Функціональний аналіз
I курс магістратура, 2 семестр

18 лютого 2024 р.

0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

Definition 0.1.1 Задано E – векторний простір над полем k (у рамках даного курсу переважно будуть поля $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Векторний простір E буде **топологічним**, якщо

$$1) \text{ задана стандартна топологія на полі } k$$
$$2) \text{ операції } +\colon E \times E \to E \text{ (додавання) та } \cdot\colon k \times E \to E \text{ (множення на скаляр) – неперервні}$$

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення $\mathrm{add}\colon E \times E \to E$ та множення на скаляр за відображення $\mathrm{scalar}\colon k \times E \to E$.
Оберемо будь-яку точку $(x, y) \in E \times E$. Тоді на ній add неперервне, тобто $\forall U$ – відкритий окіл $\mathrm{add}(x, y) : \exists V$ – відкритий окіл точки $(x, y) : \mathrm{add}(V) \subset U$. Зауважимо, що для V – відкритого окола (x, y) – існують відкриті околи V_x, V_y, для яких $V_x \times V_y \subset V$. Далі, в нашому випадку $\mathrm{add}(U) = \{\mathrm{add}(x, y) \mid (x, y) \in V\} = \{x + y \mid (x, y) \in V\} \supset \{x' + y' \mid x' \in V_x, y' \in V_y\} \overset{\text{позн.}}{=} V_x + V_y$.

Таким чином, $\forall U_{x+y}$ – відкритий окіл $x + y : \exists V_x, V_y$ – відкриті околи $x, y : V_x + V_y \subset U_{(x,y)}$.
Аналогічно $\forall U_{\lambda x}$ – відкритий окіл $\lambda x : \exists V_\lambda, V_x$ – відкриті околи $\lambda, x : V_\lambda \times V_x \subset U_{\lambda x}$.

Remark 0.1.2 Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.
Дійсно, всі інші околи $U_x \cong U_0$. В одну сторону в нас неперервне відображення $y \mapsto y + x$, а в іншу сторону – теж неперервне $y \mapsto y - x$.

0.2 Лінійні нормовані простори

Definition 0.2.1 Задано E – векторний простір над полем $k = \mathbb{R}$ або $k = \mathbb{C}$.
Лінійним нормованим простором називають векторний простір E над полем k, на якій задається **норма** $\|\cdot\|\colon E \to k$, що задовольняє таким властивостям:

$$1) \forall x \in E : \|x \geq 0\|, \text{при цьому } \|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$2) \forall x \in E : \forall \lambda \in k : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
$$3) \forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Proposition 0.2.2 Якщо E – лінійний нормвований простір, то (E, ρ), де $\rho(x, y) = \|x - y\|$, автоматично утворює метричний простір.

Proof.
1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ – перша властивість норми; $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
2) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = \rho(x, y)$;
3) $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. ■

Corollary 0.2.3 Якщо E – лінійний нормований простір, то E – автоматично лінійно топологічний простір.
Задамо просто окіл нуля як $B_0(r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$.

Proposition 0.2.4 Властивості норми
Задано E – лінійний норований простір. Тоді справедливо наступне:
1) $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$;
2) Нехай задана послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset E : x_n \to x$. Тоді $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Proof.
Дещо я залишу без доведення:

1) *Вказівка:* $\|x\| = \|x - y + y\|$ *та* $\|y\| = \|y - x + x\|$.

2) $x_n \to x$, тобто це означає $\|x_n - x\| \to 0$. Отже, завдяки властивості 1), отримаємо $0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, $\|x_n\| \to \|x\|$.

Всі властивості доведені. ■

Theorem 0.2.5 Задано E – лінійний нормований простір. Тоді існує лінійний нормований простір $\tilde{E}$, такий, що:
1) $E \subset \tilde{E}$ – щільна;
2) $(E, \|\cdot\|_E)$ та $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ – ізометричні;
Поки без доведення.

Example 0.2.6 Розглянемо кілька прикладів лінійних нормованих просторів:
1) $\mathbb{C}^n$, $\quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
2) $C([0,1])$, $\quad \|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
3) X – довільна множина, $M(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f$ – обмежені на $X\}$, $\quad \|f\| = \sup\limits_{t\in X} |f(t)|$.

0.3 Гільбертові простори

Definition 0.3.1 Задано E – векторний простір над полем $\mathbb{C}$.
Простір називається **передгільбертовим**, якщо на просторі задано відображення $(\cdot,\cdot) : E \times E \to k$, що наизвається **скалярним добутком**, що задовольняє таким умовам:

$$1)\forall x \in E : (x,x) \geq 0, \text{ при цьому } (x,x) = 0 \iff x = 0$$
$$2)\forall x,y,z \in E, \forall \lambda,\mu \in L : (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$$
$$3)\forall x,y \in E : (x,y) = \overline{(y,x)}$$

Цей же скалярний добуток можна визначати над полем $\mathbb{R}$.

Proposition 0.3.2 Властивості скалярного добутку
Задано E – передгільбертів простір. Тоді справедливе наступне:
1) $(0,x) = 0$;
2) $(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}(x,y) + \bar{\mu}(x,z)$
Вправа: довести.

Theorem 0.3.3 Нерівність Коші-Буняковського
Задано E – передгільбертів простір. Тоді $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$.

Proof.
Маємо $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$, де кут $\varphi = \arg(x+iy)$. Розглянемо вираз $(x + te^{i\varphi}y + x + te^{i\varphi}y) \geq 0$, виконано $\forall t \in \mathbb{R}$. Розпишемо ліву частини за властивостями функціоналу - отримаємо:
$(x,x) + (x, te^{i\varphi}y) + (te^{i\varphi}y, x) + (te^{i\varphi}y, te^{i\varphi}y) = (x,x) + \overline{te^{i\varphi}}(x,y) + te^{i\varphi}(y,x) + te^{i\varphi}\overline{te^{i\varphi}}(y,y) \boxed{=}$
Зауважимо, що $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.
$\boxed{=} (x,x) + te^{-i\varphi}(x,y) + te^{i\varphi}(y,x) + t^2(y,y) \boxed{=}$
Далі оскільки $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$, то звідси $e^{-i\varphi}(x,y) = |(x,y)|$.
А також $e^{i\varphi}(y,x) = \overline{e^{-i\varphi}(x,y)} = \overline{|(x,y)|} = |(x,y)|$.
$\boxed{=} (x,x) + 2t|(x,y)| + t^2(y,y) \geq 0$.
$D = 4|(x,y)|^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$, оскільки нерівність завжди виконана.
$\implies |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$. ■

Remark 0.3.4 $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y) \iff y = \alpha x$.

Proposition 0.3.5 Задано E – передгільбертів простір. Тоді E – лінійний нормований простір із нормою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Proof.
1) $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$ – зрозуміло. Також $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \iff (x,x) = 0 \iff x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x,x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda|\|x\|$.
3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq$
$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{\text{нер-ть К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.
$\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

Proposition 0.3.6 Поляризаційна тотожність
Задано E – передгільбертів простір. Тоді
$(x,y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$.

Example 0.3.7 Розглянемо кілька прикладів передгільбертових просторів:
1) $\mathbb{C}^n$, $\qquad (x,y) = \sqrt{x_1\bar{y_1} + \cdots + x_n\bar{y_n}}$, де $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n)$;
2) $C([0,1])$, $\qquad (f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\bar{g}(t)\,dt$.

Definition 0.3.8 Лінійний нормований простір, що є повним, називається **банаховим**.

Definition 0.3.9 Банахів передгільбертів простір називається **гільбертовим**.

Remark 0.3.10 Інколи ще дають такі поняття як **квазіскалярний добуток**. Це той же скалярний добуток, без умови $(x,x) = 0 \iff x = 0$. При цьому нерівність Коші-Буняковського досі буде виконуватися.
Також існує поняття **напівнорма**. Це та же норма, без умови $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Remark 0.3.11 Таким чином, маючи квазіскалярний добуток, то $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задає уже напівнорму.