Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

26 березня 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 **Категорія** C складається з наступних компонент:
– із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за $x, y, z, \dots$, а набір позначають за $\mathrm{Ob}(C)$;
– із набору **морфізмів із** x **в** y $C(x, y)$ для всіх $x, y \in C$; морфізми позначають за $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Позначення $\alpha\colon x \to y$ або $x \xrightarrow{\alpha} y$ означають α – морфізм із x в y; ми називаємо x **джерелом** та y **ціллю**;
– кожний об'єкт x має **тотожний морфізм** $1_x\colon x \to x$;
– для кожних морфізмів $\alpha\colon x \to y$, $\beta\colon y \to z$ існуватиме **композиція морфізмів** $\beta\alpha\colon x \to z$.
При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

1) для всіх морфізмів $\alpha\colon x \to y$ виконано $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$;
2) для кожних трьох морфізмів $\alpha\colon w \to x, \beta\colon x \to y, \gamma\colon y \to z$ виконується асоціативність композиції, тобто $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Remark 0.1.3 Морфізм 1_x для кожного об'єкта x – єдиний.

Example 0.1.4 Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:
– $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – набір всіх множин;
– $\mathrm{Hom}(\mathbf{Set})$ – набір всіх функцій;
– тотожне відображення $1_X\colon X \to X$ задається як $x \mapsto x$;
– композиція між $f\colon X \to Y$ та $g\colon Y \to Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ – це саме <u>набір</u> всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.
До речі, $\mathbf{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f\colon X \to Y$ – буде, насправді, <u>множиною</u>. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y, то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.5 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

Категорія	Об'єкти	Морфізми
Grp	групи	гомоморфізми груп
Ab	абелеві групи	гомоморфізми груп
Rng	кільця	гомоморфізми кілець
Ring	кільця з одиницею	гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю
$_R$**Mod**	R-модуль	R-лінійне відображення
Top	топологічні простори	неперервній відображення
Met	метричні простори	неперервні відображення
Man	гладкі многовиди	гладкі відображення

Example 0.1.6 Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньо виглядати. Категоріїя **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[loop right] \\ & \bullet \arrow[loop below] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Так само є категорії **4**,**5**, ...

Example 0.1.7 Розглянемо моноїд M. Ми можемо утворити категорію $\mathcal{M}$, яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.8 Розглянемо так званий посет $(P, \prec)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\mathrm{Ob}(P) = P$ та $P(i,j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки $\prec$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $\prec$ є рефлексивним відношенням.
Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для $(P, \prec)$ відношення $\prec$ було антисиметричним.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(x,y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $x \to x$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C, якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
набір стрілок $x \to y$ в D міститься в наборі стрілок $x \to y$ в C для довільних об'єктів x, y із D
композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок x, y в D збігається з набором стрілок x, y в C, для довільних об'єктів x, y із D

Example 0.1.12 Зокрема маємо кілька прикладів:
1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

Definition 0.1.13 Категорія C називається **малою**, якщо

класи $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Hom}(C)$ – множини.

Інакше категорія C називатиметься **великою**.
Категорія C називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів x, y клас $C(x,y)$ – множина

Example 0.1.14 Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

Definition 0.1.15 Категорія C називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізмі – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

Example 0.1.16 Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Мономорфізм

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha \colon x \to y$ називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \underset{\beta_1}{\overset{\beta_2}{\rightrightarrows}} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Часто мономорфізми позначають як $\alpha \colon x \rightarrowtail y$.

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$, тобто α – мономорфізм. ■

Remark 0.2.3 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.
Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ із нашої категорії **Div** та гомоморфізм $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker\alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – мономорфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon A \to \mathbb{Q}$ – морфізми в **Div** та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \dfrac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \dfrac{r}{s}$.
Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \dfrac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях **Set**, **Top**, **Grp**, **Rng** морфізм ін'єктивний $\iff$ морфізм – мономорфізм.

Proof.
Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – мономорфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який сінглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2\colon Z \to X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді
$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін'єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – мономорфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2\colon \ker\alpha \to G$ – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,
$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \overset{g \in \ker\alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g)$.
За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker\alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивніть α.

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

0.2.2 Розщеплений мономорфізм

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим мономорфізмом** (**split monic**), якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "1_x"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, shift right, "\exists\beta"'] \end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

Proof.
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon z \to x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді
$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін'єктивний морфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Припустимо $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Тоді
$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$. ■

Remark 0.2.9 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення $\alpha\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.
!Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологія, а область значень – стандартну. Тоді α – ін'єктивний, але не розщеплений мономорфізм.
!Припустимо, що існує морфізм $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_\mathbb{R}$. Тоді $\beta = \beta 1_\mathbb{R} = \beta\alpha = 1_\mathbb{R}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}$ з дискретною топологією, але $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$ не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha\colon X \to Y$ – морфізм в категорії **Set**.

$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм } \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін'єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: α – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси α – ін'єктивний.
Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta\colon Y \to X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_\emptyset$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: α – ін'єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.
Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін'єктивний, то $\alpha\colon X \to \operatorname{Im}\alpha$, буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \operatorname{Im}\alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta\colon \operatorname{Im}\alpha \to X$, що розширюється до функції $\beta\colon Y \to X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \operatorname{Im}\alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.
Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta\colon Y \to X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \textit{ін'єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *ін'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами.
Але якщо слово *ін'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епіморфізм

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **епіморфізмом** (**epic**), якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & y \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] & z \end{tikzcd}$$

Часто епіморфізми позначають як $\alpha\colon x \twoheadrightarrow y$.

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon Y \to Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр'єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що α – епіморфізм.
Нехай $\beta_1, \beta_2\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ – морфізми з **Rng** та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо
$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1}{\cdot}1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1})$.
Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:
$\beta_1\left(\dfrac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\dfrac{m}{n}\right)$.
Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний $\iff$ морфізм – епіморфізм.

Proof.
Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категоріях.

(**Set**). Нехай $\alpha\colon X \to Y$ – епіморфізм морфізм. Нехай $\beta_1\colon Y \to \{0,1\}$ буде характеристичною функцією для $\operatorname{Im}\alpha$ та нехай $\beta_2\colon Y \to \{0,1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\operatorname{Im}\alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність α.

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з Set. Тільки треба $\alpha\colon X \to Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0,1\}$ задати недискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неерервними.

(**Grp**). Нехай $\alpha\colon G \to H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] = 2$. Нехай $\beta_1\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2\colon H \to H/_{\operatorname{Im}\alpha}$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq q\beta_2$, оскільки $\operatorname{Im}\alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епіморфізм.
Випадок $[H : \operatorname{Im}\alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \operatorname{Im}\alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \operatorname{Im}\alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1 b = K_2$, а звідси $K_2 b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо біекцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою
$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$. Можна зауважити, що $\sigma^2 = 1_H$ та $\sigma(kh) = k\sigma(h)$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha, h \in H$.
Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H, що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \operatorname{Im}\alpha$.
Визначимо $\beta_1, \beta_2\colon H \to S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справдлі задають гомоморфізм груп. Для $k \in \operatorname{Im}\alpha$ ми маємо
$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку α – не епіморфізм. ■

0.2.4 Розщеплений епіморфізм

Definition 0.2.18 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta\colon y \to x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого мономорфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\alpha"'] & y \arrow[l, dashed, bend right, "\exists\beta"'] \arrow[loop right, "1_y"]
\end{tikzcd}
$$

Theorem 0.2.19 Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

Proof.
Нехай $\alpha\colon x \to y$ – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta\colon y \to x$, для якого $\alpha\beta = 1_1$. Нехай $\beta_1, \beta_2\colon y \to z$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді
$\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.20 У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр'єктивний морфізм.

Proof.
Нехай C – конкретна категорія та $\alpha\colon X \to Y$ – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм $\beta\colon Y \to X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси
$\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$. ■

Remark 0.2.21 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.22 Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$, визначений як $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$ та $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$. Це буде сюр'єктивний гомоморфізм. Оскільки $1 \in \mathbb{Z}_2$ має порядок 2, то будь-який гомоморфізм $\beta\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ зобов'язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином, $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$. Отже, α – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.23 Розглянемо категорію **Top**. Маємо $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді α – сюр'єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

Theorem 0.2.24 У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм $\iff$ морфізм сюр'єктивний.

Proof.
Залишилося довести у зворотний бік.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha\colon X \to Y$ – сюр'єктивний морфізм. Тобто для кожного $y \in Y$ знайдеться $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$, а це визначає функцію $\beta\colon Y \to X$, яка задовольняє $\alpha\beta = 1_Y$. Отже, α – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в *конкретній* категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \textit{сюр'єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.
У більш загальних категоріям *сюр'єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр'єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.
У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

Definition 0.2.25 Задано C – категорія.
Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм $\alpha\colon x \to y$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists\beta\colon y \to x : \beta\alpha = 1_x \qquad \alpha\beta = 1_y$$

Remark 0.2.26 Якщо α – ізоморфізм, то морфізм β в означенні – єдиний та позначається за α^{-1}.

Definition 0.2.27 Задано C – категорія.
Об'єкти x, y називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha \colon x \to y \text{ – ізоморфізм}$$

Позначення: $x \cong y$ (це справді відношення еквівалентності).

Theorem 0.2.28 Морфізм – ізоморфізм $\iff$ морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *миттєво випливає з означення.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: α – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми $\beta, \gamma \colon y \to x$, для яких $\beta\alpha = 1_x, \quad \alpha\gamma = 1_y$. Але тоді $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$. Отже, α – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.

$$\begin{tikzcd}
\text{мономорфізм} & & \text{епіморфізм} \\
& \text{біморфізм} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
\textit{ін'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] & & \textit{сюр'єктивний} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \textit{бієктивний} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
\text{розщеплений мономорфізм} \arrow[uu, Rightarrow] & & \text{розщеплений епіморфізм} \arrow[uu, Rightarrow] \\
& \text{ізоморфізм} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Theorem 0.2.29 У категорії $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}$ біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

Proof.
(**Set**). Нехай $\alpha \colon X \to Y$ – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що α – ізоморфізм. Оскільки α – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії α – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм α^{-1}, для якого $\alpha^{-1}\alpha = 1_X, \quad \alpha\alpha^{-1} = 1_Y$, що й доводить ізоморфність.

(**Grp**). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо α – гомоморфізм, то α^{-1} буде ним також. ■

Remark 0.2.30 Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.
(**Rng**). Зауважимо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ буде біморфізмом, але не бієкцією.
(**Top**). Тотожне відображення $R \to R$, з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

Definition 0.3.1 Задано C – категорія та $c \in C$ – об'єкт.
Об'єкт c називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \alpha \colon c \to x$$

Об'єкт c називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C : \exists! \beta \colon x \to c$$

Example 0.3.2 Зокрема в категорії **Set**, **Top** ініціальним об'єктом буде $\emptyset$; термінальним об'єктом буде $\{x\}$ (будь-який сінглтон).

Example 0.3.3 У категоріях **Grp**, **Rng**, ${}_R\,$**Mod** ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде $\{e\}$, де e – нейтральний елемент.

Example 0.3.4 У категорії **Ring** ініціальним об'єктом буде кільце $\mathbb{Z}$, а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце $\{0\}$.

Theorem 0.3.5 Задано C – категорія, $c_1, c_2 \in C$ – обидва ініціальні. Тоді $c_1 \cong c_2$.

Proof.
За умовою, c_1 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\alpha\colon c_1 \to c_2$. Аналогічно, c_2 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\beta\colon c_2 \to c_1$. Розглянемо композицію $\beta\alpha\colon c_1 \to c_1$ – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності α, β. У категорії точно існує морфізм $1_{c_1}\colon c_1 \to c_1$ – отже, в силу єдиності такого морфізму, $\beta\alpha = 1_{c_1}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha\beta = 1_{c_2}$. Значить, $\alpha\colon c_1 \to c_2$ буде ізоморфізмом. ■

Theorem 0.3.6 Задано C – категорія, $d_1, d_2 \in C$ – обидва термінальні. Тоді $d_1 \cong d_2$.
Вправа: довести.

0.4 Добуток

Definition 0.4.1 Задано C – категорія та $\{c_1, c_2\}$ – сім'я об'єктів C. Сформуємо категорію $\mathbf{D}_{\text{pr}}$ таким чином:
об'єктами будуть пари $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$, де x – об'єкт в C та $\alpha_1\colon x \to c_1, \alpha_2\colon x \to c_2$ – морфізми в C;

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ c_1 & & c_2 \end{tikzcd}$$

морфізмом між об'єктами $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\}) \to (y, \{\beta_1, \beta_2\})$ будуть всі морфізми $\gamma\colon x \to y$, для яких $\beta_1\gamma = \alpha_1,\ \beta_2\gamma = \alpha_2$;

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddl, bend right, "\beta_2"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta_1"] & \\ & x \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ c_1 & & c_2 \end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C.
Добутком сім'ї $\{c_1, c_2\}$ називають термінальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pr}}$.

Позначимо термінальний об'єкт за $(p, \{\pi_1, \pi_2\})$. Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ існує єдиний морфізм між $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ та $(p, \{\pi_1, \pi_2\})$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma\colon x \to p$ в категорії C, для якого $\pi_1\gamma = \alpha_1,\ \pi_2\gamma = \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha_2"'] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_1"] & \\ & p \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ c_1 & & c_2 \end{tikzcd}$$

Використовується позначення $p = c_1 \times c_2$; морфізми $\pi_1\colon c_1 \times c_2 \to c_1,\ \pi_2\colon c_1 \times c_2 \to c_2$ називаються **проєктивними морфізмами**.

Remark 0.4.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C добуток деякої сім'ї об'єктів $\{c_i, i \in I\}$. Позначення: $p = \prod\limits_{i \in I} c_i$.

Example 0.4.3 Розглянемо категорію **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$. Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій $f\colon I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ таких, що $f(i) \in X_i$ для всіх $i \in I$. Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного $i \in I$ визначимо проєкцію $\pi_i\colon P \to X_i$ таким чином: $\pi_i(f) = f(i)$.
Доведемо, що пара $(P, \{\pi_i\})$ буде утворювати добуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.
Нехай Y – об'єкт з морфізмами $\alpha_i\colon Y \to X_i$. Хочемо знайти єдиний морфізм $\gamma\colon Y \to P$, щоб $\alpha_i = \pi_i \gamma$. Покладемо $\gamma\colon Y \to P$ таким чином: $\forall y \in Y : \gamma(y)$ буде функцією $I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, причому $\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$. Тоді $\pi_i \gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$, тобто звідси $\pi_i \gamma = \alpha_i$ для всіх $i \in I$.
!Припустимо, що існує функція $\gamma'\colon Y \to P$, для якої $\pi_i \gamma' = \alpha_i$. Тобто для кожного $y \in Y$ та кожного $i \in I$ виконано $\gamma'(y)(i) = \alpha_i(x)$. Але тоді $\gamma'(y)(i) = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i \gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)(i)$. Суперечність! ■

Example 0.4.4 Розглянемо категорію **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний X_i тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток P – це буде група зі покомпонентним множенням: $(fg)(i) = f(i)g(i)$. Це ще називають **(зовнішнім) прямим добутком груп**. Проєктивні відображення π_i будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**, ${}_R\,$**Mod** все аналогічно.

Example 0.4.5 Залишилася категорія **Top**. Маємо (X_i, τ_i) – топологічні простори. Добуток топології для $P = \prod\limits_{i \in I} X_i$, як відомо, породжується передбазою $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(U) \mid U$ – відкрита в $X_i\}$.
Це дозволяє нам створити таку топологію, що всі $\pi_i\colon P \to X_i$ стануть неперервними.
Доведемо, що $\gamma\colon X \to P$, що була визначена вище, – неперервна. Оскільки ми створили топологію через передбазу, нам достатньо довести, що $\gamma^{-1}(\pi_i^{-1}(U))$ – відкриті.
$\gamma^{-1}(\pi_i^{-1}(U)) = (\pi\gamma)^{-1}(U) = \alpha_i^{-1}(U)$ – відкрита, бо α_i припускалася, що неперервна.
Той факт, що $(P, \{\pi_i\})$ задає добуток, доводиться аналогічно.

0.5 Кодобуток

Definition 0.5.1 Задано C – категорія та $\{c_1, c_2\}$ – сім'я об'єктів C. Сформуємо категорію $\mathbf{D}_{\text{copr}}$ таким чином:
об'єктами будуть пари $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$, де x – об'єкт в C та $\alpha_1\colon c_1 \to x, \alpha_2\colon c_2 \to x$ – морфізми в C;

$$\begin{tikzcd}
& x & \\
c_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & c_2 \arrow[ul, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

морфізмом між об'єктами $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\}) \to (y, \{\beta_1, \beta_2\})$ будуть усі морфізми $\gamma\colon x \to y$, для яких $\gamma\alpha_1 = \beta_1,\ \gamma\alpha_2 = \beta_2$;

$$\begin{tikzcd}
& y & \\
& x \arrow[u, "\gamma"] & \\
c_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[uur, bend left, "\beta_1"] & & c_2 \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[uul, bend right, "\beta_2"']
\end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C.
Кообутком сім'ї $\{c_1, c_2\}$ називають ініціальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{copr}}$.

Позначимо ініціальний об'єкт за $(q, \{\imath_1, \imath_2\})$. Тоді за означенням ініціальності, для кожного об'єкта $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ існує єдиний морфізм між $(q, \{\imath_1, \imath_2\})$ та $(x, \{\alpha_1, \alpha_2\})$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma \colon q \to x$ в категорії C, для якого $\gamma\imath_1 = \alpha_1,\ \gamma\imath_2 = \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & y & \\
 & x \arrow[u, "\gamma"] & \\
c_1 \arrow[ur, "\imath_1"] \arrow[uur, bend left, "\alpha_1"] & & c_2 \arrow[ul, "\imath_2"'] \arrow[uul, bend right, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

Використовується позначення $p = c_1 \sqcup c_2$; морфізми $\imath_1 \colon c_1 \to c_1 \sqcup c_2,\ \imath_2 \colon c_2 \to c_1 \sqcup c_2$ називаються **морфізмами вкладень**.

Remark 0.5.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C кодобуток деякої сім'ї об'єктів $\{c_i, i \in I\}$. Позначення: $q = \coprod_{i \in I} c_i$.

Example 0.5.3 Розглянемо категорію **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (якусь довільну). Визначимо множину Q ось так: $Q = \bigsqcup_i X_i'$, де в цьому випадку $X_i' = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ для всіх i. Причому варто зауважити, що X_i' дійсно неперетинні, а також $X_i' \cong X_i$. Визначимо відображення $\imath_i \colon X_i \to Q$ таким чином: $\imath_i(x) = (x, i)$.
Доведемо, що пара $(Q, \{\imath_i\})$ буде утворювати кодобуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.
Нехай $(X, \{\alpha_i\})$ – будь-який об'єкт $\mathbf{D}_{\text{copr}}$. Визначимо відображення $\gamma \colon Q \to X$ ось таким чином: $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$. Зауважимо, що для всіх i та всіх $x \in X$ ми маємо $\gamma \circ \imath_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$. Значить, γ буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.
Оберемо морфізм γ', який діє між двома об'єктами, тобто $(Q, \{\imath_i\})$ та $(X, \{\alpha_i\})$. Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність $\gamma' \circ \imath_i = \alpha_i$ для всіх i. Проте з іншого боку, $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$. Значить, $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \imath_i(x) = \gamma'((x, i))$. ■

Example 0.5.4 Розглянемо категорію. **Top**. Як і в категорії **Set**, розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (тільки тут вже топологічні простори). Визначимо множину Q так само, як було вище. На ній задається така топологія: U – відкрита в $Q \iff \imath_i^{-1}(U)$ – відкрита в X_i для всіх i. Тоді всі функції $\imath_i \colon X_i \to Q$, як було визначено вище, будуть неперервними. Далі аналогічним чином доводимо, що пара $(Q, \{\imath_i\})$ утворює кодобуток.

Example 0.5.5 Розглянемо категорію ${}_R\,\mathbf{Mod}$. Нехай $\{M_i\}$ – сім'я модулів над кільцем R та позначимо $M = \bigoplus_i M_i$, який є підмодулем модуля $\prod_i M_i$. Просто тому що

$$M = \bigoplus_i M_i = \left\{ m \in \prod_i M_i \mid m_i \neq 0 \text{ лише для скінченного числа індексів } i \right\}$$

Визначимо відображення $\imath_i \colon M_i \to M$ таким чином: $\imath_i(m)_j = \delta_{ij}(m)$, де δ_{ij} – Кронекер-дельта символ, який повертає m при $i = j$ або 0 в інакшому випадку. Покажемо, що $(M, \{\imath_i\})$ буде утворювати кодобуток.

Proof.
Нехай $(N, \{\alpha_i\})$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{copr}}$. Визначимо відображення $\gamma \colon M \to N$ таким чином: $\gamma(m) = \sum_i \alpha_i(m_i)$ (це скінченна сума, тому все тут коректно). Неважко пересвідчитися буде, що γ задає R-лінійне відображення. Також $\gamma\imath_i = \alpha_i$ для всіх i. Дійсно,
$\gamma\imath_i(m) = \sum_j \alpha_j(\imath_i(m)_j) = \sum_j \alpha_j(\delta_{ij}(m)) = \alpha_i(m)$.
Таким чином, γ – морфізм в $\mathbf{D}_{\text{copr}}$.
Припустимо, що γ' – інший морфізм між $(M, \{\imath_i\})$ та $(N, \{\alpha_i\})$. Зафіксуємо $m \in M$. Для всіх j маємо:

$$m_j = \sum_i \delta_{ij}(m_i) = \sum_i \imath_i(m_i)_j = \left(\sum_i \imath_i(m_i)\right)_j \implies m = \sum_i \imath_i(m_i).$$
$$\gamma'(m) = \gamma'\left(\sum_i \imath_i(m_i)\right) = \sum_i \gamma'\imath_i(m_i) = \sum_i \alpha_i(m_i) = \gamma(m).$$

Якщо покласти кільце $R = \mathbb{Z}$, то доведемо, що для категорії **Ab** існує кодобуток. Так само якщо покласти кільце $R = F$ – поле, то доведемо, що для категорії $\mathbf{Vect}_F$ теж існує кодобуток. ■

0.6 Зрівняльник

Definition 0.6.1 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2 \colon a \to b$ – два морфізми.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \end{tikzcd}$$

Сформуємо категорію $\mathbf{D}_{\mathrm{eq}}$ таким чином:
об'єктами будуть пари (x, α), де x – об'єкт категорії C та $\alpha \colon x \to a$ – морфізм в C, щоб $\lambda_1\alpha = \lambda_2\alpha$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \end{tikzcd}$$

морфізмом між об'єктами $(x, \alpha) \to (y, \beta)$ буде морфізм $\gamma \colon x \to y$ категорії C, для якого $\beta\gamma = \alpha$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\ y \arrow[ur, "\beta"] & & \end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії C.
Зрівняльником (або **equalizer**) λ_1, λ_2 будемо називати термінальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\mathrm{eq}}$.

Позначимо термінальний об'єкт за $(p, \imath)$. Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта (x, α) існує єдиний морфізм між (x, α) та $(p, \imath)$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma \colon x \to p$ в категорії C, для якого $\imath\gamma = \alpha$ – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dd, "\exists!\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\ p \arrow[ur, "\imath"] & & \end{tikzcd}$$

Example 0.6.2 Розглянемо категорію **Set**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – два відображення. Покладемо $P = \{a \in A \mid \lambda_1(a) = \lambda_2(a)\}$ та $\imath \colon P \to A$ – вкладення. Тоді $\lambda_1\imath = \lambda_2\imath$ (тобто звідси $(P, \imath)$ буде об'єктом категорії $\mathbf{D}_{\mathrm{eq}}$, який був зазначений вище). Стверджується, що $(P, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2. Нехай (X, α) – довільний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\mathrm{eq}}$. Для кожного $x \in X$ ми маємо $\lambda_1(\alpha(x)) = \lambda_1\alpha(x) = \lambda_2\alpha(x) = \lambda_2(\alpha(x))$, тобто $\operatorname{Im}\alpha \subset P$. Оберемо відображення $\gamma \colon X \to P$ так, що $\gamma = \alpha$. Тоді звідси $\imath\gamma = \alpha$, тобто γ – морфізм між об'єктами $(X, \alpha) \to (P, \imath)$.
Оскільки $\imath$ – ін'єктивний (як вкладення), то тоді це мономорфізм. Отже, γ – єдиний такий морфізм.

Example 0.6.3 Розглянемо категорію **Top**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – неперервні відображення. Визначимо $P, \imath$ так само, як в попередньому прикладі (оскільки $P \subset A$, то можна визначити топологічний підпростір). Таким чином, $\imath$ уже буде неперервним. Далі так само доводимо, що $(P, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2.

Example 0.6.4 Розглянемо категорію **Grp**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \colon A \to B$ – два гомоморфізми груп та P – така сама множина, що в попередньому прикладі, яка є підгрупою A, тож $\imath \colon P \to A$ (знову вкладення) – гомоморфізм груп. Далі так само доводимо, що $(P, \imath)$ – зрівнальник λ_1, λ_2.

Аналогічно для категорій **Rng**, ${}_R\,$**Mod**.

Proposition 0.6.5 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2 \colon a \to b$ – два морфізми. Припустимо, що $(p, \imath)$ – зрівняльник λ_1, λ_2. Тоді $\imath$ – мономорфізм.

Proof.
Нехай $\beta_1, \beta_2 \colon x \to p$ – морфізми категорії C, для яких $\imath\beta_1 = \imath\beta_2$. Для зручності позначу $\imath\beta_1 = \alpha$.
Оскільки $(p, \imath)$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{eq}}$, ми маємо наступне:
$\lambda_1\alpha = (\lambda_1\imath)\beta_1 = (\lambda_2\imath)\beta_1 = \lambda_2\alpha$.
Отже, (x, α) – також об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{eq}}$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dd, shift right, "\beta_2"'] \arrow[dd, shift left, "\beta_1"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\ p \arrow[ur, "\imath"] & & \end{tikzcd}$$

За початковими припущеннями, $\imath\beta_1 = \alpha$, $\imath\beta_2 = \alpha$. Але за єдиністю відображення з такими властивостями (зважаючи на означення зрівняльника), $\beta_1 = \beta_2$. Звідси $\imath$ – мономорфізм. ■

0.7 Козрівняльник

Definition 0.7.1 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2 \colon a \to b$ – два морфізми.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \end{tikzcd}$$

Сформуємо категорію $\mathbf{D}_{\text{coeq}}$ таким чином:
об'єктами будуть пари (x, α), де x – об'єкт категорії C та $\alpha \colon b \to x$ – морфізм в C, щоб $\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_2$;

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \arrow[r, "\alpha"] & x \end{tikzcd}$$

морфізмом між об'єктами $(x, \alpha) \to (y, \beta)$ буде морфізм $\gamma \colon x \to y$ категорії C, для якого $\gamma\alpha = \beta$;

$$\begin{tikzcd} & & y \\ a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\ & & x \arrow[uu, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії C.
Козрівняльником (або **coequalizer**) λ_1, λ_2 будемо називати ініціальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{coeq}}$.

Позначимо ініціальний об'єкт за (q, π). Тоді за означенням ініціальности, для кожного об'єкта (x, α) існує єдиний морфізм між (q, π) та (x, α). Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma \colon q \to x$ в категорії C, для якого $\gamma\pi = \alpha$ – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{tikzcd} & & x \\ a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\pi"'] & \\ & & q \arrow[uu, "\exists!\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 0.7.2 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2 \colon a \to b$ – два морфізми. Припустимо, що (q, π) – козрівнялник λ_1, λ_2. Тоді $\imath$ – епіморфізм.
Насправді, доведення є аналогічним, коли мова була про зрівняльник $\implies$ *мономорфізм.*

0.8 Пулбек

Definition 0.8.1 Задано C – категорія та $\lambda_1 \colon a_1 \to b,\ \lambda_2 \colon a_2 \to b$ – морфізми.

$$\begin{tikzcd} & a_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\ a_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & b \end{tikzcd}$$

Сконструюємо категорію $\mathbf{D}_{\mathrm{pb}}$ ось таким чином:
об'єктами будуть пари $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$, де x – об'єкт категорії C та $\alpha_1 \colon x \to a_1,\ \alpha_2 \colon x \to a_2$ – два морізми категорії C, для яких $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & a_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\ a_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & b \end{tikzcd}$$

морфізмами між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(y, (\beta_1, \beta_2))$ будуть всі морфізми $\gamma \colon x \to y$ категорії C, для яких $\beta_1\gamma = \alpha_1,\ \beta_2\gamma = \alpha_2$;

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\ & y \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & a_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\ & a_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & b \end{tikzcd}$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C.
Пулбеком пари морфізмів (λ_1, λ_2) будемо називати термінальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\mathrm{pb}}$.

Позначимо термінальний об'єкт за $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$. Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ існує єдиний морфізм між $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma \colon x \to p$ в категорії C, для якого $\sigma_1\gamma = \alpha_1,\ \sigma_2\gamma = \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\ & p \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "\sigma_1"] & a_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\ & a_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & b \end{tikzcd}$$

Example 0.8.2 Розглянемо категорію **Set**. Нехай $\lambda_i \colon A_i \to B (i = 1, 2)$ будуть дві функції. Визначимо $A_1 \times_B A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \lambda(a_1) = \lambda(a_2)\} \subset A_1 \times A_2$. Така множина називається **розшарованим добутком** λ_1, λ_2.

Покладемо $P = A_1 \times_B A_2$ та визначимо $\sigma_i \colon P \to A_i$ таким чином: $\sigma_i((a_1, a_2)) = a_i, i = 1, 2$. Зауважимо, що $\lambda_1\sigma_1 = \lambda_2\sigma_2$. Дійсно, для $a = (a_1, a_2) \in P$ маємо наступне:
$\lambda_1\sigma_1(a) = \lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2) = \lambda_2\sigma_2(a)$.
Отже, $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ – об'єкт допоміжної категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$. Я стверджую, що цей об'єкт буде пулбеком пари (λ_1, λ_2).
Нехай $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$. Визначимо $\gamma \colon X \to P$ таким чином $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$.
Зауважимо, що $(\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \overset{\text{дійсно}}{\in} P$, оскільки $\lambda_1(\alpha_1(x)) = \lambda_2(\alpha_2(x))$ (в силу обраного об'єкта з $\mathbf{D}_{\text{pb}}$). Також зазначимо, що $\sigma_i\gamma = \alpha_i, i = 1, 2$, тому це формує морфізм між $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$. Залишилося довести єдиність.
Нехай γ' – інший морфізм між $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$.
$\gamma'(x) = (\sigma_1\gamma'(x), \sigma_2\gamma'(x)) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = \gamma(x)$.
Тобто $\gamma' = \gamma$, що доводить єдиність морфізма.

Example 0.8.3 Розглянемо категорію **Top**. Нехай $\lambda_i \colon A_i \to B (i = 1, 2)$ – уже неперервні відображення, на $A_1 \times A_2$ покладемо добуток топологій A_1, A_2, а також $P = A_1 \times_B A_2$ – топологічний підпростір $A_1 \times A_2$. Відображення $\sigma_i \colon P \to A$, які визначали минулого разу, – це звуження проєктивного відображення $A_1 \times A_2 \to A_i$ (що є неперервним), тому σ_i – неперервні. Аналогічно доводиться, що $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ утворює пулбек. Тільки ще варто зауважити, що $\gamma \colon X \to P \subset A_1 \times A_2$, що було визначено як $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$, буде теж неперервним, оскільки кожний α_i – неперервний.

Example 0.8.4 Розглянемо категорію **Grp**. Нехай $\lambda_i \colon A_i \to B (i = 1, 2)$ – уже гомоморфізм груп, на $A_1 \times A_2$ стоїть прямий добуток груп A_1, A_2, а також $P = A_1 \times_B A_2$ – підгрупа $A_1 \times A_2$ (вправа: довести). Також σ_i, γ, що задані так само, як було вище, – гомоморфізми. Тому $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ утворює пулбек за аналогічними міркуваннями.

Абсолютно аналогічно можна сказати про **Rng**, ${}_R\,$**Mod**.

Theorem 0.8.5 Задано C – категорія.
Існують зрівняльники та скінченні добутки в $C \iff$ існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії C.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: існують зрівняльники та скінченні добутки в C.
Добуток порожньої сім'ї об'єктів уже автоматично термінальний (TODO: обдумати).
Залишилося показати існування пулбеку. Нехай $\lambda_i \colon a_i \to b$ – два морфізми категорії C. За нашими умовами, існує добуток $(a_1 \times a_2, \{\pi_i\})$ сім'ї $\{a_1, a_2\}$, тобто існує термінальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pr}}$.
Тобто у нас є одна діаграма:

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[d, dashed, "\delta"] \arrow[dl, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[dr, bend left, "\alpha_2"] & \\
 & a_1 \times a_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
a_1 & & a_2
\end{tikzcd}$$

Хто такий об'єкт x та звідки морфізми α_1, α_2, буде ясно пізніше.

Також за умовою, існує зрівняльник для морфізмів $\lambda_1\pi_1,\ \lambda_2\pi_2$. Тобто у нас є друга діаграма:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\gamma"'] & & \\
 & a_1 \times a_2 \arrow[r, shift left, "\lambda_1\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2\pi_2"'] & b \\
p \arrow[ur, "\imath"] & &
\end{tikzcd}$$

Морфізм δ ми взяли з попередньої діаграми, а про об'єкт x та морфізм γ буде згодом.

Покладемо $\sigma_i = \pi_i\imath$. Зауважимо, що $\lambda_1\sigma_1 = \lambda_1\pi_1\imath = \lambda_2\pi_2\imath = \lambda_2\sigma_2$. Таким чином, $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$. Залишилося показати, що це – термінальний – і таким чином ми отримаємо пулбек.

Нехай $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ (тепер з об'єктом x та морфізмами α_1, α_2 на діаграмі стало ясніше). Тобто уже маємо $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$. Ми також маємо $\lambda_1\pi_1\delta = \lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 = \lambda_2\pi_2\delta$, тож звідси $(x, \delta) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$. Тоді за зрівняльником, існує морфізм $\gamma \colon x \to p$, для якого $\imath\gamma = \delta$ (тепер з морфізмом γ стало ясніше).
Зауважимо, що $\sigma_i\gamma = \pi_i\imath\gamma = \pi_i\delta = \alpha_i, i = 1, 2$, тобто звідси γ – це морфізм в $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$.
Припустимо, що γ' – ще один такий же морфізм. Тоді $\pi_i\imath\gamma' = \sigma_i\gamma' = \alpha_i$ та аналогічно $\pi\imath\gamma = \alpha_i$. Але за єдиністю в добутку, $\imath\gamma' = \imath\gamma$. Оскільки $\imath$ – мономорфізм, то звідси $\gamma' = \gamma$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії C.
Позначимо t за термінальний об'єкт C. Хочемо довести, що існує скінченний добуток в C; а для цього буде достатньо лише довести, що для сім'ї $\{a_1, a_2\}$ (тобто лише для двох об'єктів) існує добуток (TODO: додати пояснення).
Оскільки t – термінальний, то існують єдині морфізми $\lambda_i \colon a_i \to t, i = 1, 2$ в категорії C. За умовою, існує пулбек для пари (λ_1, λ_2), тобто в категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$ існує термінальний об'єкт $(p, (\pi_1, \pi_2))$ (те, що π_i – це проєкція, на даному етапі це невідомо, але скоро своє позначення виправдає). У нас вже є перша діаграма:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\
& p \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & a_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\
& a_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & t
\end{tikzcd}$$

Хто такий об'єкт x та морфізм γ, стане зараз ясно.

Ми тепер хочемо довести, що $(p, \{\pi_i\})$ утворює добуток сім'ї $\{a_1, a_2\}$. Тобто хочемо таку діаграму:

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[d, dashed, "\gamma"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_2"] & \\
& p \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
a_1 & & a_2
\end{tikzcd}$$

Знову ж таки, хто такий x та морфізм γ, стане скоро ясно.

Нехай $(x, \{\alpha_i\})$ – об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pr}}$ (тепер за x стало ясно на діаграмах). Тоді зауважимо, що $\lambda_i\alpha_i \colon x \to t, i = 1, 2$ – два морфізми в термінальний об'єкт, тож за єдиністю, $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$. Але це означає, що пара $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ буде об'єктом категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$, тоді за термінальністю $\mathbf{D}_{\text{pb}}$, існує єдиний морфізм $\gamma \colon x \to p$ категорії C, для якої $\pi_i\gamma = \alpha_i$ (тепер і про γ стало ясно на діаграмах). Власне, це й доводить існування добутку.

Залишилося довести, що існують зрівняльники в C. Нехай $\lambda_i \colon a \to b$ – два морфізми категорії C.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b
\end{tikzcd}$$

Ми вже знаємо вище, що існує $(a \times b, \{\pi_i\})$ – добуток сім'ї $\{a, b\}$. Двічі застосуємо означення добутку – отримаємо морфізми $\lambda'_1, \lambda'_2 \colon a \to a \times b$, для яких справедливі:
$\pi\lambda'_1 = 1_a \qquad \pi_1\lambda'_2 = 1_a \qquad \pi_1\lambda'_1 = \lambda_1 \qquad \pi_2\lambda'_2 = \lambda_2 \qquad (*)$.

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, dashed, "\lambda_1'"] \arrow[ddl, bend right, "1_a"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_1"] & \\
& a\times b \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, dashed, "\lambda_2'"] \arrow[ddl, bend right, "1_a"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_2"] & \\
& a\times b \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

За припущенням, існує пулбек для (λ_1', λ_2'), тобто існує термінальний об'єкт $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$. Використовуючи перші дві рівності в (*), отримаємо:
$\sigma_1 = 1_a\sigma_1 = \pi_1\lambda_1'\sigma_1 = \pi_1\lambda_2'\sigma_2 = 1_a\sigma_2 = \sigma_2$.
Для зручності позначимо $\imath = \sigma_1 = \sigma_2$. За останніми двома рівностями в (*),
$\lambda_1\imath = \pi_2\lambda_1'\sigma_1 = \pi_2\lambda_2'\sigma_2 = \lambda_2\imath$.
Таким чином, отримали, що $(p, \imath)$ – об'єкт $\mathbf{D}_{\text{eq}}$. Хочемо довести, що $(p, \imath)$ буде зрівняльником λ_1, λ_2, тобто хочемо таку діаграму:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& a \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & b \\
p \arrow[ur, "\imath"] & &
\end{tikzcd}
$$

Нехай $(x, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$. Зокрема звідси $\lambda_1\alpha = \lambda_2\alpha \overset{\text{позн.}}{=} \beta$. Зауважимо, що $\lambda_i'\alpha, i = 1, 2$ – морфізми із $(x, (\alpha, \beta))$ в $(a \times \beta, (\pi_1, \pi_2))$. Справді,
$\pi_1\lambda_i'\alpha = 1_a\alpha = \alpha \qquad \pi_2\lambda_i'\alpha = \lambda_i\alpha = \beta$.
Оскільки другий об'єкт – термінальний, то за єдиністю, $\lambda_1'\alpha = \lambda_2'\alpha$, а звідси $(x, \alpha, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{pb}}$. Отже, звідси існує єдиний морфізм $\gamma\colon x \to p$, для якого $\sigma_i\gamma = \alpha \iff \imath\gamma = \alpha$. Остання рівність закінчує доведення за існування зрівняльника. ■

0.9 Пушаут

Definition 0.9.1 Задано C – категорія та $\lambda_1\colon a \to b_1,\ \lambda_2\colon a \to b_2$ – морфізми.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & b_2 \\
b_1 &
\end{tikzcd}
$$

Сконструюємо категорію $\mathbf{D}_{\text{po}}$ ось таким чином:
об'єктами будуть пари $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$, де x – об'єкт категорії C та $\alpha_1\colon b_1 \to x,\ \alpha_2\colon b_2 \to x$ – два морізми категорії C, для яких $\alpha_1\lambda_1 = \alpha_2\lambda_2$;

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & b_2 \arrow[d, red, "\alpha_2"] \\
b_1 \arrow[r, red, "\alpha_1"] & x
\end{tikzcd}
$$

морфізмами між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(y, (\beta_1, \beta_2))$ будуть всі морфізми $\gamma\colon x \to y$ категорії C, для яких $\gamma\alpha_1 = \beta_1,\ \gamma\alpha_2 = \beta_2$;

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & b_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_2"] & \\
b_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[drr, bend right, "\beta_1"] & x \arrow[dr, red, "\gamma"] & \\
& & y
\end{tikzcd}
$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C.
Пушаутом пари морфізмів (λ_1, λ_2) будемо називати ініціальний об'єкт категорії $\mathbf{D}_{\text{pb}}$.

Позначимо ініціальний об'єкт за $(q, (\tau_1, \tau_2))$. Тоді за означенням ініціальності, для кожного об'єкта $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ існує єдиний морфізм між $(q, (\tau_1, \tau_2))$ та $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma\colon q \to x$ в категорії C, для якого $\gamma\tau_1 = \alpha_1, \ \gamma\tau_2 = \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & b_2 \arrow[d, "\tau_2"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_2"] & \\
b_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[drr, bend right, "\alpha_1"] & q \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & x
\end{tikzcd}$$

Theorem 0.9.2 Задано C – категорія.
Існують козрівняльники та скінченні кодобутки в $C \iff$ існують пушаути та ініціальний об'єкт категорії C.
Доведення аналогічне, просто тут все дуальне.

0.10 Функтори

Definition 0.10.1 Задані C, D – категорії.
(Коваріантним) функтором із C в D називають функцію $F\colon C \to D$, яка відображає кожний об'єкт x категорії C на об'єкт $F(x)$ категорії D; відображає кожний морфізм α категорії C в морфізм $F(\alpha)$ категорії D. Причому справедливе наступне:

$$\begin{aligned}
\text{якщо } \alpha\colon x \to y \text{ морфізм в } C, \text{ то } F(\alpha)\colon F(x) \to F(y) \\
F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha) \text{ для всіх морфізмів } \alpha, \beta, \text{ для яких визначений } \beta\alpha \\
F(1_c) = 1_{F(c)} \text{ для всіх об'єктів } c \text{ категорії } C
\end{aligned}$$

Definition 0.10.2 Заданий $F\colon C \to D$ – функтор. Для будь-яких двох об'єктів x, y категорії C функтор F звужується до функції $C(x, y) \to D(F(x), F(y))$.
Функтор F називається **точною (faithful)**, якщо ця звужена функція – ін'єктивна для всіх об'єктів x, y категорії C.
Функтор F називається **повним (full)**, якщо звужена функція – сюр'єктивна для всіх об'єктів x, y категорії C.

Example 0.10.3 Розглянемо $\mathbf{1}\colon C \to C$ – тотожний функтор, який працює таким чином:
$\operatorname{Ob} C \ni c \mapsto \mathbf{1}(c) = c \in \operatorname{Ob} c$;
$\alpha\colon x \to y \mapsto \mathbf{1}(\alpha) = \alpha\colon x \to y$.
Тобто об'єкт та морфізм переводить на самого себе.

Example 0.10.4 Розглянемо $\operatorname{Const}_d\colon C \to D$, де d – об'єкт категорії D. Це так званий сталий функтор, який працює таким чином:
$\operatorname{Ob} c \ni c \mapsto \operatorname{Const}_d(c) = d$;
$\alpha\colon x \to y \mapsto \operatorname{Const}_d(\alpha) = 1_d$.

Example 0.10.5 Забуваючий функтор
Прикладом цього буде функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, який відображає кожну групу на ту саму виділену множину та кожний морфізм переводить на самого себе. Суть забуваючого функтора в цьому прикладі полягає в наступному: ми тепер групу сприймаємо як множину та не думаємо про властивості, які там є. Точно так само ми тепер забуваємо, що відображення був гомоморфізмом колись.
Ще приклади забуваючих функторів $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab}$ (забуваємо за множення); $\mathbf{Met} \to \mathbf{Top}$ (забуваємо за метрику) тощо.

За допомогою функторів ми можемо строго визначити таке поняття як конкретна категорія.

Definition 0.10.6 Конкретною категорією називають пару (C, F), де C – категорія та $F\colon C \to \mathbf{Set}$ – точний функтор.

Definition 0.10.7 Задано $F: C \to D$ – функтор.
Кажуть, що F **зберігає ізоморфність**, якщо

$$\alpha: x \to y \text{ – ізоморфізм } C \implies F(\alpha): F(x) \to F(y) \text{ – ізоморфізм } D.$$

Кажуть, що F **відбиває ізоморфізм**, якщо

$$F(\alpha): F(x) \to F(y) \text{ – ізоморфізм в } D \implies \alpha: x \to y \text{ – ізоморфізм в } C.$$

Remark 0.10.8 Позначимо якусь властивість за літеру P. У нашому означенні вище властивість $P =$ ізоморфізм.
Це я до того, що ми можемо узагальнити означення про те, що таке 'зберігає властивість P' або 'відбиває властивість P'.

Theorem 0.10.9 Кожний функтор зберігає комутативність діаграм.

Proof.
Нехай $F: C \to D$ – функтор. Припустимо, що $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ та $\beta_1, \dots, \beta_m$ – морфізми категорії C, для яких $\alpha, \beta: x \to y$, де $\alpha = \prod \alpha_i$ та $\beta = \prod \beta_i$. Нехай $\alpha = \beta$. Ми взяли якусь частину діаграми, яка комутує. Тоді
$\prod F(\alpha_i) = F\left(\prod \alpha_i\right) = F(\alpha) = F(\beta) = F\left(\prod \beta_i\right) = \prod F(\beta_i)$.
Отже, після переведення функтором комутативність діаграми залишається. ■

Theorem 0.10.10 Кожний точний функтор відбиває комутативність діаграм.

Proof.
Нехай $F: C \to D$ – точний функтор. Нехай $\prod F(\alpha_i) = \prod F(\beta_i)$. Тоді
$F(\alpha) = F\left(\prod \alpha_i\right) = \prod F(\alpha_i) = \prod F(\beta_i) = F\left(\prod \beta_i\right) = F(\beta)$.
У силі точності отримаємо $\alpha = \beta$. ■

Theorem 0.10.11 Кожний функтор зберігається розщеплені мономорфізми, розщеплені епіморфізми та ізоморфізми.

Proof.
Нехай $F: C \to D$ – фунтор.
Нехай $\alpha: x \to y$ – розщеплений мономорфізм в C, тобто існує $\beta: y \to x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$. Тим часом $F(\beta)F(\alpha) = F(\beta\alpha) = F(1_x) = 1_{F(x)}$. Звідси $F(\alpha): F(x) \to F(y)$ – розщеплений мономорфізм.
Аналогічно доводиться збереження розщепленого епіморфізма. Внаслідок цього буде збереження ізоморфізма. ■

Theorem 0.10.12 Кожний точний та повний функтор відбиває розщеплені мономорфізми, розщеплені епіморфізми та ізоморфізми.

Proof.
Нехай $F: C \to D$ – точний та повний фунтор.
Нехай $\alpha: x \to y$ – морфізм категорії C та припустимо, що $F(\alpha): F(x) \to F(y)$ – розщеплений мономорфізм. Тоді існує морфізм $\beta': F(y) \to F(x)$, для якого $\beta' F(\alpha) = 1_{F(x)}$. Оскільки функтор повний, то для морфізма β' існує морфізм $\beta: y \to x$, для якого $\beta' = F(\beta)$. Отже, $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha) = \beta' F(\alpha) = 1_{F(x)} = F(1_x)$. Внаслідок точності отримаємо $\beta\alpha = 1_x \implies \alpha$ – розщеплений мономорфізм.
Аналогічно доводиться відбиття розщепленого епіморфізма. Внаслідок цього буде відбиття ізоморфізма. ■

Definition 0.10.13 Функтор $F: C \to D$ називається **істотно сюр'єктивним**, якщо

$$\forall d \in \operatorname{Ob} D : \exists x \in \operatorname{Ob} C : d \cong F(x)$$

Theorem 0.10.14 Кожний точний, повний та істотно сюр'єктивний функтор зберігає мономорфізми, епіморфізми, біморфізми.

Proof.
Нехай $F\colon C \to D$ – функтор, який точний, повний та істотно сюр'єктивний.
Нехай $\alpha\colon a \to b$ – мономорфізм в C. Ми хочемо довести, що $F(\alpha)\colon F(a) \to F(b)$ – мономорфізм.
Нехай $\mu_1, \mu_2\colon y \to F(\alpha)$ – два морфізми в D та припустимо, що $F(\alpha)\mu_1 = F(\alpha)\mu_2$. Оскільки F істотно сюр'єктивний, то існує ізоморфізм $\beta\colon F(x) \to y$ для деякого $x \in C$. Оскільки F – повний, то існують морфізми $\lambda_1, \lambda_2\colon x \to a$, для яких $F(\lambda_i) = \mu_i\beta, i = 1, 2$.
Далі $F(\alpha\lambda_i) = F(\alpha)F(\lambda_i) = F(\alpha)\mu_i\beta$, тому звідси $F(\alpha\lambda_1) = F(\alpha)\mu_1\beta = F(\alpha)\mu_2\beta = F(\alpha\lambda_2)$. Оскільки F точний, то $\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_2$, що дає $\lambda_1 = \lambda_2$ в силу монічності α. Внаслідок цього $\mu_1\beta = F(\lambda_1) = F(\lambda_2) = \mu_2\beta$. Оскільки β – ізоморфізм, то він епіморфізм, тому $\mu_1 = \mu_2$. Отже, $F(\alpha)$ – дійсно мономорфізм.
Аналогічно доводиться, що F зберігає епіморфізм, внаслідок чого біморфізм. ■

Theorem 0.10.15 Кожний точний функтор відбиває мономорфізм, епіморфізм, біморфізм.

Proof.
Нехай $F\colon C \to D$ тепер просто точний функтор.
Нехай $\alpha\colon a \to b$ – морфізм в C, так, що $F(\alpha)\colon F(a) \to F(b)$ – мономорфізм. Оберемо такі $\lambda_1, \lambda_2\colon x \to a$, щоб $\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_2$. Тоді звідси $F(\alpha)F(\lambda_1) = F(\alpha\lambda_1) = F(\alpha\lambda_2) = F(\alpha)F(\lambda_2)$, тому за монічністю $F(\lambda_1) = F(\lambda_2)$, а за точністю $\lambda_1 = \lambda_2$.
Аналогічно доводиться, що F відбиває епіморфізм, внаслідок чого біморфізм. ■

Definition 0.10.16 Задані C, D – категорії.
Контраваріантним функтором із C в D називають функцію $F\colon C \to D$, яка відображає кожний об'єкт x категорії C на об'єкт $F(x)$ категорії D; відображає кожний морфізм α категорії C в морфізм $F(\alpha)$ категорії D. Причому справедливе наступне:

$$\text{якщо } \alpha\colon x \to y \text{ морфізм в } C, \text{ то } F(\alpha)\colon F(y) \to F(x)$$
$$F(\beta\alpha) = F(\alpha)F(\beta) \text{ для всіх морфізмів } \alpha, \beta, \text{ для яких визначений } \beta\alpha$$
$$F(1_c) = 1_{F(c)} \text{ для всіх об'єктів } c \text{ категорії } C$$

Різниця між ко- та контраваріантними функторами полягає в перших двох умовах посередині.
Грубо кажучи, ми при переході в іншу категорію функтором просто міняємо напрямок стрілок в протилежну сторону.

Позначімо C^{op} за **протилежну категорію** категорії C, де об'єкти ці самі, але стрілки та композиції перевернуті в зворотний бік. Тобто
$C^{\mathrm{op}} = C$;
$\forall x, y \in C^{\mathrm{op}} : C^{\mathrm{op}}(x, y) = C(y, x)$;
для морфізмів α, β в C^{op} композиція $\beta\alpha$ в C^{op} визначається як композиція $\alpha\beta$ в C (якщо вона визначена).

Remark 0.10.17 Таким чином, контраваріантний функтор $F\colon C \to D$ може бути записаний як (коваріантний) функтор $F\colon C^{\mathrm{op}} \to D$ та навпаки.

Theorem 0.10.18 Нехай (C, F) – конкретна категорія. Тоді (C^{op}, F') – конкретна категорія, де $F'\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ – деякий (точний) функтор.
TODO: додати доведення.

Definition 0.10.19 Функтор $F\colon C \to D$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists G\colon D \to C - \text{функтор} : GF = 1_C \qquad FG = 1_D$$

У цьому випадку категорії C, D називаються **ізоморфними**.
Позначення: $C \cong D$.