Національна академія наук України
Міністерство освіти і науки України
Державна наукова установа «Київський академічний університет»

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри математики,
доктор фіз.-мат. наук
Вячеслав БОЙКО
«___» травня 2025 р.

Лобанов Денис Артемович

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»
Спеціальність 111 «Математика»

Тема: «Опис кубічних кілець зі скінченним числом незвідних зображень»

Засвідчую, що кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _______ Д.А. ЛОБАНОВ

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
Дрозд Юрій Анатолійович
____

Київ — 2025

Анотація

Лобанов Д.А., **Опис кубічних кілець зі скінченним числом незвідних зображень**, Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «магістр» за спеціальністю 111 Математика, Київський академічний університет, Київ, 2025, ?? с., ?? джерел.

???Текст анотації???

MSC: ???????

Ключові слова: ???????

Abstract

LastName N.S., **?????????**, Master Thesis, speciality 111 Mathematics. – Kyiv Academic University, Kyiv, 2025, ?? pages, ?? references.

??????

MCS: ???????

Key words: ???????

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{Z}$	кільце цілих чисел
Λ	кубічне кільце
f	кубічна форма (індекс-форма) кільця
Δ	дискримінант кубічної форми
G	група Лі
$\mathfrak{g}$	алгебра Лі
Q	оператор однопараметричної групи Лі
$\mathbb{R}^n$	n-вимірний евклідів простір
$X \simeq \mathbb{R}^n$	простір незалежних змінних $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$
$U \simeq \mathbb{R}^m$	простір залежних змінних $u = \big(u^1, u^2, \ldots, u^m\big)$
$u_i^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$	частинна похідна від залежної змінної u^α за незалежною змінною x^i
D_i	оператор повної похідної за змінною x^i
$\underset{r}{Q}$	r-те продовження оператора Q
I	набір інваріантів нульового порядку
$I_{(r)}$	набір інваріантів r-го порядку, $r \geq 1$

Вступ

?????????? [1, 2, 5]

Розділ 1

Максимальне кубічне кільце

1.1. Попередні відомості про кубічні кільця

Необхідно пригадати важливі означення та результати.

Означення 1.1. Кубічним кільцем Λ називають вільний $\mathbb{Z}$-модулем рангу 3.

Зауваження 1.2. Розглянемо базис $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ кубічного кільця Λ. Тоді ми можемо завжди обрати базис так, щоб перший елемент був 1. Тому надалі обирамємо базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$.

Означення 1.3. Базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ кубічного кільця Λ називається **нормальним**, якщо

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathbb{Z}$$

Зауваження 1.4. Зафіксуємо базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ кільця Λ. Тоді $\omega_1 \cdot \omega_2 = k\omega_1 + l\omega_2 + m$ при $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Замінивши ω_1 на $\omega_1 - l$ та ω_2 на $\omega_2 - k$, отримуємо нормальний базис $\{1, \omega_1 - l, \omega_2 - k\}$. Отже, надалі всі базиси в кубічних кільцях – нормальні.

Запишемо таблицю множення для базиса $\{1, \omega_1, \omega_2\}$:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= b\omega_1 + a\omega_2 + r \\
\omega_1\omega_2 &= s \\
\omega_2^2 &= d\omega_1 + c\omega_2 + t
\end{aligned}$$

Прирівнявши $(\omega_1^2)\cdot\omega_2 = \omega_1\cdot(\omega_1\cdot\omega_2)$ та $\omega_1\cdot(\omega_2^2) = (\omega_1\cdot\omega_2)\cdot\omega$, отримуємо співвідношення $r = -ac,\ \ s = ad,\ \ t = -bd$. Отже, таблиця множення задається чотирма числами $a, b, c, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= b\omega_1 + a\omega_2 - ac \\ \omega_1\omega_2 &= ad \\ \omega_2^2 &= d\omega_1 + c\omega_2 + -bd \end{aligned}$$

Означення 1.5. Ступінчастий базис відносно ω кубічного кільця Λ має вигляд:

$$\left\{1,\ \frac{u\omega+v}{\Delta},\ \frac{\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu}{\Delta}\right\},$$

де $u, v, \lambda, \mu, \nu, \Delta \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.6. *Нехай ρ – ціле число, що задовольняє рівняння $F(\rho) = \rho^3 - s\rho^2 - q\rho - n = 0$. Нехай $\delta, a, \Delta_\Lambda, t \in \mathbb{Z}$ задовольняють такі умови:*

$$\Delta = \delta^6 a^2 \Delta_\Lambda$$

$$\frac{1}{2}F''(t) \equiv 0 \pmod{\delta}, \quad F'(t) \equiv 0 \pmod{\delta^2 a}, \quad F(t) \equiv 0 \pmod{\delta^3 a^2}$$

Тоді система $\left\{1,\ \frac{\rho-t}{\delta},\ \frac{\rho^2+(t-s)\rho+(t^2-st+q)}{\delta^2 a}\right\}$ *– нормальний та ступінчастий базис відносно ρ.*

1.2. Критерій максимальності кільця

Теорема 1.7. *Кільце Λ – не максимальне $\iff$ існує такий цілий елемент θ, що $\theta \notin \Lambda$.*

Варто відповісти на питання, що означає, що θ – цілий елемент. Розглянемо оператор множення на θ (тобто $\lambda \mapsto \theta\lambda$). Запишемо матрицю $[\theta]$ оператора множення. Розглянемо характеристичний многочлен $\chi_{[\theta]}(t)$ даної матриці. Тоді θ називають **цілим**, якщо коефіцієнти характеристичного многочлен χ – цілі числа.

Нагадаємо, що для випадку матриці 3×3 характеристичний многочлен має вигляд

$$\chi_{[\theta]}(t) = \det[\theta] - M_{2\times 2}[\theta] \cdot t + \mathrm{tr}[\theta]t^2 - t^3,$$

де

$$M_{2\times 2}[\theta] = M_{12}^{12}[\theta] + M_{13}^{13}[\theta] + M_{23}^{23}[\theta]$$

Розглянемо випадок, коли $\theta = \dfrac{\alpha + \beta\omega_1}{p}$. Знайдемо матрицю $[\theta]$ оператора множення в базисі $\{1, \omega_1, \omega_2\}$.

$$\theta \cdot 1 = \frac{\alpha + \beta\omega_1 p}{p} = \frac{\alpha}{p} \cdot 1 + \frac{\beta}{p}\omega_1 + 0 \cdot \omega_2$$

$$\begin{aligned}\theta \cdot \omega_1 = \frac{\alpha + \beta\omega_1}{p} \cdot \omega_1 = \frac{\alpha\omega_1}{p} + \frac{\beta(-ac + b\omega_1 + a\omega_2)}{p} = \\ = \frac{-\beta ac}{p} \cdot 1 + \frac{\alpha + \beta b}{p} \cdot \omega_1 + \frac{\beta a}{p} \cdot \omega_2\end{aligned}$$

$$\theta \cdot \omega_2 = \frac{\alpha + \beta\omega_1}{p} \cdot \omega_2 = \frac{\alpha\omega_2 + \beta ad}{p} = \frac{\beta ad}{p} \cdot 1 + 0 \cdot \omega_1 + \frac{\alpha}{p} \cdot \omega_2$$

Зібравши всі коефіцієнти, отримуємо такий вигляд матриці:

$$[\theta] = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta ac & \beta ad \\ \beta & \alpha + \beta b & 0 \\ 0 & \beta a & \alpha \end{pmatrix}$$

Оскільки наша мета – це θ бути цілим, треба вимагати, щоб характеристичний многочлен мав цілі коефіцієнти. Зокрема необхідно розглянути $\mathrm{tr}[\theta]$, $\det[\theta]$, а також $M_{2\times 2}[\theta]$.

$$\mathrm{tr}[\theta] = \frac{1}{p}(3\alpha + \beta b)$$

$$\det[\theta] = \frac{1}{p^3}\left(\alpha^3 + \alpha^2\beta b + \beta^3 a^2 d + \alpha\beta^2 ac\right)$$

Детальніше розпишемо знаходження $M_{2\times 2}[\theta]$. Маємо

$$\begin{aligned} M_{2\times2}[\theta] &= M_{12}^{12}[\theta] + M_{13}^{13}[\theta] + M_{23}^{23}[\theta] = \\ &= \frac{1}{p^2}\det\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\alpha c\\ \beta & \alpha+\beta b\end{pmatrix} + \frac{1}{p^2}\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta a\alpha\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} + \frac{1}{p^2}\det\begin{pmatrix}\alpha+\beta b & 0\\ \beta a & \alpha\end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{p^2}\left(\alpha^2 + \alpha\beta b + \beta^2\alpha c + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha\beta b\right) = \\ &= \frac{1}{p^2}\left(3\alpha^2 + \beta^2 ac + 2\alpha\beta b\right) \end{aligned}$$

Наша вимога – це $\mathrm{tr}[\theta],\ \det[\theta],\ M_{2\times2}[\theta] \in \mathbb{Z}$. Запишемо умову в термінах конгруентних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha^2\beta b + \beta^3 a^2 d + \alpha\beta^2 ac & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ 3\alpha^2 + \beta^2 ac + 2\alpha\beta b & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3\alpha + \beta b & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}. \tag{1.1}$$

Припускаючи, що p – просте число та $\alpha \neq 0$, ми можемо підібрати елемент α^{-1} – оборотний елемент класу лишків $\mathbb{Z}_p$ відносно множення. Третє, друге, перше рівняння домножуємо на відповідно $\alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3}$ – отримуємо наступне:

$$\begin{cases} 1 + (\beta\alpha^{-1})b + (\beta\alpha^{-1})^3 a^2 d + (\beta\alpha^{-1})^2 ac & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ 3 + ((\beta\alpha^{-1})^2 ac + 2(\beta\alpha^{-1})b & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3 + (\beta\alpha^{-1})b & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}.$$

Проведемо заміну:

$$t = \beta\alpha^{-1} \tag{1.2}$$

Задача звелась до розв'язання системи конгруентних рівнянь відносно t, якщо p – просте число:

$$\begin{cases} a^2 d t^3 + act^2 + bt + 1 & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ act^2 + 2bt + 3 & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3 + bt & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}. \tag{1.3}$$

1.3. Розв'язання системи конгруентних рівнянь

1.3.1. Випадок, коли p – просте число, причому $p > 3$. Маємо рівняння

$$bt \equiv p - 3 \pmod{p}.$$

Дане рівняння має розв'язок $\iff$ $\gcd(b, p) \mid p - 3$. Оскільки p – просте, то $\gcd(b, p) \in \{1, p\}$. Якби $\gcd(b, p) = p$, то отримали би $p \mid p - 3$ – неможливо.

Отже, якщо $p \nmid b$, то вищезгадане рівняння має розв'язок. При цьому оскільки $\gcd(b, p) = 1$, то рівняння має лише єдиний розв'язок вигляду

$$t \equiv -3b^{-1} \pmod{p}$$

Єдиний можливий розв'язок необхідно підставити в інші два рівняння системи. Для початку піднімемо розв'язок до $\pmod{p^2}$ – отримуємо наступне:

$$t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2},$$

де $k \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$. Щойно отримане t підставимо в друге рівняння:

$$\begin{aligned} act^2 + 2bt + 3 &\equiv ac(-3b^{-1} + kp)^2 + 2b(-3b^{-1} + kp) + 3 \\ &\equiv ac(k^2p^2 - 6kpb^{-1} + 9b^{-2}) + 2b(kp - 3b^{-1}) + 3 \\ &\equiv -6kpacb^{-1} + 9acb^{-2} + 2bkp - 3 \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Домножимо обидві частини на b^2 – отримуємо:

$$\begin{aligned} -6kpabc + 9ac + 2b^3kp - 3b^2 &\equiv 2bkp(b^2 - 3ac) - 3(b^2 - 3ac) \\ &\equiv (b^2 - 3ac)(2bkp - 1) \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\gcd(2bkp - 1, p^2) = 1$, тому можемо скоротити рівняння:

$$b^2 - 3ac \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Отже, якщо $p \nmid b$, а також $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$, то наш єдиний розв'язок задовольняє систему із останніх двох рівнянь. Причому $t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2}$ не залежить від параметру k.

Зробимо аналогічно для першого рівняння системи, тільки замість $\pmod{p^3}$ розглядається $\pmod{p^2}$ – маємо:

$$\begin{aligned}
&a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 \\
&\equiv a^2d(-3b^{-1} + kp)^3 + ac(-3b^{-1} + kp)^2 + b(-3b^{-1} + kp) + 1 \\
&\equiv a^2d(-27b^{-3} + 27kpb^{-2}) + ac(9b^{-2} - 6b^{-1}kp) + b(-3b^{-1} + kp) + 1 \\
&\hfill \equiv 0 \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

Домножимо обидві частини рівності на b^{-3} – із урахуванням рівності $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&a^2d(-27 + 27kpb) + ac(9b - 6b^2kp) + b^4(-3b^{-1} + kp) + b^3 \\
&\equiv -27a^2d + 27a^2bdkp + 9abc - 6ab^2ckp - 3b^3 + b^4kp + b^3 \\
&\equiv -27a^2d + 27a^2bdkp + 3b^3 - 2b^4kp - 3b^3 + b^4kp + b^3 \\
&\equiv -27a^2d(1-bkp)+b^3(1-bkp) \equiv (1-bkp)(b^3-27a^2d) \equiv 0 \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\gcd(1 - bkp, p^2) = 1$, тому можемо скоротити рівняння:

$$b^3 - 27a^2d \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Нарешті, розглянемо перше рівняння:

$$a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 \equiv 0 \pmod{p^3}$$

Оскільки $t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2}$ буде розв'язком системи останніх двох рівнянь при вищезгаданих умов, причому нема залежності від k, то для спрощення оберемо $t \equiv -3b^{-1} \pmod{p^2}$. Піднімемо це рівняння до $\pmod{p^3}$ – отримуємо наступне:

$$t \equiv -3b^{-1} + lp^2 \pmod{p^3},$$

де $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Щойно отримане t підставимо в перше рівняння:

$$\begin{aligned}
&a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 \\
&\equiv a^2d(-3b^{-1} + lp^2)^3 + ac(-3b^{-1} + lp^2)^2 + b(-3b^{-1} + lp^2) + 1 \\
&\equiv a^2d(-27b^{-3} + 27b^{-2}lp^2) + ac(9b^{-2} - 6lb^{-1}p^2) + b(-3b^{-1} + lp^2) + 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv 0 \pmod{p^3}
\end{aligned}$$

Домножимо обидві частини рівності на b^3 – отримуємо:

$$\begin{aligned}
&a^2d(-27 + 27blp^2) + ac(9b - 6lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv 0 \pmod{p^3}
\end{aligned}$$

Пригадаємо, що необхідно $b^2 \equiv ac \pmod{p^2}$, а також $27a^2d \equiv b^3 \pmod{p^2}$. Підмінаючи до $\pmod{p^3}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
3ac &\equiv b^2 + \xi p^2 \pmod{p^3} \\
27a^2d &\equiv b^3 + \eta p^2 \pmod{p^3},
\end{aligned}$$

де $\xi, \eta \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Внаслідок чого

$$\begin{aligned}
&27a^2d(-1 + blp^2) + 3ac(3b - 2lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\
&\equiv (b^3 + \eta p^2)(-1 + blp^2) + (b^2 + \xi p^2)(3b - 2lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\
&\equiv -b^3 + b^4lp^2 - \eta p^2 + 3b^3 - 2b^4lp^2 + 3\xi p^2b - 3b^3 + b^4lp^2 + b^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv -\eta p^2 + 3\xi p^2b \equiv 0 \pmod{p^3}
\end{aligned}$$

Отже, ми отримали наступне:

$$\eta p^2 \equiv 3\xi p^2 b \pmod{p^3}$$

Тоді зауважимо, що

$$27a^2d \equiv b^3 + \eta p^2 \equiv b^3 + 3\xi p^2b \equiv b^3 + 3b(3ac - b^2) \equiv -2b^3 + 9abc \pmod{p^3}$$

Підсумуємо:

Лема 1.8. *Нехай $p > 3$ – просте число. Відомо, що $p \nmid b$, $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$, а також $27a^2d \equiv 9abc - 2b^3 \pmod{p^3}$. Тоді система конгруентних рівнянь (1.5) має єдиний розв'язок $t \equiv -3b^{-1} \pmod{p^3}$.*

Пригадаємо, що кубічному кільцю відповідає кубічна форма, дискримінант якої обчислюється за формулою

$$\Delta = b^2c^2 - 4c^3a - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2 \tag{1.4}$$

Сприймаючи дискримінант за функцію від чотирьох змінних, знайдемо частинну похідну за аргументом d:

$$\Delta'_d = -4b^3 + 18abc - 54a^2d$$

Тоді умову $27a^2d \equiv 9abc - 2b^3 \pmod{p^3}$ після множення на 2 можна записати таким чином:

$$\Delta'_d \equiv 0 \pmod{p^3}$$

1.3.2. Випадок, коли $p = 3$.

. Третє рівняння системи спроститься до вигляду

$$bt \equiv 0 \pmod 3$$

Припустимо, що $3 \nmid b$. Тоді система може має єдиний розв'язок $t \equiv 0 \pmod 3$. Якщо піднятися до $\pmod 9$, то в нас існують три опції:

$$t \equiv 0 \pmod 9, \qquad t \equiv 3 \pmod 9, \qquad t \equiv 6 \pmod 9$$

Якщо $t \equiv 0 \pmod 9$, то із другого рівняння випливає, що $3 \equiv 0 \pmod 9$, що неможливо. Якщо $t \equiv 3 \pmod 9$, то із першого рівняння випливає, що

$$3b \equiv 8 \pmod 9$$

Оскільки $\gcd(3, 9) = 3 \nmid 8$, то розв'язків не має – неможливо. Нарешті, якщо $t \equiv 6 \pmod 9$, то із першого рівняння випливає, що

$$6b \equiv 8 \pmod 9$$

Аналогічними міркуваннями розв'язків нема – неможливо.

Лема 1.9. *Система конгруентних рівнянь* (1.5) *не має розв'язків при* $3 \nmid b$.

Надалі розглядається випадок $3 \mid b$. Третє рівняння автоматично виконується, тому залишається система

$$\begin{cases} a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 & \equiv 0 \pmod{27} \\ act^2 + 2bt + 3 & \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}. \tag{1.5}$$

Тимчасово опустимося до системи рівнянь за $\pmod 3$. Зважаючи на умову $3 \mid b$, маємо

$$\begin{cases} a^2dt^3 + act^2 + 1 & \equiv 0 \pmod{3} \\ act^2 & \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}.$$

Припустимо, що $3 \nmid ac$. Тоді із другого рівняння отримуємо $t \equiv 0 \pmod 3$. Але, підставляючи в перше рівняння, матимемо $1 \equiv 0 \pmod 3$, що неможливо.

Отже, надалі $3 \mid ac$. Звідси ми маємо $3 \mid a$ або $3 \mid c$.

Якщо $3 \mid a$, то знову $1 \equiv 0 \pmod 3$ із першого рівняння, що неможливо.

Лема 1.10. *Система конгруентних рівнянь* (1.5) *не має розв'язків при* $3 \nmid ac$ *або* $3 \mid a$.

Отже, залишається випадок, коли $3 \mid c$. Значить, перше рівняння дає

$$a^2dt^3 \equiv 2 \pmod 3$$

Зауважимо, що розв'язок існує при $3 \nmid a^2d$.

Наслідок 1.11. *Система конгруентних рівнянь* (1.5) *не має розв'язків при* $3 \mid d$.

У нас існують два варіанти за $\pmod 3$: $a^2d \in \{1, 2\}$.

Нехай $a^2d \equiv 1 \pmod 3$, тоді маємо $t^3 \equiv 2 \pmod 3$, внаслідок чого отримуємо $t \equiv 2 \pmod 3$ – єдиний кандидат на розв'язок системи (1.5) з урахуванням певних умов.

Нехай $a^2d \equiv 2 \pmod 3$, тоді маємо $2t^3 \equiv 2 \pmod 3$, внаслідок чого отримуємо $t \equiv 1 \pmod 3$ – також єдиний кандидат.

Умову $a^2d \equiv 1 \pmod 3$ можна трошки детально розписати. Уже відомо, що $3 \nmid d$, а тому звідси $d \in \{1, 2\}$, якщо брати за $\pmod 3$. Якщо $d = 2$, то звідси $2a^2 \equiv 1 \pmod 3$, або $a^2 \equiv 2 \pmod 3$. Проте зазначимо, що 2 не є квадратичним лишком $\pmod 3$, тому розв'язків відносно a не має. Водночас якщо $d = 1$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, де існує розв'язок.

Аналогічними міркуваннями розглянемо $a^2d \equiv 2 \pmod 3$. Цього разу при $d = 1$ не знайдеться розв'язку відносно a, коли водночас при $d = 2$ розв'язок існує.

Підіб'ємо певний підсумок:

Твердження 1.12. *Нехай $3 \nmid a$, $3 \mid b$, $3 \mid c$. Тоді із системи рівнянь (1.5) випливають можливі розв'язки:*

1. *$t \equiv 2 \pmod 3$ за умовою, що $d \equiv 1 \pmod 3$;*
2. *$t \equiv 1 \pmod 3$ за умовою, що $d \equiv 2 \pmod 3$.*

Маючи накладені умови з твердження, перевіримо, чи будуть вищезгадані t дійсно розв'язками системи.

Випадок $t \equiv 2 \pmod 3$. Отже, в цьому випадку $a^2d \equiv 1 \pmod 3$.

Спочатку піднімемося до $\pmod 9$. Тоді маємо три потенційних кандидати: $t \in \{2, 5, 8\}$.

Нехай $t \equiv 2 \pmod 9$. Маємо наступне:

$$\begin{cases} 8a^2d + 4ac + 2b + 1 & \equiv 0 \pmod{27} \\ 4ac + 4b + 3 & \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}.$$

Оскільки $a^2d \equiv 1 \pmod 3$, то звідси за $\pmod 9$ маємо $a^2d \in \{1, 4, 7\}$. Якщо систему рівнянь спустити до $\pmod 9$, отримуємо три варіанти

$$\begin{cases} 8 + 4ac + 2b + 1 & \equiv 0 \pmod 9 \\ 4ac + 4b + 3 & \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 + 4ac + 2b + 1 & \equiv 0 \pmod 9 \\ 4ac + 4b + 3 & \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 49 + 4ac + 2b + 1 & \equiv 0 \pmod 9 \\ 4ac + 4b + 3 & \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}.$$

Розглянемо першу систему. Ми отримуємо $4ac \equiv -2b \pmod 9$. Значить, звідси

$$4ac + 4b + 3 \equiv 2b + 3 \equiv 0 \pmod 9$$

Останнє можливе лише при $b \equiv 3 \pmod 9$. Також маємо $4ac \equiv -6 \equiv 3 \pmod 9$.

Розділ 2

Назва розділу

2.1. Назва секції

Висновки

У роботі ??????

Список використаних джерел

1. Бойко В.М., Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, Дис. … док. фіз.-мат. наук, Інституту математики НАН України, Київ, 2018, 338 с., https://www.imath.kiev.ua/~boyko/BoykoThesis.pdf.
2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139.
3. Maple 17, https://www.maplesoft.com/products/Maple/.
4. Olver P.J., Equivalence, invariants, and symmetry, Cambridge, University Press Cambridge, 1995, xvi+525 pp., https://doi.org/10.1017/CBO9780511609565.
5. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.V., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A* **36** (2003), no. 26, 7337–7360, https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/26/309; math-ph/0301029.

Додаток А

Назва додатку

А.1. Назва секції додатку