Функціональний аналіз
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

Definition 0.1.1 Задано E – векторний простір над полем k (у рамках даного курсу переважно будуть поля $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Векторний простір E буде **топологічним**, якщо

1) задана стандартна топологія на полі k
2) операції $+\colon E \times E \to E$ (додавання) та $\cdot\colon k \times E \to E$ (множення на скаляр) – неперервні

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення $\mathrm{add}\colon E \times E \to E$ та множення на скаляр за відображення $\mathrm{scalar}\colon k \times E \to E$.
Оберемо будь-яку точку $(x, y) \in E \times E$. Тоді на ній add неперервне, тобто $\forall U$ – відкритий окіл $\mathrm{add}(x, y) : \exists V$ – відкритий окіл точки $(x, y) : \mathrm{add}(V) \subset U$. Зауважимо, що для V – відкритого окола (x, y) – існують відкриті околи V_x, V_y, для яких $V_x \times V_y \subset V$. Далі, в нашому випадку $\mathrm{add}(U) = \{\mathrm{add}(x, y) \mid (x, y) \in V\} = \{x + y \mid (x, y) \in V\} \supset \{x' + y' \mid x' \in V_x, y' \in V_y\} \overset{\text{позн.}}{=} V_x + V_y$.

Таким чином, $\forall U_{x+y}$ – відкритий окіл $x + y : \exists V_x, V_y$ – відкриті околи $x, y : V_x + V_y \subset U_{(x,y)}$.
Аналогічно $\forall U_{\lambda x}$ – відкритий окіл $\lambda x : \exists V_\lambda, V_x$ – відкриті околи $\lambda, x : V_\lambda \times V_x \subset U_{\lambda x}$.

Remark 0.1.2 Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.
Дійсно, всі інші околи $U_x \cong U_0$. В одну сторону в нас неперервне відображення $y \mapsto y + x$, а в іншу сторону – теж неперервне $y \mapsto y - x$.