Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

18 лютого 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 **Категорія** C складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $X, Y, Z, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів**; морфізми позначають за $f, g, h, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Hom}(C)$;
– кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як $f \colon X \to Y$, де об'єкт X – область визначення, об'єкт Y – область значень;
– кожний об'єкт X має **тотожний морфізм** $1_X \colon X \to X$;
– для кожних морфізмів $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ існуватиме **композиція морфізмів** $g \circ f \colon X \to Z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $f \colon X \to Y$ виконано $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$;
2) для кожних трьох морфізмів $f \colon W \to X, g \colon X \to Y, h \colon Y \to Z$ виконується асоціативність композиції, тобто $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Example 0.1.3 Розглянемо Set – це буде категорія, яка складається з наступного:
– $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ – набір всіх множин;
– $\mathrm{Hom}(\mathrm{Set})$ – набір всіх відображень;
– тотожне відображення $1_X \colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f \colon X \to Y$ та $g \colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathrm{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f \colon X \to Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.4 Розглянемо стисло ще приклади категорій:
1) Grp – об'єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
2) Ring – об'єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
3) Top – об'єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
4) Man – об'єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

Example 0.1.5 Розглянемо моноїд M. Ми можемо утворити категорію $\mathcal{M}$, яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.6 Розглянемо так званий посет $(P, \prec)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\mathrm{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки $\prec$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $\prec$ є рефлексивним відношенням.
Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для $(P, \prec)$ відношення $\prec$ було антисиметричним.

Definition 0.1.7 Задано C – категорія.
Стрілочка $f \colon X \to Y$ називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка $g \colon Y \to X$, для якої

$$f \circ g = 1_Y \qquad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об'єкти X, Y даної категорії називаються **ізоморфними**.
Позначення: $X \cong Y$.

Definition 0.1.8 **Ендоморфізмом** назвемо стрілочку $f \colon X \to X$. Тобто це стрілка між двома однаковими об'єктами.
Автоморфізмом назвемо ізоморфім f, який є ендоморфізмом.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $A \to A$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C, якщо

$$\begin{aligned}
&\text{набір об'єктів } D \text{ міститься в наборі об'єктів } C\\
&\text{набір стрілок } A \to B \text{ в } D \text{ міститься в наборі стрілок } A \to B \text{ в } C \text{ для довільних об'єктів } A, B \text{ із } D\\
&\text{композиція двох морфізмів в } D \text{ задається так само, як і в } C
\end{aligned}$$

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

$$\text{набір стрілок } A, B \text{ в } D \text{ збігається з набором стрілок } A, B \text{ в } C, \text{ для довільних об'єктів } A, B \text{ із } D$$

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Монік

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \overset{\beta_2}{\underset{\beta_1}{\rightrightarrows}} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.3 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію $C = \mathrm{Div}$ підкатегорії Grp. Тут абелева група називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.
Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ із нашої категорії C та гомоморфізм $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker \alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – монік.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon A \to \mathbb{Q}$ – морфізми в C та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \dfrac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \dfrac{r}{s}$.
Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \dfrac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях $\mathrm{Set}, \mathrm{Top}, \mathrm{Grp}, \mathrm{Rng}$ морфізм ін'єктивний $\iff$ морфізм – монік.

Proof.
Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – монік. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(Set). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – монік морфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який сінглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді
$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін'єктивний.

(Top). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z.

(Grp). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – монік морфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2\colon \ker \alpha \to G$ – перший буде вкладенням,

другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,
$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \overset{g\in\ker\alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker\alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивніть α.

(Rng). Таке саме доведення. ∎

0.2.2 Розщеплений монік

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon X \to Y$ називається **розщепленим моніком**, якщо

$$\exists\beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений монік, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "1_x"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, shift right, "\exists\beta"'] \end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений монік – монік.

Proof.
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений монік в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon z \to x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді
$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$. ∎

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожний розщеплений монік – ін'єктивний морфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений монік, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Тоді
$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$. ∎

Remark 0.2.9 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію Grp. Вкладення $\alpha\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим моніком.
!Припустимо, що все ж таки він розщеплений монік, тобто існує гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію Top. Оберемо тотожне відображення $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологія, а область значень – стандартну. Тоді α – ін'єктивний, але не розщеплений монік.
!Припустимо, що існує морфізм $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_\mathbb{R}$. Тоді $\beta = \beta 1_\mathbb{R} = \beta\alpha = 1_\mathbb{R}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}$ з дискретною топологією, але не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha\colon X \to Y$ – морфізм в категорії Set.

$$\alpha \text{ – розщеплений монік} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: α – розщеплений монік. Оскільки Set – конкретна категорія, то звідси α – ін'єктивний.
Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_\emptyset$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: α – ін'єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.

Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін'єктивний, то $\alpha|_{\operatorname{Im}\alpha} \colon X \to \operatorname{Im}\alpha$ буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \operatorname{Im}\alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta \colon \operatorname{Im}\alpha \to X$, що розширюється до функції $\beta \colon Y \to X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \operatorname{Im}\alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.
Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta \colon Y \to X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

розщеплений монік $\implies$ *ін'єктивний* $\implies$ монік

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *ін'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.
Але якщо слово *ін'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У повній підкатегорії Set, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епікі

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha \colon x \to y$ називається **епіком**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епік, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення моніка).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & z \end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епік.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha \colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2 \colon Y \to Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр'єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію Rng та оберемо вкладення $\alpha \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що α – епік.
Нехай $\beta_1, \beta_2 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ – морфізми з Rng та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо
$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1})$.
Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:
$\beta_1\left(\dfrac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\dfrac{m}{n}\right)$.
Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категорія $\mathrm{Set}, \mathrm{Top}, \mathrm{Grp}$ морфізм сюр'єктивний $\iff$ морфізм – епік.

Proof.
Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епік. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(Set). Нехай $\alpha \colon X \to Y$ – епік морфізм. Нехай $\beta_1 \colon Y \to \{0, 1\}$ буде характеристичною функцією для $\operatorname{Im}\alpha$ та нехай $\beta_2 \colon Y \to \{0, 1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\operatorname{Im}\alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність α.

(Top). Проводиться те саме доведення, як з Set. Тільки треба $\alpha \colon X \to Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0, 1\}$ задати недискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неерервними.

(Grp). !Нехай $\alpha \colon G \to H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси

випливає, що $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епік морфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] = 2$. Нехай $\beta_1\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq q\beta_2$, оскільки $\operatorname{Im}\alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епік.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \operatorname{Im}\alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1 b = K_2$, а звідси $K_2 b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо бієкцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою $\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$. Можна зауважити, що $\sigma^2 = 1_H$ та $\sigma(kh) = k\sigma(h)$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha, h \in H$.
Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H, що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha$.
Визначимо $\beta_1, \beta_2\colon H \to S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справдлі задають гомоморфізм груп. Для $k \in \operatorname{Im}\alpha$ ми маємо
$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку α – не епік. ■