

Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 Категорія C складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за X, Y, Z, \dots , а набір позначають за $\text{Ob}(C)$;
 - із набору **морфізмів**; морфізми позначають за f, g, h, \dots , а набір позначають за $\text{Hom}(C)$;
 - кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як $f: X \rightarrow Y$, де об’єкт X – область визначення, об’єкт Y – область значень;
 - кожний об’єкт X має **тотожний морфізм** $1_X: X \rightarrow X$;
 - для кожних морфізмів $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ існуватиме **композиція морфізмів** $g \circ f: X \rightarrow Z$.
- При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів $f: X \rightarrow Y$ виконано $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$;
- 2) для кожних трьох морфізмів $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$ виконується асоціативність композиції, тобто $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Example 0.1.3 Розглянемо Set – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$ – набір всіх множин;
 - $\text{Hom}(\text{Set})$ – набір всіх відображень;
 - тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$ задається як $x \mapsto x$;
 - композиція між $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\text{Ob}(\text{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі, $\text{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f: X \rightarrow Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y , то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.4 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

- 1) Grp – об’єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
- 2) Ring – об’єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
- 3) Top – об’єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
- 4) Man – об’єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

Example 0.1.5 Розглянемо моноїд M . Ми можемо утворити категорію M , яка містить єдиний об’єкт – це моноїд.

Example 0.1.6 Розглянемо так званий посет $(P, <)$ (partially ordered set). Скажемо, що $\text{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i < j$. Композиція тут існує, оскільки $<$ є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки $<$ є рефлексивним відношенням.

Навіть не обов’язково тут вимагати, щоб для $(P, <)$ відношення $<$ було антисиметричним.

Definition 0.1.7 Задано C – категорія.

Стрілочка $f: X \rightarrow Y$ називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка $g: Y \rightarrow X$, для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти X, Y даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення: $X \cong Y$.

Definition 0.1.8 Ендоморфізмом назвемо стрілочку $f: X \rightarrow X$. Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

Автоморфізмом назвемо ізоморфізм f , який є ендоморфізмом.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $A \rightarrow A$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C , якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
набір стрілок $A \rightarrow B$ в D міститься в наборі стрілок $A \rightarrow B$ в C для довільних об'єктів A, B із D
композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок A, B в D збігається з набором стрілок A, B в C , для довільних об'єктів A, B із D

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Монік

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_2} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{array} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■