

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1** Категорія  $C$  складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за  $X, Y, Z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
  - із набору **морфізмів**; морфізми позначають за  $f, g, h, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Hom}(C)$ ;
  - кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як  $f: X \rightarrow Y$ , де об’єкт  $X$  – область визначення, об’єкт  $Y$  – область значень;
  - кожний об’єкт  $X$  має **тотожний морфізм**  $1_X: X \rightarrow X$ ;
  - для кожних морфізмів  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $g \circ f: X \rightarrow Z$ .
- При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $f: X \rightarrow Y$  виконано  $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Example 0.1.3** Розглянемо  $\text{Set}$  – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
  - $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх відображень;
  - тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
  - композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Example 0.1.4** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

- 1)  $\text{Grp}$  – об’єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
- 2)  $\text{Ring}$  – об’єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
- 3)  $\text{Top}$  – об’єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
- 4)  $\text{Man}$  – об’єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

**Example 0.1.5** Розглянемо моноїд  $M$ . Ми можемо утворити категорію  $M$ , яка містить єдиний об’єкт – це моноїд.

**Example 0.1.6** Розглянемо так званий посет  $(P, <)$  (partially ordered set). Скажемо, що  $\text{Ob}(P) = P$  та  $P(i, j)$  – це будуть тільки ті стрілки, для яких  $i < j$ . Композиція тут існує, оскільки  $<$  є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки  $<$  є рефлексивним відношенням.

*Навіть не обов’язково тут вимагати, щоб для  $(P, <)$  відношення  $<$  було антисиметричним.*

**Definition 0.1.7** Задано  $C$  – категорія.

Стрілочка  $f: X \rightarrow Y$  називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка  $g: Y \rightarrow X$ , для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти  $X, Y$  даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення:  $X \cong Y$ .

**Definition 0.1.8** Ендоморфізмом назвемо стрілочку  $f: X \rightarrow X$ . Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

**Автоморфізмом** назвемо ізоморфізм  $f$ , який є ендоморфізмом.

**Definition 0.1.9** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $A \rightarrow A$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об'єктів  $D$  міститься в наборі об'єктів  $C$   
 набір стрілок  $A \rightarrow B$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $A \rightarrow B$  в  $C$  для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$   
 композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $A, B$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $A, B$  в  $C$ , для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Монік

**Definition 0.2.1** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – ін'єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Для всіх  $z \in Z$  ми маємо  $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$ , тому за ін'єктивністю,  $\beta_1(z) = \beta_2(z)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.3** Зворотнє твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію  $C = \text{Div}$  підкатегорії  $\text{Grp}$ . Тут абелева група називається **подільною**, якщо  $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$ .

Оберемо об'єкти  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  із нашої категорії  $C$  та гомоморфізм  $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки  $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ . Стверджується, що  $\alpha$  – монік.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$  – морфізми в  $C$  та припустимо, що  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тоді існує елемент  $a \in A$ , для якого  $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$ . Ліворуч раціональне число, тож  $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$  для деяких  $r, s \in \mathbb{Z}$  та  $r \neq 0, s \neq 0$ . Оскільки  $A$  – подільна група, то існує для елемента  $a \in A$  та  $n = 2r$  існує  $b \in A$ , для якого  $a = nb$ . Тоді  $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$ .

Отже,  $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$ , а тому звідси  $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$ .

**Theorem 0.2.5** У категоріях  $\text{Set}, \text{Top}, \text{Grp}, \text{Rng}$  морфізм ін'єктивний  $\iff$  морфізм – монік.

**Proof.**

Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – монік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай  $\alpha: X \rightarrow Y$  – монік морфізм. Оберемо  $x_1, x_2 \in X$  та припустимо, що  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ . Покладемо  $z = 0 \in \mathbb{Z}$  та покладемо  $Z = \{z\}$  (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  як  $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$ . Тоді  $\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$ .

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$ . Таким чином,  $\alpha$  – ін'єктивний.

(Top). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину  $Z$  треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення  $\beta_1, \beta_2$  будуть уже неперервними через дискретність  $Z$ .

(Grp). Нехай  $\alpha: G \rightarrow H$  – монік морфізм. Розглянемо  $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$  – перший буде вкладенням,

другий буде тривіальним. Тоді  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси  $\beta_1 = \beta_2$ , тобто  $\beta_1$  – тривіальне вкладення. Отже,  $\ker \alpha = \{e\}$ , а це означає ін'єктивність  $\alpha$ .

(Rng). Таке саме доведення. ■

### 0.2.2 Розщеплений монік

**Definition 0.2.6** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: X \rightarrow Y$  називається **розщепленим моніком**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений монік, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \curvearrowright x \xrightleftharpoons[\alpha]{\exists \beta} y$$

**Theorem 0.2.7** Кожний розщеплений монік – монік.

**Proof.**

Нехай  $\alpha: x \rightarrow y$  – розщеплений монік в категорії, тобто існує морфізм  $\beta: y \rightarrow x$ , для якого  $\beta\alpha = 1_x$ .

Нехай  $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$  будуть морфізмами та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Тоді

$$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2.$$

■

**Theorem 0.2.8** У конкретній категорії кожний розщеплений монік – ін'єктивний морфізм.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – розщеплений монік, тобто існує морфізм  $\beta: Y \rightarrow X$ , для якого  $\beta\alpha = 1_X$ . Тоді

$$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2.$$

■

**Remark 0.2.9** Зворотнє твердження не працює.

**Example 0.2.10** Розглянемо категорію Grp. Вкладення  $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  – ін'єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим моніком.

!Припустимо, що все ж таки він розщеплений монік, тобто існує гомоморфізм  $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$ . Тоді  $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$ , тобто  $\beta(1) = 1$ , але це суперечність! Просто тому що  $\beta$  відображає на  $2\mathbb{Z}$ .

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

**Example 0.2.11** Розглянемо категорію Top. Оберемо тотожне відображення  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді  $\alpha$  – ін'єктивний, але не розщеплений монік.

!Припустимо, що існує морфізм  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якого  $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ . Тоді  $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$ , однак множина  $\{0\}$  відкрита в  $\mathbb{R}$  з дискретною топологією, але не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що  $\beta$  – неперервне відображення.