

Функціональний аналіз  
I курс магістратура, 2 семестр

17 лютого 2024 р.

## 0.1 Деякі вступні слова

Деякі означення зі загальної топології, метричних просторів, лінійної алгебри та теорії міри вважатимуться відомими.

**Definition 0.1.1** Задано  $E$  – векторний простір над полем  $k$  (у рамках даного курсу переважно будуть поля  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ).

Векторний простір  $E$  буде **топологічним**, якщо

- 1) задана стандартна топологія на полі  $k$
- 2) операції  $+: E \times E \rightarrow E$  (додавання) та  $\cdot: k \times E \rightarrow E$  (множення на скаляр) – неперервні

Мабуть, варто розписати детально, що ми матимемо в такому разі. Тимчасово позначу додавання за відображення  $\text{add}: E \times E \rightarrow E$  та множення на скаляр за відображення  $\text{scalar}: k \times E \rightarrow E$ .

Оберемо будь-яку точку  $(x, y) \in E \times E$ . Тоді на ній  $\text{add}$  неперервне, тобто  $\forall U$  – відкритий окіл  $\text{add}(x, y) : \exists V$  – відкритий окіл точки  $(x, y) : \text{add}(V) \subset U$ . Зауважимо, що для  $V$  – відкритого окола  $(x, y)$  – існують відкриті околи  $V_x, V_y$ , для яких  $V_x \times V_y \subset V$ . Далі, в нашому випадку  $\text{add}(U) = \{\text{add}(x, y) \mid (x, y) \in V\} = \{x + y \mid (x, y) \in V\} \supset \{x' + y' \mid x' \in V_x, y' \in V_y\} \stackrel{\text{позн.}}{=} V_x + V_y$ .

Таким чином,  $\forall U_{x+y}$  – відкритий окіл  $x + y : \exists V_x, V_y$  – відкриті околи  $x, y : V_x + V_y \subset U_{(x,y)}$ . Аналогічно  $\forall U_{\lambda x}$  – відкритий окіл  $\lambda x : \exists V_\lambda, V_x$  – відкриті околи  $\lambda, x : V_\lambda \times V_x \subset U_{\lambda x}$ .

**Remark 0.1.2** Для топологічного векторного простору достатньо визначити окіл точки 0.

Дійсно, всі інші околи  $U_x \cong U_0$ . В одну сторону в нас неперервне відображення  $y \mapsto y + x$ , а в іншу сторону – теж неперервне  $y \mapsto y - x$ .

## 0.2 Лінійні нормовані простори

**Definition 0.2.1** Задано  $E$  – векторний простір над полем  $k = \mathbb{R}$  або  $k = \mathbb{C}$ .

**Лінійним нормованим простором** називають векторний простір  $E$  над полем  $k$ , на якій задається **норма**  $\|\cdot\|: E \rightarrow k$ , що задовольняє таким властивостям:

- 1)  $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$ , при цьому  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 2)  $\forall x \in E : \forall \lambda \in k : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3)  $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Proposition 0.2.2** Якщо  $E$  – лінійний нормований простір, то  $(E, \rho)$ , де  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , автоматично утворює метричний простір.

**Proof.**

- 1)  $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$  – перша властивість норми;  $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ ;
- 2)  $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = \rho(x, y)$ ;
- 3)  $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ . ■

**Corollary 0.2.3** Якщо  $E$  – лінійний нормований простір, то  $E$  – автоматично лінійно топологічний простір.

Задамо просто окіл нуля як  $B_0(r) = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$ .