

Алгебра Лі
І курс магістратура, 2 семестр

13 лютого 2024 р.

0.1 Означення

Definition 0.1.1 Алгеброю Лі назвемо векторний простір L над полем F разом з білінійною формою $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$, що задовольняє таким умовам:

- 1) $\forall x \in L: [x, x] = 0$
- 2) $\forall x, y, z \in L: [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Остання рівність схожа на **тотожність Якобі** із аналітичної геометрії.

Proposition 0.1.2 $\forall x \in L: [x, x] = 0 \iff \forall x, y \in L: [y, x] = -[x, y]$.

За умовою, що $\text{char}(F) \neq 2$.

Вправа: довести.

Proof.

\Rightarrow Дано: $[x, x] = 0$ для всіх $x \in L$. Оберемо довільні $x, y \in L$, тоді звідси $[x + y, x + y] = 0$ за умовою. Зокрема за властивістю білінійної форми, $[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$. Таким чином, $[y, x] = -[x, y]$.

\Leftarrow Дано: $[y, x] = -[x, y]$ для всіх $x, y \in L$. Зокрема якщо $y = x$, то звідси $[x, x] = -[x, x]$. Таким чином, $2[x, x] = 0$, але оскільки $\text{char}(F) \neq 2$, то ми отримуємо $[x, x] = 0$. ■

Example 0.1.3 Розглянемо векторний простір \mathbb{R}^3 . Тоді векторний добуток, що задається як $[\vec{x}, \vec{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, встановлює алгебру Лі. Інколи векторний добуток позначають $\vec{x} \wedge \vec{y}$, алгебру Лі позначають тут \mathbb{R}_\wedge^3 .

Зрозуміло, що в цьому випадку $[\vec{x}, \vec{x}] = \vec{0}$, за напшм означенням.

Із курсу аналітичної геометрії, ми доводили так звану формулу "бац мінус цаб". Завдяки неї, там же ми отримали тотожність Якобі, тобто $[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] = [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] = \vec{0}$.

Example 0.1.4 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}_n(F)$ – векторний простір всіх матриць $n \times n$, елементи яких над полем F , де білінійна форма визначається таким чином: $[A, B] = AB - BA$.

Тоді це утворює алгебру Лі. Вона має особливу назву – **загальна лінійна алгебра Лі**.

$[A, A] = O$ – це зрозуміло.

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\ &= (A(BC - CB) - (BC - CB)A) + (B(CA - AC) - (CA - AC)B) + (C(AB - BA) - (AB - BA)C) = \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = O. \end{aligned}$$

Example 0.1.5 Розглянемо множину $\mathfrak{gl}(V)$ – векторний простір всіх лінійних відображень $V \rightarrow V$, де V – векторний простір над полем F . Білінійну форму визначимо аналогічно: $[U, W] = UW - WU$. Тоді це утворює алгебру Лі (аналогічним чином, що з матрицею). Це теж називають **загальною лінійною алгеброю Лі**.