

Теорія категорії
I курс магістратура, 2 семестр

10 березня 2024 р.

0.1 Основні означення

Definition 0.1.1 Категорія C складається з наступних компонент:

- із набору **об'єктів**; об'єкти позначають за x, y, z, \dots , а набір позначають за $\text{Ob}(C)$;
- із набору **морфізмів із x в y** $C(x, y)$ для всіх $x, y \in C$; морфізми позначають за $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Позначення $\alpha: x \rightarrow y$ або $x \xrightarrow{\alpha} y$ означають α – морфізм із x в y ; ми називаємо x **джерелом** та y **ціллю**;

- кожен об'єкт x має **тотожний морфізм** $1_x: x \rightarrow x$;
- для кожних морфізмів $\alpha: x \rightarrow y, \beta: y \rightarrow z$ існуватиме **композиція морфізмів** $\beta\alpha: x \rightarrow z$.

При цьому всьому зобов'язані виконуватися такі аксіоми:

- 1) для всіх морфізмів $\alpha: x \rightarrow y$ виконано $1_y \circ \alpha = \alpha \circ 1_x = \alpha$;
- 2) для кожних трьох морфізмів $\alpha: w \rightarrow x, \beta: x \rightarrow y, \gamma: y \rightarrow z$ виконується асоціативність композиції, тобто $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Remark 0.1.2 Морфізми ще часто називають **стрілочками**.

Remark 0.1.3 Морфізм 1_x для кожного об'єкта x – єдиний.

Example 0.1.4 Розглянемо **Set** – це буде категорія, яка складається з наступного:

- $\text{Ob}(\text{Set})$ – набір всіх множин;
 - $\text{Hom}(\text{Set})$ – набір всіх функцій;
 - тотожне відображення $1_X: X \rightarrow X$ задається як $x \mapsto x$;
 - композиція між $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow Z$ задається $g \circ f$ таким чином: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.
- Ясно, що всі ці дві аксіоми виконані.

Важливо, що $\text{Ob}(\text{Set})$ – це саме набір всіх множин, а не множина всіх множин. Тому що парадокс Рассела стверджує, що не існує множини, елементи яких будуть множинами.

До речі, $\text{Set}(X, Y)$ – набір всіх відображень $f: X \rightarrow Y$ – буде, насправді, множиною. Відображення між двома множинами – це просто підмножина декартового добутку $X \times Y$. Коли ми беремо дві довільні множини X, Y , то звідси $X \times Y$ теж буде множиною.

Example 0.1.5 Розглянемо стисло ще приклади категорій:

Категорія	Об'єкти	Морфізми
Grp	групи	гомоморфізми груп
Ab	абелеві групи	гомоморфізми груп
Rng	кілець	гомоморфізми кілець
Ring	кілець з одиницею	гомоморфізм кілець, що зберігають одиницю
${}_R\text{Mod}$	R -модуль	R -лінійне відображення
Top	топологічні простори	неперервний відображення
Met	метричні простори	неперервні відображення
Man	гладкі многовиди	гладкі відображення

Example 0.1.6 Можна представити категорію за допомогою графів. Категорія **0** буде взагалі порожньою виглядати. Категорія **1**, категорія **2**, категорія **3** виглядають таким чином:



Так само є категорії **4, 5, ...**

Example 0.1.7 Розглянемо моноїд M . Ми можемо утворити категорію \mathcal{M} , яка містить єдиний об'єкт – це моноїд.

Example 0.1.8 Розглянемо так званий посет (P, \prec) (partially ordered set). Скажемо, що $\text{Ob}(P) = P$ та $P(i, j)$ – це будуть тільки ті стрілки, для яких $i \prec j$. Композиція тут існує, оскільки \prec є транзитивним відношенням. Також існує тотожне відображення, оскільки \prec є рефлексивним відношенням.

Навіть не обов'язково тут вимагати, щоб для (P, \prec) відношення \prec було антисиметричним.

Definition 0.1.9 Категорія C називається **дискретною**, якщо

$$C(x, y) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq y \\ \{1_x\}, & x = y \end{cases}$$

Тобто існують лише стрілки $x \rightarrow x$, і тільки тотожні.

Definition 0.1.10 Категорія D називається **підкатегорією** C , якщо

набір об'єктів D міститься в наборі об'єктів C
набір стрілок $x \rightarrow y$ в D міститься в наборі стрілок $x \rightarrow y$ в C для довільних об'єктів x, y із D
композиція двох морфізмів в D задається так само, як і в C

Definition 0.1.11 Підкатегорія D категорії C називається **повною**, якщо

набір стрілок x, y в D збігається з набором стрілок x, y в C , для довільних об'єктів x, y із D

Example 0.1.12 Зокрема маємо кілька прикладів:

- 1) категорія **Ab** буде повною підкатегорією **Grp**;
- 2) категорія **FinSet** буде повною підкатегорією **Set**.

Definition 0.1.13 Категорія C називається **малою**, якщо

класи $\text{Ob}(C), \text{Hom}(C)$ – множини.

Інакше категорія C називатиметься **великою**.

Категорія C називається **локально малою**, якщо

для кожних двох об'єктів x, y клас $C(x, y)$ – множина

Example 0.1.14 Зокрема **Set**, **Grp** – великі категорії, але локально малі.

Definition 0.1.15 Категорія C називається **конкретною**, якщо

об'єктами категорії будуть множини, а морфізми – відображення між множинами, що зберігає "структуру".

Example 0.1.16 Зокрема категорія **Grp** – конкретна. Проте категорія **HTop** (тут все як в категорії **Top**, просто беруться гомотопічні відображення) – не конкретна.

0.2 Узагальнення ін'єкції та сюр'єкції

0.2.1 Мономорфізм

Definition 0.2.1 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **мономорфізмом** (**monic**), якщо

$$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – мономорфізм, якщо можна завжди скоротити зліва.

$$z \xrightarrow[\beta_1]{\beta_2} x \xrightarrow{\alpha} y$$

Часто мономорфізми позначають як $\alpha: x \rightarrowtail y$.

Theorem 0.2.2 У конкретній категорії кожний ін'єктивний морфізм – мономорфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – ін’єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ – морфізми C та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Для всіх $z \in Z$ ми маємо $\alpha(\beta_1(z)) = \alpha\beta_1(z) = \alpha\beta_2(z) = \alpha(\beta_2(z))$, тому за ін’єктивністю, $\beta_1(z) = \beta_2(z)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$, тобто α – мономорфізм. ■

Remark 0.2.3 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.4 Розглянемо повну категорію **Div** підкатегорії **Grp**. Тут абелева група з категорії **Div** називається **подільною**, якщо $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \exists b \in A : a = nb$.

Оберемо об’єкти $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ із нашої категорії **Div** та гомоморфізм $\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, який є сюр’єктивним. Даний морфізм не ін’єктивний, оскільки $\ker \alpha = \mathbb{Z}$. Стверджується, що α – мономорфізм.

Нехай $\beta_1, \beta_2: A \rightarrow \mathbb{Q}$ – морфізми в **Div** та припустимо, що $\beta_1 \neq \beta_2$. Тоді існує елемент $a \in A$, для якого $\beta_1(a) - \beta_2(a) \neq 0$. Ліворуч раціональне число, тож $\beta_1(a) - \beta_2(a) = \frac{r}{s}$ для деяких $r, s \in \mathbb{Z}$ та $r \neq 0, s \neq 0$. Оскільки A – подільна група, то існує для елемента $a \in A$ та $n = 2r$ існує $b \in A$, для якого $a = nb$. Тоді $\beta_1(nb) - \beta_2(nb) = n\beta_1(b) - n\beta_2(b) = \frac{r}{s}$.

Отже, $\beta_1(b) - \beta_2(b) = \frac{1}{2s} \notin \mathbb{Z}$, а тому звідси $\alpha\beta_1 \neq \alpha\beta_2$.

Theorem 0.2.5 У категоріях **Set, Top, Grp, Rng** морфізм ін’єктивний \iff морфізм – мономорфізм.

Proof.

Ми вже знаємо, що ін’єктивний морфізм – мономорфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – мономорфізм. Оберемо $x_1, x_2 \in X$ та припустимо, що $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Покладемо $z = 0 \in \mathbb{Z}$ та покладемо $Z = \{z\}$ (хоча тут може бути будь-який синглтон), визначимо $\beta_1, \beta_2: Z \rightarrow X$ як $\beta_1(z) = x_1, \beta_2(z) = x_2$. Тоді

$$\alpha\beta_1(z) = \alpha(\beta_1(z)) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(\beta_2(z)) = \alpha\beta_2(z).$$

За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто $x_1 = \beta_1(z) = \beta_2(z) = x_2$. Таким чином, α – ін’єктивний.

(**Top**). Насправді, все аналогічно, тільки є деякі зауваження. На множину Z треба задати дискретну топологію (єдина можлива топологія для неї). Відображення β_1, β_2 будуть уже неперервними через дискретність Z .

(**Grp**). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – мономорфізм. Розглянемо $\beta_1, \beta_2: \ker \alpha \rightarrow G$ – перший буде вкладенням, другий буде тривіальним. Тоді $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Дійсно,

$$\alpha\beta_1(g) = \alpha(g) \stackrel{g \in \ker \alpha}{=} e = \alpha(e) = \alpha\beta_2(g).$$

За монічністю, звідси $\beta_1 = \beta_2$, тобто β_1 – тривіальне вкладення. Отже, $\ker \alpha = \{e\}$, а це означає ін’єктивність α .

(**Rng**). Таке саме доведення. ■

0.2.2 Розщеплений мономорфізм

Definition 0.2.6 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **розщепленим мономорфізмом (split monic)**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x$$

Морфізм – розщеплений мономорфізм, тобто даний морфізм має лівий оборотний.

$$1_x \curvearrowright x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y$$

Theorem 0.2.7 Кожний розщеплений мономорфізм – мономорфізм.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений мономорфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\beta\alpha = 1_x$. Нехай $\beta_1, \beta_2: z \rightarrow x$ будуть морфізмами та припустимо, що $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$. Тоді $\beta_1 = 1_x\beta_1 = \beta\alpha\beta_1 = \beta\alpha\beta_2 = 1_x\beta_2 = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.8 У конкретній категорії кожний розщеплений мономорфізм – ін’єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений мономорфізм, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X$. Припустимо $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Тоді $x_1 = 1_X(x_1) = \beta\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2)) = \beta\alpha(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$. ■

Remark 0.2.9 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.10 Розглянемо категорію **Grp**. Вкладення $\alpha: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ – ін’єктивний гомоморфізм. Але це не буде розщепленим мономорфізмом.

Припустимо, що все ж таки він розщеплений мономорфізм, тобто існує гомоморфізм $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, для якого $\beta\alpha = 1_{2\mathbb{Z}}$. Тоді $2\beta(1) = \beta(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta\alpha(2) = 2$, тобто $\beta(1) = 1$, але це суперечність! Просто тому що β відображає на $2\mathbb{Z}$.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.11 Розглянемо категорію **Top**. Оберемо тотожне відображення $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де область визначення має дискретну топологію, а область значень – стандартну. Тоді α – ін’єктивний, але не розщеплений мономорфізм.

Припустимо, що існує морфізм $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якого $\beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$. Тоді $\beta = \beta 1_{\mathbb{R}} = \beta\alpha = 1_{\mathbb{R}}$, однак множина $\{0\}$ відкрита в \mathbb{R} з дискретною топологією, але $\beta^{-1}\{0\} = \{0\}$ не відкрита в стандартній топології. Це суперечність! Тому що β – неперервне відображення.

Theorem 0.2.12 Задано $\alpha: X \rightarrow Y$ – морфізм в категорії **Set**.

$$\alpha \text{ – розщеплений мономорфізм} \iff \begin{cases} \alpha \text{ – ін’єктивний} \\ X = \emptyset \implies Y = \emptyset \end{cases}.$$

Proof.

\Rightarrow Дано: α – розщеплений мономорфізм. Оскільки **Set** – конкретна категорія, то звідси α – ін’єктивний.

Тепер нехай $X = \emptyset$. Тоді за умовою, існує $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\beta\alpha = 1_X = 1_{\emptyset}$. Тоді оскільки β – функція, то $Y = \emptyset$.

\Leftarrow Дано: α – ін’єктивний та $X = \emptyset \implies Y = \emptyset$.

Нехай $X \neq \emptyset$, тобто існує елемент $x_0 \in X$. Оскільки α – ін’єктивний, то $\alpha: X \rightarrow \text{Im } \alpha$, буде задавати бієкцію, тож для кожного $y \in \text{Im } \alpha$ існує єдиний елемент $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$. Це визначає функцію $\beta: \text{Im } \alpha \rightarrow X$, що розширюється до функції $\beta: Y \rightarrow X$, якщо покласти $\beta(y) = x_0, y \notin \text{Im } \alpha$. Для $x \in X$ ми маємо $\beta\alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = x = 1_X(x)$.

Нехай $X = \emptyset$, тоді $Y = \emptyset$ та порожня функція $\beta: Y \rightarrow X$ задовольняє $\beta\alpha = 1_X$. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений мономорфізм} \implies \text{ін’єктивний} \implies \text{мономорфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *ін’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *ін’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У повній підкатегорії **Set**, що містить всі непорожні множини, всі ці три терміни збігаються.

0.2.3 Епіморфізм

Definition 0.2.13 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **епіморфізмом (epic)**, якщо

$$\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \implies \beta_1 = \beta_2$$

Тобто морфізм – епіморфізм, якщо можна завжди скоротити справа (дуальне означення мономорфізма).

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow[\beta_2]{\beta_1} z$$

Часто епіморфізми позначають як $\alpha: x \twoheadrightarrow y$.

Theorem 0.2.14 У конкретній категорії кожний сюр'єктивний морфізм – епіморфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – сюр'єктивний морфізм. Нехай $\beta_1, \beta_2: Y \rightarrow Z$ – морфізми C та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Оберемо $y \in Y$. Оскільки α – сюр'єктивне, то $y = \alpha(x)$ для деякого $x \in X$. Тоді маємо $\beta_1(y) = \beta_1(\alpha(x)) = \beta_1\alpha(x) = \beta_2\alpha(x) = \beta_2(\alpha(x)) = \beta_2(y)$. Отже, $\beta_1 = \beta_2$. ■

Remark 0.2.15 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.16 Розглянемо категорію **Rng** та оберемо вкладення $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, яке не є сюр'єктивним. Але доведемо, що α – епіморфізм.

Нехай $\beta_1, \beta_2: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ – морфізми з **Rng** та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1(n) = \beta_2(n)$ для будь-якого цілого $n \in \mathbb{Z}$. При $n \neq 0$ ми маємо

$$\beta_1(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1} \cdot 1) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(1) = \beta_1(n^{-1})\beta_2(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(n^{-1})\beta_1(n)\beta_2(n^{-1}) = \beta_1(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(1 \cdot n^{-1}) = \beta_2(n^{-1}).$$

Таким чином, для $m, n \in \mathbb{Z}$ при $n \neq 0$ ми маємо наступне:

$$\beta_1\left(\frac{m}{n}\right) = \beta_1(m)\beta_1(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2(m)\beta_2(n^{-1}) = \beta_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Отже, $\beta_1 = \beta_2$.

Theorem 0.2.17 У категоріях **Set**, **Top**, **Grp** морфізм сюр'єктивний \iff морфізм – епіморфізм.

Proof.

Ми вже знаємо, що сюр'єктивний морфізм – епіморфізм. Залишилося довести зворотний бік для цих категорій.

(**Set**). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – епіморфізм морфізм. Нехай $\beta_1: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде характеристичною функцією для $\text{Im } \alpha$ та нехай $\beta_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$ буде стало дорівнювати 1. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, тому за епічністю, $\beta_1 = \beta_2$. Із цього випливає, що $\text{Im } \alpha = Y$, що доводить сюр'єктивність α .

(**Top**). Проводиться те саме доведення, як з **Set**. Тільки треба $\alpha: X \rightarrow Y$ брати уже неперервне відображення, а на просторі $\{0, 1\}$ задати не дискретну топологію, щоб β_1, β_2 стали неперервними.

(**Grp**). Нехай $\alpha: G \rightarrow H$ – гомоморфізм груп та припустимо, що це – не сюр'єктивний. Звідси випливає, що $[H : \text{Im } \alpha] > 1$. Ми тоді доведемо, що α – не епіморфізм.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] = 2$. Нехай $\beta_1: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – канонічний гомоморфізм та $\beta_2: H \rightarrow H/\text{Im } \alpha$ – тривіальний гомоморфізм. Тоді $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$, але при цьому $\beta_1 \neq \beta_2$, оскільки $\text{Im } \alpha \neq H$. Тобто в даному випадку α – не епіморфізм.

Випадок $[H : \text{Im } \alpha] > 2$. Тоді існують два різних правих суміжних класи $K_1 = \text{Im } \alpha \cdot h_1$ та $K_2 = \text{Im } \alpha \cdot h_2$, причому $K_1, K_2 \neq \text{Im } \alpha$. Покладемо $b = h_1^{-1}h_2$ та зауважимо, що $K_1b = K_2$, а звідси $K_2b^{-1} = K_1$. Позначимо S_H за групу симетрії на H та оберемо бієкцію $\sigma \in S_H$, що задана формулою

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1, \\ hb^{-1}, & h \in K_2, \\ h, & \text{інакше} \end{cases}$$

Можна зауважити, що $\sigma^2 = 1_H$ та $\sigma(kh) = k\sigma(h)$ для всіх $k \in \text{Im } \alpha, h \in H$.

Для $h \in H$ нехай λ_h буде елементом S_H , що заданий формулою $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$. Тоді звідси отримаємо $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$ для всіх $k \in \text{Im } \alpha$.

Визначимо $\beta_1, \beta_2: H \rightarrow S_H$ як $\beta_1(h) = \lambda_k$ та $\beta_2(h) = \sigma\lambda_k\sigma$. Ці два відображення справді задають гомоморфізм груп. Для $k \in \text{Im } \alpha$ ми маємо

$\beta_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = \beta_1(k)$, а тому $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Із іншого боку, $\beta_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = \beta_1(h_1)(e)$. Тож звідси $\beta_1 \neq \beta_2$. Тобто і в цьому випадку α – не епіморфізм. ■

0.2.4 Розщеплений епіморфізм

Definition 0.2.18 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **розщепленим епіморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \alpha\beta = 1_y$$

Морфізм – розщеплений епіморфізм, тобто даний морфізм має правий оборотний (дуальне означення розщепленого морморфізма). Такий морфізм інколи ще називають **ретракцією**.

$$x \xrightarrow[\alpha]{\exists \beta} y \curvearrowright 1_y$$

Theorem 0.2.19 Кожний розщеплений епіморфізм – епіморфізм.

Proof.

Нехай $\alpha: x \rightarrow y$ – розщеплений епіморфізм в категорії, тобто існує морфізм $\beta: y \rightarrow x$, для якого $\alpha\beta = 1_y$. Нехай $\beta_1, \beta_2: y \rightarrow z$ будуть морфізмами та припустимо, що $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. Тоді $\beta_1 = \beta_1 1_y = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_y = \beta_2$. ■

Theorem 0.2.20 У конкретній категорії кожний розщеплений епіморфізм – сюр’єктивний морфізм.

Proof.

Нехай C – конкретна категорія та $\alpha: X \rightarrow Y$ – розщеплений епіморфізм, тобто існує морфізм $\beta: Y \rightarrow X$, для якого $\alpha\beta = 1_Y$. Нехай $y \in Y$, тоді покладемо $x = \beta(y)$. Звідси $\alpha(x) = \alpha(\beta(y)) = \alpha\beta(y) = 1_Y(y) = y$. ■

Remark 0.2.21 Зворотне твердження не працює.

Example 0.2.22 Розглянемо категорію **Grp** та визначимо морфізм $\alpha: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, визначений як $\alpha(0) = \alpha(2) = 0$ та $\alpha(1) = \alpha(3) = 1$. Це буде сюр’єктивний гомоморфізм. Оскільки $1 \in \mathbb{Z}_2$ має порядок 2, то будь-який гомоморфізм $\beta: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ зобов’язаний відображати 1 на 0 або 2. Таким чином, $\alpha\beta \neq 1_{\mathbb{Z}_2}$. Отже, α – не розщеплений епіморфізм.

Можна аналогічні міркування провести для категорії **Rng**.

Example 0.2.23 Розглянемо категорію **Top**. Маємо $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – тотожне відображення; у першого – дискретна топологія, у другого – стандартна. Тоді α – сюр’єктивний морфізм, але аналогічним чином можна довести, що це не епічний морфізм (як це було з епічним мономорфізмом).

Theorem 0.2.24 У категорії **Set** морфізм – розщеплений епіморфізм \iff морфізм сюр’єктивний.

Proof.

Залишилося довести у зворотний бік.

☞ Дано: $\alpha: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивний морфізм. Тобто для кожного $y \in Y$ знайдеться $\beta(y) \in X$, для якого $\alpha(\beta(y)) = y$, а це визначає функцію $\beta: Y \rightarrow X$, яка задовольняє $\alpha\beta = 1_Y$. Отже, α – розщеплений епіморфізм. ■

Отже, в конкретній категорії маємо таку діаграму:

$$\text{розщеплений епіморфізм} \implies \text{сюр’єктивний} \implies \text{епіморфізм}$$

Приклади нам показали, що жодні два терміни не збігаються загалом.

У більш загальних категоріях *сюр’єктивність* більше не визначена, бо ми там оперуємо множинами. Але якщо слово *сюр’єктивний* видалити, то діаграма залишається справедливою.

У категорії **Set** всі ці три терміни збігаються.

0.2.5 Біморфізми та ізоморфізми

Definition 0.2.25 Задано C – категорія.

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **біморфізмом**, якщо

$$\alpha \text{ – одночасно мономорфізм та епіморфізм}$$

Морфізм $\alpha: x \rightarrow y$ називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\exists \beta: y \rightarrow x : \beta\alpha = 1_x \quad \alpha\beta = 1_y$$

Remark 0.2.26 Якщо α – ізоморфізм, то морфізм β в означенні – єдиний та позначається за α^{-1} .

Definition 0.2.27 Задано C – категорія.

Об'єкти x, y називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists \alpha: x \rightarrow y - \text{ізоморфізм}$$

Позначення: $x \cong y$ (це справді відношення еквівалентності).

Theorem 0.2.28 Морфізм – ізоморфізм \iff морфізм – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм.

Proof.

\Rightarrow миттєво випливає з означення.

\Leftarrow Дано: α – розщеплений мономорфізм та розщеплений епіморфізм. Тобто існують морфізми $\beta, \gamma: y \rightarrow x$, для яких $\beta\alpha = 1_x$, $\alpha\gamma = 1_y$. Але тоді $\beta = \beta 1_y = \beta\alpha\gamma = 1_x\gamma = \gamma$. Отже, α – ізоморфізм. ■

Тепер ми маємо ось таку діаграму. Італік позначений лише для конкретних категорій.



Theorem 0.2.29 У категорії **Set**, **Grp** біморфізм, бієкція, ізоморфізм – це одне й те саме.

Proof.

(**Set**). Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – біморфізм. Зважаючи на діаграму вище, достатньо довести, що α – ізоморфізм. Оскільки α – мономорфізм та епіморфізм, то в даній категорії α – ін'єктивний та сюр'єктивний, тобто бієктивний. Значить, існує морфізм α^{-1} , для якого $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$, $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$, що й доводить ізоморфізм.

(**Grp**). Насправді, аналогічно. Але треба окремо пересвідчитися, що якщо α – гомоморфізм, то α^{-1} буде ним також. ■

Remark 0.2.30 Що по інших категоріях, які не потрапили в цю теорему.

(**Rng**). Зауважимо, що $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ буде біморфізмом, але не бієкцією.

(**Top**). Тотожне відображення $R \rightarrow R$, з дискретною та стандартною топологією відповідно, буде бієкцією, але не ізоморфізмом (тобто гомеоморфізмом в даному випадку).

0.3 Ініціальні та термінальні об'єкти

Definition 0.3.1 Задано C – категорія та $c \in C$ – об'єкт.

Об'єкт c називається **ініціальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \alpha: c \rightarrow x$$

Об'єкт c називається **термінальним**, якщо

$$\forall x \in C: \exists! \beta: x \rightarrow c$$

Example 0.3.2 Зокрема в категорії **Set**, **Top** ініціальним об'єктом буде \emptyset ; термінальним об'єктом буде $\{x\}$ (будь-який сінглтон).

Example 0.3.3 У категоріях **Grp**, **Rng**, ${}_R\mathbf{Mod}$ ініціальним та термінальним об'єктом одночасно буде $\{e\}$, де e – нейтральний елемент.

Example 0.3.4 У категорії **Ring** ініціальним об'єктом буде кільце \mathbb{Z} , а термінальним об'єктом буде тривіальне кільце $\{0\}$.

Theorem 0.3.5 Задано C – категорія, $c_1, c_2 \in C$ – обидва ініціальні. Тоді $c_1 \cong c_2$.

Proof.

За умовою, c_1 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$. Аналогічно, c_2 – ініціальний, тоді для об'єкта c_1 існує єдиний морфізм $\beta: c_2 \rightarrow c_1$. Розглянемо композицію $\beta\alpha: c_1 \rightarrow c_1$ – такий морфізм буде єдиним в силу єдиності α, β . У категорії точно існує морфізм $1_{c_1}: c_1 \rightarrow c_1$ – отже, в силу єдиності такого морфізму, $\beta\alpha = 1_{c_1}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha\beta = 1_{c_2}$. Значить, $\alpha: c_1 \rightarrow c_2$ буде ізоморфізмом. ■

Theorem 0.3.6 Задано C – категорія, $d_1, d_2 \in C$ – обидва термінальні. Тоді $d_1 \cong d_2$.

Вправа: довести.

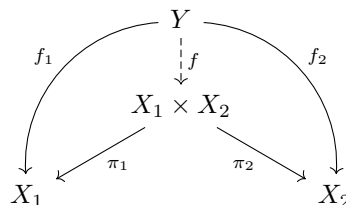
0.4 Добуток

Definition 0.4.1 Задано C – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.

Добутком X_1, X_2 називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\pi_1: X \rightarrow X_1$ та $\pi_2: X \rightarrow X_2$, що є так званими **проективними морфізмами**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: Y \rightarrow X_1, f_2: Y \rightarrow X_2 : \exists! f: Y \rightarrow X : \\ f_1 = \pi_1 f \quad f_2 = \pi_2 f$$

Позначення: $X = X_1 \times X_2$.



Remark 0.4.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C **добуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Example 0.4.3 Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$. Добутком цієї сім'ї множин є множина всіх функцій $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ таких, що $f(i) \in X_i$ для всіх $i \in I$. Це можна записати таким чином:

$$P = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

Для кожного $i \in I$ визначимо проєкцію $\pi_i: P \rightarrow X_i$ таким чином: $\pi_i(f) = f(i)$.

Доведемо, що пара $(P, \{\pi_i\})$ буде утворювати добуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.

Нехай Y – об'єкт з морфізмами $\alpha_i: Y \rightarrow X_i$. Хочемо знайти єдиний морфізм $\gamma: Y \rightarrow P$, щоб $\alpha_i = \pi_i \gamma$. Покладемо $\gamma: Y \rightarrow P$ таким чином: $\forall y \in Y : \gamma(y)$ буде функцією $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$, причому

$\forall i \in I : \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$. Тоді $\pi_i \gamma(y) = \pi_i(\gamma(y)) = \gamma(y)_i = \alpha_i(y)$, тобто звідси $\pi_i \gamma = \alpha_i$ для всіх $i \in I$.

Припустимо, що існує функція $\gamma': Y \rightarrow P$, для якої $\pi_i \gamma' = \alpha_i$. Тобто для кожного $y \in Y$ та кожного $i \in I$ виконано $\gamma'(y)_i = \alpha_i(y)$. Але тоді

$\gamma'(y)(i) = \pi_i(\gamma'(y)) = \pi_i \gamma'(y) = \alpha_i(y) = \gamma(y)(i)$. Суперечність! ■

Example 0.4.4 Будемо в категорії **Grp**. Насправді, все так само робиться, як в категорії **Set**, ось тільки кожний X_i тепер буде групою. Визначаємо декартів добуток P – це буде група зі покомпонентним множенням: $(fg)(i) = f(i)g(i)$. Це ще називають (**зовнішнім**) **прямим добутком груп**. Проективні відображення π_i будуть гомоморфізмами. Далі все те саме.

Для категорій **Rng**, $_R \mathbf{Mod}$ аналогічно все.

Example 0.4.5 Залишилася категорія **Top**.

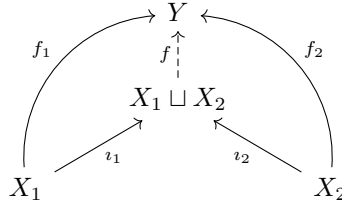
0.5 Кодобуток

Definition 0.5.1 Задано C – категорія та $X_1, X_2 \in C$ – об'єкти.

Кодобутком X_1, X_2 називають об'єкт $X \in C$, що оснащений парою морфізмів $\iota_1: X_1 \rightarrow X$ та $\iota_2: X_2 \rightarrow X$, що є так званими **морфізмами вкладень**, які задовольняють такій умові:

$$\forall Y \in C, \forall f_1: X_1 \rightarrow Y, f_2: X_2 \rightarrow Y : \exists! f: X \rightarrow Y : \\ f_1 = f\iota_1 \quad f_2 = f\iota_2$$

Позначення: $X = X_1 \sqcup X_2$.



Remark 0.5.2 Аналогічним чином можна визначити в категорії C **кодобуток** $X_i, i \in I$ (деякої сім'ї об'єктів).

Позначення $X = \coprod_{i \in I} X_i$.

Example 0.5.3 Будемо в категорії **Set**. Розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (якусь довільну). Визначимо множину Q ось так: $Q = \bigsqcup_i X'_i$, де в цьому випадку $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ для всіх i .

Причому варто зауважити, що X'_i дійсно неперетинні, а також $X'_i \cong X_i$. Визначимо відображення $\iota_i: X_i \rightarrow Q$ таким чином: $\iota_i(x) = (x, i)$.

Доведемо, що пара $(Q, \{\iota_i\})$ буде утворювати кодобуток сім'ї $\{X_i\}$ (у категоріальному сенсі).

Proof.

Створімо нову категорію \mathbf{D}_{copr} , яка функціонує ось таким чином:

об'єктами будуть пари $(X, \{\alpha_i\})$, де X – об'єкт категорії **Set** та $\alpha_i: X_i \rightarrow X$ – відображення; морфізмом між $(X, \{\alpha_i\})$ та $(Y, \{\beta_j\})$ буде відображення $\gamma: X \rightarrow Y$, для якого $\gamma \circ \alpha_i = \beta_i$, причому це для всіх i . Це дозволяє для всіх i зробити діаграму комутативною.

Так ось, нам треба довести, що наша визначена пара $(Q, \{\iota_i\})$ буде ініціальним об'єктом.

Нехай $(X, \{\alpha_i\})$ – будь-який об'єкт \mathbf{D}_{copr} . Визначимо відображення $\gamma: Q \rightarrow X$ ось таким чином: $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x)$. Зауважимо, що для всіх i та всіх $x \in X_i$ ми маємо, що

$$\gamma \circ \iota_i(x) = \gamma((x, i)) = \alpha_i(x).$$

Значить, γ буде морфізмом між цими двома об'єктами. Доведемо, що такий морфізм єдиний.

Оберемо морфізм γ' , який діє між двома об'єктами, тобто $(Q, \{\iota_i\})$ та $(X, \{\alpha_i\})$. Тоді раз це морфізм, то справедлива рівність $\gamma' \circ \iota_i = \alpha_i$ для всіх i . Проте з іншого боку, $\alpha_i(x) = \gamma((x, i))$. Значить, $\gamma((x, i)) = \alpha_i(x) = \gamma' \circ \iota_i(x) = \gamma'((x, i))$. ■

Example 0.5.4 Будемо в категорії **Top**. Як і в категорії **Set**, розглянемо сім'ю множин $\{X_i, i \in I\}$ (тільки тут вже топологічні простори). Визначимо множину Q так само, як було вище. На ній задається така топологія: U – відкрита в $Q \iff \iota_i^{-1}(U)$ – відкрита в X_i для всіх i . Тоді всі функції $\iota_i: X_i \rightarrow Q$, як було визначено вище, будуть неперервними. Далі аналогічним чином доводимо, що пара $(Q, \{\iota_i\})$ утворює кодобуток.

0.6 Зрівняльник

Definition 0.6.1 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$ – два морфізми.

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

Сформуємо категорію \mathbf{D}_{eq} таким чином:

об'єктами будуть пари (x, α) , де x – об'єкт категорії C та $\alpha: x \rightarrow a$ – морфізм в C , щоб $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \alpha$;

$$x \xrightarrow{\alpha} a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

морфізмом між об'єктами $(x, \alpha) \rightarrow (y, \beta)$ буде морфізм $\gamma: x \rightarrow y$ категорії C , для якого $\beta \gamma = \alpha$;

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b \\ \gamma \downarrow & \searrow \beta & \nearrow \\ y & & \end{array}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії C .

Зрівняльником (або **equalizer**) λ_1, λ_2 будемо називати термінальний об'єкт категорії \mathbf{D}_{eq} .

Позначимо термінальний об'єкт за (p, ι) . Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта (x, α) існує єдиний морфізм між (x, α) та (p, ι) . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma: x \rightarrow p$ в категорії C , для якого $\iota \gamma = \alpha$ – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b \\ \exists! \gamma \downarrow & \searrow \iota & \nearrow \\ p & & \end{array}$$

Example 0.6.2 Розглянемо категорію **Set**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$ – два відображення. Покладемо $P = \{a \in A \mid \lambda_1(a) = \lambda_2(a)\}$ та $\iota: P \rightarrow A$ – вкладення. Тоді $\lambda_1 \iota = \lambda_2 \iota$ (тобто звідси (P, ι) буде об'єктом категорії \mathbf{D}_{eq} , який був зазначений вище). Стверджується, що (P, ι) – зрівняльник λ_1, λ_2 . Нехай (X, α) – довільний об'єкт категорії \mathbf{D}_{eq} . Для кожного $x \in X$ ми маємо $\lambda_1(\alpha(x)) = \lambda_2 \alpha(x) = \lambda_2(\alpha(x))$, тобто $\text{Im } \alpha \subset P$. Оберемо відображення $\gamma: X \rightarrow P$ так, що $\gamma = \alpha$. Тоді звідси $\iota \gamma = \alpha$, тобто γ – морфізм між об'єктами $(X, \alpha) \rightarrow (P, \iota)$.

Оскільки ι – ін'єктивний (як вкладення), то тоді це мономорфізм. Отже, γ – єдиний такий морфізм.

Example 0.6.3 Розглянемо категорію **Top**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$ – неперервні відображення. Визначимо P, ι так само, як в попередньому прикладі (оскільки $P \subset A$, то можна визначити топологічний підпростір). Таким чином, ι уже буде неперервним. Далі так само доводимо, що (P, ι) – зрівняльник λ_1, λ_2 .

Example 0.6.4 Розглянемо категорію **Grp**. Нехай $\lambda_1, \lambda_2: A \rightarrow B$ – два гомоморфізми груп та P – така сама множина, що в попередньому прикладі, яка є підгрупою A , тож $\iota: P \rightarrow A$ (знову вкладення) – гомоморфізм груп. Далі так само доводимо, що (P, ι) – зрівняльник λ_1, λ_2 .

Аналогічно для категорій **Rng**, ${}_R \mathbf{Mod}$.

Proposition 0.6.5 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$ – два морфізми. Припустимо, що (p, ι) – зрівняльник λ_1, λ_2 . Тоді ι – мономорфізм.

Proof.

Нехай $\beta_1, \beta_2: x \rightarrow p$ – морфізми категорії C , для яких $\imath\beta_1 = \imath\beta_2$. Для зручності позначу $\imath\beta_1 = \alpha$. Оскільки (p, \imath) – об’єкт категорії \mathbf{D}_{eq} , ми маємо наступне:
 $\lambda_1\alpha = (\lambda_1\imath)\beta_1 = (\lambda_2\imath)\beta_1 = \lambda_2\alpha$.

Отже, (x, α) – також об’єкт категорії \mathbf{D}_{eq} .

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & \\ \beta_2 \downarrow & \searrow \alpha & & \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} & b \\ & \beta_1 & \nearrow \imath & a & \\ & \downarrow & & & \\ p & & & & \end{array}$$

За початковими припущеннями, $\imath\beta_1 = \alpha$, $\imath\beta_2 = \alpha$. Але за єдиністю відображення з такими властивостями (зважаючи на означення зрівняльника), $\beta_1 = \beta_2$. Звідси \imath – мономорфізм. ■

0.7 Козрівняльник

Definition 0.7.1 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$ – два морфізми.

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b$$

Сформуємо категорію \mathbf{D}_{coeq} таким чином:

об’єктами будуть пари (x, α) , де x – об’єкт категорії C та $\alpha: b \rightarrow x$ – морфізм в C , щоб $\alpha\lambda_1 = \alpha\lambda_2$;

$$a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b \xrightarrow{\alpha} x$$

морфізмом між об’єктами $(x, \alpha) \rightarrow (y, \beta)$ буде морфізм $\gamma: x \rightarrow y$ категорії C , для якого $\gamma\alpha = \beta$;

$$\begin{array}{ccc} & & y \\ & \nearrow \beta & \uparrow \gamma \\ a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b & & \\ & \searrow \alpha & \downarrow \\ & & x \end{array}$$

композицією морфізмів буде просто композиція в категорії C .

Козрівняльником (або **coequalizer**) λ_1, λ_2 будемо називати ініціальний об’єкт категорії \mathbf{D}_{coeq} .

Позначимо ініціальний об’єкт за (q, π) . Тоді за означенням ініціальності, для кожного об’єкта (x, α) існує єдиний морфізм між (q, π) та (x, α) . Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma: q \rightarrow x$ в категорії C , для якого $\gamma\pi = \alpha$ – тобто такий морфізм, що діаграма нижче комутується:

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & \nearrow \beta & \uparrow \exists! \gamma \\ a \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} b & & \\ & \searrow \pi & \downarrow \\ & & q \end{array}$$

Proposition 0.7.2 Задано C – категорія та $\lambda_1, \lambda_2: a \rightarrow b$ – два морфізми. Припустимо, що (q, π) – козрівняльник λ_1, λ_2 . Тоді \imath – епіморфізм.

Насправді, доведення є аналогічним, коли мова була про зрівняльник \implies мономорфізм.

0.8 Пулбек

Definition 0.8.1 Задано C – категорія та $\lambda_1: a_1 \rightarrow b$, $\lambda_2: a_2 \rightarrow b$ – морфізми.

$$\begin{array}{ccc} & a_2 & \\ & \downarrow \lambda_2 & \\ a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

Сконструюємо категорію \mathbf{D}_{pb} ось таким чином:

об'єктами будуть пари $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$, де x – об'єкт категорії C та $\alpha_1: x \rightarrow a_1$, $\alpha_2: x \rightarrow a_2$ – два морфізми категорії C , для яких $\lambda_1 \alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2$;

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha_2} & a_2 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

морфізмами між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(y, (\beta_1, \beta_2))$ будуть всі морфізми $\gamma: x \rightarrow y$ категорії C , для яких $\beta_1 \gamma = \alpha_1$, $\beta_2 \gamma = \alpha_2$;

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & a_2 \\ & \searrow \alpha_2 & & \searrow \beta_2 & \\ & & y & \xrightarrow{\beta_2} & a_2 \\ & \searrow \gamma & & \searrow \lambda_2 & \\ & & & & b \\ & \searrow \alpha_1 & & \searrow \lambda_1 & \\ & & a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C .

Пулбеком пари морфізмів (λ_1, λ_2) будемо називати термінальний об'єкт категорії \mathbf{D}_{pb} .

Позначимо термінальний об'єкт за $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$. Тоді за означенням термінальності, для кожного об'єкта $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ існує єдиний морфізм між $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma: x \rightarrow p$ в категорії C , для якого $\sigma_1 \gamma = \alpha_1$, $\sigma_2 \gamma = \alpha_2$.

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & a_2 \\ & \searrow \exists! \gamma & & \searrow \sigma_2 & \\ & & p & \xrightarrow{\sigma_2} & a_2 \\ & \searrow \alpha_1 & & \searrow \lambda_2 & \\ & & & & b \\ & \searrow \alpha_1 & & \searrow \lambda_1 & \\ & & a_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & b \end{array}$$

Example 0.8.2 Розглянемо категорію **Set**. Нехай $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$ будуть дві функції. Визначимо $A_1 \times_B A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \lambda(a_1) = \lambda(a_2)\} \subset A_1 \times A_2$. Така множина називається **розшарованим добутком** λ_1, λ_2 .

Покладемо $P = A_1 \times_B A_2$ та визначимо $\sigma_i: P \rightarrow A_i$ таким чином: $\sigma_i((a_1, a_2)) = a_i, i = 1, 2$. Зауважимо, що $\lambda_1 \sigma_1 = \lambda_2 \sigma_2$. Дійсно, для $a = (a_1, a_2) \in P$ маємо наступне:

$$\lambda_1 \sigma_1(a) = \lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2) = \lambda_2 \sigma_2(a).$$

Отже, $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ – об'єкт допоміжної категорії \mathbf{D}_{pb} . Я стверджую, що цей об'єкт буде пулбеком пари (λ_1, λ_2) .

Нехай $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ – об'єкт категорії \mathbf{D}_{pb} . Визначимо $\gamma: X \rightarrow P$ таким чином $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$.

Зауважимо, що $(\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \stackrel{\text{дійсно}}{\in} P$, оскільки $\lambda_1(\alpha_1(x)) = \lambda_2(\alpha_2(x))$ (в силу обраного об'єкта з \mathbf{D}_{pb}). Також зазначимо, що $\sigma_i \gamma = \alpha_i, i = 1, 2$, тому це формує морфізм між $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$. Залишилося довести єдиність.

Нехай γ' – інший морфізм між $(X, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$.

$$\gamma'(x) = (\sigma_1 \gamma'(x), \sigma_2 \gamma'(x)) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = \gamma(x).$$

Тобто $\gamma' = \gamma$, що доводить єдиність морфізма.

Example 0.8.3 Розглянемо категорію **Top**. Нехай $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$ – уже неперервні відображення, на $A_1 \times A_2$ покладемо добуток топологій A_1, A_2 , а також $P = A_1 \times_B A_2$ – топологічний підпростір $A_1 \times A_2$. Відображення $\sigma_i: P \rightarrow A_i$, які визначали минулого разу, – це звуження проєктивного відображення $A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ (що є неперервним), тому σ_i – неперервні. Аналогічно доводиться, що $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ утворює пулбек. Тільки ще варто зауважити, що $\gamma: X \rightarrow P \subset A_1 \times A_2$, що було визначено як $\gamma(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$, буде теж неперервним, оскільки кожний α_i – неперервний.

Example 0.8.4 Розглянемо категорію **Grp**. Нехай $\lambda_i: A_i \rightarrow B (i = 1, 2)$ – уже гомоморфізм груп, на $A_1 \times A_2$ стоїть прямий добуток груп A_1, A_2 , а також $P = A_1 \times_B A_2$ – підгрупа $A_1 \times A_2$ (вправа: довести). Також σ_i, γ , що задані так само, як було вище, – гомоморфізми. Тому $(P, (\sigma_1, \sigma_2))$ утворює пулбек за аналогічними міркуваннями.

Абсолютно аналогічно можна сказати про **Rng**, **_RMod**.

Theorem 0.8.5 Задано C – категорія.

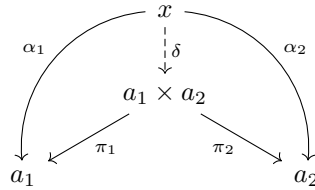
Існують зрівняльники та скінченні добутки в $C \iff$ існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії C .

Proof.

\Rightarrow Дано: існують зрівняльники та скінченні добутки в C .

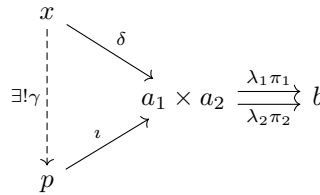
Добуток порожньої сім'ї об'єктів уже автоматично термінальний (TODO: обдумати).

Залишилося показати існування пулбеку. Нехай $\lambda_i: a_i \rightarrow b$ – два морфізми категорії C . За нашими умовами, існує добуток $(a_1 \times a_2, \{\pi_i\})$ сім'ї $\{a_1, a_2\}$, тобто існує термінальний об'єкт категорії **D_{пр}**. Тобто у нас є одна діаграма:



Хто такий об'єкт x та звідки морфізми α_1, α_2 , буде ясно пізніше.

Також за умовою, існує зрівняльник для морфізмів $\lambda_1\pi_1, \lambda_2\pi_2$. Тобто у нас є друга діаграма:



Морфізм δ ми взяли з попередньої діаграми, а про об'єкт x та морфізм γ буде згодом.

Покладемо $\sigma_i = \pi_i i$. Зауважимо, що $\lambda_1\sigma_1 = \lambda_1\pi_1 i = \lambda_2\pi_2 i = \lambda_2\sigma_2$. Таким чином, $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ – об'єкт категорії **D_{рб}**. Залишилося показати, що це – термінальний – і таким чином ми отримаємо пулбек. Нехай $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ – об'єкт категорії **D_{рб}** (тепер з об'єктом x та морфізмами α_1, α_2 на діаграмі стало ясніше). Тобто уже маємо $\lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2$. Ми також маємо $\lambda_1\pi_1\delta = \lambda_1\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 = \lambda_2\pi_2\delta$, тож звідси $(x, \delta) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$. Тоді за зрівняльником, існує морфізм $\gamma: x \rightarrow p$, для якого $i\gamma = \delta$ (тепер з морфізмом γ стало ясніше).

Зауважимо, що $\sigma_i i\gamma = \pi_i i\gamma = \pi_i\delta = \alpha_i, i = 1, 2$, тобто звідси γ – це морфізм в **D_{рб}** між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$.

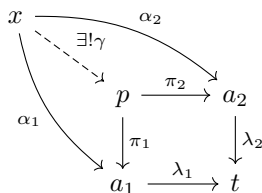
Припустимо, що γ' – ще один такий же морфізм. Тоді $\pi_i i\gamma' = \sigma_i\gamma' = \alpha_i$ та аналогічно $\pi_i\gamma = \alpha_i$. Але за єдиністю в добутку, $i\gamma' = i\gamma$. Оскільки i – мономорфізм, то звідси $\gamma' = \gamma$.

\Leftarrow Дано: існують пулбеки та термінальний об'єкт категорії C .

Позначимо t за термінальний об'єкт C . Хочемо довести, що існує скінченний добуток в C ; а для цього буде достатньо лише довести, що для сім'ї $\{a_1, a_2\}$ (тобто лише для двох об'єктів) існує

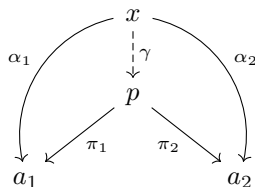
добуток (TODO: додати пояснення).

Оскільки t – термінальний, то існують єдині морфізми $\lambda_i: a_i \rightarrow t, i = 1, 2$ в категорії C . За умовою, існує пулбек для пари (λ_1, λ_2) , тобто в категорії \mathbf{D}_{pb} існує термінальний об'єкт $(p, (\pi_1, \pi_2))$ (те, що π_i – це проєкція, на даному етапі це невідомо, але скоро своє позначення виправдає). У нас вже є перша діаграма:



Хто такий об'єкт x та морфізм γ , стане зараз ясно.

Ми тепер хочемо довести, що $(p, \{\pi_i\})$ утворює добуток сім'ї $\{a_1, a_2\}$. Тобто хочемо таку діаграму:



Знову ж таки, хто такий x та морфізм γ , стане скоро ясно.

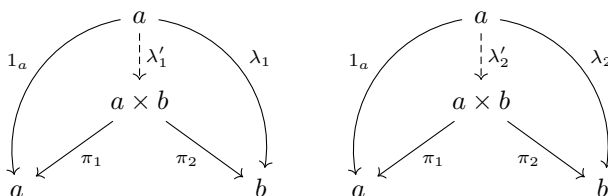
Нехай $(x, \{\alpha_i\})$ – об'єкт категорії \mathbf{D}_{pr} (тепер за x стало ясно на діаграмах). Тоді зауважимо, що $\lambda_i \alpha_i: x \rightarrow t, i = 1, 2$ – два морфізми в термінальний об'єкт, тож за єдиністю, $\lambda_1 \alpha_1 = \lambda_2 \alpha_2$. Але це означає, що пара $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ буде об'єктом категорії \mathbf{D}_{pb} , тоді за термінальністю \mathbf{D}_{pb} , існує єдиний морфізм $\gamma: x \rightarrow p$ категорії C , для якої $\pi_i \gamma = \alpha_i$ (тепер і про γ стало ясно на діаграмах). Власне, це й доводить існування добутку.

Залишилося довести, що існують зрівняльники в C . Нехай $\lambda_i: a \rightarrow b$ – два морфізми категорії C .

$$a \begin{matrix} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{matrix} b$$

Ми вже знаємо вище, що існує $(a \times b, \{\pi_i\})$ – добуток сім'ї $\{a, b\}$. Двічі застосуємо означення добутку – отримаємо морфізми $\lambda'_1, \lambda'_2: a \rightarrow a \times b$, для яких справедливі:

$$\pi_1 \lambda'_1 = 1_a \quad \pi_1 \lambda'_2 = 1_a \quad \pi_1 \lambda'_1 = \lambda_1 \quad \pi_2 \lambda'_2 = \lambda_2 \quad (*).$$



За припущенням, існує пулбек для (λ'_1, λ'_2) , тобто існує термінальний об'єкт $(p, (\sigma_1, \sigma_2))$ категорії \mathbf{D}_{pb} . Використовуючи перші дві рівності в $(*)$, отримаємо:

$$\sigma_1 = 1_a \sigma_1 = \pi_1 \lambda'_1 \sigma_1 = \pi_1 \lambda'_2 \sigma_2 = 1_a \sigma_2 = \sigma_2.$$

Для зручності позначимо $\iota = \sigma_1 = \sigma_2$. За останніми двома рівностями в $(*)$,

$$\lambda_1 \iota = \pi_2 \lambda'_1 \sigma_1 = \pi_2 \lambda'_2 \sigma_2 = \lambda_2 \iota.$$

Таким чином, отримали, що (p, ι) – об'єкт \mathbf{D}_{eq} . Хочемо довести, що (p, ι) буде зрівняльником λ_1, λ_2 , тобто хочемо таку діаграму:

$$\begin{array}{ccccc}
x & & & & \\
\downarrow \gamma & \searrow \alpha & & & \\
& a & \xrightleftharpoons[\lambda_2]{\lambda_1} & b & \\
& \nearrow \iota & & & \\
p & & & &
\end{array}$$

Нехай $(x, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{eq}}$. Зокрема звідси $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \alpha \stackrel{\text{позн.}}{=} \beta$. Зауважимо, що $\lambda'_i \alpha, i = 1, 2$ – морфізми із $(x, (\alpha, \beta))$ в $(a \times \beta, (\pi_1, \pi_2))$. Справді,
 $\pi_1 \lambda'_i \alpha = 1_a \alpha = \alpha \quad \pi_2 \lambda'_i \alpha = \lambda_i \alpha = \beta$.
Оскільки другий об'єкт – термінальний, то за єдиністю, $\lambda'_1 \alpha = \lambda'_2 \alpha$, а звідси $(x, \alpha, \alpha) \in \mathbf{D}_{\text{pb}}$. Отже, звідси існує єдиний морфізм $\gamma: x \rightarrow p$, для якого $\sigma_i \gamma = \alpha \iff \iota \gamma = \alpha$. Остання рівність закінчує доведення за існування зрівняльника. ■

0.9 Пушаут

Definition 0.9.1 Задано C – категорія та $\lambda_1: a \rightarrow b_1$, $\lambda_2: a \rightarrow b_2$ – морфізми.

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\
\downarrow \lambda_1 & & \\
b_1 & &
\end{array}$$

Сконструюємо категорію \mathbf{D}_{po} ось таким чином:
об'єктами будуть пари $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$, де x – об'єкт категорії C та $\alpha_1: b_1 \rightarrow x$, $\alpha_2: b_2 \rightarrow x$ – два морфізми категорії C , для яких $\alpha_1 \lambda_1 = \alpha_2 \lambda_2$;

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\
\downarrow \lambda_1 & & \downarrow \alpha_2 \\
b_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & x
\end{array}$$

морфізмами між об'єктами $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ та $(y, (\beta_1, \beta_2))$ будуть всі морфізми $\gamma: x \rightarrow y$ категорії C , для яких $\gamma \alpha_1 = \beta_1$, $\gamma \alpha_2 = \beta_2$;

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\
\downarrow \lambda_1 & & \downarrow \alpha_2 \\
b_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & x \\
& \searrow \beta_1 & \nearrow \beta_2 \\
& & y
\end{array}$$

композицією морфізмів буде композиція, як в категорії C .

Пушаутом пари морфізмів (λ_1, λ_2) будемо називати ініціальний об'єкт категорії \mathbf{D}_{pb} .

Позначимо ініціальний об'єкт за $(q, (\tau_1, \tau_2))$. Тоді за означенням ініціальності, для кожного об'єкта $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$ існує єдиний морфізм між $(q, (\tau_1, \tau_2))$ та $(x, (\alpha_1, \alpha_2))$. Тобто це означає, що існує єдиний морфізм $\gamma: q \rightarrow x$ в категорії C , для якого $\gamma \tau_1 = \alpha_1$, $\gamma \tau_2 = \alpha_2$.

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\lambda_2} & b_2 \\
\downarrow \lambda_1 & & \downarrow \tau_2 \\
b_1 & \xrightarrow{\tau_1} & q \\
& \searrow \alpha_1 & \nearrow \alpha_2 \\
& & x
\end{array}$$

Theorem 0.9.2 Задано C – категорія.

Існують козрівняльники та скінченні кодобутки в $C \iff$ існують пушаути та ініціальний об'єкт категорії C .

Доведення аналогічне, просто тут все дуальне.