Функціональний аналіз
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

Definition 0.1.1 Задано E – векторний простір над полем k (у рамках даного курсу переважно будуть поля $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Векторний простір E буде **топологічним**, якщо

$$1) \text{ задана стандартна топологія на полі } k$$
$$2) \text{ операції } +\colon E \times E \to E \text{ (додавання) та } \cdot\colon k \times E \to E \text{ (множення на скаляр) – неперервні}$$

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення $\mathrm{add}\colon E \times E \to E$ та множення на скаляр за відображення $\mathrm{scalar}\colon k \times E \to E$.
Оберемо будь-яку точку $(x, y) \in E \times E$. Тоді на ній add неперервне, тобто $\forall U$ – відкритий окіл $\mathrm{add}(x, y) : \exists V$ – відкритий окіл точки $(x, y) : \mathrm{add}(V) \subset U$. Зауважимо, що для V – відкритого окола (x, y) – існують відкриті околи V_x, V_y, для яких $V_x \times V_y \subset V$. Далі, в нашому випадку $\mathrm{add}(U) = \{\mathrm{add}(x, y) \mid (x, y) \in V\} = \{x + y \mid (x, y) \in V\} \supset \{x' + y' \mid x' \in V_x, y' \in V_y\} \overset{\text{позн.}}{=} V_x + V_y$.

Таким чином, $\forall U_{x+y}$ – відкритий окіл $x + y : \exists V_x, V_y$ – відкриті околи $x, y : V_x + V_y \subset U_{(x,y)}$.
Аналогічно $\forall U_{\lambda x}$ – відкритий окіл $\lambda x : \exists V_\lambda, V_x$ – відкриті околи $\lambda, x : V_\lambda \times V_x \subset U_{\lambda x}$.

Remark 0.1.2 Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.
Дійсно, всі інші околи $U_x \cong U_0$. В одну сторону в нас неперервне відображення $y \mapsto y + x$, а в іншу сторону – теж неперервне $y \mapsto y - x$.

0.2 Лінійні нормовані простори

Definition 0.2.1 Задано E – векторний простір над полем $k = \mathbb{R}$ або $k = \mathbb{C}$.
Лінійним нормованим простором називають векторний простір E над полем k, на якій задається **норма** $\|\cdot\|\colon E \to k$, що задовольняє таким властивостям:

$$1) \forall x \in E : \|x \geq 0\|, \text{при цьому } \|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$2) \forall x \in E : \forall \lambda \in k : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
$$3) \forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Proposition 0.2.2 Якщо E – лінійний нормвований простір, то (E, ρ), де $\rho(x, y) = \|x - y\|$, автоматично утворює метричний простір.

Proof.
1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ – перша властивість норми; $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
2) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = \rho(x, y)$;
3) $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. ■

Corollary 0.2.3 Якщо E – лінійний нормований простір, то E – автоматично лінійно топологічний простір.
Задамо просто окіл нуля як $B_0(r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$.

Proposition 0.2.4 Властивості норми
Задано E – лінійний норований простір. Тоді справедливо наступне:
1) $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$;
2) Нехай задана послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset E : x_n \to x$. Тоді $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Proof.
Дещо я залишу без доведення:

1) *Вказівка:* $\|x\| = \|x - y + y\|$ *та* $\|y\| = \|y - x + x\|$.

2) $x_n \to x$, тобто це означає $\|x_n - x\| \to 0$. Отже, завдяки властивості 1), отримаємо $0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, $\|x_n\| \to \|x\|$.

Всі властивості доведені. ■

Theorem 0.2.5 Задано E – лінійний нормований простір. Тоді існує лінійний нормований простір $\tilde{E}$, такий, що:
1) $E \subset \tilde{E}$ – щільна;
2) $(E, \|\cdot\|_E)$ та $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ – ізометричні;
Поки без доведення.

Example 0.2.6 Розглянемо кілька прикладів лінійних нормованих просторів:
1) $\mathbb{C}^n, \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
2) $C([0,1]), \qquad \|f\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.
3) X – довільна множина, $M(X) = \{f \colon X \to \mathbb{C} \mid f$ – обмежені на $X\}, \qquad \|f\| = \sup\limits_{t \in X} |f(t)|$.