Алгебра Лі
I курс магістратура, 2 семестр

13 лютого 2024 р.

0.1 Означення

Definition 0.1.1 **Алгеброю Лі** назвемо векторний простір L над полем F разом з білінійною формою $[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L$, що задовольняє таким умовам:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in L : [x,x] = 0 \\ 2) & \forall x,y,z \in L : [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \end{array}$$

Остання рівність схожа на **тотожність Якобі** із аналітичної геометрії.

Proposition 0.1.2 $\forall x \in L : [x,x] = 0 \iff \forall x,y \in L : [y,x] = -[x,y]$.
За умовою, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$.
Вправа: довести.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $[x,x] = 0$ для всіх $x \in L$. Оберемо довільні $x,y \in L$, тоді звідси $[x+y,x+y] = 0$ за умовою. Зокрема за властивістю білінійної форми, $[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = 0$. Таким чином, $[y,x] = -[x,y]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $[y,x] = -[x,y]$ для всіх $x,y \in L$. Зокрема якщо $y = x$, то звідси $[x,x] = -[x,x]$. Таким чином, $2[x,x] = 0$, але оскільки $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то ми отримаємо $[x,x] = 0$. ■

Example 0.1.3 Розглянемо векторний простір $\mathbb{R}^3$. Тоді векторний добуток, що задається як $[\vec{x},\vec{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, встановлює алгебру Лі. Інколи векторний добуток позначають $\vec{x} \wedge \vec{y}$, алгебру Лі позначають тут $\mathbb{R}^3_\wedge$.
Зрозуміло, що в цьому випадку $[\vec{x},\vec{x}] = \vec{0}$, за наишм означенням.
Із курса аналітичної геометрії, ми доводили так звану формулу "бац мінус цаб". Завдяки неї, там же ми отримали тотожність Якобі, тобто $[\vec{x},[\vec{y},\vec{z}]] = [\vec{y},[\vec{z},\vec{x}]] + [\vec{z},[\vec{x},\vec{y}]] = \vec{0}$.

Example 0.1.4 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}_n(F)$ – векторний простір всіх матриць $n \times n$, елементи яких над полем F, де білінійна форма визначається таким чином: $[A,B] = AB - BA$.
Тоді це утворює алгебру Лі. Вона має особливу назву – **загальна лінійна алгебра Лі**.
$[A,A] = O$ – це зрозуміло.
$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] =$
$= (A(BC - CB) - (BC - CB)A) + (B(CA - AC) - (CA - AC)B) + (C(AB - BA) - (AB - BA)C) =$
$= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = O$.

Example 0.1.5 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}(V)$ – векторний простір всіх лінійних відображень $V \to V$, де V – векторний простір над полем F. Білінійну форму визначимо аналогічно: $[U,W] = UW - WU$.
Тоді це утворює алгебру Лі (аналогічним чином, що з матрицею). Це теж називають **загальною лінійною алгеброю Лі**.

0.2 Підалгебра Лі, ідеал

Definition 0.2.1 Задано L – алгебра Лі та K – підпростір векторного простору L над F.
Тоді K називається **підалгеброю Лі**, якщо

$$\forall x,y \in K : [x,y] \in K$$

Definition 0.2.2 Задано L – алгебра Лі та підалгебра Лі I.
Тоді I називається **ідеалом**, якщо

$$\forall x \in L, \forall i \in I : [i,x] \in I$$

Це схоже на означення ідеала в кільці. Коротко можна записати як $[I,L] \subset I$. Оскільки нам відомо, що $[x,y] = -[y,x]$ (при $\mathrm{char}\, F \neq 2$), то нам не обов'язково визначати так звані ліві та праві ідеали.

Example 0.2.3 Розглянемо множину $\mathfrak{sl}(F) = \{A \in \mathfrak{gl}(F) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Цілком зрозуміло, що $\mathfrak{sl}(F)$ буде підпростором векторного простору $\mathfrak{gl}(F)$. Але до того ж $\mathfrak{sl}(F)$ – підалгебра Лі.
Дійсно, нехай $A,B \in \mathfrak{sl}(F)$. Ми хочемо $[A,B] \in \mathfrak{sl}(F)$, тобто $AB - BA \in \mathfrak{sl}(F)$, для цього перевіримо слід цієї матриці. Справді,
$\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(-BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0$.
Зазначу хіба що: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ легітимна рівність, бо все одно ми множимо матриці однієї розмірності.

Example 0.2.4 $\mathfrak{sl}_n(F)$ – ідеал $\mathfrak{gl}_n(F)$.

Example 0.2.5 $\mathfrak{b}_n(F)$ – множина верхньотрикутних матриць – теж підалгебра Лі $\mathfrak{gl}_n(F)$. При цьому при $n \geq 2$ простір $\mathfrak{b}_n(F)$ не буде ідеалом $\mathfrak{gl}_n(F)$.

Оберемо дві матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_2(F)$ та $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(F)$. Якщо взяти їхню білінійну форму, отримаємо $[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{b}_n(F)$.

Example 0.2.6 $\mathfrak{n}_n(F)$ – множина строго верхньотрикутних матриць (тобто коли на головній діагоналі елементи нулеві) – ідеал $\mathfrak{b}_n(F)$.

Definition 0.2.7 Задано L – алгебра Лі.
Центром алгебри Лі називають таку множину:

$$Z(L) = \{z \in L \mid [x, z] = 0, \forall x \in L\}$$

Proposition 0.2.8 $Z(L)$ – ідеал L.

Proof.
Варто спочатку довести, що $Z(L)$ буде підпростором L, але це просто.
Доведемо, що $Z(L)$ буде підалгеброю Лі. Маємо $y_1, y_2 \in L$, тобто $[x, y_1] = 0, [x, y_2] = 0$ для всіх $x \in L$. Нам треба довести, що $[y_1, y_2] \in L$, тобто $[x, [y_1, y_2]] = 0$ для всіх $x \in L$.
За тотожністю Якобі, $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, [y_2, x]] + [y_2, [x, y_1]] = 0$. Маючи умови вище, ми отримаємо $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, 0] + [y_2, 0] = 0 \implies [x, [y_1, y_2]] = 0$.
Тепер доведемо, що $Z(L)$ буде ідеалом. Маємо $y_1 \in Z(L)$ та $y_2 \in L$. Хочемо, щоб $[y_1, y_2] \in Z(L)$.
За тотожністю Якобі, $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, [y_2, x]] + [y_2, [y_1, x]] = 0$. Оскільки $y_1 \in Z(L)$, то звідси $[y_1, y_2] = 0$, а також $[y_1, [y_2, x]] = 0$. Разом отримали $[x, [y_1, y_2]] = 0$. ■

0.3 Гомоморфізм

Definition 0.3.1 Задані L_1, L_2 – дві алгебра Лі над одним полем F.
Відображення $\varphi \colon L_1 \to L_2$ називається **гомоморфізмом**, якщо

$$\varphi \text{ – лінійне відображення}$$
$$\forall x, y \in L_1 : \varphi([x, y]_{L_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L_2}$$

Тут я підкреслив, що дужки Лі різні зліва та справа у рівності.

Definition 0.3.2 Гомоморфізм φ алгебр Лі називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\varphi \text{ – бієктивне відображення}$$

Definition 0.3.3 Нагадування
Ядром гомоморфізма φ називають множину

$$\ker \varphi = \{x \in L_1 \mid \varphi(x) = 0\}$$

Образом гомоморфізма φ називають множину

$$\operatorname{Im} \varphi = \{y \in L_2 \mid \exists x \in L_1 : y = \varphi(x)\}$$

Proposition 0.3.4 Задано $\varphi \colon L_1 \to L_2$ – гомоморфізм між двома алгебрами Лі над одним полем F. Тоді $\ker \varphi$ – ідеал L_1 та $\operatorname{Im} \varphi$ – підалгебра Лі L_2.