

Алгебра Лі
І курс магістратура, 2 семестр

13 лютого 2024 р.

0.1 Означення

Definition 0.1.1 Алгеброю Лі назвемо векторний простір L над полем F разом з білінійною формою $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$, що задовольняє таким умовам:

- 1) $\forall x \in L: [x, x] = 0$
- 2) $\forall x, y, z \in L: [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Остання рівність схожа на **тотожність Якобі** із аналітичної геометрії.

Proposition 0.1.2 $\forall x \in L: [x, x] = 0 \iff \forall x, y \in L: [y, x] = -[x, y]$.

За умовою, що $\text{char}(F) \neq 2$.

Вправа: довести.

Proof.

\Rightarrow Дано: $[x, x] = 0$ для всіх $x \in L$. Оберемо довільні $x, y \in L$, тоді звідси $[x + y, x + y] = 0$ за умовою. Зокрема за властивістю білінійної форми, $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$. Таким чином, $[y, x] = -[x, y]$.

\Leftarrow Дано: $[y, x] = -[x, y]$ для всіх $x, y \in L$. Зокрема якщо $y = x$, то звідси $[x, x] = -[x, x]$. Таким чином, $2[x, x] = 0$, але оскільки $\text{char}(F) \neq 2$, то ми отримаємо $[x, x] = 0$. ■

Example 0.1.3 Розглянемо векторний простір \mathbb{R}^3 . Тоді векторний добуток, що задається як $[\vec{x}, \vec{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, встановлює алгебру Лі. Інколи векторний добуток позначають $\vec{x} \wedge \vec{y}$, алгебру Лі позначають тут \mathbb{R}_\wedge^3 .

Зрозуміло, що в цьому випадку $[\vec{x}, \vec{x}] = \vec{0}$, за нашім означенням.

Із курсу аналітичної геометрії, ми доводили так звану формулу "бац мінус цаб". Завдяки неї, там же ми отримали тотожність Якобі, тобто $[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] = [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] = \vec{0}$.

Example 0.1.4 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}_n(F)$ – векторний простір всіх матриць $n \times n$, елементи яких над полем F , де білінійна форма визначається таким чином: $[A, B] = AB - BA$.

Тоді це утворює алгебру Лі. Вона має особливу назву – **загальна лінійна алгебра Лі**.

$[A, A] = O$ – це зрозуміло.

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\ &= (A(BC - CB) - (BC - CB)A) + (B(CA - AC) - (CA - AC)B) + (C(AB - BA) - (AB - BA)C) = \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = O. \end{aligned}$$

Example 0.1.5 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}(V)$ – векторний простір всіх лінійних відображень $V \rightarrow V$, де V – векторний простір над полем F . Білінійну форму визначимо аналогічно: $[U, W] = UW - WU$. Тоді це утворює алгебру Лі (аналогічним чином, що з матрицею). Це теж називають **загальною лінійною алгеброю Лі**.

0.2 Підалгебра Лі, ідеал

Definition 0.2.1 Задано L – алгебра Лі та K – підпростір векторного простору L над F .

Тоді K називається **підалгеброю Лі**, якщо

$$\forall x, y \in K: [x, y] \in K$$

Definition 0.2.2 Задано L – алгебра Лі та підалгебра Лі I .

Тоді I називається **ідеалом**, якщо

$$\forall x \in L, \forall i \in I: [i, x] \in I$$

Це схоже на означення ідеала в кільці. Коротко можна записати як $[I, L] \subset I$. Оскільки нам відомо, що $[x, y] = -[y, x]$ (при $\text{char } F \neq 2$), то нам не обов'язково визначати так звані ліві та праві ідеали.

Example 0.2.3 Розглянемо множину $\mathfrak{sl}(F) = \{A \in \mathfrak{gl}(F) \mid \text{tr}(A) = 0\}$. Цілком зрозуміло, що $\mathfrak{sl}(F)$ буде підпростором векторного простору $\mathfrak{gl}(F)$. Але до того ж $\mathfrak{sl}(F)$ – підалгебра Лі.

Дійсно, нехай $A, B \in \mathfrak{sl}(F)$. Ми хочемо $[A, B] \in \mathfrak{sl}(F)$, тобто $AB - BA \in \mathfrak{sl}(F)$, для цього перевіримо слід цієї матриці. Справді,

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(-BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0.$$

Зазначу хіба що: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ легітимна рівність, бо все одно ми множимо матриці однієї розмірності.

Example 0.2.4 $\mathfrak{sl}_n(F)$ – ідеал $\mathfrak{gl}_n(F)$.

Example 0.2.5 $\mathfrak{b}_n(F)$ – множина верхньотрикутних матриць – теж підалгебра Лі $\mathfrak{gl}_n(F)$. При цьому при $n \geq 2$ простір $\mathfrak{b}_n(F)$ не буде ідеалом $\mathfrak{gl}_n(F)$.

Оберемо дві матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_2(F)$ та $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(F)$. Якщо взяти їхню білінійну форму, отримаємо $[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{b}_n(F)$.

Example 0.2.6 $\mathfrak{n}_n(F)$ – множина строго верхньотрикутних матриць (тобто коли на головній діагоналі елементи нулеві) – ідеал $\mathfrak{b}_n(F)$.

Definition 0.2.7 Задано L – алгебра Лі.

Центром алгебри Лі називають таку множину:

$$Z(L) = \{z \in L \mid [x, z] = 0, \forall x \in L\}$$

Proposition 0.2.8 $Z(L)$ – ідеал L .

Proof.

Варто спочатку довести, що $Z(L)$ буде підпростором L , але це просто.

Доведемо, що $Z(L)$ буде підалгеброю Лі. Маємо $y_1, y_2 \in L$, тобто $[x, y_1] = 0, [x, y_2] = 0$ для всіх $x \in L$. Нам треба довести, що $[y_1, y_2] \in L$, тобто $[x, [y_1, y_2]] = 0$ для всіх $x \in L$.

За тотожністю Якобі, $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, [y_2, x]] + [y_2, [x, y_1]] = 0$. Маючи умови вище, ми отримаємо $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, 0] + [y_2, 0] = 0 \implies [x, [y_1, y_2]] = 0$.

Тепер доведемо, що $Z(L)$ буде ідеалом. Маємо $y_1 \in Z(L)$ та $y_2 \in L$. Хочемо, щоб $[y_1, y_2] \in Z(L)$.

За тотожністю Якобі, $[x, [y_1, y_2]] + [y_1, [y_2, x]] + [y_2, [y_1, x]] = 0$. Оскільки $y_1 \in Z(L)$, то звідси $[y_1, y_2] = 0$, а також $[y_1, [y_2, x]] = 0$. Разом отримали $[x, [y_1, y_2]] = 0$. ■

0.3 Гомоморфізм

Definition 0.3.1 Задані L_1, L_2 – дві алгебри Лі над одним полем F .

Відображення $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ називається **гомоморфізмом**, якщо

$$\begin{aligned} &\varphi - \text{лінійне відображення} \\ &\forall x, y \in L_1 : \varphi([x, y]_{L_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L_2} \end{aligned}$$

Тут я підкреслив, що дужки Лі різні зліва та справа у рівності.

Definition 0.3.2 Гомоморфізм φ алгебри Лі L називається **ізоморфізмом**, якщо

$$\varphi - \text{бієктивне відображення}$$