# Теорія категорії
# I курс магістратура, 2 семестр

3 березня 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1** **Категорія** $C$ складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $x, y, z, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів із** $x$ **в** $y$ $C(x, y)$ для всіх $x, y \in C$; морфізми позначають за $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Позначення $\alpha \colon x \to y$ або $x \overset{\alpha}{\to} y$ означають $\alpha$ – морфізм із $x$ в $y$; ми називаємо $x$ **джерелом** та $y$ **ціллю**;
– кожний об'єкт $x$ має **тотожний морфізм** $1_x \colon x \to x$;
– для кожних морфізмів $\alpha \colon x \to y$, $\beta \colon y \to z$ існуватиме **композиція морфізмів** $\beta\alpha \colon x \to z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $\alpha \colon x \to y$ виконано $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$;
2) для кожних трьох морфізмів $\alpha \colon w \to x, \beta \colon x \to y, \gamma \colon y \to z$ виконується асоціативність композиції, тобто $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Remark 0.1.3** Морфізм $1_x$ для кожного об'єкта $x$ – єдиний.

**Example 0.1.4** Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:
– $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – набір всіх множин;
– $\mathrm{Hom}(\mathbf{Set})$ – набір всіх функцій;
– тотожне відображення $1_X \colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f \colon X \to Y$ та $g \colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathbf{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f \colon X \to Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини $X, Y$, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

**Example 0.1.5** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

| Категорія | Об'єкти | Морфізми |
|---|---|---|
| **Grp** | групи | гомоморфізми груп |
| **Ab** | абелеві групи | гомоморфізми груп |
| **Rng** | кільця | гомоморфізми кілець |
| **Ring** | кільця з одиницею | гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю |
| ${}_R\mathbf{Mod}$ | $R$-модуль | $R$-лінійне відображення |
| **Top** | топологічні простори | неперервній відображення |
| **Met** | метричні простори | неперервні відображення |
| **Man** | гладкі многовиди | гладкі відображення |

**Example 0.1.6** Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньо виглядати. Категоріїя **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[loop left] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[loop left] & & \bullet \arrow[loop right] \\ & \bullet \arrow[ur] \arrow[loop below] & \end{tikzcd}$$

Так само є категорії **4**,**5**, ...

**Example 0.1.7** Розглянемо моноїд $M$. Ми можемо утворити категорію $\mathcal{M}$, яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

**Example 0.1.8** Розглянемо так званий посет $(P, \prec)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\mathrm{Ob}(P) = P$ та $P(i,j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки $\prec$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $\prec$ є рефлексивним відношенням.
*Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для $(P, \prec)$ відношення $\prec$ було антисиметричним.*

**Definition 0.1.9** Категорія $C$ називається **дискретною**, якщо

$$C(x,y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $x \to x$, і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія $D$ називається **підкатегорією** $C$, якщо

набір об'єктів $D$ міститься в наборі об'єктів $C$
набір стрілок $x \to y$ в $D$ міститься в наборі стрілок $x \to y$ в $C$ для довільних об'єктів $x, y$ із $D$
композиція двох морфізмів в $D$ задається так само, як і в $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія $D$ категорії $C$ називається **повною**, якщо

набір стрілок $x, y$ в $D$ збігається з набором стрілок $x, y$ в $C$, для довільних об'єктів $x, y$ із $D$

**Example 0.1.12** Зокрема маємо кілька прикладів:
1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

**Definition 0.1.13** Категорія $C$ називається **малою**, якщо

класи $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Hom}(C)$ – множини.

Інакше категорія $C$ називатиметься **великою**.
Категорія $C$ називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів $x, y$ клас $C(x,y)$ – множина

**Example 0.1.14** Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

**Definition 0.1.15** Категорія $C$ називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізмі – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

**Example 0.1.16** Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Мономорфізм

**Definition 0.2.1** Задано $C$ – категорія.
Морфізм $\alpha \colon x \to y$ називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, shift left, "\beta_2"] \arrow[r, shift right, "\beta_1"'] & x \arrow[r, "\alpha"] & y \end{tikzcd}$$

Часто мономорфізми позначають як $\alpha \colon x \rightarrowtail y$.

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

**Proof.**
Нехай $C$ – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ – морфізми $C$ та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$, тобто $\alpha$ – мономорфізм. ■

**Remark 0.2.3** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.
Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ із нашої категорії **Div** та гомоморфізм $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker\alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що $\alpha$ – мономорфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon A \to \mathbb{Q}$ – морфізми в **Div** та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \dfrac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки $A$ – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \dfrac{r}{s}$.
Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \dfrac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

**Theorem 0.2.5** У категоріях $\mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Rng}$ морфізм ін'єктивний $\iff$ морфізм – мономорфізм.

**Proof.**
Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – мономорфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який сінглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді
$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, $\alpha$ – ін'єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину $Z$ треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення $\beta_1, \beta_2$ будуть уже неперервними через дискретність $Z$.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – мономорфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2\colon \ker\alpha \to G$ – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,
$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \overset{g \in \ker\alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $\beta_1$ – тривіальне вкладення. Отже, $\ker\alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивніть $\alpha$.

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

### 0.2.2 Розщеплений мономорфізм

**Definition 0.2.6** Задано $C$ – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим мономорфізмом** (**split monic**), якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "1_x"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, shift right, "\exists\beta"'] \end{tikzcd}$$

**Theorem 0.2.7** Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

**Proof.**
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon z \to x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді
$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$. ■

**Theorem 0.2.8** У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін'єктивний морфізм.

**Proof.**
Нехай $C$ – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Припустимо $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Тоді
$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$. ■

**Remark 0.2.9** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.10** Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення $\alpha\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.
!Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що $\beta$ відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.11** Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологія, а область значень – стандартну. Тоді $\alpha$ – ін'єктивний, але не розщеплений мономорфізм.
!Припустимо, що існує морфізм $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$. Тоді $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}$ з дискретною топологією, але $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$ не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що $\beta$ – неперервне відображення.

**Theorem 0.2.12** Задано $\alpha\colon X \to Y$ – морфізм в категорії **Set**.
$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\alpha$ – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси $\alpha$ – ін'єктивний.
Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_\emptyset$. Тоді оскільки $\beta$ – функція, то $Y = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha$ – ін'єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.
Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки $\alpha$ – ін'єктивний, то $\alpha\colon X \to \operatorname{Im}\alpha$, буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \operatorname{Im}\alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta\colon \operatorname{Im}\alpha \to X$, що розширюється до функції $\beta\colon Y \to X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \operatorname{Im}\alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.
Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta\colon Y \to X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \textit{ін'єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *ін'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.
Але якщо слово *ін'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

### 0.2.3 Епіморфізм

**Definition 0.2.13** Задано $C$ – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **епіморфізмом** (**epic**), якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & z \end{tikzcd}$$

Часто епіморфізми позначають як $\alpha\colon x \twoheadrightarrow y$.

**Theorem 0.2.14** У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

**Proof.**
Нехай $C$ – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Y \to Z$ – морфізми $C$ та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки $\alpha$ – сюр'єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

**Remark 0.2.15** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.16** Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що $\alpha$ – епіморфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ – морфізми з **Rng** та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо
$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1}\cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1\cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1})$.
Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:
$\beta_1\left(\dfrac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\dfrac{m}{n}\right)$.
Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

**Theorem 0.2.17** У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний $\iff$ морфізм – епіморфізм.

**Proof.**
Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – епіморфізм морфізм. Нехай $\beta_1\colon Y \to \{0,1\}$ буде характеристичною функцією для $\operatorname{Im}\alpha$ та нехай $\beta_2\colon Y \to \{0,1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\operatorname{Im}\alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність $\alpha$.

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з Set. Тільки треба $\alpha\colon X \to Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0,1\}$ задати недискретну топологію, щоб $\beta_1, \beta_2$ стали неерервними.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що $\alpha$ – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] = 2$. Нехай $\beta_1\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq q\beta_2$, оскільки $\operatorname{Im}\alpha \neq H$. Тобто в даному випадку $\alpha$ – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \operatorname{Im}\alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1 b = K_2$, а звідси $K_2 b^{-1} = K_1$. Позначимо $S_H$ за групу симетрії на $H$ та оберемо бієкцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою
$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$. Можна зауважити, що $\sigma^2 = 1_H$ та $\sigma(kh) = k\sigma(h)$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha, h \in H$.
Для $h \in H$ нехай $\lambda_h$ буде елементом $S_H$, що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha$.
Визначимо $\beta_1, \beta_2\colon H \to S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справдлі задають гомоморфізм груп. Для $k \in \operatorname{Im}\alpha$ ми маємо
$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку $\alpha$ – не епіморфізм. ■

### 0.2.4 Розщеплений епіморфізм

**Definition 0.2.18** Задано $C$ – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого мономорфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"', shift right] & y \arrow[l, dashed, "\exists\beta"', shift right] \arrow[loop right, "1_y"] \end{tikzcd}$$

**Theorem 0.2.19** Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

**Proof.**
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\alpha\beta = 1_1$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon y \to z$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді
$\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$. ■

**Theorem 0.2.20** У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр'єктивний морфізм.

**Proof.**
Нехай $C$ – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси
$\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$. ■

**Remark 0.2.21** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.22** Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$, визначений як $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$ та $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$. Це буде сюр'єктивний гомоморфізм. Оскільки $1 \in \mathbb{Z}_2$ має порядок 2, то будь-який гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ зобов'язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином, $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$. Отже, $\alpha$ – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

**Example 0.2.23** Розглянемо категорію **Top**. Маємо $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді $\alpha$ – сюр'єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

**Theorem 0.2.24** У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм $\iff$ морфізм сюр'єктивний.

**Proof.**
Залишилося довести у зворотний бік.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Тобто для кожного $y \in Y$ знайдеться $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$, а це визначає функцію $\beta\colon Y \to X$, яка задовольняє $\alpha\beta = 1_Y$. Отже, $\alpha$ – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \textit{сюр'єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *сюр'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

### 0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

**Definition 0.2.25** Задано $C$ – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x \qquad \alpha\beta = 1_y$$

**Remark 0.2.26** Якщо $\alpha$ – ізоморфізм, то морфізм $\beta$ в означенні – єдиний та позначається за $\alpha^{-1}$.

**Definition 0.2.27** Задано $C$ – категорія.
Об'єкти $x, y$ називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha \colon x \to y \text{ – ізоморфізм}$$

Позначення: $x \cong y$ (це справді відношення еквівалентності).

**Theorem 0.2.28** Морфізм – ізоморфізм $\iff$ морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ *миттєво випливає з означення.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha$ – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми $\beta, \gamma \colon y \to x$, для яких $\beta\alpha = 1_x, \quad \alpha\gamma = 1_y$. Але тоді $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$. Отже, $\alpha$ – ізоморфізм. ∎

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.

$$\begin{tikzcd}
\text{мономорфізм} & & \text{епіморфізм} \\
& \text{біморфізм} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
\textit{ін'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] & & \textit{сюр'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \textit{бієктивний} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[uu, Rightarrow] & \\
\text{розщеплений мономорфізм} \arrow[uu, Rightarrow] & & \text{розщеплений епіморфізм} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \text{ізоморфізм} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[uu, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

**Theorem 0.2.29** У категорії $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}$ біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

**Proof.**
($\mathbf{Set}$). Нехай $\alpha \colon X \to Y$ – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що $\alpha$ – ізоморфізм. Оскільки $\alpha$ – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії $\alpha$ – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм $\alpha^{-1}$, для якого $\alpha^{-1}\alpha = 1_X, \quad \alpha\alpha^{-1} = 1_Y$, що й доводить ізоморфність.

($\mathbf{Grp}$). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо $\alpha$ – гомоморфізм, то $\alpha^{-1}$ буде ним також. ∎

**Remark 0.2.30** Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.
($\mathbf{Rng}$). Зауважимо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ буде біморфізмом, але не бієкцією.
($\mathbf{Top}$). Тотожне відображення $R \to R$, з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

## 0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

**Definition 0.3.1** Задано $C$ – категорія та $c \in C$ – об'єкт.
Об'єкт $c$ називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \alpha \colon c \to x$$

Об'єкт $c$ називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \beta \colon x \to c$$

**Example 0.3.2** Зокрема в категорії $\mathbf{Set}, \mathbf{Top}$ ініціальним об'єктом буде $\emptyset$; термінальним об'єктом буде $\{x\}$ (будь-який сінглтон).

**Example 0.3.3** У категоріях $\mathbf{Grp}, \mathbf{Rng}, {}_R\mathbf{Mod}$ ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде $\{e\}$, де $e$ – нейтральний елемент.

**Example 0.3.4** У категорії $\mathbf{Ring}$ ініціальним об'єктом буде кільце $\mathbb{Z}$, а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце $\{0\}$.

**Theorem 0.3.5** Задано $C$ – категорія, $c_1, c_2 \in C$ – обидва ініціальні. Тоді $c_1 \cong c_2$.

**Proof.**
За умовою, $c_1$ – ініціальний, тоді для об'єкта $c_1$ існує єдиний морфізм $\alpha\colon c_1 \to c_2$. Аналогічно, $c_2$ – ініціальний, тоді для об'єкта $c_1$ існує єдиний морфізм $\beta\colon c_2 \to c_1$. Розглянемо композицію $\beta\alpha\colon c_1 \to c_1$ – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності $\alpha, \beta$. У категорії точно існує морфізм $1_{c_1} : c_1 \to c_1$ – отже, в силу єдиності такого морфізму, $\beta\alpha = 1_{c_1}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha\beta = 1_{c_2}$. Значить, $\alpha\colon c_1 \to c_2$ буде ізоморфізмом. ■

**Theorem 0.3.6** Задано $C$ – категорія, $d_1, d_2 \in C$ – обидва термінальні. Тоді $d_1 \cong d_2$.
*Вправа: довести.*

## 0.4 Добуток

**Definition 0.4.1** Задано $C$ – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.
**Добутком** $X_1, X_2$ називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\pi_1\colon X \to X_1$ та $\pi_2\colon X \to X_2$, що є так званими **проєктивними морфізмами**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1\colon Y \to X_1, f_2\colon Y \to X_2 : \exists! f\colon Y \to X : \\ f_1 = \pi_1 f \qquad f_2 = \pi_2 f$$

Позначення: $X = X_1 \times X_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

**Remark 0.4.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії $C$ **добуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).
Позначення $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$.

**Example 0.4.3** Будемо в категорії $\mathbf{Set}$. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$. Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій $f\colon I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ таких, що $f(i) \in X_i$ для всіх $i \in I$. Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного $i \in I$ визначимо проєкцію $\pi_i\colon P \to X_i$ таким чином: $\pi_i(f) = f(i)$.
Доведемо, що пара $(P, \{\pi_i\})$ буде утворювати добуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

**Proof.**
Нехай $Y$ – об'єкт з морфізмами $\alpha_i\colon Y \to X_i$. Хочемо знайти єдиний морфізм $\gamma\colon Y \to P$, щоб $\alpha_i = \pi_i \gamma$. Покладемо $\gamma\colon Y \to P$ таким чином: $\forall y \in Y : \gamma(y)$ буде функцією $I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, причому $\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$. Тоді $\pi_i \gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$, тобто звідси $\pi_i \gamma = \alpha_i$ для всіх $i \in I$.
!Припустимо, що існує функція $\gamma'\colon Y \to P$, для якої $\pi_i \gamma' = \alpha_i$. Тобто для кожного $y \in Y$ та кожного $i \in I$ виконано $\gamma'(y)(i) = \alpha_i(x)$. Але тоді
$\gamma'(y)(i) = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i \gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)(i)$. Суперечність! ■

**Example 0.4.4** Будемо в категорії **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний $X_i$ тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток $P$ – це буде група зі покомпонентним множенням: $(fg)(i) = f(i)g(i)$. Це ще називають **(зовнішнім) прямим добутком груп**. Проєктивні відображення $\pi_i$ будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**, ${}_R\,$**Mod** аналогічно все.

**Example 0.4.5** Залишилася категорія **Top**.

## 0.5 Кодобуток

**Definition 0.5.1** Задано $C$ – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.
**Кодобутком** $X_1, X_2$ називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\imath_1 \colon X_1 \to X$ та $\imath_2 \colon X_2 \to X$, що є так званими **морфізмами вкладень**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1 \colon X_1 \to Y, f_2 \colon X_2 \to Y : \exists! f \colon X \to Y :$$
$$f_1 = f\imath_1 \qquad f_2 = f\imath_2$$

Позначення: $X = X_1 \sqcup X_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
 & X_1 \sqcup X_2 \arrow[u, dashed, "f"] & \\
X_1 \arrow[ur, "\imath_1"'] \arrow[uur, bend left, "f_1"] & & X_2 \arrow[ul, "\imath_2"] \arrow[uul, bend right, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

**Remark 0.5.2** Аналогічним чином можна визначити в категорії $C$ **кодобуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).
Позначення $X = \coprod_{i \in I} X_i$.

**Example 0.5.3** Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (якусь довільну). Визначимо множину $Q$ ось так: $Q = \bigsqcup_i X_i'$, де в цьому випадку $X_i' = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ для всіх $i$.
Причому варто зауважити, що $X_i'$ дійсно неперетинні, а також $X_i' \cong X_i$. Визначимо відображення $\imath_i \colon X_i \to Q$ таким чином: $\imath_i(x) = (x, i)$.
Доведемо, що пара $(Q, \{\imath_i\})$ буде утворювати кодобуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

**Proof.**
Створімо нову категорію $\mathbf{D}_{\text{copr}}$, яка функціонує ось таким чином:
об'єктами будуть пари $(X, \{\alpha_i\})$, де $X$ – об'єкт категорії **Set** та $\alpha_i \colon X_i \to X$ – відображення;
морфізмом між $(X, \{\alpha_i\})$ та $(Y, \{\beta_j\})$ буде відображення $\gamma \colon X \to Y$, для якого $\gamma \circ \alpha_i = \beta_i$, причому це для всіх $i$. Це дозволяє для всіх $i$ зробити діаграму комутативною.
Так ось, нам треба довести, що наша визначена пара $(Q, \{\imath_i\})$ буде ініціальним об'єктом.
Нехай $(X, \{\alpha_i\})$ – будь-який об'єкт $\mathbf{D}_{\text{copr}}$. Визначимо відображення $\gamma \colon Q \to X$ ось таким чином: $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$. Зауважимо, що для всіх $i$ та всіх $x \in X$ ми маємо, що
$\gamma \circ \imath_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$.
Значить, $\gamma$ буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.
Оберемо морфізм $\gamma'$, який діє між двома об'єктами, тобто $(Q, \{\imath_i\})$ та $(X, \{\alpha_i\})$. Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність $\gamma' \circ \imath_i = \alpha_i$ для всіх $i$. Проте з іншого боку, $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$. Значить, $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \imath_i(x) = \gamma'((x, i))$. ■