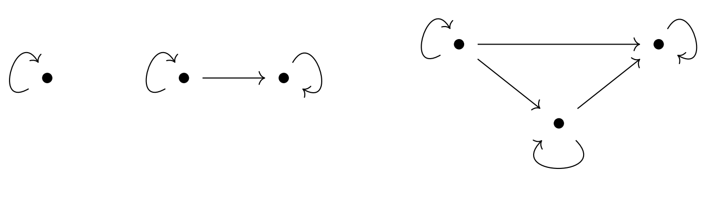
Example 0.1.4 Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:
– $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – набір всіх множин;
– $\mathrm{Hom}(\mathbf{Set})$ – набір всіх функцій;
– тотожне відображення $1_X\colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f\colon X \to Y$ та $g\colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathbf{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f\colon X \to Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.5 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

Категорія	Об'єкти	Морфізми
Grp	групи	гомоморфізми груп
Ab	абелеві групи	гомоморфізми груп
Rng	кільця	гомоморфізми кілець
Ring	кільця з одиницею	гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю
$_R\,$**Mod**	R-модуль	R-лінійне відображення
Top	топологічні простори	неперервній відображення
Met	метричні простори	неперервні відображення
Man	гладкі многовиди	гладкі відображення

Example 0.1.6 Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньо виглядати. Категоріїя **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:



Так само є категорії **4**,**5**, ...

Example 0.1.7 Розглянемо моноїд M. Ми можемо утворити категорію $\mathcal{M}$, яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.8 Розглянемо так званий посет $(P, \prec)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\mathrm{Ob}(P) = P$ та $P(i,j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки $\prec$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $\prec$ є рефлексивним відношенням.
Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для $(P, \prec)$ відношення $\prec$ було антисиметричним.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(x,y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $x \to x$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C, якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
набір стрілок $x \to y$ в D міститься в наборі стрілок $x \to y$ в C для довільних об'єктів x, y із D
композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок x, y в D збігається з набором стрілок x, y в C, для довільних об'єктів x, y із D

Example 0.1.12 Зокрема маємо кілька прикладів:
1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

Definition 0.1.13 Категорія C називається **малою**, якщо

класи $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Hom}(C)$ – множини.

Інакше категорія C називатиметься **великою**.
Категорія C називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів x, y клас $C(x,y)$ – множина

Example 0.1.14 Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

Definition 0.1.15 Категорія C називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізмі – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

Example 0.1.16 Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Мономорфізм

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha \colon x \to y$ називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift right, "\beta_1"'] & x \arrow[r, "\alpha"] & y \end{tikzcd}$$

Часто мономорфізми позначають як $\alpha \colon x \rightarrowtail y$.

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$, тобто α – мономорфізм. ■

Remark 0.2.3 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.
Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ із нашої категорії **Div** та гомоморфізм $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker\alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – мономорфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon A \to \mathbb{Q}$ – морфізми в **Div** та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \dfrac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \dfrac{r}{s}$.
Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \dfrac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях $\mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Rng}$ морфізм ін'єктивний $\iff$ морфізм – мономорфізм.

Proof.
Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – мономорфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який сінглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді
$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін'єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – мономорфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2\colon \ker\alpha \to G$ – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,
$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \overset{g \in \ker\alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker\alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивніть α.

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

0.2.2 Розщеплений мономорфізм

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим мономорфізмом** (**split monic**), якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "1_x"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, shift right, "\exists\beta"'] \end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

Proof.
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon z \to x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді
$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін'єктивний морфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Припустимо $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Тоді
$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$. ■

Remark 0.2.9 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення $\alpha\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.
!Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологія, а область значень – стандартну. Тоді α – ін'єктивний, але не розщеплений мономорфізм.
!Припустимо, що існує морфізм $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$. Тоді $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}$ з дискретною топологією, але $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$ не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha\colon X \to Y$ – морфізм в категорії **Set**.

$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: α – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси α – ін'єктивний.
Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_\emptyset$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: α – ін'єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.
Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін'єктивний, то $\alpha\colon X \to \operatorname{Im}\alpha$, буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \operatorname{Im}\alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta\colon \operatorname{Im}\alpha \to X$, що розширюється до функції $\beta\colon Y \to X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \operatorname{Im}\alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.
Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta\colon Y \to X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \textit{ін'єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *ін'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.
Але якщо слово *ін'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епіморфізм

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **епіморфізмом** (**epic**), якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & z \end{tikzcd}$$

Часто епіморфізми позначають як $\alpha\colon x \twoheadrightarrow y$.

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Y \to Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр'єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що α – епіморфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ – морфізми з **Rng** та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо
$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1}{\cdot}1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1})$.
Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:
$\beta_1\left(\dfrac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\dfrac{m}{n}\right)$.
Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний $\iff$ морфізм – епіморфізм.

Proof.
Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – епіморфізм морфізм. Нехай $\beta_1\colon Y \to \{0,1\}$ буде характеристичною функцією для $\operatorname{Im}\alpha$ та нехай $\beta_2\colon Y \to \{0,1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\operatorname{Im}\alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність α.

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з Set. Тільки треба $\alpha\colon X \to Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0,1\}$ задати недискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неерервними.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] = 2$. Нехай $\beta_1\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq q\beta_2$, оскільки $\operatorname{Im}\alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \operatorname{Im}\alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1 b = K_2$, а звідси $K_2 b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо біекцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою
$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$. Можна зауважити, що $\sigma^2 = 1_H$ та $\sigma(kh) = k\sigma(h)$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha, h \in H$.
Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H, що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha$.
Визначимо $\beta_1, \beta_2\colon H \to S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справдлі задають гомоморфізм груп. Для $k \in \operatorname{Im}\alpha$ ми маємо
$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку α – не епіморфізм. ■

0.2.4 Розщеплений епіморфізм

Definition 0.2.18 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого мономорфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, bend right, "\exists\beta"'] \arrow[loop right, "1_y"] \end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.19 Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

Proof.
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\alpha\beta = 1_1$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon y \to z$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді
$\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.20 У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр'єктивний морфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси
$\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$. ■

Remark 0.2.21 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.22 Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$, визначений як $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$ та $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$. Це буде сюр'єктивний гомоморфізм. Оскільки $1 \in \mathbb{Z}_2$ має порядок 2, то будь-який гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ зобов'язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином, $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$. Отже, α – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.23 Розглянемо категорію **Top**. Маємо $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді α – сюр'єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

Theorem 0.2.24 У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм $\iff$ морфізм сюр'єктивний.

Proof.
Залишилося довести у зворотний бік.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Тобто для кожного $y \in Y$ знайдеться $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$, а це визначає функцію $\beta\colon Y \to X$, яка задовольняє $\alpha\beta = 1_Y$. Отже, α – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \textit{сюр'єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *сюр'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

Definition 0.2.25 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists\beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x \qquad \alpha\beta = 1_y$$

Remark 0.2.26 Якщо α – ізоморфізм, то морфізм β в означенні – єдиний та позначається за α^{-1}.

Definition 0.2.27 Задано C – категорія.
Об'єкти x, y називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha \colon x \to y \text{ – ізоморфізм}$$

Позначення: $x \cong y$ (це справді відношення еквівалентності).

Theorem 0.2.28 Морфізм – ізоморфізм $\iff$ морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *миттево випливає з означення.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: α – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми $\beta, \gamma \colon y \to x$, для яких $\beta\alpha = 1_x, \quad \alpha\gamma = 1_y$. Але тоді $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$. Отже, α – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.

$$\begin{tikzcd}
\text{мономорфізм} & & \text{епіморфізм} \\
& \text{біморфізм} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
\textit{ін'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] & & \textit{сюр'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \textit{бієктивний} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
\text{розщеплений мономорфізм} \arrow[uu, Rightarrow] & & \text{розщеплений епіморфізм} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \text{ізоморфізм} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.29 У категорії $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}$ біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

Proof.
(**Set**). Нехай $\alpha \colon X \to Y$ – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що α – ізоморфізм. Оскільки α – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії α – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм α^{-1}, для якого $\alpha^{-1}\alpha = 1_X, \quad \alpha\alpha^{-1} = 1_Y$, що й доводить ізоморфність.

(**Grp**). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо α – гомоморфізм, то α^{-1} буде ним також. ■

Remark 0.2.30 Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.
(**Rng**). Зауважимо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ буде біморфізмом, але не бієкцією.
(**Top**). Тотожне відображення $R \to R$, з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

Definition 0.3.1 Задано C – категорія та $c \in C$ – об'єкт.
Об'єкт c називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \alpha \colon c \to x$$

Об'єкт c називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \beta \colon x \to c$$

Example 0.3.2 Зокрема в категорії $\mathbf{Set}, \mathbf{Top}$ ініціальним об'єктом буде $\emptyset$; термінальним об'єктом буде $\{x\}$ (будь-який сінглтон).

Example 0.3.3 У категоріях $\mathbf{Grp}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$ ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде $\{e\}$, де e – нейтральний елемент.

Example 0.3.4 У категорії $\mathbf{Ring}$ ініціальним об'єктом буде кільце $\mathbb{Z}$, а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце $\{0\}$.

Theorem 0.3.5 Задано C – категорія, $c_1, c_2 \in C$ – обидва ініціальні. Тоді $c_1 \cong c_2$.

Proof.
За умовою, c_1 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\alpha \colon c_1 \to c_2$. Аналогічно, c_2 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\beta \colon c_2 \to c_1$. Розглянемо композицію $\beta\alpha \colon c_1 \to c_1$ – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності α, β. У категорії точно існує морфізм $1_{c_1} : c_1 \to c_1$ – отже, в силу єдиності такого морфізму, $\beta\alpha = 1_{c_1}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha\beta = 1_{c_2}$. Значить, $\alpha \colon c_1 \to c_2$ буде ізоморфізмом. ■

Theorem 0.3.6 Задано C – категорія, $d_1, d_2 \in C$ – обидва термінальні. Тоді $d_1 \cong d_2$.
Вправа: довести.

0.4 Добуток

Definition 0.4.1 Задано C – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.
Добутком X_1, X_2 називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\pi_1 \colon X \to X_1$ та $\pi_2 \colon X \to X_2$, що є так званими **проєктивними морфізмами**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1 \colon Y \to X_1, f_2 \colon Y \to X_2 : \exists! f \colon Y \to X :$$
$$f_1 = \pi_1 f \qquad f_2 = \pi_2 f$$

Позначення: $X = X_1 \times X_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

Remark 0.4.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C **добуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).
Позначення $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Example 0.4.3 Будемо в категорії $\mathbf{Set}$. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$. Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій $f \colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ таких, що $f(i) \in X_i$ для всіх $i \in I$. Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f \colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного $i \in I$ визначимо проєкцію $\pi_i \colon P \to X_i$ таким чином: $\pi_i(f) = f(i)$.
Доведемо, що пара $(P, \{\pi_i\})$ буде утворювати добуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.
Нехай Y – об'єкт з морфізмами $\alpha_i \colon Y \to X_i$. Хочемо знайти єдиний морфізм $\gamma \colon Y \to P$, щоб $\alpha_i = \pi_i\gamma$. Покладемо $\gamma \colon Y \to P$ таким чином: $\forall y \in Y : \gamma(y)$ буде функцією $I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, причому $\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$. Тоді $\pi_i\gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$, тобто звідси $\pi_i\gamma = \alpha_i$ для всіх $i \in I$.
!Припустимо, що існує функція $\gamma' : Y \to P$, для якої $\pi_i\gamma' = \alpha_i$. Тобто для кожного $y \in Y$ та кожного $i \in I$ виконано $\gamma'(y)(i) = \alpha_i(x)$. Але тоді
$\gamma'(y)(i) = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i\gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)(i)$. Суперечність! ■

Example 0.4.4 Будемо в категорії **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний X_i тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток P – це буде група зі покомпонентним множенням: $(fg)(i) = f(i)g(i)$. Це ще називають **(зовнішнім) прямим добутком груп**. Проєктивні відображення π_i будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**, ${}_R\,$**Mod** аналогічно все.

Example 0.4.5 Залишилася категорія **Top**.

0.5 Кодобуток

Definition 0.5.1 Задано C – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.
Кодобутком X_1, X_2 називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\imath_1 \colon X_1 \to X$ та $\imath_2 \colon X_2 \to X$, що є так званими **морфізмами вкладень**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1 \colon X_1 \to Y, f_2 \colon X_2 \to Y : \exists! f \colon X \to Y :$$
$$f_1 = f\imath_1 \qquad f_2 = f\imath_2$$

Позначення: $X = X_1 \sqcup X_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
 & X_1 \sqcup X_2 \arrow[u, dashed, "f"] & \\
X_1 \arrow[ur, "\imath_1"'] \arrow[uur, bend left, "f_1"] & & X_2 \arrow[ul, "\imath_2"] \arrow[uul, bend right, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Remark 0.5.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C **кодобуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).
Позначення $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$.

Example 0.5.3 Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (якусь довільну). Визначимо множину Q ось так: $Q = \bigsqcup\limits_{i} X_i'$, де в цьому випадку $X_i' = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ для всіх i.
Причому варто зауважити, що X_i' дійсно неперетинні, а також $X_i' \cong X_i$. Визначимо відображення $\imath_i \colon X_i \to Q$ таким чином: $\imath_i(x) = (x, i)$.
Доведемо, що пара $(Q, \{\imath_i\})$ буде утворювати кодобуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.
Створімо нову категорію $\mathbf{D}_{\text{copr}}$, яка функціонує ось таким чином:
об'єктами будуть пари $(X, \{\alpha_i\})$, де X – об'єкт категорії **Set** та $\alpha_i \colon X_i \to X$ – відображення;
морфізмом між $(X, \{\alpha_i\})$ та $(Y, \{\beta_j\})$ буде відображення $\gamma \colon X \to Y$, для якого $\gamma \circ \alpha_i = \beta_i$, причому це для всіх i. Це дозволяє для всіх i зробити діаграму комутативною.
Так ось, нам треба довести, що наша визначена пара $(Q, \{\imath_i\})$ буде ініціальним об'єктом.
Нехай $(X, \{\alpha_i\})$ – будь-який об'єкт $\mathbf{D}_{\text{copr}}$. Визначимо відображення $\gamma \colon Q \to X$ ось таким чином: $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$. Зауважимо, що для всіх i та всіх $x \in X$ ми маємо, що
$\gamma \circ \imath_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$.
Значить, γ буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.
Оберемо морфізм γ', який діє між двома об'єктами, тобто $(Q, \{\imath_i\})$ та $(X, \{\alpha_i\})$. Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність $\gamma' \circ \imath_i = \alpha_i$ для всіх i. Проте з іншого боку, $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$. Значить, $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \imath_i(x) = \gamma'((x, i))$. ■

Example 0.5.4 Будемо в категорії **Top**. Як і в категорії **Set**, розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (тільки тут вже топологічні простори). Визначимо множину Q так само, як було вище. На ній задається така топологія: U – відкрита в $Q \iff \imath_i^{-1}(U)$ – відкрита в X_i для всіх i. Тоді всі функції $\imath_i \colon X_i \to Q$, як було визначено вище, будуть неперервними. Далі аналогічним чином доводимо, що пара $(Q, \{\imath_i\})$ утворює кодобуток.

0.6 Зрівняльник

Definition 0.6.1 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2 \colon a \to b$ – два морфізми.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \end{tikzcd}$$

Сформуємо категорію $\mathbf{D}_{\text{eq}}$ таким чином:
об'єктами будуть пари (x, α), де x – об'єкт категорії C та $\alpha \colon x \to a$ – морфізм в C, щоб $\lambda_1\alpha = \lambda_2\alpha$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \end{tikzcd}$$

морфізмом між об'єктами $(x, \alpha) \to (y, \beta)$ буде морфізм $\gamma \colon x \to y$ категорії C, для якого $\beta\gamma = \alpha$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\ y \arrow[ur, "\beta"] & & \end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії C.
Зрівняльником (або **equalizer**) λ_1, λ_2 будемо називати термінальни об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{eq}}$.

Позначимо термінальний об'єкт за $(p, \imath)$. Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта (x, α) існує єдиний морфізм між (x, α) та $(p, \imath)$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma \colon x \to p$ в категорії C, для якого $\imath\gamma = \alpha$ – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dd, "\exists!\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\ p \arrow[ur, "\imath"] & & \end{tikzcd}$$

Example 0.6.2 Розглянемо категорію **Set**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – два відображення. Покладемо $P = \{a \in A \mid \lambda_1(a) = \lambda_2(a)\}$ та $\imath \colon P \to A$ – вкладення. Тоді $\lambda_1\imath = \lambda_2\imath$ (тобто звідси $(P, \imath)$ буде об'єктом категорії $\mathbf{D}_{\text{eq}}$, який був зазначений вище). Стверджується, що $(P, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2. Нехай (X, α) – довільний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{eq}}$. Для кожного $x \in X$ ми маємо $\lambda_1(\alpha(x)) = \lambda_1\alpha(x) = \lambda_2\alpha(x) = \lambda_2(\alpha(x))$, тобто $\operatorname{Im}\alpha \subset P$. Оберемо відображення $\gamma \colon X \to P$ так, що $\gamma = \alpha$. Тоді звідси $\imath\gamma = \alpha$, тобто γ – морфізм між об'єктами $(X, \alpha) \to (P, \imath)$.
Оскільки $\imath$ – ін'єктивний (як вкладення), то тоді це мономорфізм. Отже, γ – єдиний такий морфізм.

Example 0.6.3 Розглянемо категорію **Top**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – неперервні відображення. Визначимо $P, \imath$ так само, як в попередньому прикладі (оскільки $P \subset A$, то можна визначити топологічний підпростір). Таким чином, $\imath$ уже буде неперервним. Далі так само доводимо, що $(P, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2.

Example 0.6.4 Розглянемо категорію **Grp**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – два гомоморфізми груп та P – така сама множина, що в попередньому прикладі, яка є підгрупою A, тож $\imath \colon P \to A$ (знову вкладення) – гомоморфізм груп. Далі так само доводимо, що $(P, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2.

Аналогічно для категорій **Rng**, ${}_R\,\mathbf{Mod}$.