Алгебра Лі
I курс магістратура, 2 семестр

13 лютого 2024 р.

0.1 Означення

Definition 0.1.1 **Алгеброю Лі** назвемо векторний простір L над полем F разом з білінійною формою $[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L$, що задовольняє таким умовам:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in L : [x,x] = 0 \\ 2) & \forall x,y,z \in L : [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \end{array}$$

Остання рівність схожа на **тотожність Якобі** із аналітичної геометрії.

Proposition 0.1.2 $\forall x \in L : [x,x] = 0 \iff \forall x,y \in L : [y,x] = -[x,y]$.
За умовою, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$.
Вправа: довести.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $[x,x] = 0$ для всіх $x \in L$. Оберемо довільні $x,y \in L$, тоді звідси $[x+y,x+y] = 0$ за умовою. Зокрема за властивістю білінійної форми, $[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = 0$. Таким чином, $[y,x] = -[x,y]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $[y,x] = -[x,y]$ для всіх $x,y \in L$. Зокрема якщо $y = x$, то звідси $[x,x] = -[x,x]$. Таким чином, $2[x,x] = 0$, але оскільки $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то ми отримаємо $[x,x] = 0$. ■

Example 0.1.3 Розглянемо векторний простір $\mathbb{R}^3$. Тоді векторний добуток, що задається як $[\vec{x},\vec{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, встановлює алгебру Лі. Інколи векторний добуток позначають $\vec{x} \wedge \vec{y}$, алгебру Лі позначають тут $\mathbb{R}^3_\wedge$.
Зрозуміло, що в цьому випадку $[\vec{x},\vec{x}] = \vec{0}$, за наишм означенням.
Із курса аналітичної геометрії, ми доводили так звану формулу "бац мінус цаб". Завдяки неї, там же ми отримали тотожність Якобі, тобто $[\vec{x},[\vec{y},\vec{z}]] = [\vec{y},[\vec{z},\vec{x}]] + [\vec{z},[\vec{x},\vec{y}]] = \vec{0}$.

Example 0.1.4 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}_n(F)$ – векторний простір всіх матриць $n \times n$, елементи яких над полем F, де білінійна форма визначається таким чином: $[A,B] = AB - BA$.
Тоді це утворює алгебру Лі. Вона має особливу назву – **загальна лінійна алгебра Лі**.
$[A,A] = O$ – це зрозуміло.
$$\begin{aligned} &[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\ &= (A(BC-CB) - (BC-CB)A) + (B(CA-AC) - (CA-AC)B) + (C(AB-BA) - (AB-BA)C) = \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = O. \end{aligned}$$

Example 0.1.5 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}(V)$ – векторний простір всіх лінійних відображень $V \to V$, де V – векторний простір над полем F. Білінійну форму визначимо аналогічно: $[U,W] = UW - WU$.
Тоді це утворює алгебру Лі (аналогічним чином, що з матрицею). Це теж називають **загальною лінійною алгеброю Лі**.

0.2 Підалгебра Лі, ідеал

Definition 0.2.1 Задано L – алгебра Лі та K – підпростір векторного простору L над F.
Тоді K називається **підалгеброю Лі**, якщо

$$\forall x,y \in K : [x,y] \in K$$

Definition 0.2.2 Задано L – алгебра Лі та підалгебра Лі I.
Тоді I називається **ідеалом**, якщо

$$\forall x \in L, \forall i \in I : [i,x] \in I$$

Це схоже на означення ідеала в кільці. Коротко можна записати як $[I,L] \subset I$. Оскільки нам відомо, що $[x,y] = -[y,x]$ (при $\mathrm{char}\, F \neq 2$), то нам не обов'язково визначати так звані ліві та праві ідеали.