Алгебра Лі
I курс магістратура, 2 семестр

13 лютого 2024 р.

0.1 Означення

Definition 0.1.1 Алгеброю Лі назвемо векторний простір L над полем F разом з білінійною формою $[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L$, що задовольняє таким умовам:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in L : [x,x] = 0 \\ 2) & \forall x,y,z \in L : [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \end{array}$$

Остання рівність схожа на **тотожність Якобі** із аналітичної геометрії.

Proposition 0.1.2 $\forall x \in L : [x,x] = 0 \iff \forall x,y \in L : [y,x] = -[x,y]$.
За умовою, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$.
Вправа: довести.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $[x,x] = 0$ для всіх $x \in L$. Оберемо довільні $x,y \in L$, тоді звідси $[x+y,x+y] = 0$ за умовою. Зокрема за властивістю білінійної форми, $[x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = 0$. Таким чином, $[y,x] = -[x,y]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $[y,x] = -[x,y]$ для всіх $x,y \in L$. Зокрема якщо $y = x$, то звідси $[x,x] = -[x,x]$. Таким чином, $2[x,x] = 0$, але оскільки $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то ми отримаємо $[x,x] = 0$. ■