

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

14 лютого 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1** Категорія  $C$  складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за  $X, Y, Z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
  - із набору **морфізмів**; морфізми позначають за  $f, g, h, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Hom}(C)$ ;
  - кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як  $f: X \rightarrow Y$ , де об’єкт  $X$  – область визначення, об’єкт  $Y$  – область значень;
  - кожний об’єкт  $X$  має **тотожний морфізм**  $1_X: X \rightarrow X$ ;
  - для кожних морфізмів  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $g \circ f: X \rightarrow Z$ .
- При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $f: X \rightarrow Y$  виконано  $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Example 0.1.3** Розглянемо  $\text{Set}$  – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
  - $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх відображень;
  - тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
  - композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Definition 0.1.4** Категорія  $M$ , що складається з одного об’єкту, називається **моноїдом**.

**Definition 0.1.5** Задано  $C$  – категорія.

Стрілочка  $f: X \rightarrow Y$  називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка  $g: Y \rightarrow X$ , для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти  $X, Y$  даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення:  $X \cong Y$ .

**Definition 0.1.6** **Ендоморфізмом** назовемо стрілочку  $f: X \rightarrow X$ . Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

**Автоморфізмом** назовемо ізоморфізм  $f$ , який є ендоморфізмом.

**Definition 0.1.7** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $A \rightarrow A$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.8** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об’єктів  $D$  міститься в наборі об’єктів  $C$   
набір стрілок  $A \rightarrow B$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $A \rightarrow B$  в  $C$  для довільних об’єктів  $A, B$  із  $D$   
композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.9** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $A, B$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $A, B$  в  $C$ , для довільних об’єктів  $A, B$  із  $D$