

Функціональний аналіз
I курс магістратура, 2 семестр

18 лютого 2024 р.

0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

Definition 0.1.1 Задано E – векторний простір над полем k (у рамках даного курсу переважно будуть поля \mathbb{R}, \mathbb{C}).

Векторний простір E буде **топологічним**, якщо

- 1) задана стандартна топологія на полі k
- 2) операції $+: E \times E \rightarrow E$ (додавання) та $\cdot: k \times E \rightarrow E$ (множення на скаляр) – неперервні

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення $\text{add}: E \times E \rightarrow E$ та множення на скаляр за відображення $\text{scalar}: k \times E \rightarrow E$.

Оберемо будь-яку точку $(x, y) \in E \times E$. Тоді на ній add неперервне, тобто $\forall U$ – відкритий окіл $\text{add}(x, y) : \exists V$ – відкритий окіл точки $(x, y) : \text{add}(V) \subset U$. Зауважимо, що для V – відкритого окола (x, y) – існують відкриті околи V_x, V_y , для яких $V_x \times V_y \subset V$. Далі, в нашому випадку $\text{add}(U) = \{\text{add}(x, y) \mid (x, y) \in V\} = \{x + y \mid (x, y) \in V\} \supset \{x' + y' \mid x' \in V_x, y' \in V_y\} \stackrel{\text{позн.}}{=} V_x + V_y$.

Таким чином, $\forall U_{x+y}$ – відкритий окіл $x + y : \exists V_x, V_y$ – відкриті околи $x, y : V_x + V_y \subset U_{(x,y)}$. Аналогічно $\forall U_{\lambda x}$ – відкритий окіл $\lambda x : \exists V_\lambda, V_x$ – відкриті околи $\lambda, x : V_\lambda \times V_x \subset U_{\lambda x}$.

Remark 0.1.2 Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.

Дійсно, всі інші околи $U_x \cong U_0$. В одну сторону в нас неперервне відображення $y \mapsto y + x$, а в іншу сторону – теж неперервне $y \mapsto y - x$.

0.2 Лінійні нормовані простори

Definition 0.2.1 Задано E – векторний простір над полем $k = \mathbb{R}$ або $k = \mathbb{C}$.

Лінійним нормованим простором називають векторний простір E над полем k , на якій задається **норма** $\|\cdot\|: E \rightarrow k$, що задовольняє таким властивостям:

- 1) $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$, при цьому $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 2) $\forall x \in E : \forall \lambda \in k : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Proposition 0.2.2 Якщо E – лінійний нормований простір, то (E, ρ) , де $\rho(x, y) = \|x - y\|$, автоматично утворює метричний простір.

Proof.

- 1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ – перша властивість норми; $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
- 2) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = \rho(x, y)$;
- 3) $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. ■

Corollary 0.2.3 Якщо E – лінійний нормований простір, то E – автоматично лінійно топологічний простір.

Задамо просто окіл нуля як $B_0(r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$.

Proposition 0.2.4 Властивості норми

Задано E – лінійний нормований простір. Тоді справедливо наступне:

- 1) $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$;
- 2) Нехай задана послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset E : x_n \rightarrow x$. Тоді $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$.

Proof.

Дещо я залишу без доведення:

- 1) *Вказівка:* $\|x\| = \|x - y + y\|$ та $\|y\| = \|y - x + x\|$.
- 2) $x_n \rightarrow x$, тобто це означає $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Отже, завдяки властивості 1), отримаємо $0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким чином, $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Всі властивості доведені. ■

Theorem 0.2.5 Задано E – лінійний нормований простір. Тоді існує лінійний нормований простір \tilde{E} , такий, що:

- 1) $E \subset \tilde{E}$ – щільна;
- 2) $(E, \|\cdot\|_E)$ та $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ – ізометричні;

Поки без доведення.

Example 0.2.6 Розглянемо кілька прикладів лінійних нормованих просторів:

- 1) \mathbb{C}^n , $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
- 2) $C([0, 1])$, $\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.
- 3) X – довільна множина, $M(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ – обмежені на } X\}$, $\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|$.

0.3 Гільбертові простори

Definition 0.3.1 Задано E – векторний простір над полем \mathbb{C} .

Простір називається **передгільбертовим**, якщо на просторі задано відображення $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, що називається **скалярним добутком**, що задовольняє таким умовам:

- 1) $\forall x \in E: (x, x) \geq 0$, при цьому $(x, x) = 0 \iff x = 0$
- 2) $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}: (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$
- 3) $\forall x, y \in E: (x, y) = \overline{(y, x)}$

Цей же скалярний добуток можна визначати над полем \mathbb{R} .

Proposition 0.3.2 Властивості скалярного добутку

Задано E – передгільбертів простір. Тоді справедливе наступне:

- 1) $(0, x) = 0$;
- 2) $(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}(x, y) + \bar{\mu}(x, z)$

Вправа: довести.

Theorem 0.3.3 Нерівність Коші-Буняковського

Задано E – передгільбертів простір. Тоді $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$.

Remark 0.3.4 $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \iff y = \alpha x$.

Proposition 0.3.5 Задано E – передгільбертів простір. Тоді E – лінійний нормований простір із нормою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Proof.

- 1) $\|x\| = \sqrt{(x, x)} \geq 0$ – зрозуміло. Також $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = 0 \iff (x, x) = 0 \iff x = 0$.
- 2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (x, x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \|x\|$.
- 3) $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \stackrel{\text{нер-ть К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.
 $\implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

Proposition 0.3.6 Поляризаційна тотожність

Задано E – передгільбертів простір. Тоді

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Example 0.3.7 Розглянемо кілька прикладів передгільбертових просторів:

- 1) \mathbb{C}^n , $(x, y) = \sqrt{x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n}$, де $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$;
- 2) $C([0, 1])$, $(f, g) = \int_0^1 f(t) \bar{g}(t) dt$.

Definition 0.3.8 Лінійний нормований простір, що є повним, називається **банаховим**.

Definition 0.3.9 Банахів передгільбертів простір називається **гільбертовим**.

Remark 0.3.10 Інколи ще дають такі поняття як **квазіскалярний добуток**. Це той же скалярний добуток, без умови $(x, x) = 0 \iff x = 0$. При цьому нерівність Коші-Буняковського досі буде виконуватися.

Також існує поняття **напівнорма**. Це та же норма, без умови $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Remark 0.3.11 Таким чином, маючи квазіскалярний добуток, то $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ задає уже напівнорму.