

Національна академія наук України
Міністерство освіти і науки України
Державна наукова установа «Київський академічний університет»

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри математики,
доктор фіз.-мат. наук
Вячеслав БОЙКО
«___» травня 2025 р.

Лобанов Денис Артемович

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Спеціальність 111 «Математика»

**Тема: «Опис кубічних кілець зі скінченим числом
незвідних зображень»**

Засвідчую, що кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ Д.А. ЛОБАНОВ

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
Дрозд Юрій Анатолійович

Київ — 2025

Анотація

Лобанов Д.А., Опис кубічних кілець зі скінченим числом незвідних зображень, Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «магістр» за спеціальністю 111 Математика, Київський академічний університет, Київ, 2025, ?? с., ?? джерел.

???Текст анотації???

MSC: ???????

Ключові слова: ???????

Abstract

LastName N.S., ?????????, Master Thesis, speciality 111 Mathematics. – Kyiv Academic University, Kyiv, 2025, ?? pages, ?? references.

??????

MCS: ???????

Key words: ???????

Зміст

Перелік умовних позначень	5
Вступ	6
Розділ 1	
Максимальне кубічне кільце	7
1.1. Попередні відомості про кубічні кільця	7
1.2. Критерій максимальності кільця	8
1.3. Розв’язання системи конгруентних рівнянь	10
Розділ 2	
Назва розділу	14
2.1. Назва секції	14
Висновки	15
Список використаних джерел	16
Додаток А	
Назва додатку	17
А.1. Назва секції додатку	17

Перелік умовних позначень

\mathbb{Z}	кільце цілих чисел
Λ	кубічне кільце
f	кубічна форма (індекс-форма) кільця
Δ	дискримінант кубічної форми
G	група Лі
\mathfrak{g}	алгебра Лі
Q	оператор однопараметричної групи Лі
\mathbb{R}^n	n -вимірний евклідів простір
$X \simeq \mathbb{R}^n$	простір незалежних змінних $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$
$U \simeq \mathbb{R}^m$	простір залежних змінних $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$
$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$	частинна похідна від залежної змінної u^α за незалежною змінною x^i
D_i	оператор повної похідної за змінною x^i
Q_r	r -те продовження оператора Q
I	набір інваріантів нульового порядку
$I_{(r)}$	набір інваріантів r -го порядку, $r \geq 1$

Вступ

?????????? [1, 2, 5]

Розділ 1

Максимальне кубічне кільце

1.1. Попередні відомості про кубічні кільця

Необхідно пригадати важливі означення та результати.

Означення 1.1. Кубічним кільцем Λ називають вільний \mathbb{Z} -модулем рангу 3.

Зауваження 1.2. Розглянемо базис $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$ кубічного кільця Λ . Тоді ми можемо завжди обрати базис так, щоб перший елемент був 1. Тому надалі обираємо базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$.

Означення 1.3. Базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ кубічного кільця Λ називається **нормальним**, якщо

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathbb{Z}$$

Зауваження 1.4. Зафіксуємо базис $\{1, \omega_1, \omega_2\}$ кільця Λ . Тоді $\omega_1 \cdot \omega_2 = k\omega_1 + l\omega_2 + t$ при $k, l, t \in \mathbb{Z}$. Замінивши ω_1 на $\omega_1 - l$ та ω_2 на $\omega_2 - k$, отримуємо нормальний базис $\{1, \omega_1 - l, \omega_2 - k\}$. Отже, надалі всі базиси в кубічних кільцях – нормальні.

Запишемо таблицю множення для базиса $\{1, \omega_1, \omega_2\}$:

$$\omega_1^2 = b\omega_1 + a\omega_2 + r$$

$$\omega_1\omega_2 = s$$

$$\omega_2^2 = d\omega_1 + c\omega_2 + t$$

Прирівнявши $(\omega_1^2) \cdot \omega_2 = \omega_1 \cdot (\omega_1 \cdot \omega_2)$ та $\omega_1 \cdot (\omega_2^2) = (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega$, отримуємо співвідношення $r = -ac$, $s = ad$, $t = -bd$. Отже, таблиця множення задається чотирма числами $a, b, c, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= b\omega_1 + a\omega_2 - ac \\ \omega_1\omega_2 &= ad \\ \omega_2^2 &= d\omega_1 + c\omega_2 + -bd\end{aligned}$$

1.2. Критерій максимальності кільця

Теорема 1.5. *Кільце Λ – не максимальне \iff існує такий цілий елемент θ , що $\theta \notin \Lambda$.*

Варто відповісти на питання, що означає, що θ – цілий елемент. Розглянемо оператор множення на θ (тобто $\lambda \mapsto \theta\lambda$). Запишемо матрицю $[\theta]$ оператора множення. Розглянемо характеристичний многочлен $\chi_{[\theta]}(t)$ даної матриці. Тоді θ називають **цілим**, якщо коефіцієнти характеристичного многочлен χ – цілі числа.

Нагадаємо, що для випадку матриці 3×3 характеристичний многочлен має вигляд

$$\chi_{[\theta]}(t) = \det[\theta] - M_{2 \times 2}[\theta] \cdot t + \text{tr}[\theta]t^2 - t^3,$$

де

$$M_{2 \times 2}[\theta] = M_{12}^{12}[\theta] + M_{13}^{13}[\theta] + M_{23}^{23}[\theta]$$

Розглянемо випадок, коли $\theta = \frac{\alpha + \beta\omega_1}{p}$. Знайдемо матрицю $[\theta]$ оператора множення в базисі $\{1, \omega_1, \omega_2\}$.

$$\theta \cdot 1 = \frac{\alpha + \beta\omega_1 p}{p} = \frac{\alpha}{p} \cdot 1 + \frac{\beta}{p}\omega_1 + 0 \cdot \omega_2$$

$$\theta \cdot \omega_1 = \frac{\alpha + \beta\omega_1}{p} \cdot \omega_1 = \frac{\alpha\omega_1}{p} + \frac{\beta(-ac + b\omega_1 + a\omega_2)}{p} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\beta ac}{p} \cdot 1 + \frac{\alpha + \beta b}{p} \cdot \omega_1 + \frac{\beta a}{p} \cdot \omega_2 \\
\theta \cdot \omega_2 &= \frac{\alpha + \beta \omega_1}{p} \cdot \omega_2 = \frac{\alpha \omega_2 + \beta ad}{p} = \frac{\beta ad}{p} \cdot 1 + 0 \cdot \omega_1 + \frac{\alpha}{p} \cdot \omega_2
\end{aligned}$$

Зібравши всі коефіцієнти, отримуємо такий вигляд матриці:

$$[\theta] = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta ac & \beta ad \\ \beta & \alpha + \beta b & 0 \\ 0 & \beta a & \alpha \end{pmatrix}$$

Оскільки наша мета – це θ бути цілим, треба вимагати, щоб характеристичний многочлен мав цілі коефіцієнти. Зокрема необхідно розглянути $\text{tr}[\theta]$, $\det[\theta]$, а також $M_{2 \times 2}[\theta]$.

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\theta] &= \frac{1}{p}(3\alpha + \beta b) \\
\det[\theta] &= \frac{1}{p^3}(\alpha^3 + \alpha^2 \beta b + \beta^3 a^2 d + \alpha \beta^2 ac)
\end{aligned}$$

Детальніше розпишемо знаходження $M_{2 \times 2}[\theta]$. Маємо

$$\begin{aligned}
M_{2 \times 2}[\theta] &= M_{12}^{12}[\theta] + M_{13}^{13}[\theta] + M_{23}^{23}[\theta] = \\
&= \frac{1}{p^2} \det \begin{pmatrix} \alpha & -\beta ac \\ \beta & \alpha + \beta b \end{pmatrix} + \frac{1}{p^2} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta a \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{p^2} \det \begin{pmatrix} \alpha + \beta b & 0 \\ \beta a & \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{p^2}(\alpha^2 + \alpha \beta b + \beta^2 ac + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha \beta b) = \\
&= \frac{1}{p^2}(3\alpha^2 + \beta^2 ac + 2\alpha \beta b)
\end{aligned}$$

Наша вимога – це $\text{tr}[\theta]$, $\det[\theta]$, $M_{2 \times 2}[\theta] \in \mathbb{Z}$. Запишемо умову в термінах конгруентних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha^2 \beta b + \beta^3 a^2 d + \alpha \beta^2 ac & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ 3\alpha^2 + \beta^2 ac + 2\alpha \beta b & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3\alpha + \beta b & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \quad (1.1)$$

Припускаючи, що p – просте число та $\alpha \neq 0$, ми можемо підібрати елемент α^{-1} – оборотний елемент класу лишків \mathbb{Z}_p відносно множення. Третє, друге, перше рівняння домножуємо на відповідно α^{-1} , α^{-2} , α^{-3} – отримуємо наступне:

$$\begin{cases} 1 + (\beta\alpha^{-1})b + (\beta\alpha^{-1})^3a^2d + (\beta\alpha^{-1})^2ac & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ 3 + ((\beta\alpha^{-1})^2ac + 2(\beta\alpha^{-1})b & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3 + (\beta\alpha^{-1})b & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} .$$

Проведемо заміну:

$$t = \beta\alpha^{-1} \tag{1.2}$$

Задача звелась до розв'язання системи конгруентних рівнянь відносно t , якщо p – просте число:

$$\begin{cases} a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 & \equiv 0 \pmod{p^3} \\ act^2 + 2bt + 3 & \equiv 0 \pmod{p^2} \\ 3 + bt & \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} . \tag{1.3}$$

1.3. Розв'язання системи конгруентних рівнянь

Розглянемо випадок, коли просте число $p > 3$. Маємо рівняння

$$bt \equiv p - 3 \pmod{p}.$$

Дане рівняння має розв'язок $\iff \gcd(b, p) \mid p - 3$. Оскільки p – просте, то $\gcd(b, p) \in \{1, p\}$. Якби $\gcd(b, p) = p$, то отримали би $p \mid p - 3$ – неможливо.

Отже, якщо $p \nmid b$, то вищезгадане рівняння має розв'язок. При цьому оскільки $\gcd(b, p) = 1$, то рівняння має лише єдиний розв'язок вигляду

$$t \equiv -3b^{-1} \pmod{p}$$

Єдиний можливий розв'язок необхідно підставити в інші два рівняння системи. Для початку підніmemo розв'язок до $(\text{mod } p^2)$ – отримуємо наступне:

$$t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2},$$

де $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Щойно отримане t підставимо в друге рівняння:

$$\begin{aligned} act^2 + 2bt + 3 &\equiv ac(-3b^{-1} + kp)^2 + 2b(-3b^{-1} + kp) + 3 \\ &\equiv ac(k^2p^2 - 6kpb^{-1} + 9b^{-2}) + 2b(kp - 3b^{-1}) + 3 \\ &\equiv -6kpacb^{-1} + 9acb^{-2} + 2bkp - 3 \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Домножимо обидві частини на b^2 – отримуємо:

$$\begin{aligned} -6kpacb + 9ac + 2b^3kp - 3b^2 &\equiv 2bkp(b^2 - 3ac) - 3(b^2 - 3ac) \\ &\equiv (b^2 - 3ac)(2bkp - 1) \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\gcd(2bkp - 1, p^2) = 1$, тому можемо скоротити рівняння:

$$b^2 - 3ac \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Отже, якщо $p \nmid b$, а також $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$, то наш єдиний розв'язок задовольняє систему із останніх двох рівнянь. Причому $t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2}$ не залежить від параметру k .

Зробимо аналогічно для першого рівняння системи, тільки замість $(\text{mod } p^3)$ розглядається $(\text{mod } p^2)$ – маємо:

$$\begin{aligned} a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 &\equiv a^2d(-3b^{-1} + kp)^3 + ac(-3b^{-1} + kp)^2 + b(-3b^{-1} + kp) + 1 \\ &\equiv a^2d(-27b^{-3} + 27kpb^{-2}) + ac(9b^{-2} - 6b^{-1}kp) + b(-3b^{-1} + kp) + 1 \\ &\equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Домножимо обидві частини рівності на p^{-3} – із урахуванням рівності $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
& a^2d(-27 + 27kpb) + ac(9b - 6b^2kp) + b^4(-3b^{-1} + kp) + b^3 \\
& \equiv -27a^2d + 27a^2bdkp + 9abc - 6ab^2ckp - 3b^3 + b^4kp + b^3 \\
& \equiv -27a^2d + 27a^2bdkp + 3b^3 - 2b^4kp - 3b^3 + b^4kp + b^3 \\
& \equiv -27a^2d(1-bkp) + b^3(1-bkp) \equiv (1-bkp)(b^3 - 27a^2d) \equiv 0 \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\gcd(1 - bkp, p^2) = 1$, тому можемо скоротити рівняння:

$$b^3 - 27a^2d \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Нарешті, розглянемо перше рівняння:

$$a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 \equiv 0 \pmod{p^3}$$

Оскільки $t \equiv -3b^{-1} + kp \pmod{p^2}$ буде розв'язком системи останніх двох рівнянь при вищезгаданих умов, причому нема залежності від k , то для спрощення оберемо $t \equiv -3b^{-1} \pmod{p^2}$. Підніmemo це рівняння до $\pmod{p^3}$ – отримуємо наступне:

$$t \equiv -3b^{-1} + lp^2 \pmod{p^2},$$

де $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Щойно отримане t підставимо в перше рівняння:

$$\begin{aligned}
& a^2dt^3 + act^2 + bt + 1 \\
& \equiv a^2d(-3b^{-1} + lp^2)^3 + ac(-3b^{-1} + lp^2)^2 + b(-3b^{-1} + lp^2) + 1 \\
& \equiv a^2d(-27b^{-3} + 27b^{-2}lp^2) + ac(9b^{-2} - 6lb^{-1}p^2) + b(-3b^{-1} + lp^2) + 1 \\
& \equiv 0 \pmod{p^3}
\end{aligned}$$

Домножимо обидві частини рівності на b^3 – отримуємо:

$$\begin{aligned}
& a^2d(-27 + 27blp^2) + ac(9b - 6lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\
& \equiv 0 \pmod{p^3}
\end{aligned}$$

Пригадаємо, що необхідно $b^2 \equiv ac \pmod{p^2}$, а також $27a^2d \equiv b^3 \pmod{p^2}$. Підмінаючи до $\pmod{p^3}$, отримуємо:

$$3ac \equiv b^2 + \xi p^2 \pmod{p^3}$$

$$27a^2d \equiv b^3 + \eta p^2 \pmod{p^3},$$

де $\xi, \eta \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Внаслідок чого

$$\begin{aligned} & 27a^2d(-1 + blp^2) + 3ac(3b - 2lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\ & \equiv (b^3 + \eta p^2)(-1 + blp^2) + (b^2 + \xi p^2)(3b - 2lb^2p^2) + (-3b^3 + lp^2b^4) + b^3 \\ & \equiv -b^3 + b^4lp^2 - \eta p^2 + 3b^3 - 2b^4lp^2 + 3\xi p^2b - 3b^3 + b^4lp^2 + b^3 \\ & \equiv -\eta p^2 + 3\xi p^2b \equiv 0 \pmod{p^3} \end{aligned}$$

Отже, ми отримали наступне:

$$\eta p^2 \equiv 3\xi p^2b \pmod{p^3}$$

Тоді зауважимо, що

$$27a^2d \equiv b^3 + \eta p^2 \equiv b^3 + 3\xi p^2b \equiv b^3 + 3b(3ac - b^2) \equiv -2b^3 + 9abc \pmod{p^3}$$

Підсумуємо:

Лема 1.6. *Нехай $p > 3$ – просте число. Відомо, що $p \nmid b$, $b^2 \equiv 3ac \pmod{p^2}$, а також $27a^2d \equiv 9abc - 2b^3 \pmod{p^3}$. Тоді система конгруентних рівнянь (1.3) має єдиний розв’язок $t \equiv -3b^{-1} \pmod{p^3}$.*

Пригадаємо, що кубічному кільцю відповідає кубічна форма, дискримінант якої обчислюється за формулою

$$\Delta = b^2c^2 - 4c^3a - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2 \tag{1.4}$$

Сприймаючи дискримінант за функцію від чотирьох змінних, знайдемо частинну похідну за аргументом d :

$$\Delta'_d = -4b^3 + 18abc - 54a^2d$$

Тоді умову $27a^2d \equiv 9abc - 2b^3 \pmod{p^3}$ після множення на 2 можна записати таким чином:

$$\Delta'_d \equiv 0 \pmod{p^3}$$

Розділ 2

Назва розділу

2.1. Назва секції

Висновки

У роботі ??????

Список використаних джерел

1. Бойко В.М., Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, Дис. ... док. фіз.-мат. наук, Інституту математики НАН України, Київ, 2018, 338 с., <https://www.imath.kiev.ua/~boyko/BoykoThesis.pdf>.
2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, [arXiv:2105.05139](https://arxiv.org/abs/2105.05139).
3. Maple 17, <https://www.maplesoft.com/products/Maple/>.
4. Olver P.J., Equivalence, invariants, and symmetry, Cambridge, University Press Cambridge, 1995, xvi+525 pp., <https://doi.org/10.1017/CB09780511609565>.
5. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.V., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A* **36** (2003), no. 26, 7337–7360, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/26/309>; [math-ph/0301029](https://arxiv.org/abs/math-ph/0301029).

Додаток А

Назва додатку

А.1. Назва секції додатку