

Теорія категорії  
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

## 0.1 Основні означення

**Definition 0.1.1** Категорія  $C$  складається з наступних компонент:

- із набору **об’єктів**; об’єкти позначають за  $X, Y, Z, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Ob}(C)$ ;
  - із набору **морфізмів**; морфізми позначають за  $f, g, h, \dots$ , а набір позначають за  $\text{Hom}(C)$ ;
  - кожний морфізм має **область визначення** та **область значень**; позначається зазвичай як  $f: X \rightarrow Y$ , де об’єкт  $X$  – область визначення, об’єкт  $Y$  – область значень;
  - кожний об’єкт  $X$  має **тотожний морфізм**  $1_X: X \rightarrow X$ ;
  - для кожних морфізмів  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  існуватиме **композиція морфізмів**  $g \circ f: X \rightarrow Z$ .
- При цьому всьому зобов’язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів  $f: X \rightarrow Y$  виконано  $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$ ;
- 2) для кожних трьох морфізмів  $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  виконується асоціативність композиції, тобто  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

**Remark 0.1.2** Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

**Example 0.1.3** Розглянемо  $\text{Set}$  – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$  – набір всіх множин;
  - $\text{Hom}(\text{Set})$  – набір всіх відображень;
  - тотожне відображення  $1_X: X \rightarrow X$  задається як  $x \mapsto x$ ;
  - композиція між  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  задається  $g \circ f$  таким чином:  $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ .
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що  $\text{Ob}(\text{Set})$  – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі,  $\text{Set}(X, Y)$  – набір всіх відображень  $f: X \rightarrow Y$  – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку  $X \times Y$ . Коли ми беремо дві довільні множини  $X, Y$ , то звідси  $X \times Y$  теж буде множиною.

**Example 0.1.4** Розглянемо стисло ще приклади категорій:

- 1)  $\text{Grp}$  – об’єктами будуть групи; стрілками будуть гомоморфізми груп;
- 2)  $\text{Ring}$  – об’єктами будуть кільця; стрілками будуть гомоморфізмами кілець;
- 3)  $\text{Top}$  – об’єктами будуть топологічні простори; стрілочками будуть неперервні відображення;
- 4)  $\text{Man}$  – об’єктами будуть гладкі многовиди; стрілочками будуть гладкі відображення.

**Example 0.1.5** Розглянемо моноїд  $M$ . Ми можемо утворити категорію  $M$ , яка містить єдиний об’єкт – це моноїд.

**Example 0.1.6** Розглянемо так званий посет  $(P, <)$  (partially ordered set). Скажемо, що  $\text{Ob}(P) = P$  та  $P(i, j)$  – це будуть тільки ті стрілки, для яких  $i < j$ . Композиція тут існує, оскільки  $<$  є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки  $<$  є рефлексивним відношенням.

*Навіть не обов’язково тут вимагати, щоб для  $(P, <)$  відношення  $<$  було антисиметричним.*

**Definition 0.1.7** Задано  $C$  – категорія.

Стрілочка  $f: X \rightarrow Y$  називається **ізоморфізмом**, якщо існує стрілка  $g: Y \rightarrow X$ , для якої

$$f \circ g = 1_Y \quad g \circ f = 1_X$$

У свою чергу об’єкти  $X, Y$  даної категорії називаються **ізоморфними**.

Позначення:  $X \cong Y$ .

**Definition 0.1.8** Ендоморфізмом назвемо стрілочку  $f: X \rightarrow X$ . Тобто це стрілка між двома однаковими об’єктами.

**Автоморфізмом** назвемо ізоморфізм  $f$ , який є ендоморфізмом.

**Definition 0.1.9** Категорія  $C$  називається **дискретною**, якщо

$$C(A, B) = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{1_A\}, & A = B \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки  $A \rightarrow A$ , і тільки тотожні.

**Definition 0.1.10** Категорія  $D$  називається **підкатегорією**  $C$ , якщо

набір об'єктів  $D$  міститься в наборі об'єктів  $C$

набір стрілок  $A \rightarrow B$  в  $D$  міститься в наборі стрілок  $A \rightarrow B$  в  $C$  для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$

композиція двох морфізмів в  $D$  задається так само, як і в  $C$

**Definition 0.1.11** Підкатегорія  $D$  категорії  $C$  називається **повною**, якщо

набір стрілок  $A, B$  в  $D$  збігається з набором стрілок  $A, B$  в  $C$ , для довільних об'єктів  $A, B$  із  $D$

## 0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

### 0.2.1 Монік

**Definition 0.2.1** Задано  $C$  – категорія.

Морфізм  $\alpha: x \rightarrow y$  називається **моніком**, якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – монік, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

**Theorem 0.2.2** У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – монік.

**Proof.**

Нехай  $C$  – конкретна категорія та  $\alpha: X \rightarrow Y$  – ін'єктивний морфізм. Нехай  $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$  – морфізми  $C$  та припустимо, що  $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ . Для всіх  $z \in Z$  ми маємо  $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$ , тому за ін'єктивністю,  $\beta_1(z) = \beta_2(z)$ . Отже,  $\beta_1 = \beta_2$ . ■

**Remark 0.2.3** Зворотне твердження не працює.

**Example 0.2.4** Розглянемо повну категорію  $C = \text{Div}$  підкатегорії  $\text{Grp}$ . Тут абелева група називається **подільною**, якщо  $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$ .

Оберемо об'єкти  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  із нашої категорії  $C$  та гомоморфізм  $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , який є сюр'єктивним. Даний морфізм не ін'єктивний, оскільки  $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ . Стверджується, що  $\alpha$  – монік.

Нехай  $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$  – морфізми в  $C$  та припустимо, що  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Тоді існує елемент  $a \in A$ , для якого  $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$ . Ліворуч раціональне число, тож  $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$  для деяких  $r, s \in \mathbb{Z}$  та  $r \neq 0, s \neq 0$ . Оскільки  $A$  – подільна група, то існує для елемента  $a \in A$  та  $n = 2r$  існує  $b \in A$ , для якого  $a = nb$ . Тоді  $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$ .

Отже,  $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$ , а тому звідси  $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$ .