Функціональний аналіз
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

Definition 0.1.1 Задано E – векторний простір над полем k (у рамках даного курсу переважно будуть поля $\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Векторний простір E буде **топологічним**, якщо

$$1) \text{ задана стандартна топологія на полі } k$$
$$2) \text{ операції } +\colon E\times E\to E \text{ (додавання) та } \cdot\colon k\times E\to E \text{ (множення на скаляр) – неперервні}$$

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення $\mathrm{add}\colon E\times E\to E$ та множення на скаляр за відображення $\mathrm{scalar}\colon k\times E\to E$.
Оберемо будь-яку точку $(x,y)\in E\times E$. Тоді на ній add неперервне, тобто $\forall U$ – відкритий окіл $\mathrm{add}(x,y)$: $\exists V$ – відкритий окіл точки (x,y) : $\mathrm{add}(V)\subset U$. Зауважимо, що для V – відкритого окола (x,y) – існують відкриті околи V_x, V_y, для яких $V_x\times V_y\subset V$. Далі, в нашому випадку $\mathrm{add}(U)=\{\mathrm{add}(x,y)\mid (x,y)\in V\}=\{x+y\mid (x,y)\in V\}\supset\{x'+y'\mid x'\in V_x, y'\in V_y\}\overset{\text{позн.}}{=} V_x+V_y$.

Таким чином, $\forall U_{x+y}$ – відкритий окіл $x+y:\exists V_x,V_y$ – відкриті околи $x,y: V_x+V_y\subset U_{(x,y)}$.
Аналогічно $\forall U_{\lambda x}$ – відкритий окіл $\lambda x:\exists V_\lambda, V_x$ – відкриті околи $\lambda, x: V_\lambda\times V_x\subset U_{\lambda x}$.

Remark 0.1.2 Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.
Дійсно, всі інші околи $U_x\cong U_0$. В одну сторону в нас неперервне відображення $y\mapsto y+x$, а в іншу сторону – теж неперервне $y\mapsto y-x$.

0.2 Лінійні нормовані простори

Definition 0.2.1 Задано E – векторний простір над полем $k=\mathbb{R}$ або $k=\mathbb{C}$.
Лінійним нормованим простором називають векторний простір E над полем k, на якій задається **норма** $\|\cdot\|\colon E\to k$, що задовольняє таким властивостям:

$$1)\forall x\in E:\|x\geq 0\|, \text{при цьому } \|x\|=0 \iff x=0$$
$$2)\forall x\in E:\forall\lambda\in k:\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$$
$$3)\forall x,y\in E:\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Proposition 0.2.2 Якщо E – лінійний нормвований простір, то (E,ρ), де $\rho(x,y)=\|x-y\|$, автоматично утворює метричний простір.

Proof.
1) $\rho(x,y)=\|x-y\|\geq 0$ – перша властивість норми; $\rho(x,y)=\|x-y\|=0\iff x-y=0\iff x=y$;
2) $\rho(y,x)=\|y-x\|=\|(-1)(x-y)\|=|(-1)|\|x-y\|=\rho(x,y)$;
3) $\rho(x,z)=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$. ■

Corollary 0.2.3 Якщо E – лінійний нормований простір, то E – автоматично лінійно топологічний простір.
Задамо просто окіл нуля як $B_0(r)=\{x\in E\mid \|x\|<r\}$.

Proposition 0.2.4 Властивості норми
Задано E – лінійний норований простір. Тоді справедливо наступне:
1) $\|x-y\|\geq|\|x\|-\|y\||$;
2) Нехай задана послідовність $\{x_n, n\geq 1\}\subset E: x_n\to x$. Тоді $\|x_n\|\to\|x\|$ при $n\to\infty$.

Proof.
Дещо я залишу без доведення:

1) *Вказівка:* $\|x\|=\|x-y+y\|$ *та* $\|y\|=\|y-x+x\|$.

2) $x_n\to x$, тобто це означає $\|x_n-x\|\to 0$. Отже, завдяки властивості 1), отримаємо $0\leq|\|x_n\|-\|x\||\leq\|x_n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$. Таким чином, $\|x_n\|\to\|x\|$.

Всі властивості доведені. ■