

Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

19 лютого 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 Категорія C складається з наступних компонент:

- із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за x, y, z, \dots , а набір позначають за $\text{Ob}(C)$;
- із набору **морфізмів із x в y** $C(x, y)$ для всіх $x, y \in C$; морфізми позначають за $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Позначення $\alpha: x \rightarrow y$ або $x \xrightarrow{\alpha} y$ означають α – морфізм із x в y ; ми називаємо x **джерелом** та y **ціллю**;

- кожен об'єкт x має **тотожний морфізм** $1_x: x \rightarrow x$;
- для кожних морфізмів $\alpha: x \rightarrow y$, $\beta: y \rightarrow z$ існуватиме **композиція морфізмів** $\beta\alpha: x \rightarrow z$.

При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів $\alpha: x \rightarrow y$ виконано $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$;
- 2) для кожних трьох морфізмів $\alpha: w \rightarrow x$, $\beta: x \rightarrow y$, $\gamma: y \rightarrow z$ виконується асоціативність композиції, тобто $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Remark 0.1.3 Морфізм 1_x для кожного об'єкта x – єдиний.

Example 0.1.4 Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$ – набір всіх множин;
 - $\text{Hom}(\text{Set})$ – набір всіх функцій;
 - тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$ задається як $x \mapsto x$;
 - композиція між $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\text{Ob}(\text{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі, $\text{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f: X \rightarrow Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y , то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.5 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

| Категорія | Об'єкти | Морфізми |
|------------------|----------------------|---|
| Grp | групи | гомоморфізми груп |
| Ab | абелеві групи | гомоморфізми груп |
| Rng | кілець | гомоморфізми кілець |
| Ring | кілець з одиницею | гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю |
| ${}_R\text{Mod}$ | R -модуль | R -лінійне відображення |
| Top | топологічні простори | неперервний відображення |
| Met | метричні простори | неперервні відображення |
| Man | гладкі многовиди | гладкі відображення |

Example 0.1.6 Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньою виглядати. Категорія **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:



Так само є категорії **4, 5, ...**

Example 0.1.7 Розглянемо моноїд M . Ми можемо утворити категорію \mathcal{M} , яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.8 Розглянемо так званий посет (P, \prec) (partially ordered set). Скажемо, що $\text{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки \prec є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки \prec є рефлексивним відношенням.

Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для (P, \prec) відношення \prec було антисиметричним.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(x, y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $x \rightarrow x$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C , якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
 набір стрілок $x \rightarrow y$ в D міститься в наборі стрілок $x \rightarrow y$ в C для довільних об'єктів x, y із D
 композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок x, y в D збігається з набором стрілок x, y в C , для довільних об'єктів x, y із D

Example 0.1.12 Зокрема маємо кілька прикладів:

- 1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
- 2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

Definition 0.1.13 Категорія C називається **малою**, якщо

класи $\text{Ob}(C), \text{Hom}(C)$ – множини.

Інакше категорія C називатиметься **великою**.

Категорія C називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів x, y клас $C(x, y)$ – множина

Example 0.1.14 Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Монік

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \begin{matrix} \xrightarrow{\beta_2} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{matrix} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – ін'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін'єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.3 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію $C = \text{Div}$ підкатегорії Grp . Тут абелева група називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.

Оберемо об'єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ із нашої категорії C та гомоморфізм $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки $\ker \alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – монік.

Нехай $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$ – морфізми в C та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$.

Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях $\text{Set}, \text{Top}, \text{Grp}, \text{Rng}$ морфізм ін'єктивний \iff морфізм – монік.

Proof.

Ми вже знаємо, що ін'єктивний морфізм – монік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – монік морфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді $\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z)$.

За монічності, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін'єктивний.

(Top). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z .

(Grp). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – монік морфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$ – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічності, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker \alpha = \{e\}$, а це означає ін'єктивність α .

(Rng). Таке саме доведення. ■

0.2.2 Розщеплений монік

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: X \rightarrow Y$ називається **розщепленим моніком**, якщо

$$\exists \beta: Y \rightarrow X : \beta\alpha = 1_X$$

Морфізм – розщеплений монік, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\exists \beta} & \\ & \xrightarrow{\alpha} & \\ 1_x \curvearrowright & & \end{array} x \quad y$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений монік – монік.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений монік в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$.

Нехай $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді

$$\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2.$$
■

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожен розщеплений монік – ін'єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений монік, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Тоді

$$x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2.$$
■

Remark 0.2.9 Зворотнє твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію Grp. Вкладення $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ – ін’єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим моніком.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений монік, тобто існує гомоморфізм $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію Top. Оберемо тотожне відображення $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді α – ін’єктивний, але не розщеплений монік.

Припустимо, що існує морфізм $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$. Тоді $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в \mathbb{R} з дискретною топологією, але не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha: X \rightarrow Y$ – морфізм в категорії Set.

$$\alpha \text{ – розщеплений монік} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін’єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.

\Rightarrow Дано: α – розщеплений монік. Оскільки Set – конкретна категорія, то звідси α – ін’єктивний. Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

\Leftarrow Дано: α – ін’єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.

Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін’єктивний, то $\alpha|_{\text{Im } \alpha}: X \rightarrow \text{Im } \alpha$ буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \text{Im } \alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$, що розширюється до функції $\beta: Y \rightarrow X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.

Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta: Y \rightarrow X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений монік} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{монік}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *ін’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *ін’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії Set, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епікі

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **епіком**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епік, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення моніка).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр’єктивний морфізм – епік.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр’єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію Rng та оберемо вкладення $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що α – епік.

Нехай $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ – морфізми з Rng та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категорія Set , Top , Grp морфізм сюр'єктивний \iff морфізм – епік.

Proof.

Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епік. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(Set). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – епік морфізм. Нехай $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде характеристичною функцією для $\text{Im } \alpha$ та нехай $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\text{Im } \alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність α .

(Top). Проводиться те саме доведення, як з Set . Тільки треба $\alpha: X \rightarrow Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0, 1\}$ задати не дискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неперервними.

(Grp). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що $[H : \text{Im } \alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епік морфізм.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] = 2$. Нехай $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq \beta_2$, оскільки $\text{Im } \alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епік.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1b = K_2$, а звідси $K_2b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо бієкцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases} \text{ Можна зауважити, що } \sigma^2 = 1_H \text{ та } \sigma(kh) = k\sigma(h) \text{ для всіх } k \in \text{Im } \alpha, h \in H.$$

Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H , що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \text{Im } \alpha$.

Визначимо $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для $k \in \text{Im } \alpha$ ми маємо

$$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k), \text{ а тому } \beta_1\alpha = \beta_2\alpha. \text{ Із іншого боку, } \beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e). \text{ Тож звідси } \beta_1 \neq \beta_2. \text{ Тобто і в цьому випадку } \alpha \text{ – не епік. } \blacksquare$$

0.2.4 Розщеплений епік

Definition 0.2.18 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: X \rightarrow Y$ називається **розщепленим епіком**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епік, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого моніка). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xleftarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright^{1_y}$$

Theorem 0.2.19 Кожний розщеплений епік – епік.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений епік в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\alpha\beta = 1_x$.
 Нехай $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді
 $\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.20 У конкретній категорії кожний розщеплений епік – сюр’єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений епік, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси
 $\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$. ■

Remark 0.2.21 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.22 Розглянемо категорію Grp та визначимо морфізм $\alpha: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, визначений як $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$ та $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$. Це буде сюр’єктивний гомоморфізм. Оскільки $1 \in \mathbb{Z}_2$ має порядок 2, то будь-який гомоморфізм $\beta: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ зобов’язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином, $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$. Отже, α – не розщеплений епік.

Можна аналогічні міркування провести для категорії Rng.

Example 0.2.23 Розглянемо категорію Top. Маємо $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді α – сюр’єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним моніком).

Theorem 0.2.24 У категорії Set морфізм – розщеплений епік \iff морфізм сюр’єктивний.

Proof.

Залишилося довести у зворотний бік.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\alpha: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивний морфізм. Тобто для кожного $y \in Y$ знайдеться $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$, а це визначає функцію $\beta: Y \rightarrow X$, яка задовольняє $\alpha\beta = 1_Y$. Отже, α – розщеплений епік. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епік} \implies \text{сюр’єктивний} \implies \text{епік}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях сюр’єктивність більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово сюр’єктивний видалити, то діаграма залишається справедливою.

У категорії Set всі ці три терміни збігаються.

0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

Definition 0.2.25 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно монік та епік}$$

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x \quad \alpha\beta = 1_y$$

Remark 0.2.26 Якщо α – ізоморфізм, то морфізм β в означенні – єдиний та позначається за α^{-1} .

Definition 0.2.27 Задано C – категорія.

Об’єкти x, y називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha: x \rightarrow y \text{ – ізоморфізм}$$

Позначення: $x \cong y$ (це справді відношення еквівалентності).

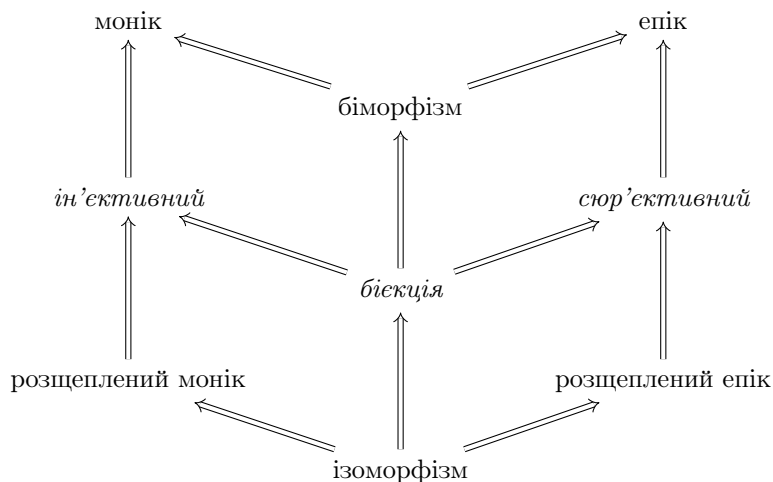
Theorem 0.2.28 Морфізм – ізоморфізм \iff морфізм – розщеплений монік та розщеплений епік.

Proof.

\Rightarrow миттєво випливає з означення.

\Leftarrow Дано: α – розщеплений монік та розщеплений епік. Тобто існують морфізми $\beta, \gamma: y \rightarrow x$, для яких $\beta\alpha = 1_x$, $\alpha\gamma = 1_y$. Але тоді $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$. Отже, α – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.



Theorem 0.2.29 У категорії Set, Grp біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

Proof.

(Set). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що α – ізоморфізм. Оскільки α – монік та епік, то в даній категорії α – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм α^{-1} , для якого $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$, $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$, що й доводить ізоморфізм.

(Grp). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо α – гомоморфізм, то α^{-1} буде ним також. ■

Remark 0.2.30 Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.

(Rng). Зауважимо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ буде біморфізмом, але не бієкцією.

(Top). Тотожне відображення $R \rightarrow R$, з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).